ΦΥΣΙΚΗ III

ΗΛΕΚΤΡΙΚΗ ΧΩΡΗΤΙΚΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΥΚΝΩΤΕΣ

2021 — 2022

Ηλεκτρική χωρητικότητα

Ένας απομονωμένος αγωγός με συνολικό φορτίο Q έχει δυναμικό V_0 (σε σχέση με το V=0 στο άπειρο), σταθερό σε όλο του τον όγκο, διαφορετικά τα φορτία θα μετακινούνταν μέχρι όλες οι τοπικές διαφορές δυναμικού να μηδενιστούν (διαφορά δυναμικού συνεπάγεται ηλεκτρικό πεδίο).

Το φορτίο Q είναι ανάλογο του δυναμικού V_0, με μια σταθερή αναλογίας που εξαρτάται μόνο από το μέγεθος και το σχήμα του αγωγού:

$$Q = CV_0$$

Η σταθερή C είναι χαρακτηριστική ιδιότητα του αγωγού και ονομάζεται **χωρητικότητα του αγωγού**, με μονάδα στο SI το farad:

$$1\ \mathrm{F} = 1\ \mathrm{farad} = 1\ \frac{\mathrm{coulomb}}{\mathrm{volt}} = 1\ \frac{\mathrm{C}}{\mathrm{J/C}} = 1\ \frac{\mathrm{C}^2 \cdot \mathrm{s}^2}{\mathrm{kg} \cdot \mathrm{m}^2}$$

Παραδείγματα: $V_0 = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow C = 4\pi\varepsilon_0 a$ Χωρητικότητα ομογενούς σφαίρας ακτίνας a.

$V_0 = \dfrac{Q}{2\pi\varepsilon_0 a} \Rightarrow C = 2\pi\varepsilon_0 a$ Χωρητικότητα ομογενούς δίσκου ακτίνας a.

- Η χωρητικότητα περιλαμβάνει πάντα έναν παράγοντα ε_0 και ένα μήκος ($\Rightarrow$ η διάσταση του ε_0 είναι F/m), άρα για δεδομένο σχήμα αγωγού είναι ανάλογη του μεγέθους του.
- Το farad είναι πολύ μεγάλη μονάδα: η χωρητικότητα μιας σφαίρας μεγέθους της Γης είναι 7×10^{-4} F. Συνήθως χρησιμοποιείται το pF=10^{-12} F.

Η χωρητικότητα ως χαρακτηριστική ιδιότητα του αγωγού

Ο ορισμός της χωρητικότητας δεν εγγυάται ότι αυτή είναι σταθερή για έναν οποιονδήποτε αγωγό. Μπορούμε να δείξουμε ότι το φορτίο Q και το δυναμικό V είναι ανάλογα για αγωγό οποιουδήποτε μεγέθους και σχήματος και συνεπώς η χωρητικότητα C εξαρτάται μόνο από τη γεωμετρία του.

Από το θεώρημα μοναδικότητας γνωρίζουμε ότι υπάρχει μόνο μία κατανομή φορτίου στην επιφάνεια του αγωγού που μπορεί να δημιουργήσει το δεδομένο δυναμικό. Θεωρώντας τον αγωγό σε δύο διαφορετικά δυναμικά V_1 και V_2, παραγόμενα από δύο διαφορετικές επιφανειακές πυκνότητες φορτίου σ_1 και σ_2, οι σχέσεις τους θα είναι:

$$V_1 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_1 dS}{r} \qquad\qquad V_2 = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_2 dS}{r}$$

όπου τα ολοκληρώματα εκτείνονται πάνω σε όλη την επιφάνεια S του αγωγού.

Θέτοντας $V_2/V_1=n$:

$$V_2 = nV_1 = \frac{n}{4\pi\varepsilon_0}\oint_S \frac{\sigma_1 dS}{r}$$

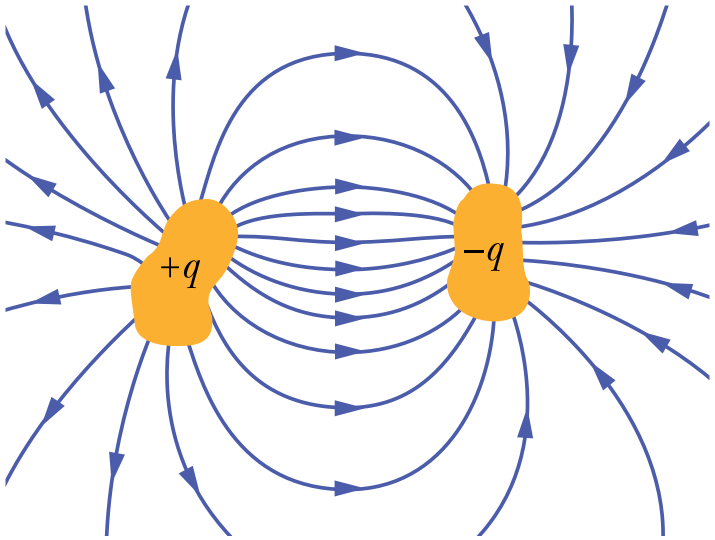
δηλαδή το V_2 δημιουργείται από τις κατανομές φορτίου σ_2 και $n\sigma_1$, οπότε το θεώρημα μοναδικότητας δίνει $\sigma_2=n\sigma_1$. Άρα, για τα φορτία του αγωγού στις δύο περιπτώσεις ισχύει:

$$Q_2 = \oint_S \sigma_2 dS = n\oint_S \sigma_1 dS = nQ_1 \quad\Rightarrow\quad \frac{Q_2}{Q_1} = n = \frac{V_2}{V_1}$$

δηλαδή το φορτίο Q και το δυναμικό V είναι ανάλογα. Συνεπώς η χωρητικότητα $C=Q/V$ είναι μια σταθερή του αγωγού.

Πυκνωτές

Ένα ζεύγος αγωγών φορτισμένων με αντίθετα φορτία ίδιου μέτρου q ονομάζεται **πυκνωτής**. Σε αυτή την περίπτωση, η χωρητικότητα του πυκνωτή ορίζεται από τη σχέση:



$$C = \frac{q}{\Delta V}$$ ή απλά $$C = \frac{q}{V}$$ συμβολίζοντας με V τη διαφορά δυναμικού ΔV των δύο αγωγών.

Η χωρητικότητα C είναι τώρα χαρακτηριστική ιδιότητα της γεωμετρίας του συστήματος, δηλαδή του σχήματος και μεγέθους των δύο αγωγών και της σχετικής τους απόστασης.

Για τον υπολογισμό της C, υπολογίζουμε πρώτα το φορτίο q εφαρμόζοντας το νόμο του Gauss σε μια επιφάνεια που περικλείει τον θετικά φορτισμένο αγωγό και είναι κάθετη στο πεδίο εκεί που αυτό γίνεται ομογενές:

$$q = \varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \varepsilon_0 E A$$

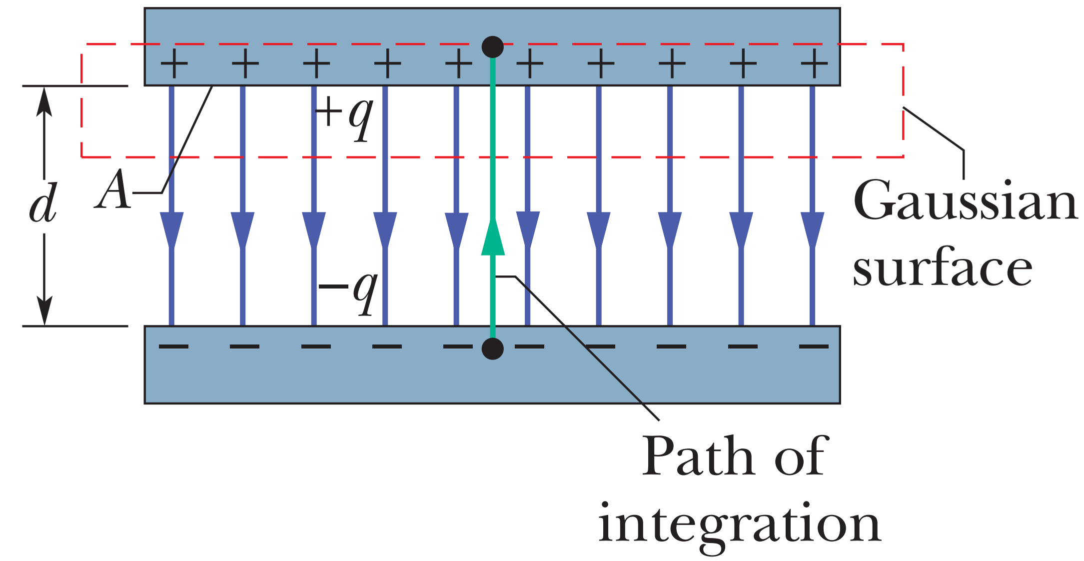
και στη συνέχεια τη διαφορά δυναμικού από το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής του πεδίου, όπου τα διανύσματα $\mathbf{E}$ και $d\mathbf{s}$ είναι αντιπαράλληλα, από τον αρνητικά στον θετικά φορτισμένο αγωγό:

$$V \equiv V_f - V_i = -\int_i^f \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = \int_-^+ E ds$$

Παραδείγματα πυκνωτών:
παράλληλες πλάκες, κυλινδρικοί, σφαιρικοί

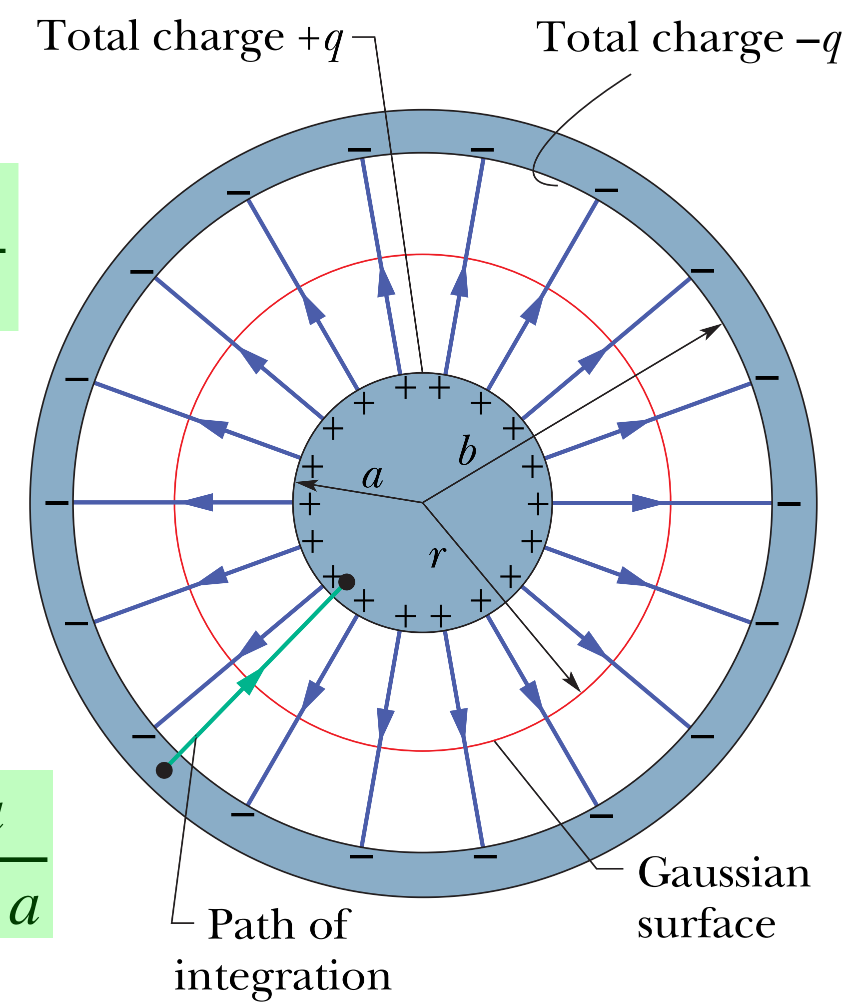
Στον πυκνωτή παράλληλων πλακών το πεδίο μεταξύ των πλακών είναι ομογενές:

$$\left.\begin{aligned} q &= \varepsilon_0 E A \\ V &= \int_-^+ E ds = E\int_-^+ ds = Ed \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{C = \frac{\varepsilon_0 A}{d}}$$



Στον κυλινδρικό πυκνωτή το πεδίο είναι ακτινικό ως προς τον άξονα του πυκνωτή:

$$\left.\begin{aligned} q &= \varepsilon_0 E A = \varepsilon_0 E(2\pi r L) \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L r} \\ V &= \int_-^+ E ds = -\frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\int_b^a \frac{dr}{r} = \frac{q}{2\pi\varepsilon_0 L}\ln\frac{b}{a} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{C = \frac{2\pi\varepsilon_0 L}{\ln(b/a)}}$$

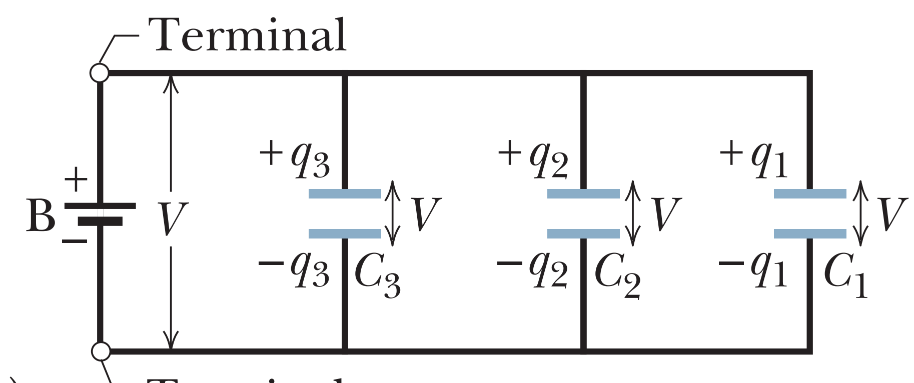


Στον σφαιρικό πυκνωτή το πεδίο είναι ακτινικό ως προς το κέντρο του πυκνωτή:

$$\left.\begin{aligned} q &= \varepsilon_0 E A = \varepsilon_0 E(4\pi r^2) \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ V &= \int_-^+ E ds = -\frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{dr}{r^2} = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0}\frac{b-a}{ab} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{C = 4\pi\varepsilon_0\frac{ba}{b-a}}$$

Πυκνωτές συνδεμένοι παράλληλα

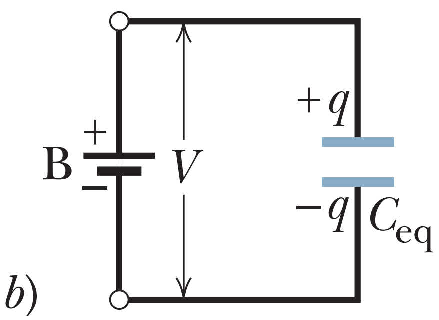
Πυκνωτές με όλα τα θετικά άκρα συνδεμένα μαζί και όλα τα αρνητικά άκρα συνδεμένα μαζί λέγονται συνδεμένοι παράλληλα.



(a)

Parallel capacitors and their equivalent have the same *V* (“par-V”).

Η τάση V που εφαρμόζεται στα άκρα πυκνωτών συνδεμένων παράλληλα είναι η ίδια σε κάθε πυκνωτή. Το συνολικό φορτίο που αποθηκεύεται στη συστοιχία των πυκνωτών είναι το άθροισμα των φορτίων όλων των πυκνωτών.



(b)

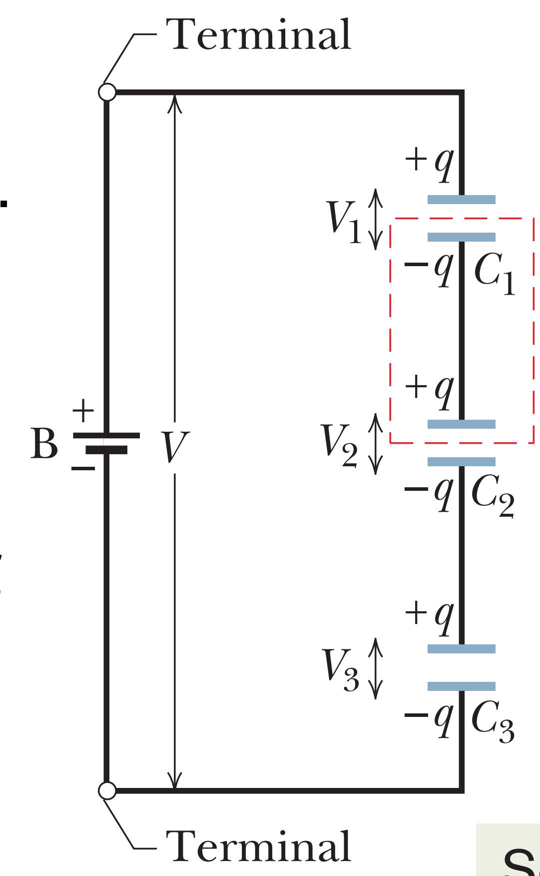
Μια συστοιχία πυκνωτών συνδεμένων παράλληλα μπορεί να παρασταθεί από έναν ισοδύναμο πυκνωτή με το ίδιο συνολικό φορτίο q και την ίδια τάση V της συστοιχίας:

$$\left.\begin{array}{l} q_1 = C_1 V, \quad q_2 = C_2 V, \ \ldots, q_n = C_n V \quad \Rightarrow \quad q = \sum_{i=1}^{n} q_i = V \sum_{i=1}^{n} C_i \\ C_{eq} = \dfrac{q}{V} \end{array}\right\} \Rightarrow \boxed{C_{eq} = \sum_{i=1}^{n} C_i}$$

Πυκνωτές συνδεμένοι σειριακά

Πυκνωτές με το θετικό άκρο του ενός συνδεμένο στο αρνητικό άκρο του άλλου λέγονται συνδεμένοι σε σειρά.

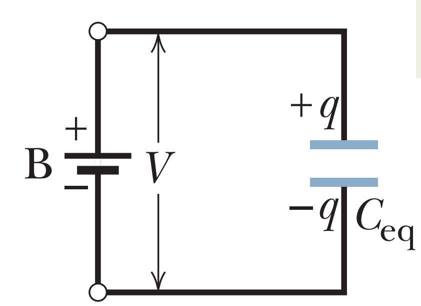
Το φορτίο q που αποθηκεύεται σε κάθε πυκνωτή στη σειρά είναι το ίδιο, ώστε όλα τα φορτία να ισορροπούν. Η συνολική τάση που εφαρμόζεται στα άκρα της σειράς είναι το άθροισμα των τάσεων στα άκρα όλων των πυκνωτών στη σειρά.



(a)

Series capacitors and their equivalent have the same q (“seri-q”).

Μια συστοιχία πυκνωτών συνδεμένων σε σειρά μπορεί να παρασταθεί από έναν ισοδύναμο πυκνωτή με το ίδιο συνολικό φορτίο q και την ίδια συνολική τάση V της σειράς:



(b)

$$V_1 = \frac{q}{C_1}, \quad V_2 = \frac{q}{C_2}, \quad \ldots, \quad V_n = \frac{q}{C_n} \quad \Rightarrow \quad V = \sum_{i=1}^{n} V_i = q \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}$$

$$C_{eq} = \frac{q}{V} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{C_{eq}} = \frac{V}{q}$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{C_{eq}} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{C_i}}$$

Ενέργεια ηλεκτρικού πεδίου

Όταν φορτίζουμε έναν πυκνωτή (ή έναν αγωγό), το έργο που απαιτείται για να αυξηθεί το φορτίο του κατά dq, όταν η τάση στα άκρα του (ή το δυναμικό του αγωγού) είναι ακόμη v και δεν έχει φτάσει στην τελική τιμή V, είναι:

$$dW = vdq = \frac{q}{C}dq$$

Το έργο που απαιτείται για την πλήρη φόρτιση του πυκνωτή με το τελικό φορτίο Q, όταν η τάση στα άκρα του έχει φτάσει στην τελική τιμή V, είναι συνεπώς:

$$W = \int dW = \frac{1}{C}\int_0^Q qdq = \frac{Q^2}{2C}$$

Το έργο αυτό αποθηκεύεται σαν δυναμική ενέργεια στο ηλεκτρικό πεδίο του πυκνωτή (ή του αγωγού):

$$\boxed{U = \frac{1}{2}\frac{Q^2}{C} = \frac{1}{2}CV^2 = \frac{1}{2}QV}$$

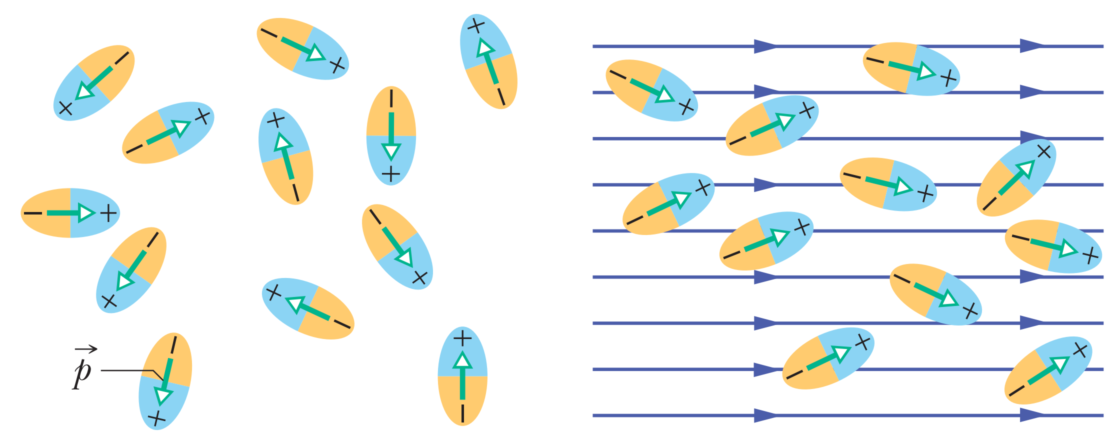
Εφαρμόζοντας τη σχέση $dU = (1/2)dVdQ$ σε μια περιοχή με όγκο $dldS$, όπου το φορτίο δίνεται από το νόμο του Gauss $dQ = \varepsilon_0 EdS$ (παίρνοντας $\mathbf{E}$ // $d\mathbf{l}$ // $d\mathbf{S}$) και η διαφορά δυναμικού είναι $dV = Edl$, βρίσκουμε ότι η πυκνότητα δυναμικής ενέργειας $u = dU/(dldS)$ του στατικού ηλεκτρικού πεδίου $\mathbf{E}$ είναι:

$$\boxed{u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2}$$

Πυκνωτής με διηλεκτρικό

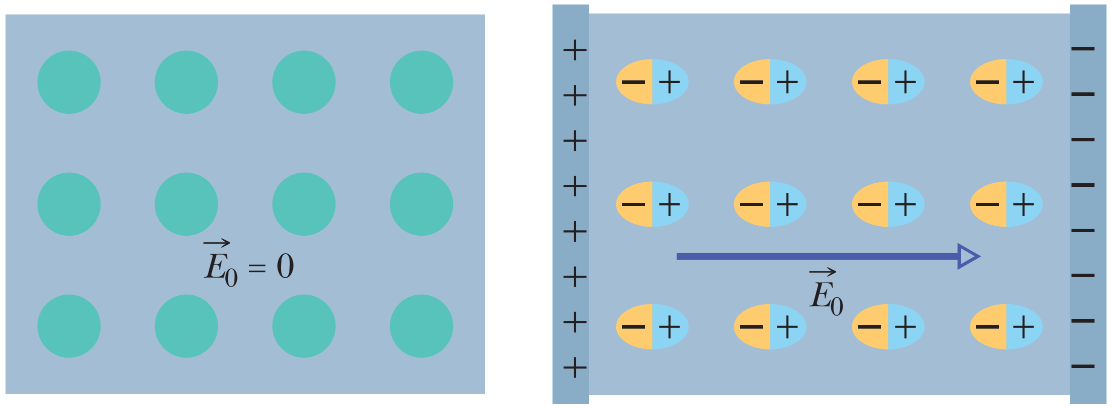
Όταν μονωτικό (διηλεκτρικό) υλικό τοποθετείται σε ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, υπάρχουν δύο δυνατότητες ανάλογα με τη μοριακή δομή του υλικού:

- Αν τα μόρια του υλικού φέρουν μόνιμες διπολικές ροπές (όπως π.χ. στο νερό), το εξωτερικό πεδίο τείνει να τις ευθυγραμμίσει παράλληλα με αυτό. Η μερική κατά μέσο όρο (λόγω θερμικής κίνησης) ευθυγράμμιση των ροπών συνεπάγεται ένα ηλεκτρικό πεδίο αντίθετο στο εξωτερικό πεδίο και μικρότερης έντασης. Το υλικό χαρακτηρίζεται πολικό διηλεκτρικό.



(a) (b)

- Αν τα μόρια του υλικού δεν φέρουν μόνιμες διπολικές ροπές, το εξωτερικό πεδίο δημιουργεί ροπές πολώνοντας τα μόρια. Το αποτέλεσμα είναι το ίδιο: ένα ηλεκτρικό πεδίο αντίθετο στο εξωτερικό πεδίο και μικρότερης έντασης. Το υλικό χαρακτηρίζεται μη πολικό διηλεκτρικό.



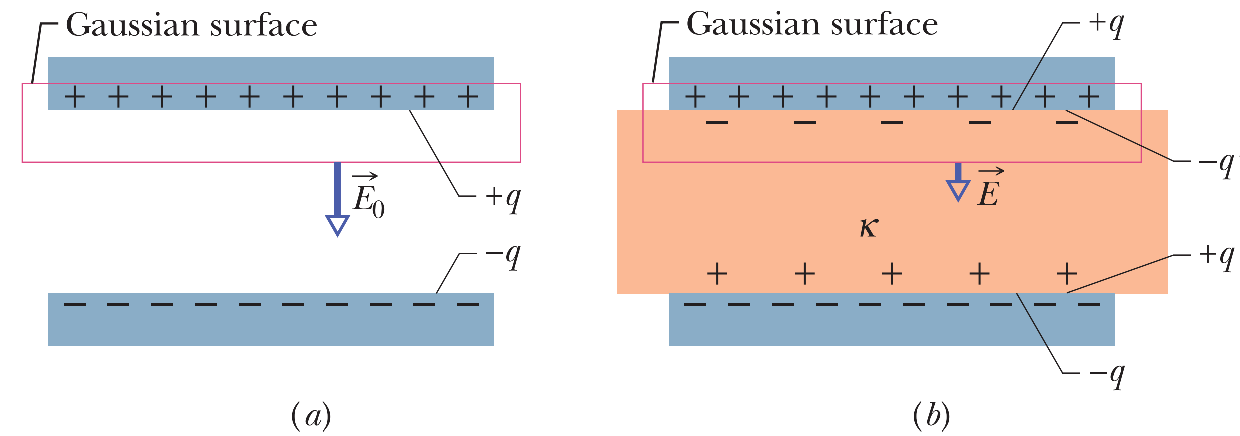
(a) (b)

Σε όλες τις περιπτώσεις, η παρεμβολή διηλετρικού υλικού μεταξύ των άκρων ενός πυκνωτή συνεπάγεται την εξασθένιση του πεδίου, σαν να μειώνεται το φορτίο του πυκνωτή, ή ισοδύναμα σαν να αυξάνεται η ηλεκτρική διαπερατότητα του κενού από ε_0 σε $\varepsilon = \varkappa\varepsilon_0$, όπου ο αδιάστατος συντελεστής $\varkappa$ είναι μια σταθερή του υλικού.

Ο νόμος του Gauss σε διηλεκτρικά υλικά

Για τον πυκνωτή παράλληλων πλακών χωρίς διηλεκτρικό ο νόμος του Gauss δίνει:

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \varepsilon_0 E A = q \quad \Rightarrow \quad E_0 = \frac{q}{\varepsilon_0 A}$$



Όταν ο χώρος μεταξύ των πλακών γεμίζει με διηλεκτρικό, η εφαρμογή του νόμου του Gauss πρέπει να λάβει υπόψη της, εκτός από το ελεύθερο φορτίο q πάνω στην πλάκα του πυκνωτή, και το επαγόμενο φορτίο q' μέσα στο διηλεκτρικό:

$$\varepsilon_0 \oint \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \varepsilon_0 E A = q - q' \quad \Rightarrow \quad E = \frac{q - q'}{\varepsilon_0 A}$$

Το αποτέλεσμα του διηλεκτρικού είναι η εξασθένιση του πεδίου E_0 κατά έναν παράγοντα $\varkappa$.

Επομένως:
$$E = \frac{E_0}{\kappa} = \frac{q}{\kappa \varepsilon_0 A} \quad \Rightarrow \quad q - q' = \frac{q}{\kappa}$$

και ο νόμος του Gauss μπορεί να γραφτεί ως εξής:
$$\oint \kappa \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{q}{\varepsilon_0} \qquad \text{ή} \qquad \oint \mathbf{D} \cdot d\mathbf{A} = q$$

Το διάνυσμα $\mathbf{D}=\varkappa\varepsilon_0\mathbf{E}$ ονομάζεται ηλεκτρική μετατόπιση και αποτελεί γενίκευση της έντασης $\mathbf{E}$ του ηλεκτρικού πεδίου στην περίπτωση της παρουσίας διηλεκτρικών υλικών. Σε αυτή την περίπτωση, σε όλες τις ηλεκτροστατικές εξισώσεις που περιέχουν τη σταθερή ε_0, αυτή πρέπει να αντικατασταθεί από την $\varkappa\varepsilon_0$.