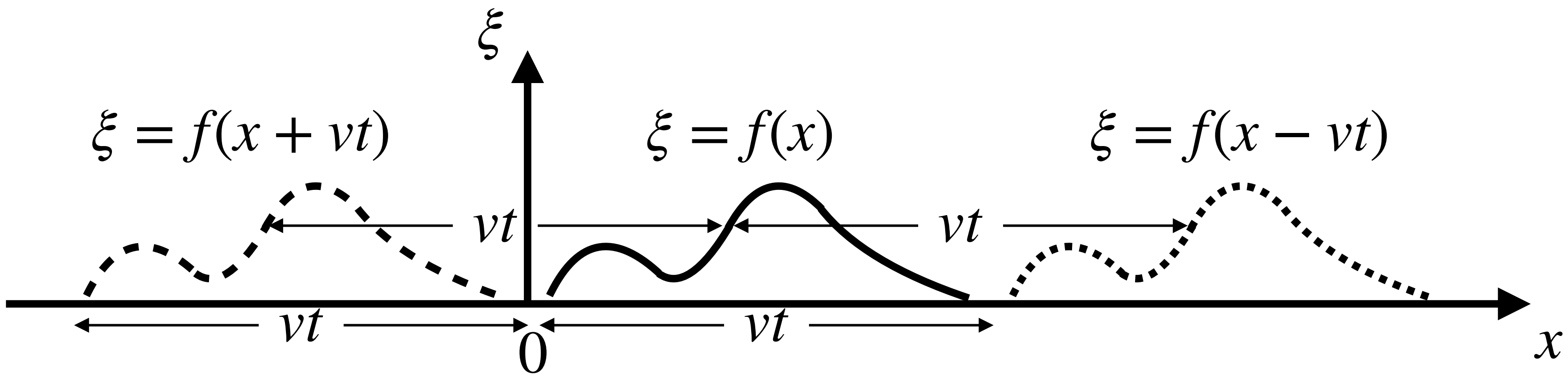
ΦΥΣΙΚΗ III

ΗΛΕΚΤΡΟΜΑΓΝΗΤΙΚΑ ΚΥΜΑΤΑ

2021 — 2022

Κυματική διάδοση



$$\xi = f(u), \qquad u = x \pm \mathrm{v}t \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{c} \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \dfrac{d^2 \xi}{du^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = \mathrm{v}^2 \dfrac{d^2 \xi}{du^2} \end{array} \right\} \quad \Rightarrow \quad \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2} = \frac{1}{\mathrm{v}^2} \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2}$$

Γενική λύση:

$$\xi = f_1(x - \mathrm{v}t) + f_2(x + \mathrm{v}t)$$

Περιοδική ("αρμονική") λύση:

$$\xi = A\cos(x - \mathrm{v}t) + B\sin(x + \mathrm{v}t)$$

$$= A\cos\left[(kx - \omega t)\cdot \lambda/(2\pi)\right] + B\left[\sin(kx + \omega t)\cdot \lambda/(2\pi)\right]$$

$$k = 2\pi/\lambda \qquad\qquad \omega = 2\pi \mathrm{v}/\lambda = 2\pi\nu = 2\pi/T$$

Σε τρεις διαστάσεις παίρνουμε την εξίσωση D' Alembert:

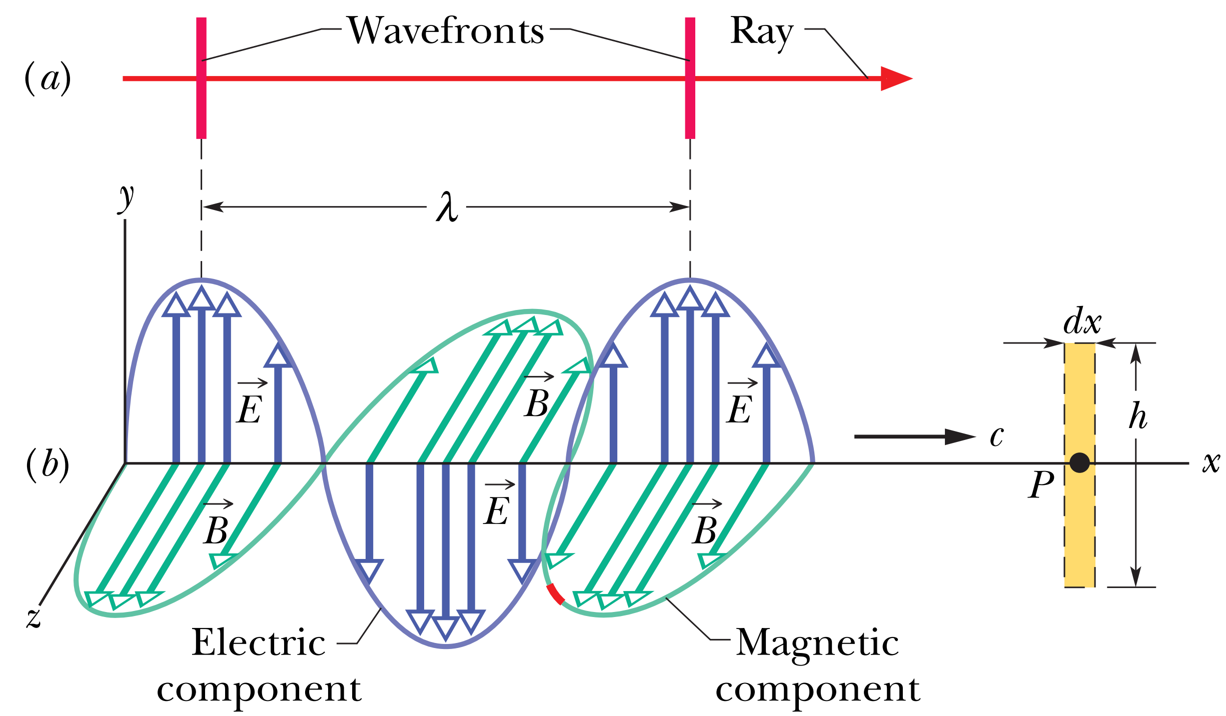
$$\mathbf{u} = \mathbf{r} \pm \mathbf{v}t \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \xi = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} \qquad\qquad \mathbf{a} = \mathbf{f}(\mathbf{u}), \qquad \mathbf{u} = \mathbf{r} \pm \mathbf{v}t \quad \Rightarrow \quad \nabla^2 \mathbf{a} = \frac{1}{\mathrm{v}^2}\frac{\partial^2 \mathbf{a}}{\partial t^2}$$

Μονοχρωματικά ηλεκτρομαγνητικά κύματα στο κενό

$$\mathbf{E} = \hat{\mathbf{y}} E_0 \sin(kx - \omega t)$$

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{z}} B_0 \sin(kx - \omega t)$$

Πεδία κάθετα μεταξύ τους και στη διεύθυνση διάδοσης.



$$\nabla \times \mathbf{E} = \hat{\mathbf{z}} \frac{\partial E_y}{\partial x} = \hat{\mathbf{z}} k E_0 \cos(kx - \omega t) \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = -\hat{\mathbf{y}} \omega E_0 \cos(kx - \omega t) \qquad (2)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = -\hat{\mathbf{y}} \frac{\partial B_z}{\partial x} = -\hat{\mathbf{y}} k B_0 \cos(kx - \omega t) \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\hat{\mathbf{z}} \omega B_0 \cos(kx - \omega t) \qquad (4)$$

$$\left.\begin{array}{ll} (1),\ (4),\ \nabla \times \mathbf{E} = -\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \ \Rightarrow & k E_0 = \omega B_0 \\ (2),\ (3),\ \nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \ \Rightarrow & \mu_0 \varepsilon_0 \omega E_0 = k B_0 \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad \frac{1}{\mu_0 \varepsilon_0} = \left(\frac{\omega}{k}\right)^2 \quad \Rightarrow \quad c^2 = \mathrm{v}^2 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{v} = \pm c \quad \Rightarrow \quad \frac{E_0}{B_0} = c$$

Μεταφορά ενέργειας από Η/Μ κύματα

$$u = \frac{\varepsilon_0}{2}E^2 + \frac{1}{2\mu_0}B^2 = \frac{\varepsilon_0}{2}\mathbf{E}\cdot\mathbf{E} + \frac{1}{2\mu_0}\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}$$

Πυκνότητα ενέργειας Η/Μ πεδίου.

Εφαρμόζοντας τις εξισώσεις Maxwell χωρίς πηγές:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \varepsilon_0 \dfrac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}\cdot\mathbf{E} + \dfrac{1}{\mu_0}\dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot\mathbf{B} = \dfrac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{E} - \dfrac{1}{\mu_0}(\nabla\times\mathbf{E})\cdot\mathbf{B} \\[2em] \nabla\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) = (\nabla\times\mathbf{a})\cdot\mathbf{b} - (\nabla\times\mathbf{b})\cdot\mathbf{a} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} = -\dfrac{1}{\mu_0}\nabla\cdot(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) \\[2em] \mathbf{S} \equiv \dfrac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{\mu_0} \end{array}\right\} \Rightarrow \quad \dfrac{\partial u}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{S} = 0$$

Διάνυσμα Poynting.

Διατήρηση ενέργειας.

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla\cdot\mathbf{j} = 0$$

Διατήρηση ηλεκτρικού φορτίου.

Εξισώσεις “συνέχειας”.

Μεταφορά ορμής και στροφορμής από Η/Μ κύματα

Η μεταφορά ενέργειας από ένα Η/Μ κύμα συνεπάγεται και μεταφορά ορμής:

$$dU = -\mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = -\frac{d\mathbf{p}}{dt}\cdot d\mathbf{r} = -d\mathbf{p}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt} = -\mathbf{v}\cdot d\mathbf{p} = -c\,dp$$

Για επίπεδο Η/Μ κύμα που διαδίδεται στη διεύθυνση z:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = -\nabla\cdot\mathbf{S} \quad\Rightarrow\quad \frac{dU}{dt} = -\int \nabla\cdot\mathbf{S}\,d\tau = -\int_a \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a} \quad\Rightarrow$$

$$dU = -\int_a \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a}\,dt = -\int_a S_z\,dxdydt \quad\Rightarrow\quad c\,dp = \int_a S_z\,dxdydt \quad\Rightarrow\quad c\frac{dz}{dt}\frac{d^3p}{dxdydz} = c^2 g_z = S_z$$

όπου g_z είναι η z-συνιστώσα ενός διανύσματος $\mathbf{g}$ που περιγράφει την πυκνότητα της ορμής η οποία μεταφέρεται από το κύμα. Γενικεύοντας το αποτέλεσμα για τυχαία διεύθυνση διάδοσης, αυτή η πυκνότητα δίνεται από το διάνυσμα Poynting διαιρεμένο με c^2:

$$\boxed{\mathbf{g} = \frac{1}{c^2}\mathbf{S}}$$

Επίσης, η πυκνότητα μεταφερόμενης στροφορμής μπορεί να οριστεί ως εξής:

$$\boxed{\mathbf{l} = \mathbf{r}\times\mathbf{g} = \frac{\mathbf{r}\times\mathbf{S}}{c^2}}$$

Ένταση ακτινοβολίας

Η μέση ισχύς (ενέργεια ανά μονάδα χρόνου) της ακτινοβολίας που προσπίπτει σε μια επιφάνεια εμβαδού A ονομάζεται ένταση της ακτινοβολίας:

$$\boxed{I = \frac{1}{A}\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle}$$

όπου $\langle \ldots \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T \ldots \, dt$ ο χρονικός μέσος σε μια περίοδο T αρμονικού κύματος.

Η ενέργεια επίπεδου Η/Μ κύματος κάθετου σε επίπεδη επιφάνεια εμβαδού A είναι η αντίθετη από αυτή που μεταφέρεται στην επιφάνεια:

$$dU = \int_A \mathbf{S}\cdot d\mathbf{a}dt \quad \Rightarrow \quad \frac{dU}{dt} = SA \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{A}\left\langle \frac{dU}{dt} \right\rangle = \langle S \rangle \quad \Rightarrow \quad I = \frac{\langle EB \rangle}{\mu_0} = \frac{\langle E^2 \rangle}{c\mu_0}$$

$$\langle E^2 \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T E^2(x=0,t)dt = \frac{E_0^2}{T}\int_0^T \sin^2\frac{2\pi t}{T}dt = \frac{E_0^2}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin^2\xi d\xi$$

$$= \frac{E_0^2}{4\pi}\int_0^{2\pi}(1-\cos 2\xi)d\xi = \frac{E_0^2}{4\pi}2\pi = \frac{E_0^2}{2} \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{E_0^2}{2c\mu_0} = \frac{1}{2}c\varepsilon_0 E_0^2}$$

Πίεση ακτινοβολίας

Για ένα κύμα που απορροφάται από την επιφάνεια εμβαδού A ενός σώματος, η ορμή που μεταφέρει στο σώμα είναι ανάλογη της ενέργειας που απορροφάται, $\Delta p = \Delta U / c$, ενώ για ένα κύμα που ανακλάται κάθετα στην επιφάνεια, οπότε το διάνυσμα της ορμής του αντιστρέφεται, η μεταφερόμενη ορμή είναι $\Delta p = 2\Delta U / c$. Επομένως, το κύμα ασκεί μια δύναμη στο σώμα ανάλογη με την ορμή που του μεταφέρει στο χρόνο Δt:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{1}{c}\frac{\Delta U}{\Delta t}$$ Πλήρης απορρόφηση.

$$F = \frac{2}{c}\frac{\Delta U}{\Delta t}$$ Πλήρης ανάκλαση.

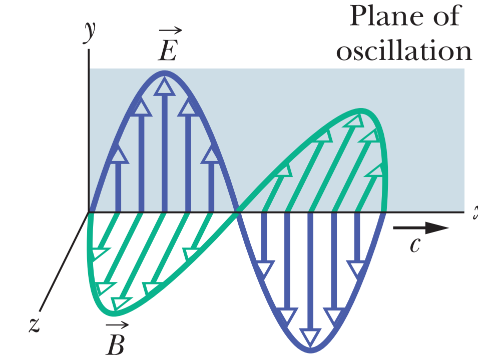
Η δύναμη αυτή συνεπάγεται μια πίεση της ακτινοβολίας πάνω στην επιφάνεια του σώματος, $P = F/A$.

$$\Delta U = \frac{\Delta U}{A\Delta t} A\Delta t = IA\Delta t$$ όπου: $$I = \frac{1}{A}\frac{dU}{dt}$$ η ένταση της ακτινοβολίας.

$$\Rightarrow \begin{cases} \boxed{P = \dfrac{I}{c}} & \text{Πλήρης απορρόφηση.} \\ \boxed{P = \dfrac{2I}{c}} & \text{Πλήρης ανάκλαση.} \end{cases}$$

Γενικά: $$\boxed{\frac{I}{c} \le P \le 2\frac{I}{c}}$$

Πόλωση

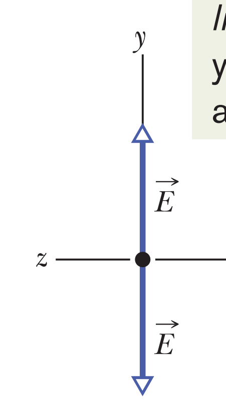


(a)

Το επίπεδο ταλάντωσης της ηλεκτρικής συνιστώσας ενός Η/Μ κύματος ορίζεται ως επίπεδο πόλωσης του κύματος.

Ένα Η/Μ κύμα ονομάζεται γραμμικά πολωμένο όταν η ηλεκτρική του συνιστώσα ταλαντώνεται σε ένα σταθερό επίπεδο.

Vertically polarized light headed toward you—the electric fields are all vertical.

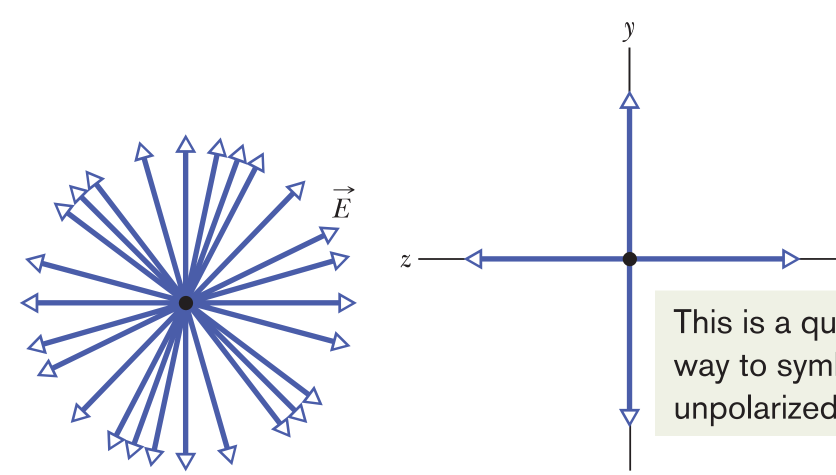


(b)

Σε ένα μη πολωμένο Η/Μ η ηλεκτρική συνιστώσα, σε διαφορετικούς χρόνους, ταλαντώνεται σε διαφορετικά επίπεδα, με αποτέλεσμα η προβολή της στο κάθετο στη διάδοση του κύματος επίπεδο (στο μέτωπο του επίπεδου κύματος) να είναι τυχαία.

Η τυχαία πόλωση συμβολίζεται αποδίδοντας στο κύμα δύο κάθετες μεταξύ τους και ίσες κατά μέτρο ηλεκτρικές συνιστώσες. Αν τα μέτρα τους είναι άνισα, το συμβολιζόμενο κύμα είναι μερικά πολωμένο.

Unpolarized light headed toward you—the electric fields are in all directions in the plane.

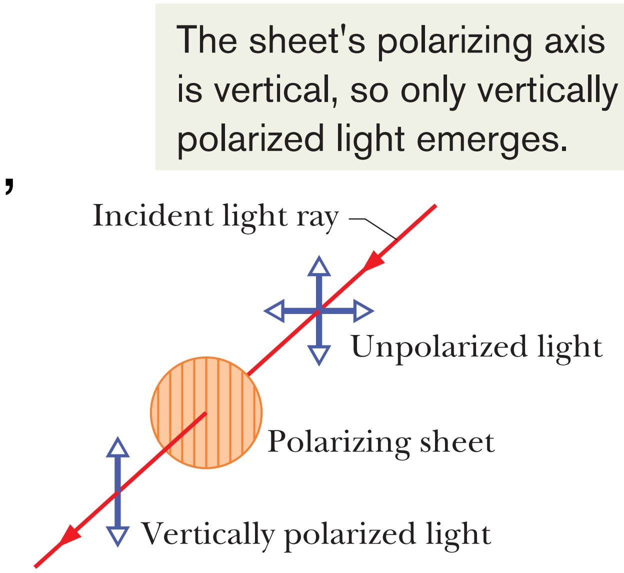


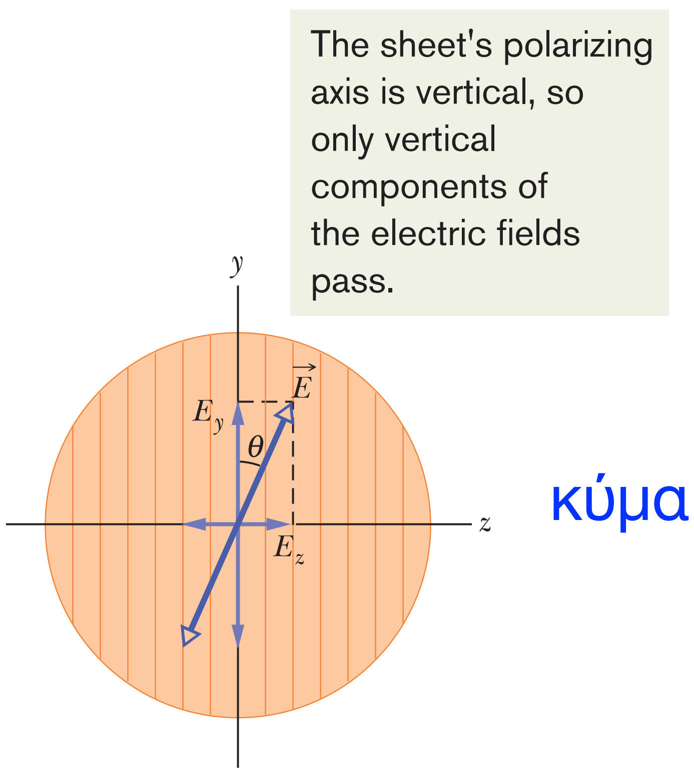
(a) (b)

This is a quick way to symbolize unpolarized light.

Πόλωση

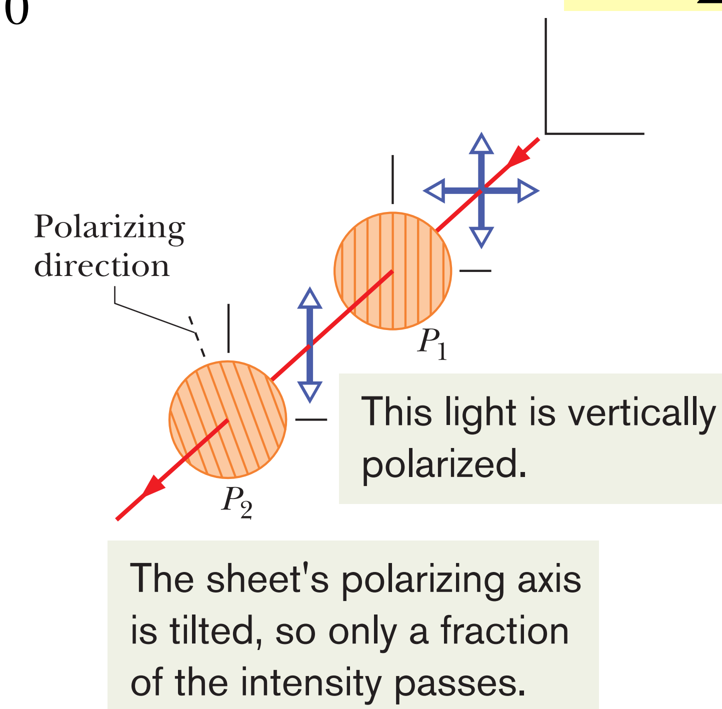
Ένα μη πολωμένο Η/Μ κύμα μπορεί να πολωθεί γραμμικά περνώντας μέσα από φίλτρο απορρόφησης σε ορισμένη διεύθυνση, από το οποίο βγαίνει μόνο η συνιστώσα που είναι κάθετη σε αυτή τη διεύθυνση. Το φίλτρο ονομάζεται πολωτής (polaroid) και η διεύθυνση της εξερχόμενης συνιστώσας άξονας του πολωτή.



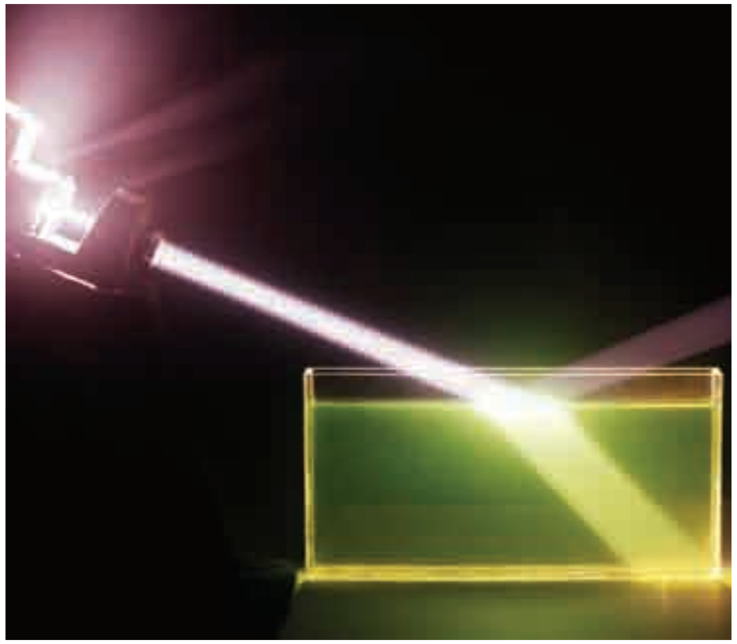


Η ένταση πολωμένου κύματος μειώνεται από την τιμή $I_0 \propto E^2$ στην τιμή $I \propto E_y^2 = E^2 \cos^2\theta$ μετά την απορρόφηση της συνιστώσας E_z, δηλαδή στην τιμή $I = I_0 \cos^2\theta$. Για μη πολωμένο κύμα, $I = I_0 \langle \cos^2\theta \rangle = \dfrac{I_0}{\pi}\displaystyle\int_0^\pi \cos^2\theta d\theta = \dfrac{I_0}{2\pi}\displaystyle\int_0^\pi (1+\cos 2\theta) d\theta \Rightarrow I = \dfrac{I_0}{2}$.

Ένα ζεύγος φίλτρων απορρόφησης συνιστά έναν πολωτή (πρώτο φίλτρο) που πολώνει το προσπίτον κύμα και έναν αναλυτή (δεύτερο φίλτρο) που ρυθμίζει την ένταση του διαδιδόμενου κύματος, ανάλογα με τη γωνία μεταξύ των αξόνων των δύο φίλτρων.



Ανάκλαση και διάθλαση

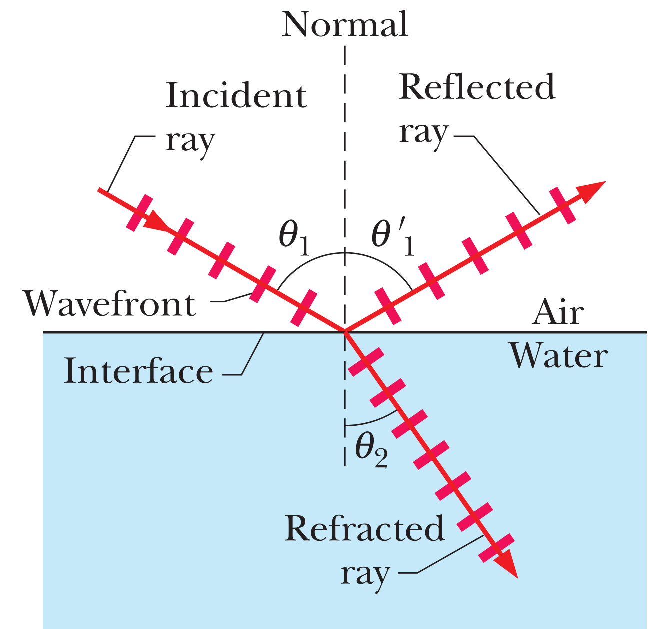


Νόμοι ανάκλασης και διάθλασης:

$$\theta_1' = \theta_1$$

$$n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2$$

(Νόμος του Snell)



Ο δείκτης διάθλασης $n \geq 1$ είναι χαρακτηριστικός του (διαφανούς) μέσου διάδοσης και ορίζεται ως:

$$n = \frac{c}{\mathrm{v}} = \sqrt{\frac{\varepsilon\mu}{\varepsilon_0\mu_0}}$$

όπου v η ταχύτητα διάδοσης του Η/Μ κύματος στο μέσο.

Για τα περισσότερα μέσα:

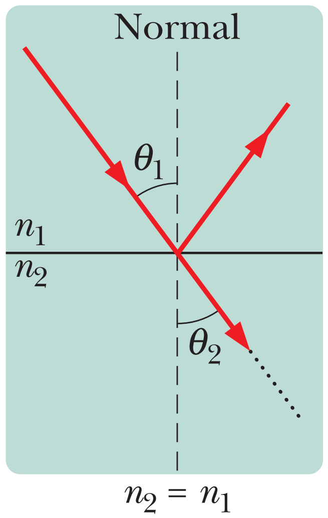
$$\mu \simeq \mu_0 \quad \Rightarrow \quad n = \sqrt{\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0}} = \sqrt{\varepsilon_r}$$

Some Indexes of Refraction[a]

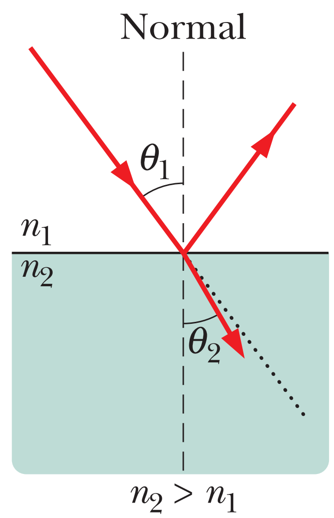
Medium	Index	Medium	Index
Vacuum	Exactly 1	Typical crown glass	1.52
Air (STP)[b]	1.00029	Sodium chloride	1.54
Water (20°C)	1.33	Polystyrene	1.55
Acetone	1.36	Carbon disulfide	1.63
Ethyl alcohol	1.36	Heavy flint glass	1.65
Sugar solution (30%)	1.38	Sapphire	1.77
Fused quartz	1.46	Heaviest flint glass	1.89
Sugar solution (80%)	1.49	Diamond	2.42

[a]For a wavelength of 589 nm (yellow sodium light).
[b]STP means “standard temperature (0°C) and pressure (1 atm).”

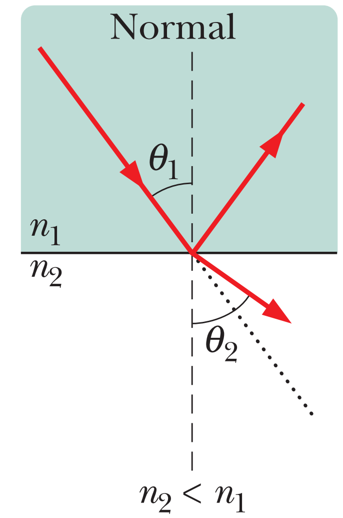
Ανάκλαση και διάθλαση



If the indexes match, there is no direction change.



If the next index is greater, the ray is bent *toward* the normal.

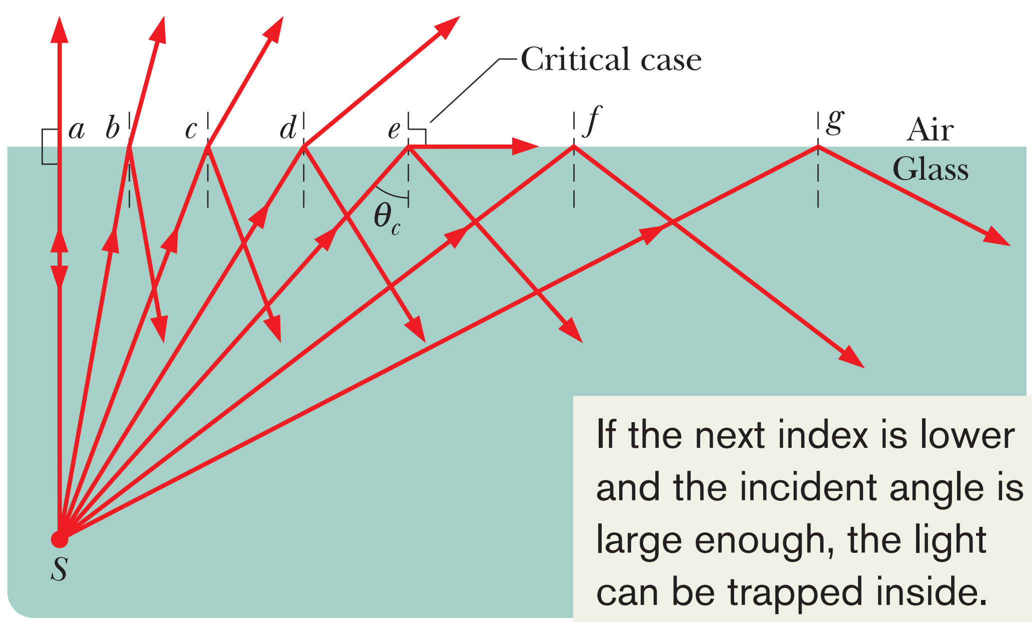


If the next index is less, the ray is bent *away from* the normal.

$$\sin\theta_2 = \frac{n_1}{n_2}\sin\theta_1$$

Αν η πηγή βρίσκεται στο μέσο με το μεγαλύτερο δείκτη διάθλασης, έχουμε ολική εσωτερική ανάκλαση όταν η γωνία πρόσπτωσης παίρνει την κρίσιμη τιμή που δίνεται από τη σχέση:

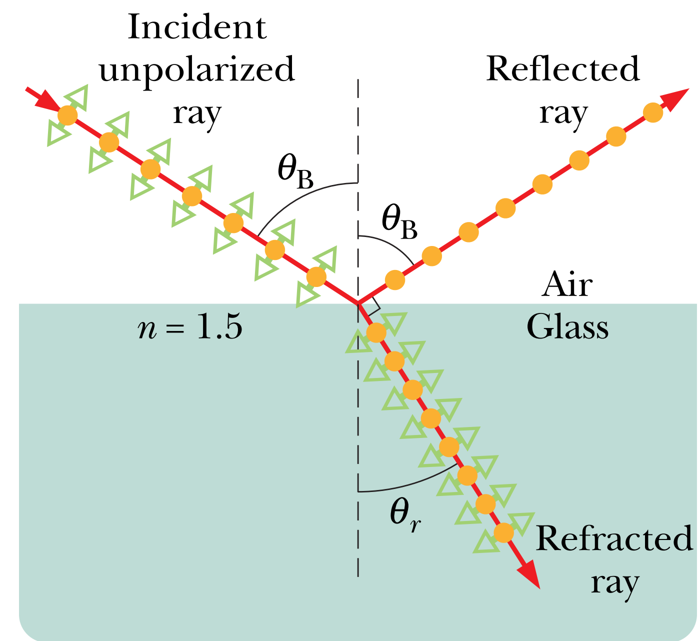
$$n_1 \sin\theta_c = n_2 \sin 90^\circ \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_c = \sin^{-1}\frac{n_2}{n_1}}$$



If the next index is lower and the incident angle is large enough, the light can be trapped inside.

Πόλωση από ανάκλαση

Γενικά, το ανακλώμενο κύμα σε τυχαία γωνία ανάκλασης είναι μερικά πολωμένο παράλληλα με την επιφάνεια πρόσπτωσης. Όταν η διεύθυνση ανάκλασης και η διεύθυνση διάθλασης σχηματίζουν ορθή γωνία, η γωνία ανάκλασης ονομάζεται γωνία Brewster και το ανακλώμενο κύμα είναι ολικά πολωμένο παράλληλα με την επιφάνεια πρόσπτωσης. Η γωνία Brewster προσδιορίζεται από το νόμο του Brewster:



$$\left.\begin{aligned} \theta_B + \theta_r &= 90^\circ \\ n_1 \sin\theta_B &= n_2 \sin\theta_r \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad n_1 \sin\theta_B = n_2 \sin(90^\circ - \theta_B) = n_2 \cos\theta_B \quad \Rightarrow \quad \boxed{\theta_B = \tan^{-1}\frac{n_2}{n_1}}$$

Όταν το μέσο διάδοσης του προσπίπτοντος κύματος είναι ο αέρας, προσεγγίζοντας το δείκτη διάθλασής του $n_1 \simeq 1$ και θέτοντας $n_2 = n$, παίρνουμε την απλούστερη μορφή του νόμου του Brewster:

$$\theta_B = \tan^{-1} n$$