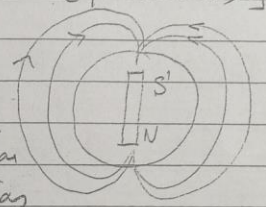
Μαγνητικό πεδίο - μαγνητικές δυνάμεις

- Μαγνητικά φαινόμενα: πριν 2,500 χρόνια στη Μαγνησία της Μ. Ασίας: αν ράβδος σιδήρου αγγίξει φυσικό μαγνήτη τότε μαγνητίζεται
- Πυξίδα: Β και Ν πόλος – πυξίδα δείχνει κατ/ση Β-Ν.
  [Προσοχή: ∄ μεμονωμένος μαγν. πόλος (μονόπολο)]
  γιατί ∃ μαγν. πεδίο της γης



- 1819: Ο Δανός Hans Christian Oersted ανακάλυψε ότι ένα σύρμα που διαρρέεται από ρεύμα προκαλεί απόκλιση της πυξίδας
- Παρόμοιες μελέτες από τον Ampère

- Michael Faraday & Joseph Henry → κίνηση μαγνήτη κοντά σε αγώγιμο βρόχο ⇒ ροή ρεύματος στο βρόχο

⇒ $\boxed{\text{∃ σύνδεση του μαγνητισμού με κινούμενα φορτία}}$

▷▷ Πριν την εισαγωγή του μαγν. πεδίου ανασκόπηση για το ηλ. πεδίο:

- Μια κατανομή ηλ. φορτίων → δημιουργεί ηλ. πεδίο $\vec{E}$
- Το ηλ. πεδίο ασκεί δύναμη $\vec{F} = q\vec{E}$ σε κάθε φορτίο q στο χώρο

Αντίστοιχα:	• Ένα κινούμενο ηλ. φορτίο ή ένα ηλ. ρεύμα δημιουργεί μαγν. πεδίο (επιπρόσθετα με το ηλ. πεδίο!)
	• Το μαγν. πεδίο ασκεί δύναμη σε κάθε κινούμενο φορτίο ή ηλ. ρεύμα που βρίσκεται μέσα στο πεδίο

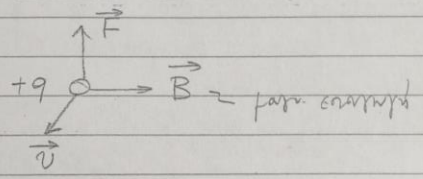
- Εσωτερικό των ατόμων ~ 10 T
- Στο εργαστήριο ~ 30 T
- Σε ισχυρές νεφοειδείς ~ 10^8 T.

Μαγν. πεδίο: $\vec{B}$: Μονάδες:
- (SI) Tesla = $1 \frac{N}{A \cdot m}$
- (CGS) Gauss = 10^{-4} T (~ ένταση μαγν. πεδίου της γης)

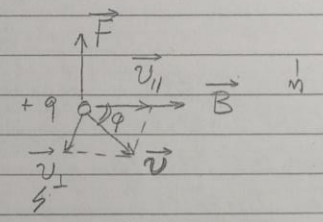
Δύναμη σε φορτίο q που κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ } $\boxed{\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}}$ (1)

(1): $F = |q|\, v B \sin\varphi$

γωνία μεταξύ $\vec{v}, \vec{B}$

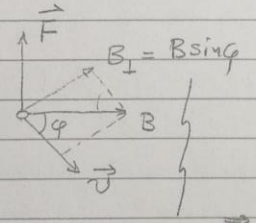


Ανάλυση:



$v_{\perp} = v \sin\varphi$

συνιστώσα της $\vec{v} \perp$ στο $\vec{B}$



συνιστώσα του $\vec{B} \perp$ στη $\vec{v}$

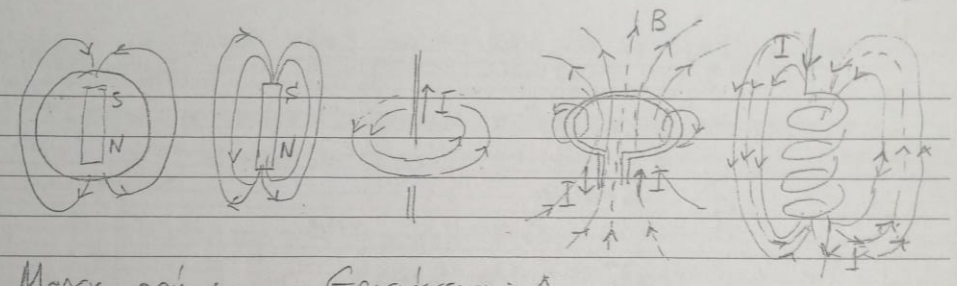
Όταν ένα φορτίο είναι σε περιοχή που Ξ και ηλ. και μαγν. πεδίο

$$\boxed{\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \times \vec{B})}$$ δύναμη Lorentz

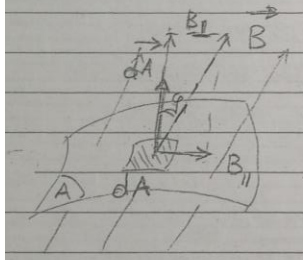
↳ συνολική ηλεκτρομαγνητική δύναμη.

Γραμμές μαγν. πεδίου:

- Οι γραμμές σχεδιάζονται έτσι ώστε σε κάθε σημείο τους το $\vec{B}$ εφάπτεται στη γραμμή.
- Ο αριθμός των γραμμών / μονάδα επιφάνειας ∝ ένταση του πεδίου
- Κατεύθυνση γραμμών μαγν. πεδίου → κατ/ση που θα προσανατολιστεί η βελόνα μιας πυξίδας
- Οι γραμμές του μαγν. πεδίου <u>δεν</u> τέμνονται μεταξύ τους.



∴ Μαγν. ροή :
- Επιφάνεια : A
- στοιχειώδες εμβαδόν : dA



- Μαγν. ροή $d\phi_B$ μέσα από την dA:

$$d\phi_B = B_\perp dA = B\cos\varphi \cdot dA = \vec{B}\cdot\vec{dA}$$

$$B_\perp = B\cos\varphi$$

Άρα: $\boxed{d\phi_B = \vec{B}\cdot\vec{dA}}$ (α) ⇒

ολοκληρωτική μαγν. ροή : $\boxed{\phi_B = \int \vec{B}\cdot\vec{dA}}$

* Αν A: κλειστή επιφ.

$\boxed{\int \vec{B}\cdot dA = 0}$

Νόμος του Gauss

Αν $\vec{B}$ ομογενές

⇓

$\phi_B = B\cdot A\cdot\cos\varphi$; Αν $B \perp A \Rightarrow \cos\varphi = 1$ και $\phi_B = B\cdot A$

▷ Μονάδα μαγν. ροής : Wb (από τον Wilhelm Weber)

και $1\,Wb = 1\,T\cdot m^2 = 1\,\frac{N}{A\cdot m}\cdot m^2 = 1\,\frac{Nm}{A}$.

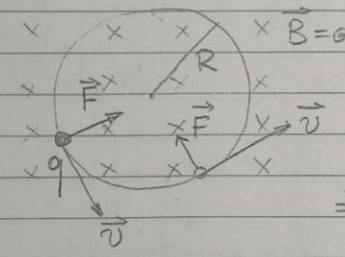
▷▷ Αν $B \perp A \Rightarrow B = B_\perp$ και $B_\perp \perp dA = A_\perp$

οπότε (1): $B = \frac{d\phi_B}{dA_\perp} \Rightarrow$ $\boxed{\text{μαγν. πεδίο } B := \frac{\text{ροή}}{\text{μονάδα επιφάνειας}}}$

B : πυκνότητα μαγν. ροής

Κίνηση φορτισμένου σωματιδίου σε μαγν. πεδίο

Έστω ομογενές μαγν. πεδίο και ένα φορτίο q που κινείται με $\vec{v}$. Αυτό δέχεται τη δύναμη $\vec{F} = q\vec{v}\times\vec{B}$



Μέτρο: $F = qvB$

▷▷ Καταλαβαίνω πως $\vec{F} \perp \vec{v}$ ⇒

⇒ η $\vec{F}$ παίζει το ρόλο κεντρομόλου δύναμης που αναγκάζει το σωματίδιο να εκτελεί ομαλή κυκλική κίνηση με ακτίνα R:

$$qvB = \frac{mv^2}{R} \Rightarrow \boxed{R = \frac{mv}{qB}}$$

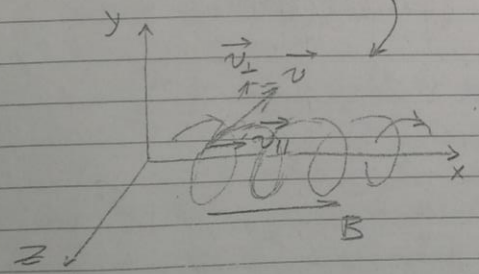
Επίσης $v = \omega R$ #

$$\Rightarrow R = \frac{m\omega R}{qB} \Rightarrow \boxed{\omega = \frac{qB}{m}} \text{ ή } \omega = \frac{|q|B}{m}$$

κυκλοτρονική συχνότητα

∴ Αν η ταχύτητα είναι $\vec{v} = \vec{v}_{\parallel} + \vec{v}_{\perp}$ δηλ. $\vec{v}_{\parallel} \parallel \vec{B}$, $\vec{v}_{\perp} \perp \vec{B}$ ⇒

⇒ η κίνηση είναι ελικοειδής → Ακτίνα της έλικας $= R = \frac{mv_{\perp}}{qB}$



Προσοχή: Έργο μαγν. δύναμης = 0

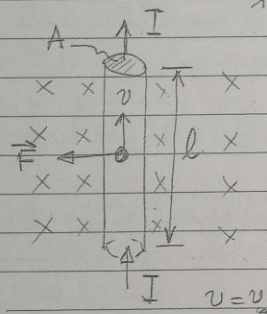
$$dW = \vec{F}\cdot d\vec{x} = q(\vec{v}\times\vec{B})\cdot\vec{v}\,dt = 0$$

γιατί $\vec{v}\times\vec{B} \sim \vec{F} \perp \vec{v}$

ή η μαγν. δύναμη $\vec{F} \perp d\vec{x}$

Μαγν. δύναμη σε αγωγό που διαρρέεται από ρεύμα

↳ Εφαρμογή: ένας ηλ. κινητήρας που περιστρέφεται λόγω δυνάμεων που ασκούνται σε αγωγό με ρεύμα



Έστω ένας αγωγός που διαρρέεται από ρεύμα.

– Δύναμη σε ένα ελεύθερο ιόν:

$$\vec{F} = q\,\vec{v} \times \vec{B}$$

εξωτ. μαγν. πεδίο στο οποίο βρίσκεται ο αγωγός

$v = v_d$ Ταχύτητα ολίσθησης $\perp \vec{B}$

drift

∴ Ψάχνουμε την ολική δύναμη σε όλα τα φορτία σε μήκος l.

▷ Έστω n = πυκνότητα των φορτίων = $\dfrac{\text{αριθμός φορτίων}}{\text{μονάδα όγκου}}$ ⇒

$$\Rightarrow n = \frac{\text{αρ. φορτίων}}{A \cdot l} \Rightarrow \boxed{\text{αρ. φορτίων} = nAl}$$

διατομή του αγωγού, μήκος

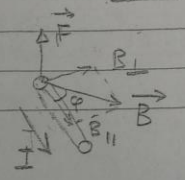
▷▷ Άρα: συνολική δύναμη: $F = (nAl)(q v_d B) \Rightarrow$

$$\Rightarrow F = \underbrace{\underbrace{(n q v_d)}_{J \,\equiv\, \text{πυκνότητα ρεύματος}}(A)}_{J \cdot A \,=\, \text{ολικό ρεύμα } I}(l B) \Rightarrow \boxed{F = I l B} \; (*)$$

(*) Αν $\vec{B}$ δεν είναι κάθετο στο I: $\vec{B} = \vec{B}_\perp + \vec{B}_\parallel$

$B\sin\varphi$ $\quad$ $B\cos\varphi$

δεν ασκεί δύναμη



Τότε: $F = I l B_\perp = I l B \sin\varphi$

ή σε διάλυμα με ιόντα → φορείς { ιόντα

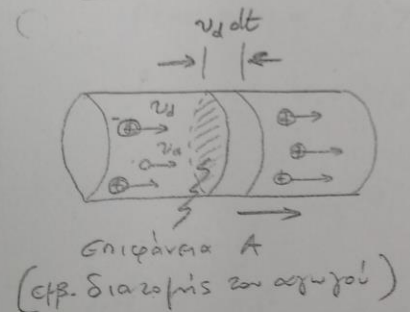
σε ημιαγωγό → { ηλεκτρόνια
οπές. (κίνηση κενών θέσεων από όπου λείπουν ηλεκτρόνια)

Σύμβαση: $\boxed{\text{ρεύμα } I \rightarrow \text{κατεύθυνση προς την οποία ρέει θετικό φορτίο.}}$

[συμβατική φορά του ρεύματος].

Ορισμός: $\boxed{I = \frac{dQ}{dt}}$ Μονάδα: $1\,A = \frac{C}{s}$

Σύνδεση ρεύματος με την ταχύτητα ολίσθησης.



▷ Θεωρούμε κυλινδρικό αγωγό με εμβαδόν διατομής A.

▷ n: συγκέντρωση (πυκνότητα) φορτισμένων σωματιδίων $[m^{-3}]$

▷ Όλα τα σωματίδια κινούνται με v_d.

Στο διάστημα dt → μετατόπιση $= v_d dt$

Άρα στο στοιχειώδη κύλινδρο: όγκος $= A v_d dt$

αριθμός σωματιδίων $= n A v_d dt$

συνολικό φορτίο $= q n A v_d dt$

Άρα το φορτίο dQ που εξέρχεται από τον κύλινδρο σε χρόνο dt είναι:

$$dQ = q n A v_d dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{dQ}{dt} = I = n q v_d A}$$

Μπορούμε να ορίσουμε πυκνότητα ρεύματος:

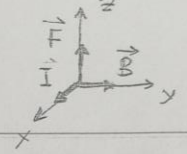
$$\boxed{J = \frac{I}{A} = n q v_d} \quad [A/m^2]$$

Διανυσματικά: $\boxed{\vec{J} = n q \vec{v}_d}$

Παράδειγμα: Σε χάλκινο σύρμα διαμέτρου 1.02 mm, ρέει ρεύμα 1.67 A (π.χ. για λάμπα 200 W).

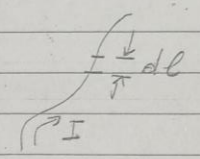
Αν $n = 8.5 \times 10^{28}$ ηλεκτρόνια/m^3 να βρεθεί η v_d.

$$v_d = \left(\frac{I}{A}\right)\frac{1}{nq} = \frac{1.67\,A}{0.17 \times 10^{-7}\,m^2} \cdot \frac{1}{8.5 \times 10^{28}\,C \ldots}$$



▷▷ Άρα γενικότερα: $\boxed{\vec{F} = I\,\vec{\ell}\times\vec{B}}$

▷▷ Αν ο αγωγός δεν είναι ευθύγραμμος → τον διαιρούμε σε απειροστά τμήματα $d\vec{\ell}$

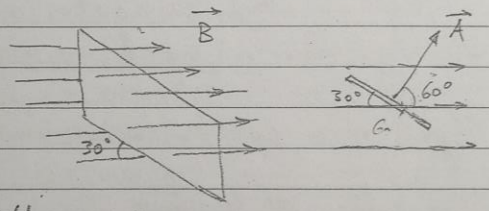


⇒ δύναμη $d\vec{F}$ στο τμήμα $d\vec{\ell}$ του αγωγού:

$$\boxed{d\vec{F} = I\,d\vec{\ell}\times\vec{B}} \Rightarrow \vec{F} = \underbrace{\int}_{\text{επιφανειακό ολοκλήρωμα}} d\vec{\ell}\times\vec{B}$$

Εφαρμογές

A. Μαγν. ροή: [Young. p.778]



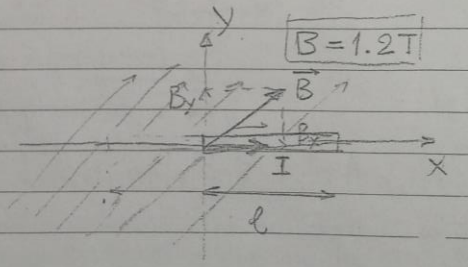
Έστω επίπεδη επιφάνεια εμβαδού $3cm^2$ σε ομογενές B. Αν η μαγν. ροή είναι 0.9mWb να βρεθεί το B.

Απ. Είναι $\Phi_B = \underbrace{BA}_{3\times10^{-4}m^2}\cos\varphi$ ($\varphi = 60°$) $\Rightarrow B = \dfrac{\Phi_B}{A\cos\varphi} = \dfrac{0.9\times10^{-3}Wb}{3\times10^{-4}m^2\times\underbrace{\cos60}_{1/2}}$

$\Rightarrow \boxed{B = 6T}$

B. Μαγν. δυνάμεις

1. [Young. p.787] Ευθύγραμμος αγωγός μήκους 1m διαρρέεται από ρεύμα 50A παρουσιάζει μαγν. πεδίου 1.2T (εξ.) Να βρεθεί η δύναμη (μέτρο + κατεύθυνση)



$\boxed{B = 1.2T}$

Απ.

▷ Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων, x-y, όπως στο σχήμα.

▷ Είναι:

$$\vec{\ell} = (1m)\cdot\vec{i}$$

$$\vec{B} = |B|\hat{B} = (1.2T)\left[(\cos 45)\vec{i} + (\sin 45)\vec{j}\right]$$

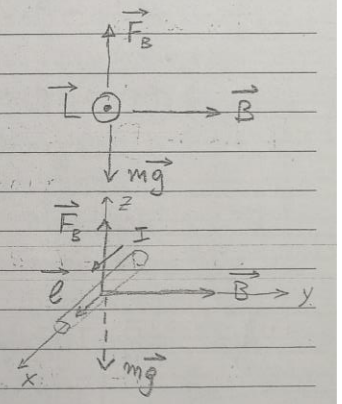
$$\vec{F} = I\,\vec{\ell}\times\vec{B} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{F} = (50A)(1m)\,\vec{i}\times(1.2T)\left[(\cos 45)\vec{i} + (\sin 45)\vec{j}\right]$$

$$\Rightarrow \vec{F} = (42.4N)\,\vec{k} \quad (\text{αφού } \vec{i}\times\vec{i}=0 \text{ και } \vec{i}\times\vec{j}=\vec{k}).$$

2. [Halliday, p. 245] Ένα ευθύγραμμο οριζόντιο αγωγός διαρρέεται από ρεύμα 28A. Πόσο είναι το μέτρο κ' η κατεύθυνση του min μαγν. πεδίου που απαιτείται ώστε ο αγωγός να αιωρείται (να εξισορροπηθεί η βαρυτική δύναμη). Δίνεται η γραμμική πυκνότητα μάζας = 46.6 g/m

$\frac{m}{\ell}$



Απ. Επιλέγουμε σύστημα συντεταγμένων ↗

Είναι: $\vec{F}_B = I\vec{\ell}\times\vec{B} = I(\ell\cdot\vec{i})\times(B\cdot\vec{j}) = I\ell B\,\vec{k}$

και πρέπει $\vec{F}_B = m\vec{g} \Rightarrow I\ell B\,\cancel{\vec{k}} = mg\,\cancel{\vec{k}} \Rightarrow$

$$\Rightarrow B = \left(\frac{m}{\ell}\right)\frac{g}{I} = 46.6\times10^{-3}\,\frac{kg}{m}\cdot\frac{9.8\,m/s^2}{28A} = 1.6\times10^{-2}\,T.$$

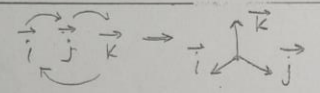
Πιο γενικά: επειδή $\vec{F}_B = I\vec{\ell}\times\vec{B} \Rightarrow F_B = I\ell B\sin\varphi$

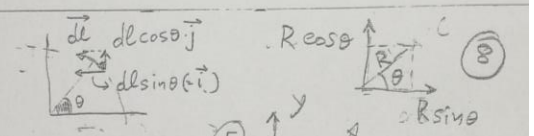
γωνία μεταξύ $\vec{\ell}$ και $\vec{B}$

και $I\ell B\sin\varphi = mg$ (ακυν. κατεύθυνση $\vec{k}$)

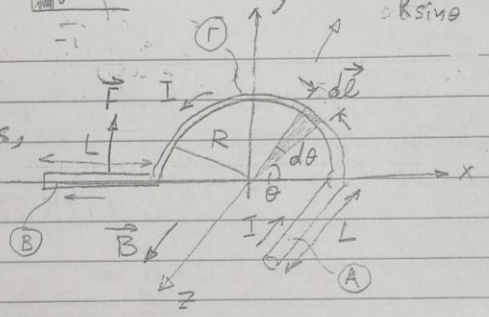
$$\Rightarrow B = \left(\frac{m}{\ell}\right)\frac{g}{I}\,\frac{1}{\sin\varphi}$$

minimum B επιτάχυνση maximum $\sin\varphi \Rightarrow \varphi = 90°$ όπως το κάναμε!





3. [Young p. 788] Να βρεθεί η ολική μαγν. δύναμη που ασκείται στον αγωγό του σχήματος, αν διαρρέεται από ρεύμα I.



Απ. Πρώτα τα ευθύγραμμα τμήματα Ⓐ κ' Ⓑ:

▷ Για το Ⓐ: $\vec{F}_A = I\vec{\ell}\times\vec{B} = I\left[L(-\hat{k})\right]\times(B\cdot\hat{k}) = 0$ (γιατί $\hat{k}\times\hat{k}=0$)

γωνία μεταξύ $\vec{\ell}, \vec{B}$ $= 180°$

▷ Για το Ⓑ: $\vec{F}_B = I\vec{\ell}\times\vec{B}$
$= I\left[L(-\vec{i})\right]\times B\hat{k} = ILB\vec{j}$ (γιατί $-\vec{i}\times\vec{k}=\vec{j}$)

▷ Για το Γ: Εδώ πρέπει να χρησιμοποιήσουμε $d\vec{F} = I\,d\vec{\ell}\times\vec{B}$ γιατί ο αγωγός δεν είναι ευθύγραμμος

Εδώ: $dl = R\,d\theta$ και $d\vec{\ell} = (R\sin\theta\, d\theta)(-\vec{i}) + (R\cos\theta\, d\theta)\vec{j}$
↳ μέτρο

Άρα: $d\vec{F}_\Gamma = I\left[(R\sin\theta\, d\theta)(-\vec{i}) + (R\cos\theta\, d\theta)\vec{j}\right]\times B\hat{k}$

$= IRB\left[\sin\theta(+\vec{j}) + \cos\theta\,\vec{i}\right]d\theta$

και η ολική δύναμη στο Γ: $\vec{F}_\Gamma = IRB\left[\int_0^\pi \cos\theta\, d\theta\,\vec{i} + \int_0^\pi \sin\theta\, d\theta\,\vec{j}\right]$

και $\int_0^\pi \cos\theta\, d\theta = \sin\theta\Big|_0^\pi = \sin\pi - \sin 0 = 0$

$\int_0^\pi \sin\theta\, d\theta = -\cos\theta\Big|_0^\pi = -\cos\pi + \cos 0 = -(-1)+1 = 2$

$\vec{F}_\Gamma = 2IRB\vec{j}$

Άρα $\vec{F}_{ολ} = \underbrace{\cancel{\vec{F}_A}}_{0} + \underbrace{\vec{F}_B}_{ILB\vec{j}} + \underbrace{\vec{F}_\Gamma}_{2ILBR\vec{j}} = IB(L+2R)\vec{j}$