Εισαγωγή στην Πυρηνική Φυσική και τη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων
Θεόδωρος Μερτζιμέκης
τελευταία ανανέωση: 1 Ιουνίου 2023

Λυμένες ασκήσεις

Τα προβλήματα και οι συνοδευτικές λύσεις που ακολουθούν έχουν διδαχθεί στο μάθημα κορμού "Εισαγωγή στην Πυρηνική Φυσική και τη Φυσική Στοιχειωδών Σωματιδίων" (10ΕΚΑ04) και αποτελούν συμπληρωματικό υλικό στην ύλη του μαθήματος.

Πρόβλημα [01]

Να αποδείξετε ότι:

α. $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o} = 1.44$ MeV·fm

β. $\hbar c = 197$ MeV·fm

γ. Ποιο είναι το πηλίκο του [α.] / [β.];

Λύση

α. Γνωρίζουμε τις παρακάτω τιμές των σταθερών και τις αντιστοιχίες μονάδων

- e = 1.602·10^{-19} C
- $\epsilon_o = 8.854 \cdot 10^{-12}$ F·m^{-1} = $8.854 \cdot 10^{-12}$ C^2 N^{-1} m^{-2}
- 1 eV = 1.602·10^{-19} J
- 1 MeV = 1.602·10^{-13} J = 1.602·10^{-13} N m
- 1 fm = 10^{-15} m
- 1 MeV·fm = 1.602·10^{-28} N m^2 = 1.602·10^{-28} J m

οπότε με αντικατάσταση βρίσκουμε:

$$\begin{aligned}
\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o} &= \frac{(1.602 \cdot 10^{-19}\,\mathrm{C})^2}{(4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12}\,\mathrm{C}^2\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^{-2})} \\
&= \frac{1.602 \cdot 1.602 \cdot 10^{-38}\,\mathrm{C}^2}{(4\pi \cdot 8.854 \cdot 10^{-12})\,\mathrm{C}^2\mathrm{N}^{-1}\mathrm{m}^{-2}} \\
&\approx 1.44 \cdot 10^{-28} \cdot 1.602\,\mathrm{Nm}^2 \\
&= 1.44\,\mathrm{MeV\,fm}
\end{aligned}$$

β. Ομοίως, $\hbar = h/2\pi$, όπου $h = 6.626 \cdot 10^{-34}$ J s και η ταχύτητα του φωτός: $c = 2.998 \times 10^8$ m/s. Με αντικατάσταση:

$$\hbar c = \frac{h}{2\pi}c = 2.998 \cdot 10^8 \,\mathrm{m/s} \frac{6.626 \times 10^{-34} \,\mathrm{J\,s}}{2\pi}$$

Με αντικατάσταση των εμπλεκόμενων μονάδων (βλ. ερωτημα α.), η παραπάνω δίνει:

$$\hbar c \approx 197.3 \,\mathrm{MeV\,fm}$$

γ. Το κλάσμα του [α] ως προς [β] είναι ίσο:

$$\frac{\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o}}{\hbar c} \approx \frac{1}{137}$$

Η τιμή αυτή είναι η σταθερά λεπτή υφής, α

Πρόβλημα [02] Δείγμα ^{212}Pb παρουσιάζει ενεργότητα 10^6 διασπάσεις/λεπτό.

α. Ποια η ενεργότητά του μετά από δύο ώρες;

β. Πόσα άτομα μολύβδου έχουν απομείνει τη στιγμή εκείνη στο δείγμα;

Δίνεται $t_{1/2}(^{212}\mathrm{Pb})$=10.64 h.

Λύση

Από τα δεδομένα, υπολογίζουμε τη σταθερά διάσπασης λ:

$$\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{10.64\,\mathrm{h}} = 11.33\,\mathrm{h}^{-1} = \frac{\ln 2}{10.64 \cdot 3600\,\mathrm{s}} = 0.18 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{s}^{-1}$$

α. Με αρχική ενεργότητα $A_0 = \frac{10^6}{60\,s} = \frac{1}{6} \cdot 10^5$ Bq, η ενεργότητα μετά από 2 ώρες θα είναι:

$$\begin{aligned} A(2h) &= A_0 \cdot e^{-\lambda t} = \frac{1}{6} \cdot 10^5 e^{-\frac{\ln 2}{10.64\,h} \cdot 2h} \\ &= \frac{1}{6} \cdot 10^5 e^{-0.1303} \approx \frac{1}{6} \cdot 10^5 \cdot 0.877 \\ &= 0.146 \cdot 10^5 \,\mathrm{Bq} \end{aligned}$$

β. Επομένως, οι εναπομείναντες πυρήνες ^{212}Pb μπορούν να βρεθούν από τον ορισμό της ενεργότητας:

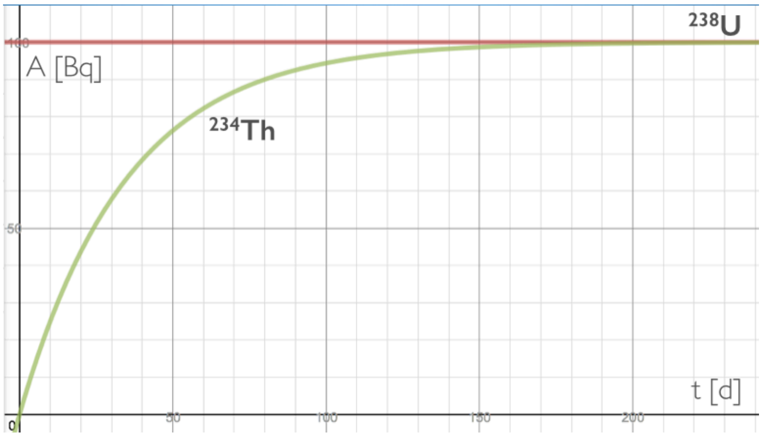
$$A = \lambda N \Rightarrow N = A/\lambda = \frac{0.146 \cdot 10^5}{0.18 \cdot 10^{-4}} \approx 0.89 \cdot 10^9$$

Πρόβλημα [03]

Να σχεδιαστούν στο ίδιο διάγραμμα οι καμπύλες εξέλιξης της ενεργότητας του μητρικού και θυγατρικού πυρήνα στη διάσπαση $^{238}\mathrm{U} \longrightarrow {}^{234}\mathrm{Th}$ για χρονικό διάστημα 10 χρόνων ημιζωής του ^{234}Th.
Δίνονται:
$t_{1/2}(^{238}\mathrm{U}) = 1.632 \cdot 10^{12}$ d
$t_{1/2}(^{234}\mathrm{Th}) = 24.10$ d
$A(^{238}\mathrm{U}) = 100$ kBq

Λύση

Οι ενεργότητες μπορούν να βρεθούν μέσω των εξισώσεων Bateman. Ο μητρικός πυρήνας ακολουθεί τον απλό νόμο εκθετικής διάσπασης, αλλά καθότι πολύ μακροβιότερος του θυγατρικού, η ενεργότητά του παραμένει προσεγγιστικά σταθερή στο χρονικό διάστημα που ζητείται. Παράλληλα, ο θυγατρικός αυξάνεται και λόγω της συνθήκης ισορροπίας που ισχύει, θα προσεγγίσει την ενεργότητα του μητρικού σε μεγάλους χρόνους $t \geq 10t_{1/2}(^{234}\mathrm{Th})$. Δείτε τις καμπύλες στο Σχ. 1.



Σχήμα 1: Η χρονική εξέλιξη της ενεργότητας μητρικού–θυγατρικού πυρήνα

Πρόβλημα [04]

Ποια είναι η ενέργεια που απελευθερώνεται όταν δύο πυρήνες δευτερίου σχηματίζουν έναν πυρήνα ηλίου-4 (σωμάτιο α); Δίνονται: BE(D)/A = 1.112 MeV και BE(α)/A = 7.074 MeV

Λύση

Η αντίδραση σύντηξης των δευτερίων για το σχηματισμό ηλίου είναι:

$$d + d \rightarrow \alpha + Q$$

Εξυπακούεται ότι $= A \cdot \frac{BE}{A}$. Επομένως, με απλή αντικατάσταση:

$B(d) = 2 \cdot 1.112$ MeV = 2.224 MeV και

$B(\alpha) = 4 \cdot 7.074$ MeV = 28.296 MeV

Από το ενεργειακό ισοζύγιο, προκύπτει: $Q = (28.296 - 2 \cdot 2.224)$ MeV = 23.85 MeV

— ※ —

Πρόβλημα [05]

Να υπολογιστεί η ενέργεια σύνδεσης του τελευταίου νετρονίου στο ισότοπο ^{13}C. Δίνονται: m[^{13}C] = 13.00335u, m[^{12}C] = 12.00000u, m[n] = 1.00866u

Λύση

Η απάντηση προκύπτει από τη διερεύνηση του ενεργειακού ισοζυγίου, πριν και μετά την αφαίρεση του νετρονίου. Η διαφορά στην ενέργεια είναι:

$$\begin{aligned}
\Delta E &= c^2 \cdot (m[^{12}\mathrm{C}] + m[n] - m[^{13}\mathrm{C}]) \\
&= c^2 \cdot (12.00000u + 1.00866u - 13.00335u) \\
&= c^2 \cdot 0.00531u = c^2 \cdot 0.00531 \cdot 931.49 \text{ MeV/c}^2 \\
&= 4.946 \text{ MeV}
\end{aligned}$$

— ※ —

Πρόβλημα [06]

Στην απαρχή του ηλιακού συστήματος, μπορεί να υποτεθεί ότι δημιουργήθηκαν ποσά ^{238}U και ^{235}U με ενεργότητες 1:1. Δεδομένου ότι σήμερα η αναλογία είναι 138:1, πόσα χρόνια πριν δημιουργήθηκε το ηλιακό σύστημα; Δίνονται:
$t_{1/2}(^{238}\mathrm{U})$=4.468 Ga
$t_{1/2}(^{235}\mathrm{U})$=0.704 Ga

Λύση

Αν το χρονικό διάστημα από την αρχή του ηλιακού συστήματος είναι t_o, τότε οι σημερινές ενεργότητες είναι:

$$\begin{aligned} A(^{238}U) &= A_o^{238} e^{-\lambda_{238} t_o} \\ A(^{235}U) &= A_o^{235} e^{-\lambda_{235} t_o} \end{aligned}$$

Με διαίρεση κατά μέλη και με δεδομένο $A_o^{238} = A_o^{235}$, έχουμε:

$$\begin{aligned} 138 &= e^{-(\lambda_{238}-\lambda_{235})t_o} \\ \ln 138 &= (\lambda_{235} - \lambda_{238})t_o \\ 4.927 &= \left(\frac{\ln 2}{t_{1/2}^{235}} - \frac{\ln 2}{t_{1/2}^{238}}\right) t_o \\ 4.927 &= \left(\frac{\ln 2}{0.704 \cdot 10^9} - \frac{\ln 2}{4.468 \cdot 10^9}\right) t_o \\ 4.927 \cdot 10^9 &= 1.1966(\ln 2)t_o \\ t_o &= 5.94 \cdot 10^9 \ a \end{aligned}$$

— ※ —

Πρόβλημα [07]

Στην παρακάτω αντίδραση που περιγράφει τη σχάση του ισοτόπου ^{236}U να υπολογιστεί η συνολική εκλυόμενη ενέργεια.

$$^{236}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{140}_{54}\mathrm{Xe} + {}^{93}_{38}\mathrm{Sr} + 3n$$

Δίνονται: BE(^{236}U)/A = 7.6 MeV, BE(^{140}Xe)/A = 8.4 MeV, BE(^{93}Sr)/A = 8.7 MeV

Λύση

Η ζητούμενη ενέργεια προκύπτει από τη διαφορά ανάμεσα στις ενέργειες σύνδεσης, πριν και μετά την αντίδραση. Δηλαδή:

$$Q = BE_f - BE_i$$

Η παραπάνω γίνεται:

$$\begin{aligned} Q &= 140 \cdot 8.4 + 93 \cdot 8.7 - 236 \cdot 7.6 \\ Q &= 1176 + 809.1 - 1793.6 \\ Q &= 191.5 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Σημειώνεται ότι τα νετρόνια που εκλύονται δεν έχουν ενέργεια σύνδεσης (είναι μεμονωμένα σωμάτια) και επομένως δε συμπεριλαμβάνονται στην παραπάνω εξίσωση.

Πρόβλημα [08]

Να υπολογιστεί η ενέργεια διαχωρισμού S_n για τα ισότοπα ^{236}U και ^{239}U. (Χρησιμοποιήστε τον ημιεμπειρικό τύπο της μάζας για την εύρεση της ενέργειας σύνδεσης.)

Λύση

Η ενέργεια διαχωρισμού του νετρονίου είναι η ενέργεια αφαίρεσης του τελευταίου νετρονίου από τον πυρήνα. Επομένως, τα τελικά προϊόντα είναι το εκπεμπόμενο νετρόνιο (με ενέργεια σύνδεσης ίση με το μηδέν) και το ισότοπο του αρχικού πυρήνα με ένα νετρόνιο λιγότερο σε σχέση με το αρχικό. Έτσι:

$$S_n = BE(Z, A) - BE(Z, A - 1)$$

Με χρήση του ημιεμπειρικού τύπου (απαιτείται αναλυτικός υπολογισμός) και εφαρμογή στην παραπάνω σχέση, έχουμε:

$$S_n(^{236}\mathrm{U}) = BE(^{236}\mathrm{U}) - BE(^{235}\mathrm{U}) = 1789.462 - 1782.691 = 6.771 \text{ MeV}$$

και

$$S_n(^{239}\mathrm{U}) = BE(^{239}\mathrm{U}) - BE(^{238}\mathrm{U}) = 1805.905 - 1801.064 = 4.841 \text{ MeV}$$

Οι αντίστοιχες πειραματικές τιμές είναι 6.546 MeV και 4.806 MeV.

Χρήσιμα εργαλεία:

https://nuclearbindingenergy.info/

https://www.nndc.bnl.gov/nudat3

Πρόβλημα [09]

Χρησιμοποιώντας τον τύπο για το ελάχιστο της παραβολής σταθερότητας, να υπολογίσετε τον ατομικό αριθμό που αντιστοιχεί σε A=10, 27, 59, 236. Πώς συγκρίνετε τα αποτελέσματά σας με τα στοιχεία στη βιβλιογραφία;

Λύση

Ο τύπος για το ελάχιστο της παραβολής σταθερότητας είναι:

$$Z = \frac{2A}{4 + \left(\frac{a_C}{a_{sym}}\right) A^{2/3}}$$

Οι τιμές των παραμέτρων είναι $a_C = 0.70877$ MeV και $a_{sym} = 23.19$ MeV.
Με αντικατάσταση των δεδομένων τιμών του A, έχουμε αντίστοιχα τις τιμές:
Στοιχείο B (Z=5): $A = 10 \rightarrow Z = 4.83$
Στοιχείο Al (Z=13): $A = 27 \rightarrow Z = 12.63$
Στοιχείο Co (Z=27): $A = 59 \rightarrow Z = 26.44$
Στοιχείο U (Z=92): $A = 236 \rightarrow Z = 92.33$

— ❋ —

Πρόβλημα [10]

Με βάση τον ημιεμπειρικό τύπο της μάζας να υπολογίσετε την ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο για τα ισότοπα ^{10}B, ^{27}Al, ^{59}Co, και ^{236}U. Πώς συγκρίνονται τα αποτελέσματα με τον πίνακα;

Λύση

Με χρήση της ενέργειας συνδέσεως ανά νουκλεόνιο (δείτε και Σχ. 2), τα ζητούμενα ισότοπα αντιστοιχούν σε:

^{10}B (Z=5, A=10):	$BE/A = 6.75$
^{27}Al (Z=13, A=27):	$BE/A = 8.22$
^{59}Co (Z=27, A=59):	$BE/A = 8.73$
^{236}U (Z=92, A=236):	$BE/A = 7.6$

Οι παραπάνω τιμές έχουν υπολογιστεί σε MeV/A. Σημειώνεται ότι είναι πιθανόν να υπάρχουν διαφορές με την εξίσωση AME2012 που έχει δοθεί στο μάθημα λόγω στρογγυλοποίησης.

— ❋ —

Πρόβλημα [11]

Να βρεθεί η μέση ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο για το ισότοπο ^{58}Fe με χρήση του ημιεμπειρικού τύπου της μάζας. Να υπολογιστούν ξεχωριστά οι όροι που συνεισφέρουν.

Λύση

Σύμφωνα με την εξίσωση της ενέργειας σύνδεσης (AME2012):

$$BE(Z, A) = a_v A - a_s A^{2/3} - a_c \frac{Z^2}{A^{1/3}} - a_{sym} \frac{(A - 2Z)^2}{A} - \delta \cdot a_p A^{-1/2}$$

Element	Z	N	A	Atomic mass M_A (u)	Mass excess $M_A - A$ (μu)	Mass defect ΔM_A (μu)	Binding energy E_B (MeV)	E_B/A (MeV/A)
n	0	1	1	1.008 665	8 665	0	-	-
H	1	0	1	1.007 825	7 825	0	-	-
D	1	1	2	2.014 102	14 102	-2 388	2.22	1.11
T	1	2	3	3.016 049	16 049	-9 106	8.48	2.83
He	2	1	3	3.016 029	16 029	-8 286	7.72	2.57
He	2	2	4	4.002 603	2 603	-30 377	28.30	7.07
He	2	4	6	6.018 886	18 886	-31 424	29.27	4.88
Li	3	3	6	6.015 121	15 121	-34 348	32.00	5.33
Li	3	4	7	7.016 003	16 003	-42 132	39.25	5.61
Be	4	3	7	7.016 928	16 928	-40 367	37.60	5.37
Be	4	5	9	9.012 182	12 182	-62 442	58.16	6.46
Be	4	6	10	10.013 534	13 534	-69 755	64.98	6.50
B	5	5	10	10.012 937	12 937	-69 513	64.75	6.48
B	5	6	11	11.009 305	9 305	-81 809	76.20	6.93
C	6	6	12	12.000 000	0	-98 940	92.16	7.68
N	7	7	14	14.003 074	3 074	-112 356	104.7	7.48
O	8	8	16	15.994 915	-5 085	-137 005	127.6	7.98
F	9	10	19	18.998 403	-1 597	-158 671	147.8	7.78
Ne	10	10	20	19.992 436	-7 564	-172 464	160.6	8.03
Na	11	12	23	22.989 768	-10 232	-200 287	186.6	8.11
Mg	12	12	24	23.985 042	-14 958	-212 837	198.3	8.26
Al	13	14	27	26.981 539	-18 461	-241 495	225.0	8.33
Si	14	14	28	27.976 927	-23 073	-253 932	236.5	8.45
P	15	16	31	30.973 762	-26 238	-282 252	262.9	8.48
K	19	20	39	38.963 707	-36 293	-358 266	333.7	8.56
Co	27	32	59	58.933 198	-66 802	-555 355	517.3	8.77
Zr	40	54	94	93.906 315	-93 685	-874 591	814.7	8.67
Ce	58	82	140	139.905 433	-94 567	-1 258 941	1 172.7	8.38
Ta	73	108	181	180.947 993	-52 007	-1 559 045	1 452.2	8.02
Hg	80	119	199	198.968 254	-31 746	-1 688 872	1 573.2	7.91
Th	90	142	232	232.038 051	38 051	-1 896 619	1 766.7	7.62
U	92	143	235	235.043 924	43 924	-1 915 060	1 783.9	7.59
U	92	144	236	236.045 563	45 563	-1 922 087	1 790.4	7.59
U	92	146	238	238.050 785	50 785	-1 934 195	1 801.7	7.57
Pu	94	146	240	240.053 808	53 808	-1 946 821	1 813.5	7.56

Σχήμα 2: Ενέργειες σύνδεσης ανά νουκλεόνιο για διάφορα ισότοπα

όπου:

$$a_v = 15.6372 \text{ MeV}$$

$$a_s = 17.2819 \text{ MeV}$$

$$a_c = 0.70877 \text{ MeV}$$

$$a_{sym} = 23.19 \text{ MeV}$$

$$a_p = 12.839 \text{ MeV}$$

Με αντικατάσταση προκύπτει αντίστοιχα ότι:

όρος όγκου = +906.9576 MeV

όρος επιφάνειας = - 258.9466 MeV

όρος Coulomb = - 123.7778 MeV

όρος ασυμμετρίας = - 14.39 MeV

όρος ζεύγους (δ = -1 γιατί είναι άρτιος άρτιος) = +1.686 MeV

και συνολική ενέργεια σύνδεσης

$B(26, 58) = 511.529$ MeV

ή ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο:

$B(26, 58)/58 = 8.819$ MeV/A

Πρόβλημα [12]

Να συμπληρωθούν οι παρακάτω αντιδράσεις:
$p + {}^{112}\text{Cd} \rightarrow \gamma + \ldots$
$\alpha + {}^{12}\text{C} \rightarrow {}^{16}\text{O} + \ldots$
${}^{236}\text{U} \rightarrow {}^{140}\text{Xe} + {}^{93}\text{Sr} + \ldots$
διάσπαση α του ^{230}Th
διάσπαση β^- του ^{95}Zr
διάσπαση β^+ του ^{17}F

Λύση

Με εφαρμογή των βασικών αρχών διατήρησης (Q, B κοκ) έχουμε:

$$
\begin{aligned}
{}^{1}_{1}\text{p} + {}^{112}_{48}\text{Cd} &\rightarrow \gamma + {}^{113}_{49}\text{In} \\
{}^{4}_{2}\text{He} + {}^{12}_{6}\text{C} &\rightarrow {}^{16}_{8}\text{O} + \gamma \\
{}^{236}_{92}\text{U} &\rightarrow {}^{140}_{54}\text{Xe} + {}^{93}_{38}\text{S}r + 3n \\
{}^{230}_{90}\text{Th} &\rightarrow {}^{4}_{2}\text{He} + {}^{226}_{88}\text{R}a \\
{}^{95}_{40}\text{Zr} &\rightarrow {}^{95}_{41}\text{Nb} + e^- + \overline{v_e} \\
{}^{17}_{9}\text{F} &\rightarrow {}^{17}_{10}\text{Ne} + e^- + \overline{v_e}
\end{aligned}
$$

Πρόβλημα [13]

Για το δυναμικό Yukawa με $V_o = 40$ MeV και $R = 1.5$ fm να υπολογιστεί ο λόγος ανάμεσα στο πυρηνικό δυναμικό και το δυναμικό Coulomb για αποστάσεις r=1,2,4,8 και 16 fm

Λύση Το δυναμικό Yukawa δίνεται από τον τύπο:

$$V(r) = -V_o \frac{e^{-r/R}}{r/R}$$

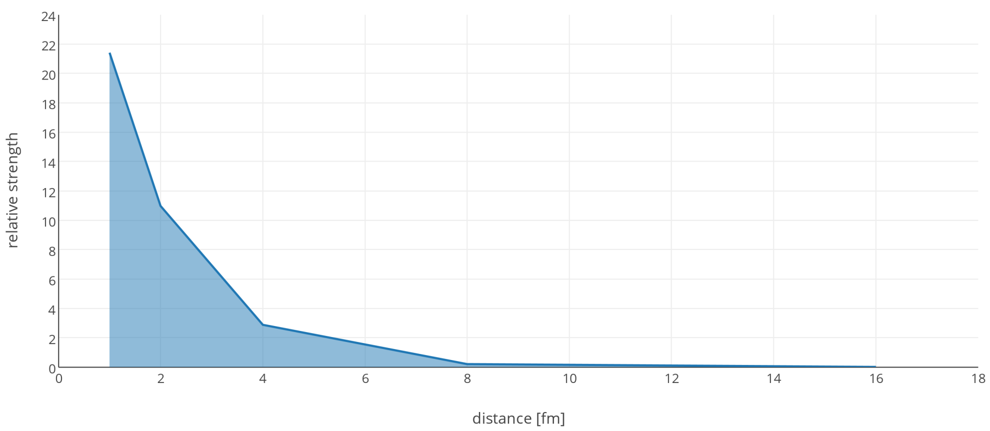
ενώ το δυναμικό Coulomb από τη γνωστή σχέση:

$$V(r) = -\frac{1}{4\pi\epsilon_o}\frac{Ze^2}{r}$$

Επομένως για πρωτόνιο (Z=1) και επειδή $\frac{e^2}{4\pi\epsilon_o} = 1.44\ MeV \cdot fm$ έχουμε τον Πιν. 1 και το Σχ. 3.

r [fm]	V_{nuc} [MeV]	V$_C$ [MeV]	ratio
1	-30.805	-1.44	21.4
2	-7.908	-0.72	10.98
4	-1.042	-0.36	2.89
8	-0.036	-0.18	0.20
16	≈ 0	-0.09	≈ 0

Πίνακας 1: Αναλογία δυναμικού Yukawa ως προς Coulomb



Σχήμα 3: Σχετική ισχύς δυναμικών Yukawa και Coulomb ως συνάρτηση της απόστασης από τον πυρήνα.

Παρατήρηση: είναι εμφανής η σχετική ισχύς των δύο δυναμικών (αλληλεπιδράσεων) εντός του πυρήνα, η οποία κυμαίνεται στις 10-100 φορές υψηλότερη για το πυρηνικό δυναμικό.

Πρόβλημα [14]

Να βρείτε το ολικό σπιν και την ομοτιμία των ^{38}Cl, ^{26}Al, ^{56}Co

Λύση

[α.] $^{38}_{17}$Cl (Z=17, A=38, επομένως N=A-Z=21)

Η διαμόρφωση της θεμελιώδους στάθμης για τα πρωτόνια (π) και τα νετρόνια (ν), αντίστοιχα, είναι:

$$\begin{aligned} \pi &: (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^6(2s_{1/2})^2(1d_{3/2})^1 \\ \nu &: (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^6(2s_{1/2})^2(1d_{3/2})^4(1f_{7/2})^1 \end{aligned}$$

δηλ. δύο ασυζευκτα (περιττά) σωμάτια, το μεν πρωτόνιο σε στάθμη με $j = l - 1/2$, το δε νετρόνιο σε στάθμη με $j = l + 1/2$. Το ολικό σπιν της συγκεκριμένης διαμόρφωσης εμπίπτει στον **κανόνα 1** των Brennan-Bernstein, δηλ. $J = |j_\pi - j\nu| = |3/2 - 7/2| = 2$

Οι αντίστοιχες ομοτιμίες είναι $P = P^\pi \cdot P^\nu = (-1)^2 \cdot (-1)^3 = (-1)^5 = (-1)$, κάνοντας χρήση του ότι $d \rightarrow l = 2$ και $f \rightarrow l = 3$.

Επομένως $J^\pi(^{38}Cl) = 2^-$

[β.] $^{26}_{13}$Al (Z=13, A=26, επομένως N=A-Z=13)

Η τελική διαμόρφωση για τα πρωτόνια (π) και τα νετρόνια (ν), αντίστοιχα, είναι:

$$\begin{aligned} \pi &: (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^5 \\ \nu &: (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^5 \end{aligned}$$

δηλ. δύο ασυζευκτες οπές, σε στάθμες με $j = l + 1/2$. Το ολικό σπιν της συγκεκριμένης διαμόρφωσης εμπίπτει στον **κανόνα 2** των Brennan-Bernstein, δηλ. $J = j_\pi + j_\nu = 5/2 + 5/2 = 5$. Αντίστοιχα, η ομοτιμία είναι:

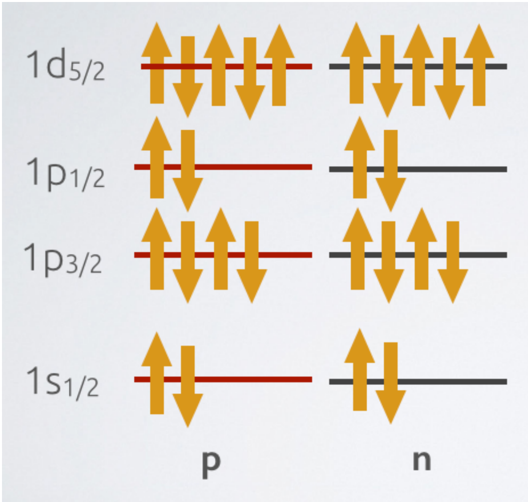
$$P = P^\pi \cdot P^\nu = (-1)^2 \cdot (-1)^2 = (-1)^4 = (+1)$$

Άρα J^π(^{26}Al) = 5^+

[γ.] $^{56}_{27}$Co (Z=27, A=56, επομένως N=A-Z=29)

Η τελική διαμόρφωση για τα πρωτόνια (π) και τα νετρόνια (ν), αντίστοιχα (βλ. Σχ. 4), είναι:

$$\begin{aligned} \pi &: (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^6(2s_{1/2})^2(1d_{3/2})^4(1f_{7/2})^7 \\ \nu &: (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^6(2s_{1/2})^2(1d_{3/2})^4(1f_{7/2})^8(1p_{3/2})^1 \end{aligned}$$



Σχήμα 4: Διάταξη πρωτονίων και νετρονίων σε μονοσωματιδιακές στάθμες του ^{26}Al

Η κατάσταση αυτή αντιστοιχεί σε οπή $j = l + 1/2$ σε με σωμάτιο $j = l + 1/2$, δηλ. εφαρμόζεται ο 3ος κανόνας Brennan-Bernstein: $J = j_1 + j_2 - 1 = 7/2 + 3/2 - 1 = 4$. Και αντίστοιχα η ομοτιμία είναι:

$$P = P^{\pi} \cdot P^{\nu} = (-1)^3 \cdot (-1)^1 = (-1)^4 = (+1)$$

δηλ. η βασική στάθμη είναι: $J^{\pi}(^{56}\text{Co}) = 4^+$

— ※ —

Πρόβλημα [15]

Να βρείτε το ολικό σπιν και την ομοτιμία του ^{64}Cu

Λύση

$^{64}_{29}$Cu (Z=29, A=64, επομένως N=A-Z=35)

Η διαμόρφωση της θεμελιώδους στάθμης για τα πρωτόνια (π) και τα νετρόνια (ν), αντίστοιχα, είναι:

$$\pi : (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^6(2s_{1/2})^2(1d_{3/2})^4(1f_{7/2})^8(2p_{3/2})^1$$
$$\nu : (1s_{1/2})^2(1p_{3/2})^4(1p_{1/2})^2(1d_{5/2})^6(2s_{1/2})^2(1d_{3/2})^4(1f_{7/2})^8(2p_{3/2})^4(1f_{5/2})^3$$

δηλ. δύο ασυζευκτα (περιττά) σωμάτια, το μεν πρωτόνιο σε στάθμη με $j = l + 1/2$, το δε νετρόνιο σε στάθμη με $j = l - 1/2$. Το ολικό σπιν της συγκεκριμένης διαμόρφωσης εμπίπτει στον **κανόνα 1** των Brennan-Bernstein, δηλ. $J = |j_\pi - j\nu| = |3/2 - 5/2| = 1$

Οι αντίστοιχες ομοτιμίες είναι $P = P^\pi \cdot P^\nu = (-1)^1 \cdot (-1)^3 = (-1)^4 = (+1)$, κάνοντας χρήση του ότι $p \to l = 1$ και $f \to l = 3$.

Επομένως $J^\pi(^{64}\text{Cu}) = 1^+$

Πρόβλημα [16]

Να βρείτε το ολικό σπιν και την ομοτιμία του ^{198}Au

Λύση

$^{198}_{79}\text{Au}$ (Z=79, A=198, επομένως N=A-Z=119)

Για τα πρωτόνιο, απαιτούνται τρία ακόμη για να συμπληρωθεί ο φλοιός Z=82, ο οποίος αντιστοιχεί στη συμπληρωμένη στάθμη $(1h_{11/2})$ ($h \to l = 5$, δηλ. στάθμη με $j = l + 1/2$). Αντίστοιχα, τα νετρόνια έχουν 7 νετρόνια στη στάθμη $(1i_{13/2})$ ($i \to l = 6$, δηλ. ξανά στάθμη με $j = l + 1/2$).

$$\pi : [\cdots](1h_{11/2})^9$$
$$\nu : [\cdots](1i_{13/2})^7$$

Στην απλούστερη θεώρηση, τα ζεύγη π–π και ν–ν ακυρώνονται και τα ασύζευκτα σωμάτια καθορίζουν τη συμπεριφόρα της στάθμης, δηλ. η τελική διαμόρφωση μπορεί να γραφεί ως:

$$\pi(1h_{11/2}) \oplus \nu(1i_{13/2})$$

Η περίπτωση αντιστοιχεί στον **κανόνα 2** των Brennan-Bernstein
(δύο σωμάτια ή δύο οπές, $j_\pi = l_\pi \pm 1/2$, $j_\nu = l_\nu \pm 1/2$, οπότε $J = |j_\pi \pm j_\nu|$), δηλ.

$$J = |j_\pi + j_\nu| = |13/2 + 11/2| = 12$$

με ομοτιμία $(-1)^{5+6} = (-1)$.

Η αντίστοιχη ισομερής στάθμη θα είναι $J = |j_\pi - j_\nu| = |13/2 - 11/2| = 1$ με αρνητική ομοτιμία.

Σημειώνεται ότι με τα ίδια επιχειρήματα, μπορεί κάποιος να βρει το ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα για τις βασικές στάθμες των ^{196}Au και ^{200}Au, τα οποία διαφέρουν μόνο κατά ένα ζεύγος νετρονίων στην ίδια στάθμη κι επομένως δε συνεισφέρει στην τελική διαμόρφωση της στάθμης.

Πρόβλημα [17]

Να βρείτε η μαγνητική διπολική ροπή του ^{17}O

Λύση

Το ^{17}O διαθέτει ένα παραπάνω νετρόνιο από το διπλά μαγικό ισότοπο ^{16}O. Το ασύζευκτο αυτό νετρόνιο βρίσκεται στο φλοιό νετρονίων $1d_{5/2}$, δηλ. σε φλοιό με $j = l + 1/2$.

Με απευθείας εφαρμογή του τύπου $\mu = \frac{1}{2} g_\nu^s \mu_N$ που αντιστοιχεί σε τέτοιο φλοιό, βρίσκει κανείς ότι:

$$\mu = \frac{1}{2} \cdot (-3.826)\mu_N = -1.913\mu_N$$

Η αντίστοιχη πειραματική τιμή του ^{17}O έχει μετρηθεί $-1.89379(9)\mu_N$.

Πρόβλημα [18]

Για το ^{177}Hf Q=+3.0 e-barns. Να υπολογιστεί ο λόγος των ημιαξόνων του πυρήνα

Λύση

$$Q/e = \frac{2}{5} Z(\alpha^2 - c^2)$$

Επομένως

$$\alpha^2 - c^2 = \frac{5Q/e}{2Z} = \frac{5 \cdot 3e \cdot 10^{-24} cm^2/e}{2 \cdot 72} = 1.042 \cdot 10^{-25} cm^2$$

Από την εξίσωση του ελλειψοειδούς:

$$R^2 = \frac{1}{2}(\alpha^2 + c^2)$$

όπου $R = R_o A^{1/3} = 1.2 \cdot 10^{-13} \cdot 177^{1/3}$ cm. Με αντικατάσταση:

$$\alpha^2 + c^2 = 2(1.2 \cdot 10^{-13} cm \cdot 177^{1/3})^2 = 9.079 \cdot 10^{-25} cm^2$$

Και τελικά, $\alpha = 7.11 \cdot 10^{-13}$ cm, $c = 6.34 \cdot 10^{-13}$ cm, άρα:

$$a/c = 1.12$$

Πρόβλημα [19]

Να υπολογιστεί η ενέργεια ανάκρουσης του πυρήνα ^{69}Zn για την εσωτερική μετάβαση (IT) $\frac{9}{2}^{+} \to \frac{1}{2}^{1}$. (Δίνεται η μάζα M=68.297u)

Λύση

Η ενέργεια ανάκρουσης του πυρήνα δίνεται από τη σχέση:

$$T_R = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2}$$

Επομένως με αντικατάσταση (βρείτε την ενέργεια σε πίνακες ή στη βάση δεδομένων NUDAT):

$$T_R = \frac{0.439 \text{ keV}}{2 \times 68.297 \times 931.5 \text{ MeV}/c^2 \times c^2} = 1.5 \times 10^{-6} \text{ MeV}$$

Η τιμή της ενέργειας είναι αρκετές τάξεις μεγέθους μικρότερη από την ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου, επομένως θεωρείται αμελητέα σε υπολογισμούς.

Πρόβλημα [20]

Να υπολογιστεί η ενέργεια ανάκρουσης του πυρήνα ^{12}C ο οποίος εκπέμπει φωτόνιο ενέργειας 15.1 MeV.

Λύση

Η αποδιέγερση είναι: $^{12}\text{C}^* \to {}^{12}\text{C} + \gamma$ με ενέργεια φωτονίου $E_\gamma = 15.1$ MeV.

Παρόμοια με πριν:

$$T_R = \frac{E_\gamma^2}{2Mc^2} = \frac{15.1^2}{2 \times 12 \times 931.5} = 1.02 \times 10^{-2} \text{ MeV}$$

μιας και η μάζα του ^{12}C είναι εξ ορισμού ίση με 12 amu.

— ✾ —

Πρόβλημα [21]

Με χρήση των κανόνων επιλογής να βρεθούν οι δυνατοί τρόποι ακτινοβολίας της αποδιέγερσης γ του ^{23}Na (E_γ = 2080 keV) από την αρχική στάθμη $\frac{7}{2}^+$ στην τελική $\frac{3}{2}^+$.

Λύση

Για την αποδιέγερση $\frac{7}{2}^+ \to \frac{3}{2}^+$ του ^{23}Na, ισχύει ότι

$$|7/2 - 3/2| \leq L \leq 7/2 + 3/2 \Rightarrow 2 \leq L \leq 5$$

Επομένως, οι δυνατές τιμές του L είναι 2, 3, 4 και 5. Επειδή η ομοτιμία δεν αλλάζει κατά τη μετάβαση στάθμης, ο κανόνας επιλογής δίνει ως δυνατά πολύπολα τα:

$$E2, M3, E4, M5$$

Από αυτά, το υπερισχύον πολύπολο είναι το E2.

— ✾ —

Πρόβλημα [22]

Η αποδιέγερση της ισομερούς στάθμης στο ισότοπο ^{69}Zn πραγματοποιείται με εκπομπή φωτονίου με E_γ = 0.439 MeV. Να βρεθεί ο λόγος του μήκος κύματος του φωτονίου ως προς τη διάμετρο του πυρήνα.

Λύση

Για φωτόνιο ενέργειας E_γ, ισχύει $E_\gamma = h\nu$. Και άρα ισοδύναμα: $\nu = \frac{E_\gamma}{h}$.

Όμως ισχύει επίσης ότι:

$$\lambda\nu = c \Rightarrow \lambda\frac{E_\gamma}{h} = c$$

$$\lambda = \frac{hc}{E_\gamma} = \frac{\hbar c}{2\pi E_\gamma}$$

Με αντικατάσταση τιμών στο κλάσμα, $\hbar c = 197$ MeV $\cdot$ fm, καταλήγουμε στο $\lambda = 2820$ fm

Αντίστοιχα, η διάμετρος του πυρήνα είναι $D = 2R$ με $R = 1.2 \times A^{1/3}$ fm.

$$D = 2.4 \times 61^{1/3} = 9.45 \text{ fm}$$

Ο ζητούμενος λόγος είναι λ_γ/D ≈ 298.

— ✾ —

Πρόβλημα [23]

Με χρήση των κανόνων επιλογής να χαρακτηρίσετε τη μετάβαση από την ισομερή στάθμη στα 0.439 MeV $\left(\frac{9}{2}^+\right)$ του ^{69}Zn στη βασική στάθμη $\left(\frac{1}{2}^-\right)$. Κατόπιν, να υπολογιστούν οι εκτιμήσεις Weisskopf για τις επιτρεπόμενες μεταβάσεις και να συγκριθούν με τα πειραματικά δεδομένα.

Λύση

Με χρήση των κανόνων επιλογής:

$$\left|\frac{9}{2} - \frac{1}{2}\right| \leq L \leq \frac{9}{2} + \frac{1}{2}$$

δηλ. L=4 ή 5. Ταυτόχρονα, η ομοτιμία μεταβάλλεται μεταξύ αρχικής και τελικής στάθμης, επομένως οι κανόνες επιλογής δίνουν ως δυνατά πολύπολα τα M4, E5. Από άποψη ισχύος, τα δύο αυτά πολύπολα είναι ανταγωνίσιμα μεταξύ τους.

Σε ό,τι αφορά τις εκτιμήσεις Weisskopf, με απλή εφαρμογή των τύπων για M4/E5, έχουμε:

$$M4: \ \lambda_{sp}(M4) = 3.27 \times 10^{-6} A^2 E_\gamma^9 = 7.66 \times 10^{-6} \ s^{-1}$$

$$E5: \ \lambda_{sp}(E5) = 2.40 \times 10^{-12} A^{10/3} E_\gamma^{11} = 3.77 \times 10^{-10} \ s^{-1}$$

Από τη βάση δεδομένων NUDAT, βρίσκει κανείς ότι

$$\lambda_{exp}(M4) = \frac{\ln 2}{t_{1/2}} = \frac{\ln 2}{14 \ h} = 13.7 \times 10^{-6} \ s^{-1}$$

δηλ. $\lambda_{exp} \approx 2 \times \lambda_{sp}(M4)$

Η διαφορά ερμηνεύεται από την ύπαρξη περισσοτέρων του ενός ρευμάτων (σωματίων) εντός του πυρήνα, τα οποία συνεισφέρουν στη μετάβαση μεταξύ των σταθμών. Παρ'όλ'αυτά, η συνεισφορά συλλογικών βαθμών ελευθερίας (συμμετοχή πολλών νουκλεονίων, μαζικά) είναι σχετική μικρή.

— ※ —

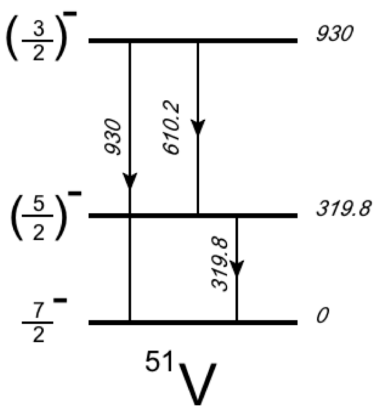
Πρόβλημα [24]

Το ισότοπο ^{51}V έχει βασική στάθμη με $J^\pi = \frac{7}{2}^-$, ενώ διαθέτει δύο διεγερμένες στάθμες, μία σε ενέργεια 319.8 keV και $J^\pi = \left(\frac{5}{2}^-\right)$ και μια σε ενέργεια 930 keV και $J^\pi = \left(\frac{3}{2}^-\right)$

- να σχεδιαστεί το ακριβές ενεργειακό διάγραμμα
- να βρεθούν όλες οι δυνατές αποδιεγέρσεις μεταξύ των σταθμών
- να καθοριστούν ποια πολύπολα ευθύνονται για αυτές

Λύση

Το ενεργειακό διάγραμμα εικονίζεται στο Σχ. 5 Με χρήση των κανόνων επιλογής, οι



Σχήμα 5: Το ενεργειακό διάγραμμα του ισοτόπου ^{51}V σε χαμηλές ενέργειες

μεταβάσεις που εικονίζονται έχουν ως εξής:

$(3/2)^- \to (7/2)^-$ / 930 keV:

$\Delta\pi = +$, L= 2, 3, 4, 5
Επομένως: E2, M3, E4, M5. Κυρίαρχο είναι το E2

$(3/2)^- \to (5/2)^-$ / 610.2 keV:

$\Delta\pi = +$, L= 1, 2, 3, 4
Επομένως: M1, E2, M3, E4. Κυρίαρχα είναι τα M1,E2

$(5/2)^- \to 7/2^-$ / 319.8 keV:

$\Delta\pi = +$, L= 1, 2, 3, 4, 5, 6
Επομένως: M1, E2, M3, E4, M5, E6. Κυρίαρχα είναι τα M1,E2

— ※ —

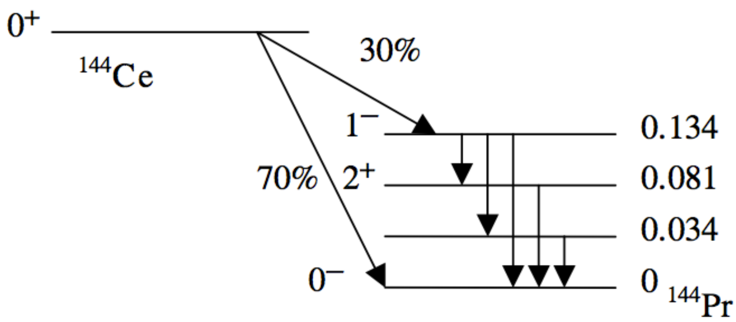
Πρόβλημα [25] Η αποδιέγερση β του ισοτόπου ^{144}Ce δίνεται στο Σχ. 6.

α. Τι είδους είναι η διάσπαση προς το επίπεδο με $I^\pi = 1^-$

β. Τι τιμή $\log ft$ περιμένει κανείς για αυτή τη διάσπαση;

γ. Γιατί δεν καταγράφεται διάσπαση β προς το ενεργειακό επίπεδο με $I^\pi = 2^+$;

Λύση



Σχήμα 6: Αποδιέγερση β του ^{144}Ce

α. Υπάρχει αλλαγή σπιν κατά 1 μονάδα (ΔΙ=1) και αλλαγή ομοτιμίας. Επομένως, είναι πρώτη απαγορευμένη.

β. Στην περίπτωση της πρώτης απαγορευμένης διάσπασης β, υπάρχει ένα εύρος τιμών του $\log ft \approx 6 - 10$.

γ. Η περίπτωση της διάσπασης β για $0^+ \to 2^+$ δεν μπορεί να υπάρξει μιας και είναι μόνο επιτρεπτή ως δεύτερη απαγορευμένη. (Είναι ΔΙ=2, χωρίς αλλαγή ομοτιμίας)

— ※ —

Πρόβλημα [26] Στο μέσο ανθρώπινο σώμα βάρους 67 kg, υπάρχει 18% άνθρακα. Δεδομένου ότι η συγκέντρωση ^{14}C ως προς το σύνολο του άνθρακα είναι ίση με $1.3 \cdot 10^{-12}$ και ο μέσος χρόνος ζωής του, $\tau = 8627$ a, να βρεθούν:

α Η ενεργότητα του ^{14}C στο μέσο ανθρώπινο σώμα

β Αν η ενεργότητα αυτή αντιστοιχεί στην αρχική ενεργότητα ενός αρχαιολογικού ευρήματος σε προϊστορικό τάφο, ενώ η σημερινή ενεργότητα μετριέται ίση με 440 Bq, πόσο παλιό είναι το εύρημα;

Λύση

[α] Με τα δεδομένα του προβλήματος, το 18% είναι περίπου 12.06 kg άνθρακα. Η ποσότητα αυτή αντιστοιχεί σε:

$$12.06\ kg = 12060\ g \approx 10^3\ mol = 10^3 \cdot N_A$$

όπου $N_A = 6.022 \cdot 10^{23}$, ο αριθμός Avogadro

Με αναγωγή στη συγκέντρωση του ^{14}C, η ποσότητά του είναι ίση με:

$$N(^{14}\mathrm{C}) = 10^3 \cdot 1.3 \cdot 10^{-12} N_A = 7.82 \cdot 10^{14}$$

άτομα ^{14}C. Μέσω του ορισμού της ενεργότητας:

$$A(^{14}\mathrm{C}) = \frac{N(^{14}\mathrm{C})}{\tau}$$

και με μετατροπή του μέσου χρόνου ζωής, τ = 8627 a=2.721·10^{11} s η ενεργότητα υπολογίζεται σε:

$$A(^{14}\mathrm{C}) = \frac{7.82 \cdot 10^{14}}{2.721 \cdot 10^{11}\ s} = 2.87 \cdot 10^3\ Bq = 2.87\ kBq$$

[β] Με χρήση του εκθετικού νόμου διάσπασης:

$$A(t) = A(0) \exp(-t/\tau) \Rightarrow 440 = 2870 \exp(-t/8627) \Rightarrow \exp(-t/8627) = 0.1533$$

επομένως με λογαρίθμιση των δύο πλευρών της εξίσωσης:

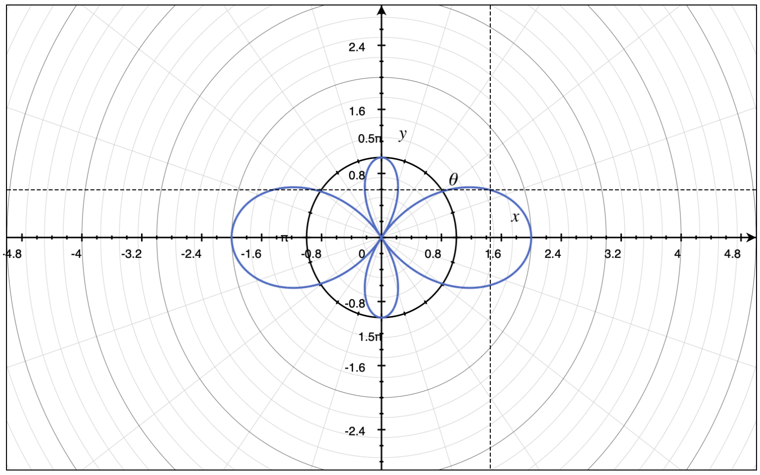
$$-t/8627 = -1.8753 \Rightarrow t = 16178\ a$$

δηλ. η ηλικία του ευρήματος είναι 16'178 έτη.

Πρόβλημα [27] Η εκπομπή ακτινοβολίας γ σε ένα πυρήνα που αποδιεγείρεται μέσω E2 παρουσιάζει γωνιακή κατανομή σύμφωνα με τη σχέση:

$$W(\theta) = 3\cos^2\theta - 1$$

όπου θ η πολική γωνία. (α) Να σχεδιάσετε σε πολικό χαρτί τη γωνιακή κατανομή (β) Σε ποια γωνία θα καταγράψει τη μέγιστη αλλαγή στις καταγραφόμενες ακτίνες γ ένας κινούμενος ανιχνευτής ο οποίος βρίσκεται σε σταθερή ακτίνα από το κέντρο;



Σχήμα 7: Γωνιακή κατανομή E2

Λύση (α) Η γωνιακή κατανομή εμφανίζεται στην Εικ. 7

(β) Η μέγιστη αλλαγή συμπίπτει με το μέγιστο της παραγώγου $dW(\theta)/d\theta$. Επομένως, στο ακρότατο, $dW(\theta)/d\theta = 0$ ή ισοδύναμα $6\sin\theta\cos\theta = 0$ που σημαίνει γωνίες ϑ=0 ή 90.

Πρόβλημα [28] Τι μέρος της αρχικής ποσότητας πυρήνων ^{37}Ar θα έχει διασπαστεί μετά από ένα έτος; Τι θα έχει απομείνει μετά από 180 h; Δίνεται t1/2=35 d.

Λύση

Είναι γνωστό ότι $N(t) = N(0)e^{-\lambda t}$, όπου $\lambda = \frac{\ln 2}{t_{1/2}}$.

Σε 1 έτος = 365 d έχουν απομείνει:

$$N(365\ d) = N(0)\exp\left(-\lambda\frac{365\ d}{35\ d}\right)$$

και επομένως θα έχουν διασπασθεί

$$N(0) - N(365) = N(0) - N(0)\exp\left(-\lambda\frac{365\ d}{35\ d}\right) = N(0)\left(1 - \exp\left(-\lambda\frac{365\ d}{35\ d}\right)\right)$$

ή αντικαθιστώντας

$$N(0) - N(365) = N(0) \times 0.999$$

Ομοίως, θα έχουνε απομείνει $N(180\ h) = N(0)\exp\left(-\lambda\frac{180\ h}{35\cdot 24h}\right) = 0.862N(0)$