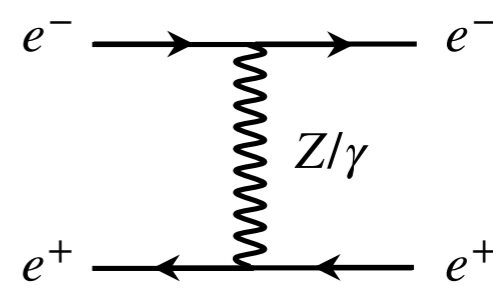
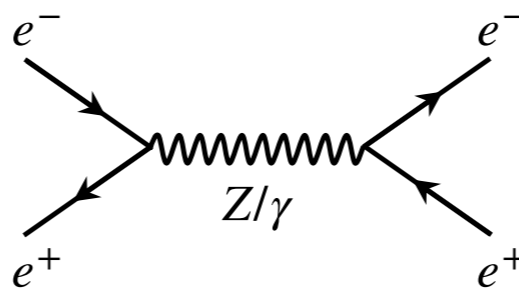
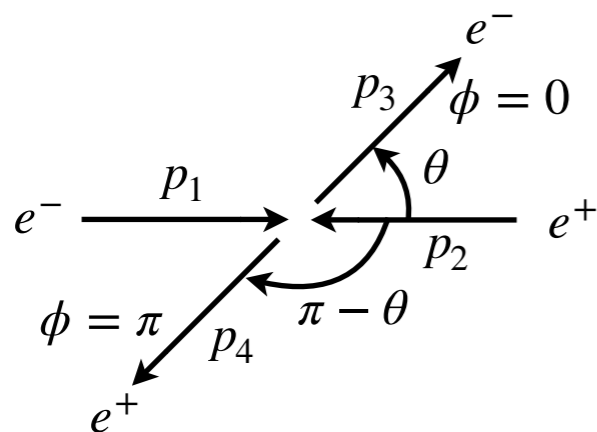


ΑΚΑΔΗΜΑΪΚΟ ΕΤΟΣ 2023 — 2024
ΕΙΣΑΓΩΓΗ ΣΤΗΝ ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ & ΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ
ΤΜΗΜΑ Β΄ Κ. ΒΕΛΛΙΔΗΣ — Θ. ΜΕΡΤΖΙΜΕΚΗΣ
ΛΥΣΕΙΣ ΑΣΚΗΣΕΩΝ ΣΤΑ ΣΤΟΙΧΕΙΩΔΗ ΣΩΜΑΤΙΑ

2.1 Η αντίδραση $e^+ + e^- \rightarrow e^+ + e^-$ λέγεται σκέδαση Bhabha. Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman χαμηλότερης τάξης που την περιγράφουν και υπολογίστε την μάζα του εικονικού φωτονίου που ανταλλάσσουν τα δύο λεπτόνια σε κάθε διάγραμμα. Ποια είναι η ταχύτητα του φωτονίου σε καθεμιά περίπτωση;

Η αντίδραση μπορεί να γίνει με δύο τρόπους: με εξαΰλωση του αρχικού ζεύγους και σχηματισμό του τελικού όππου ενδιάμεσα δημιουργείται ένα φωτόνιο (ή ένα μποζόνιο Z) και με ανταλλαγή ενός φωτονίου (ή μποζονίου Z)



Θεωρούμε ότι στο ΚΜ (που συμπίπτει με το εργαστήριο για συγκρουόμενες δέσμες) τα αρχικά λεπτόνια κινούνται αντίθετα με 4-ορμές p_1 και p_2 και ενέργεια E το καθένα και ότι τα εξερχόμενα λεπτόνια, που πρέπει επίσης να έχουν ενέργεια E το καθένα, εκπέμπονται σε γωνία θ ως προς τη διεύθυνση των αρχικών με 4-ορμές p_3 και p_4 , οπότε, από τη διατήρηση της συνολικής 4-ορμής, η μάζα και η ταχύτητα του εικονικού φωτονίου (ή μποζονίου Z) στο διάγραμμα εξαΰλωσης-σχηματισμού είναι

$$m^2 = (p_1 + p_2)^2 \simeq 2p_1 \cdot p_2 = 2E_1 E_2 [1 - (-1)] = 4E^2 \Rightarrow m = 2E \Rightarrow \beta = \frac{|\vec{p}_1 + \vec{p}_2|}{E + E} = \frac{0}{2E} = 0$$

και στο διάγραμμα ανταλλαγής είναι

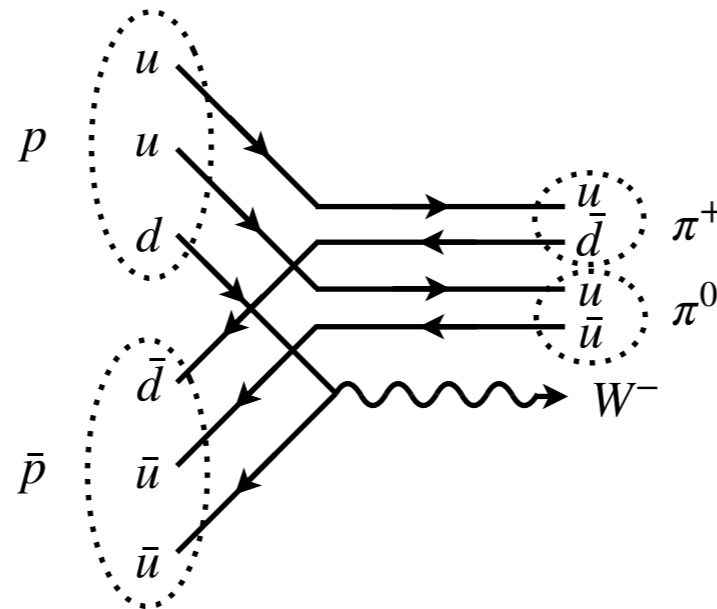
$$m^2 = (p_1 - p_3)^2 \simeq -2p_1 \cdot p_3 = -2E_1 E_3 (1 - \cos \theta) = -4E^2 \sin^2 \frac{\theta}{2} \Rightarrow m = i2E \sin \frac{\theta}{2} \Rightarrow \beta = \frac{|\vec{p}_1 - \vec{p}_3|}{E - E} = \frac{2E \sin(\theta/2)}{0} = \infty$$

2.2 Το W^- ανακαλύφθηκε το 1983 στο CERN από σκέδαση πρωτονίου-αντιπρωτονίου $p + \bar{p} \rightarrow W^- + X$, όπου το X παριστάνει ένα ή περισσότερα σωματίδια. Ποια είναι η πιθανότερη κατάσταση X ; Σχεδιάστε ένα διάγραμμα Feynman για την αντίδραση με το πιθανότερο X και εξηγήστε γιατί αυτό το X είναι πιθανότερο από άλλες εκδοχές του.

Η πιθανότερη κατάσταση X είναι ένα ζεύγος ουδέτερου και θετικού πιονίου, ώστε να εξασφαλίζεται η διατήρηση του ηλεκτρικού φορτίου:



Ο λόγος που αυτή η κατάσταση είναι η πιθανότερη είναι ότι δεν απαιτεί καμία αλληλεπίδραση εκτός από την ασθενή κορυφή παραγωγής του μποζονίου W^- , ενώ τα πιόνια παράγονται με απλή αναδιάταξη των κουάρκ των αρχικών αδρονίων:



2.3 (a) Ποια διάσπαση θεωρείτε πιθανότερη: $\Xi^-(dss) \rightarrow \Lambda(uds) + \pi^-$ ή $\Xi^- \rightarrow n + \pi^-$; Δικαιολογήστε την απάντησή σας. **(b)** Ποια διάσπαση του μεσονίου $D^0(u\bar{c})$ είναι πιθανότερη: $D^0 \rightarrow K^- + \pi^+$, $D^0 \rightarrow \pi^- + \pi^+$ ή $D^0 \rightarrow K^+ + \pi^-$; Σχεδιάστε τα σχετικά διαγράμματα Feynman και δικαιολογήστε την απάντησή σας. **(c)** Το μεσόνιο $B^0(d\bar{b})$ διασπάται σε D , σε K ή σε π μεσόνια; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.

(a) Στη διάσπαση $\Xi^-(dss) \rightarrow \Lambda(uds) + \pi^-(d\bar{u})$ ένα παράδοξο κουάρκ μεταπίπτει από τη δεύτερη στην πρώτη γενιά με εκπομπή ενός μποζονίου W εκτός φλοιού μάζας, που στη συνέχεια μετατρέπεται σε π μεσόνιο. Η μετάπτωση αυτή χαρακτηρίζεται από μεταβολή της παραδοξότητας κατά μία μονάδα ($\Delta S = 1$):

$$\Xi^- = dss \rightarrow ds + uW^- \rightarrow uds + d\bar{u} = \Lambda + \pi^-$$

Αυτή η μετάπτωση έχει μικρή πιθανότητα λόγω της αλλαγής γενιάς. Είναι, όπως λέμε, “Cabibbo-suppressed”, δηλαδή εμποδίζεται (χωρίς να απαγορεύεται) από μια παράμετρο αλλαγής γενιάς που περιγράφεται από το ημίτονο μιας μικρής φαινομενολογικής γωνίας (γωνία Cabibbo, περίπου 13°). Η διάσπαση $\Xi^-(dss) \rightarrow n(udd) + \pi^-(d\bar{u})$ χαρακτηρίζεται από μεταβολή της παραδοξότητας κατά δύο μονάδες ($\Delta S = 2$), άρα είναι “διπλά συμπίεσμένη” (“doubly Cabibbo-suppressed”):

$$\Xi^- = dss \rightarrow d + uW^- + uW^- \rightarrow d + ud\bar{u} + ud\bar{u} \rightarrow udd + d\bar{u} + u\bar{u} \rightarrow n + \pi^-$$

όπου το ζεύγος κουάρκ-αντικουάρκ $u\bar{u}$ ερμηνεύεται είτε ως εικονικό π^0 που απορροφάται από το νετρόνιο είτε ότι εξαυλώνεται σε γλουόνιο που απορροφάται από τα κουάρκ της τελικής κατάστασης. Επομένως, αυτή η διάσπαση είναι λιγότερο πιθανή από την προηγούμενη.

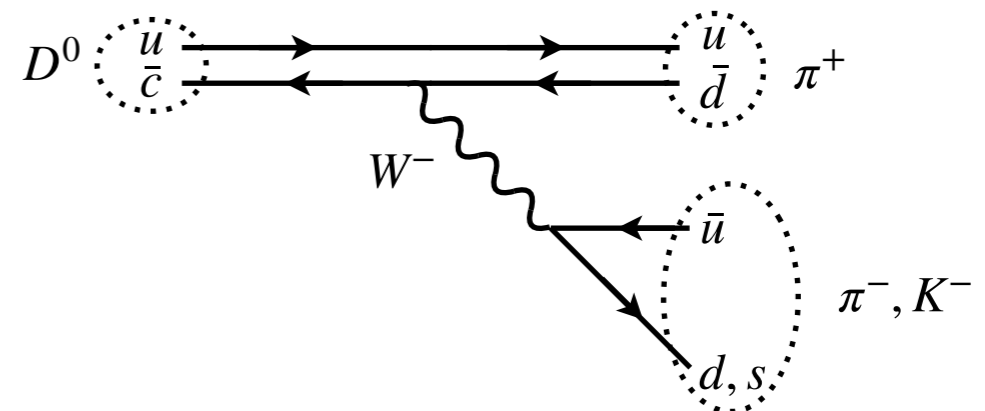
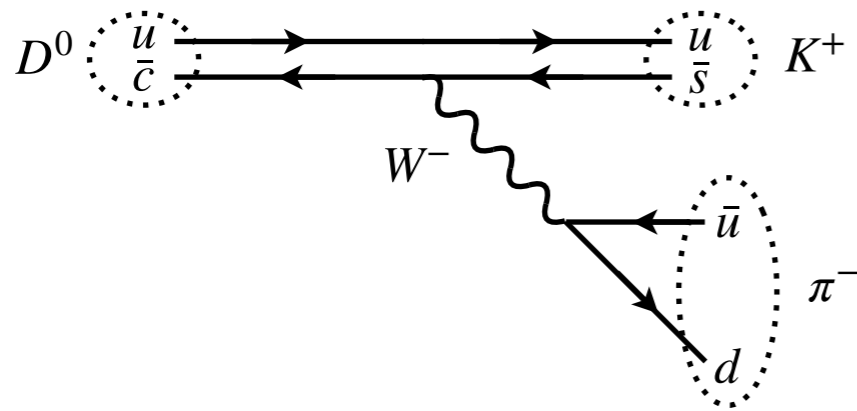
(b) Οι τρεις τρόποι διάσπασης του μεσονίου D^0 αναλύονται σε γεύσεις κουάρκ ως εξής:

$$D^0 = u\bar{c} \rightarrow u + \bar{s}W^- \rightarrow u\bar{s} + d\bar{u} = K^+ + \pi^-$$

$$D^0 = u\bar{c} \rightarrow u + \bar{d}W^- \rightarrow u\bar{d} + d\bar{u} \rightarrow \pi^+ + \pi^-$$

$$D^0 = u\bar{c} \rightarrow u + \bar{d}W^- \rightarrow u\bar{d} + s\bar{u} \rightarrow \pi^+ + K^-$$

Ο πρώτος τρόπος περιλαμβάνει μία αλλαγή γεύσης στην ίδια γενιά (δεύτερη), τη μετάπτωση ενός γοητευτικού (αντι)κουάρκ σε παράδοξο, ενώ ο δεύτερος τρόπος περιλαμβάνει μία αλλαγή γεύσης μεταξύ διαφορετικών γενιών (από τη δεύτερη στην πρώτη): τη μετάπτωση του γοητευτικού αντικουάρκ σε κάτω αντικουάρκ της πρώτης γενιάς. Η αλλαγή γενιάς μειώνει πάντα την πιθανότητα μετάβασης, άρα ο πρώτος και ο τρίτος τρόπος διάσπασης είναι πιθανότεροι από το δεύτερο. Ο τρίτος τρόπος περιλαμβάνει δύο αλλαγές γεύσεις μεταξύ διαφορετικών γενιών: τη μετάπτωση του γοητευτικού αντικουάρκ σε κάτω αντικουάρκ της πρώτης γενιάς και τη διάσπαση του μποζονίου W^- σε ένα επάνω κουάρκ της πρώτης γενιάς κι ένα παράδοξο κουάρκ της δεύτερης γενιάς. Άρα, αυτός ο τρόπος διάσπασης είναι ο λιγότερο πιθανός.



(c) Οι τρεις τρόποι διάσπασης του μεσονίου B^0 μπορούν να αναλυθούν σε γεύσεις κουάρκ ως εξής:

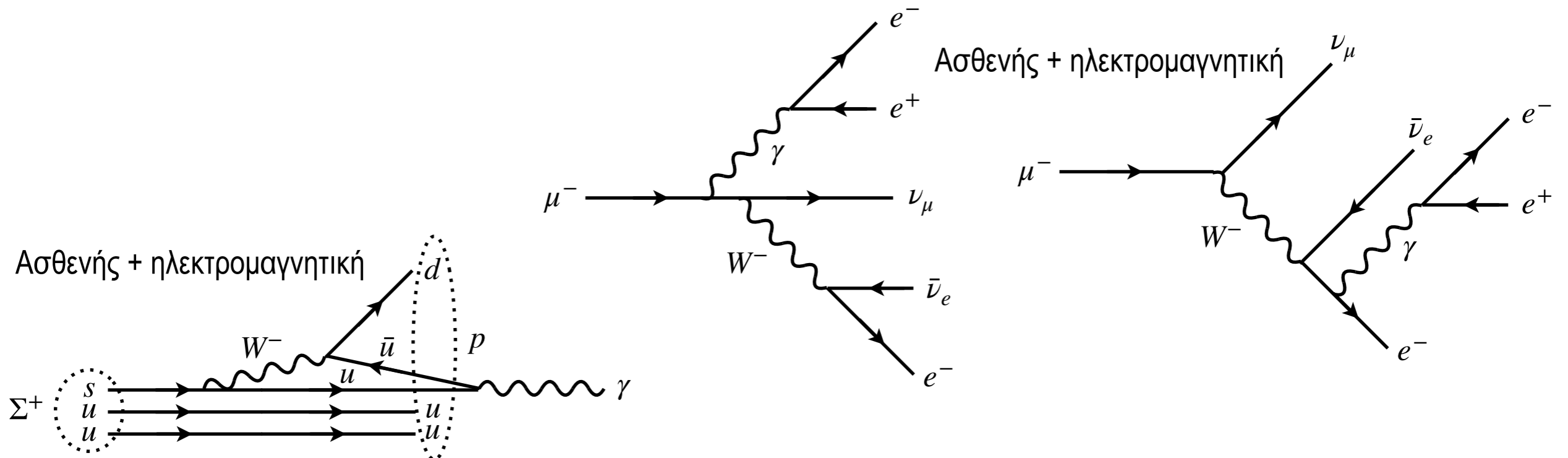
$$B^0 = d\bar{b} \rightarrow d + \bar{c}W^+ \rightarrow d + \bar{c} + u\bar{d} \rightarrow u\bar{c} + d\bar{d} = D^0 + \pi^0$$

$$B^0 = d\bar{b} \rightarrow d + \bar{c}W^+ \rightarrow d + \bar{s}W^- + u\bar{d} \rightarrow d\bar{s} + \bar{u}d + u\bar{d} = K^0 + \pi^- + \pi^+$$

$$B^0 = d\bar{b} \rightarrow d + \bar{c}W^+ \rightarrow d + \bar{s}W^- + u\bar{d} \rightarrow d + \bar{u}W^+ + \bar{u}d + u\bar{d} \rightarrow \bar{u}d + u\bar{d} + \bar{u}d + u\bar{d} = \pi^- + \pi^+ + \pi^- + \pi^+$$

Επομένως, και οι τρεις τρόποι είναι καταρχήν δυνατοί, αλλά ο πρώτος περιλαμβάνει μόνο μία αλλαγή γενιάς ($\bar{b} \rightarrow \bar{c}$), ο δεύτερος δύο αλλαγές ($\bar{b} \rightarrow \bar{c}$, $\bar{c} \rightarrow \bar{s}$) και τρίτος τρεις ($\bar{b} \rightarrow \bar{c}$, $\bar{c} \rightarrow \bar{s}$, $\bar{s} \rightarrow \bar{u}$). Άρα, ο πρώτος τρόπος είναι πιθανότερος από το δεύτερο και αυτός πιθανότερος από τον τρίτο.

2.4 Κάποιες αντιδράσεις περιλαμβάνουν περισσότερες από μία αλληλεπιδράσεις. Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman χαμηλότερης τάξης για τις αντιδράσεις $\mu^- \rightarrow e^- + e^- + e^+ + \nu_\mu + \bar{\nu}_e$ και $\Sigma^+(uus) \rightarrow p + \gamma$. Ποιες αλληλεπιδράσεις είναι υπεύθυνες για αυτές τις διασπάσεις;



2.5 Θεωρήστε τη διάσπαση ενός ψευδοβαθμωτού καονίου σε δύο πιόνια: $K^\pm \rightarrow \pi^\pm \pi^0$ και $K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-$ ή $K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0$.

(a) Βρείτε το συνολικό ισοσπίν του τελικού ζεύγους πιονίων. **(b)** Η μετάπτωση του καονίου σε πιόνιο έχει $\Delta S = 1$. Η αλληλεπίδραση που προκαλεί τη διάσπαση μετατρέπει ένα καόνιο με ισοσπίν $1/2$ σε πιόνιο με ισοσπίν 1 , ενώ το δεύτερο πιόνιο παράγεται για να διατηρηθούν η ενέργεια και η ορμή στο ΚΜ. Συνεπώς η αλληλεπίδραση περιλαμβάνει ένα γραμμικό συνδυασμό μιας συνιστώσας με ισοσπίν $|1/2 - 1| = 1/2$ και μιας συνιστώσας με ισοσπίν $1/2 + 1 = 3/2$, παράγοντας δύο πλάτη διάσπασης $K \rightarrow 2\pi$ με ισοσπίν $1/2$ και ισοσπίν $3/2$, $a_{1/2}$ και $a_{3/2}$ αντίστοιχα. Δείξτε ότι η διάσπαση $K^0 \rightarrow 2\pi$ περιγράφεται από ένα γραμμικό συνδυασμό των δύο πλατών (δηλαδή συνεισφέρουν και οι δύο συνιστώσες ισοσπίν της αλληλεπίδρασης), ενώ η διάσπαση $K^\pm \rightarrow 2\pi$ περιγράφεται μόνο από το πλάτος με ισοσπίν $3/2$. Με δεδομένη τη σχέση των χρόνων ζωής του K^0 και του K^\pm , $10^{-10} \text{ s} \sim \tau_{K^0} \ll \tau_{K^\pm} \sim 10^{-8} \text{ s}$, τι συμπέρασμα βγάζετε για τα πλάτη $a_{1/2}$ και $a_{3/2}$; © Σχεδιάστε τα σχετικά διαγράμματα Feynman χαμηλότερης τάξης και ταυτοποιήστε τις συνεισφορές τους στα πλάτη $a_{1/2}$ και $a_{3/2}$.

(a) Το τελικό ζεύγος πιονίων έχει συνολικό σπιν $S(\pi_1 \pi_2) = 0$, αφού τα δύο πιόνια δεν έχουν σπιν, και συνολική τροχιακή στροφορμή $L(\pi_1 \pi_2) = 0$, ώστε να διατηρείται η συνολική στροφορμή του αρχικού καονίου που στο ΚΜ ταυτίζεται με το σπιν του και συνεπώς είναι 0. Άρα η συζυγία του ζεύγους είναι:

$$C(\pi_1 \pi_2) = (-1)^{I(\pi_1)+I(\pi_2)-I(\pi_1 \pi_2)} (-1)^{L(\pi_1 \pi_2)+S(\pi_1 \pi_2)} = (-1)^{1+1-I(\pi_1 \pi_2)} (-1)^{0+0} = (-1)^{I(\pi_1 \pi_2)}$$

Όμως τα δύο πιόνια είναι μποζόνια και συνεπώς η κυματοσυνάρτηση του ζεύγους που παράγεται από τη διάσπαση του K^0 πρέπει να είναι συμμετρική κάτω από ανταλλαγή των δύο πιονίων. Η δράση του τελεστή συζυγίας πάνω στην κυματοσυνάρτηση του ζεύγους $\pi^+ \pi^-$ ή $\pi^0 \pi^0$ συνεπάγεται την ανταλλαγή τους, επομένως η συζυγία του ζεύγους πρέπει να είναι θετική και άρα πρέπει το συνολικό ισοσπίν $I(\pi_1 \pi_2)$ της τελικής κατάστασης να είναι άρτιο. Η σύνθεση των ισοσπίν $I(\pi_1) = I(\pi_2) = 1$ των δύο πιονίων, $|I(\pi_1) - I(\pi_2)| \leq I(\pi_1 \pi_2) \leq I(\pi_1) + I(\pi_2)$, δίνει τις επιτρεπτές τιμές $I(\pi_1 \pi_2) = 0, 1$ και 2 , από τις οποίες μόνο οι 0 και 2 είναι άρτιες. Άρα το συνολικό ισοσπίν του ζεύγους μπορεί να είναι είτε 0 είτε 2 . Στη διάσπαση του K^\pm η δράση του τελεστή συζυγίας μας πηγαίνει από την αντίδραση $K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0$ στην αντίδραση $K^- \rightarrow \pi^- \pi^0$ και αντίστροφα, χωρίς καμιά αλλαγή στις ιδιότητες των σωματιδίων εκτός από το φορτίο (που δεν παίζει ρόλο στη διάσπαση), οπότε πάλι δεν αλλάζει πρόσημο η κυματοσυνάρτηση της τελικής κατάστασης και άρα το ισοσπίν του ζεύγους είναι πάλι άρτιο, δηλαδή 0 ή 2 .

(b) Το ισοσπίν για τις θεωρούμενες διασπάσεις είναι:

	K^+	\rightarrow	$\pi^+ + \pi^0$		K^0	\rightarrow	$\pi^+ + \pi^-$		K^0	\rightarrow	$\pi^0 + \pi^0$
I	$1/2$		$1 \quad 1$		$1/2$		$1 \quad 1$		$1/2$		$1 \quad 1$
I_3	$+ 1/2$		$+ 1 \quad 0$		$-1/2$		$+ 1 \quad - 1$		$-1/2$		$0 \quad 0$
(I, I_3)	$(1/2, + 1/2)$		$(2, 1)$		$(1/2, - 1/2)$		$(2, 0) \text{ ή } (0, 0)$		$(1/2, - 1/2)$		$(2, 0) \text{ ή } (0, 0)$

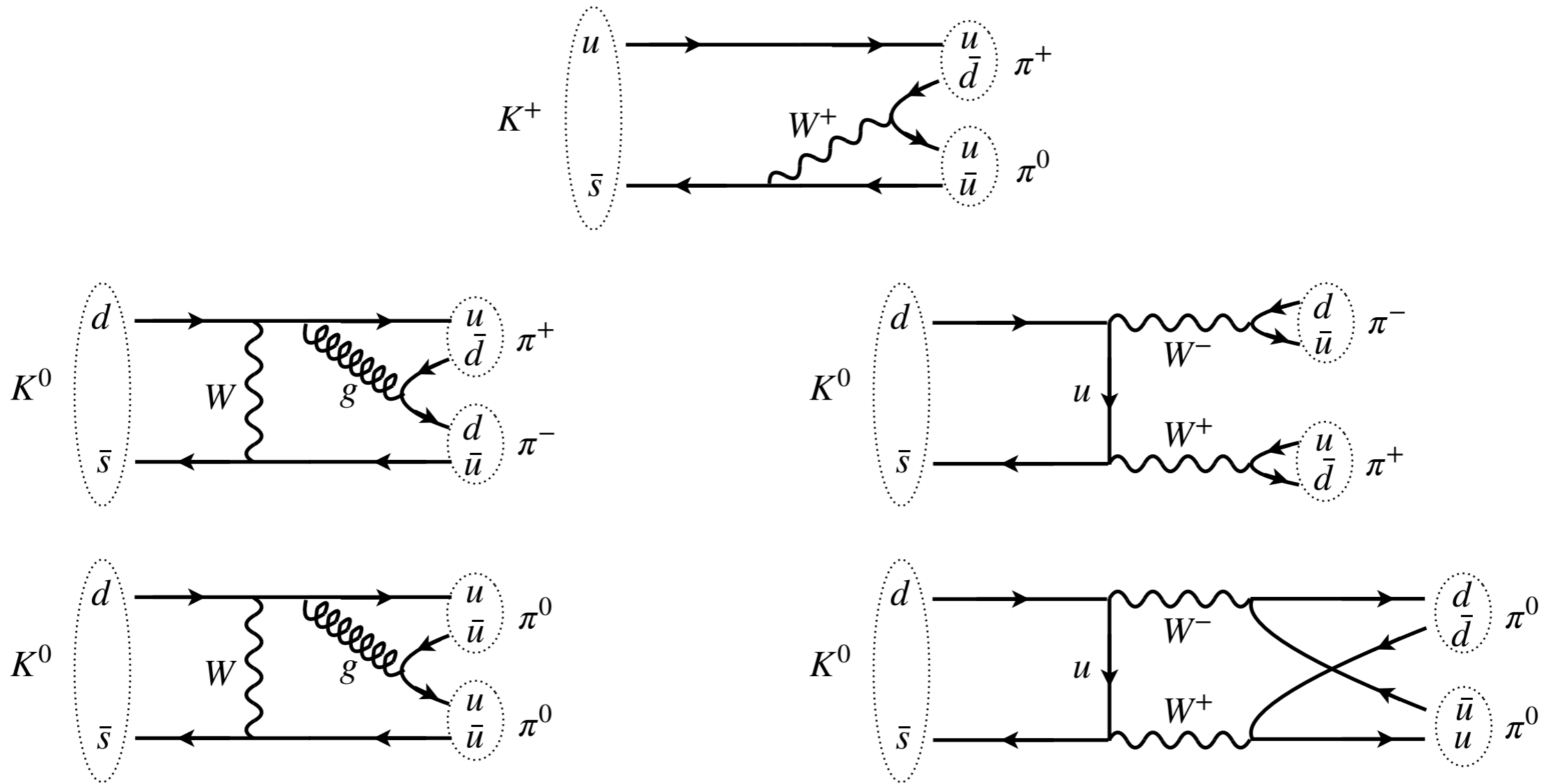
Η διάσπαση $K^+ \rightarrow \pi^+ + \pi^0$ ξεκινά από μια αρχική κατάσταση με ισοσπίν $1/2$ και καταλήγει σε μια τελική κατάσταση με ισοσπίν 2 , άρα μπορεί να γίνει μόνο με τη συνιστώσα ισοσπίν $3/2$ της αλληλεπίδρασης και περιγράφεται μόνο από το πλάτος $a_{3/2}$. Αντίθετα, οι διασπάσεις $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ και $K^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ ξεκινούν από μια αρχική κατάσταση με ισοσπίν $1/2$ και καταλήγουν σε μια τελική κατάσταση με ισοσπίν είτε 0 είτε 2 , οπότε μπορούν να γίνουν και με τις δύο συνιστώσες ισοσπίν της αλληλεπίδρασης και περιγράφονται από ένα γραμμικό συνδυασμό των πλατών $a_{1/2}$ και $a_{3/2}$. Η σχέση των χρόνων ζωής του K^0 και του K^\pm δείχνει ότι $|a_{3/2}| \ll |a_{1/2}|$.

$$A(K^+ \rightarrow \pi^+ \pi^0) = \frac{3}{2\sqrt{2}} a_{3/2}$$

$$A(K^0 \rightarrow \pi^+ \pi^-) = -a_{1/2} + \frac{1}{2} a_{3/2}$$

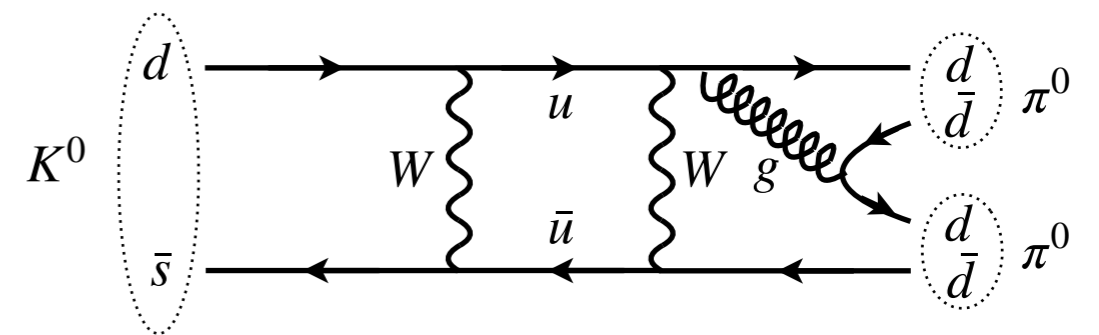
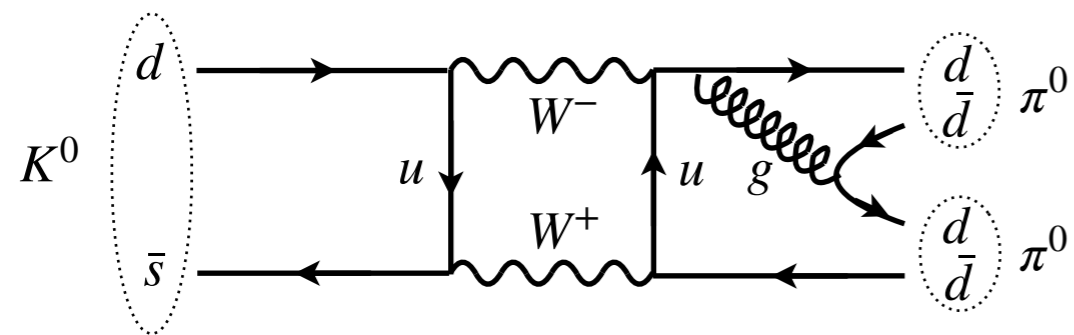
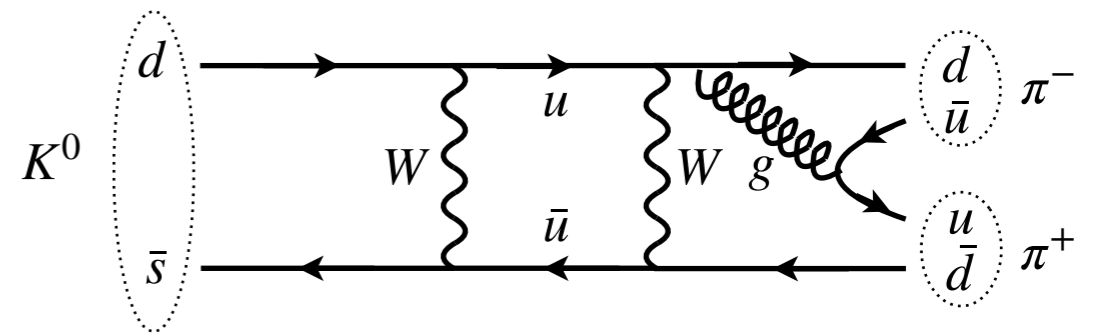
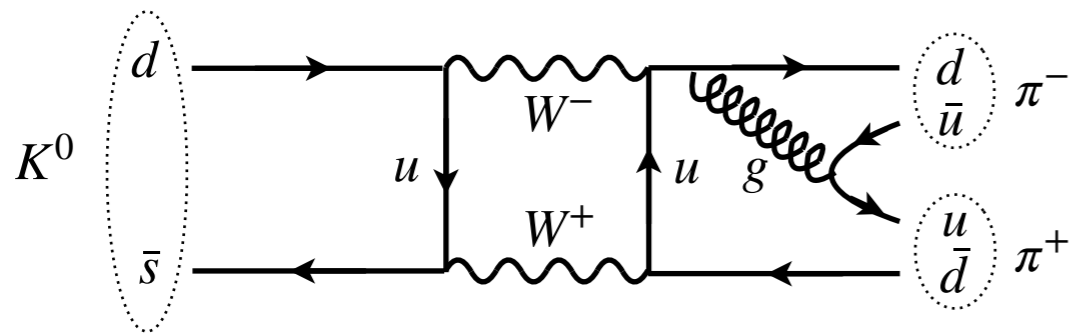
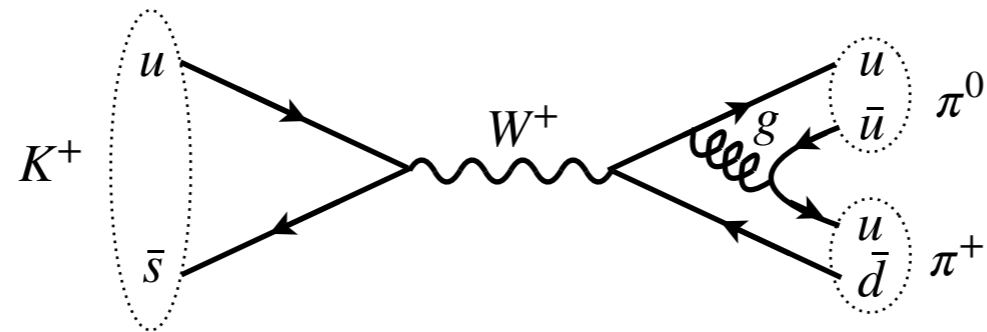
$$A(K^0 \rightarrow \pi^0 \pi^0) = a_{1/2} + a_{3/2}$$

(c) Τα διαγράμματα χαμηλότερης τάξης προσέγγισης είναι:



Σε αυτή την τάξη προσέγγισης, οι κυρίαρχες συνεισφορές στα πλάτη των διασπάσεων $K^0 \rightarrow \pi^+ + \pi^-$ και $K^0 \rightarrow \pi^0 + \pi^0$ έρχονται από τα διαγράμματα που περιλαμβάνουν μόνο μία ανταλλαγή μποζονίου W . Συνεπώς η συνιστώσα $a_{1/2}$ πρέπει να συνδέεται με την παραγωγή ενός ζεύγους κουάρκ-αντικουάρκ ίδιας γεύσης από ένα γλουόνιο, που είναι ισχυρή συνεισφορά, ενώ η συνιστώσα $a_{3/2}$ πρέπει να συνδέεται με την παραγωγή ενός ζεύγους κουάρκ-αντικουάρκ διαφορετικής γεύσης από ένα μποζόνιο W , που είναι ασθενής συνεισφορά, εξηγώντας έτσι τη σχέση μεταξύ των μέτρων των πλατών $a_{1/2}$ και $a_{3/2}$.

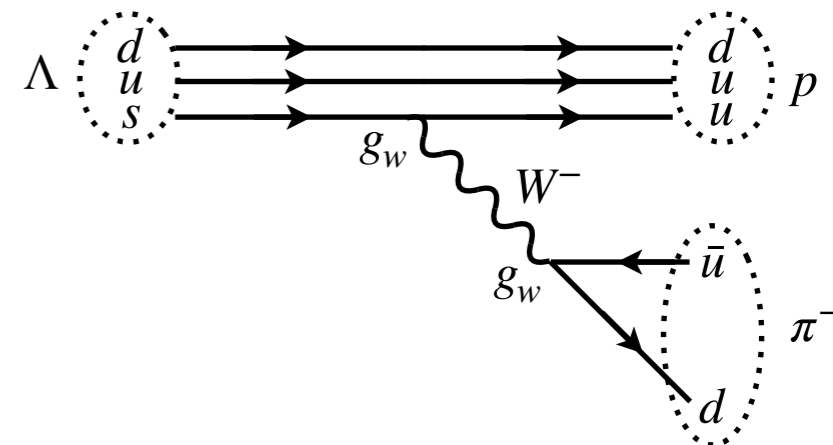
Διαγράμματα επόμενης τάξης προσέγγισης:



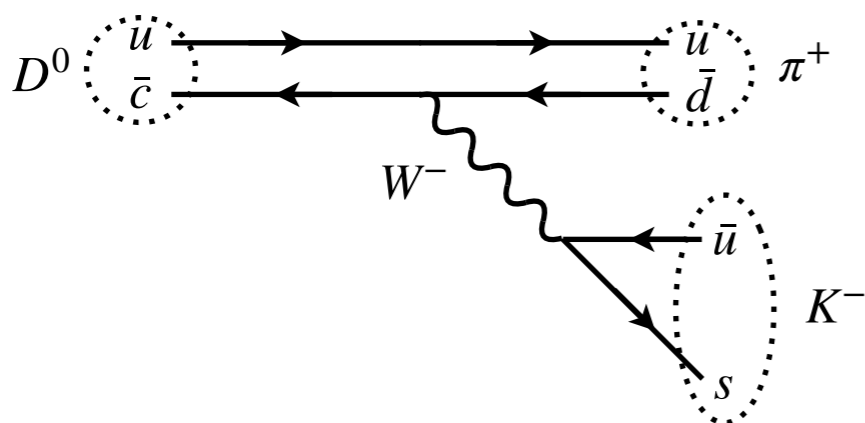
2.6 Σχεδιάστε το διάγραμμα Feynman σε επίπεδο κουάρκ για τη διάσπαση $\Lambda(uds) \rightarrow p(uud) + \pi^-(\bar{u}d)$. Αν η Φύση διπλασίαζε την παράμετρο ασθενούς σύζευξης και υποτετραπλασίαζε τη μάζα του μποζονίου W, ποιο θα ήταν το αποτέλεσμα στο ρυθμό διάσπασης $\Gamma(\Lambda \rightarrow p + \pi^-)$;

$$\mathcal{M} \sim \frac{g_w^2}{p_W^2 - m_W^2} \underset{p_W \ll m_W}{\simeq} \left(\frac{g_w}{m_W} \right)^2 \Rightarrow \Gamma \sim |\mathcal{M}|^2 \sim \left(\frac{g_w}{m_W} \right)^4$$

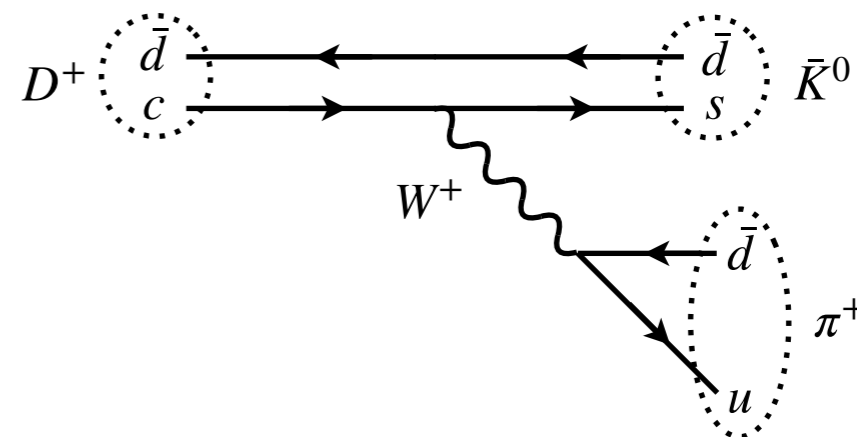
$$\Rightarrow \Gamma' \sim \left(\frac{2g_w}{m_W/4} \right)^4 = \left(\frac{8g_w}{m_W} \right)^4 = 2^{12} \left(\frac{g_w}{m_W} \right)^4 = 4096 \Gamma$$



2.7 Εξηγήστε με διαγράμματα Feynman γιατί η διάσπαση $D^0(u\bar{c}) \rightarrow K^-(\bar{u}s) + \pi^+(u\bar{d})$ μπορεί να πραγματοποιηθεί στη χαμηλότερη τάξη προσέγγισης με ασθενή αλληλεπίδραση φορτισμένου ρεύματος, ενώ η διάσπαση $D^+(\bar{d}c) \rightarrow K^0(d\bar{s}) + \pi^+(u\bar{d})$ δεν μπορεί.



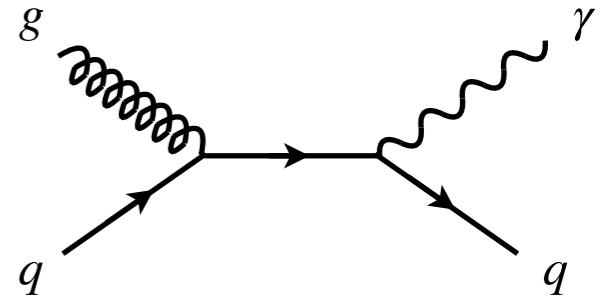
Η διάσπαση $D^0 \rightarrow K^- + \pi^+$ περιλαμβάνει μόνο μια ανταλλαγή ενός μποζονίου W που χαρακτηρίζεται αλληλεπίδραση φορτισμένου ρεύματος.



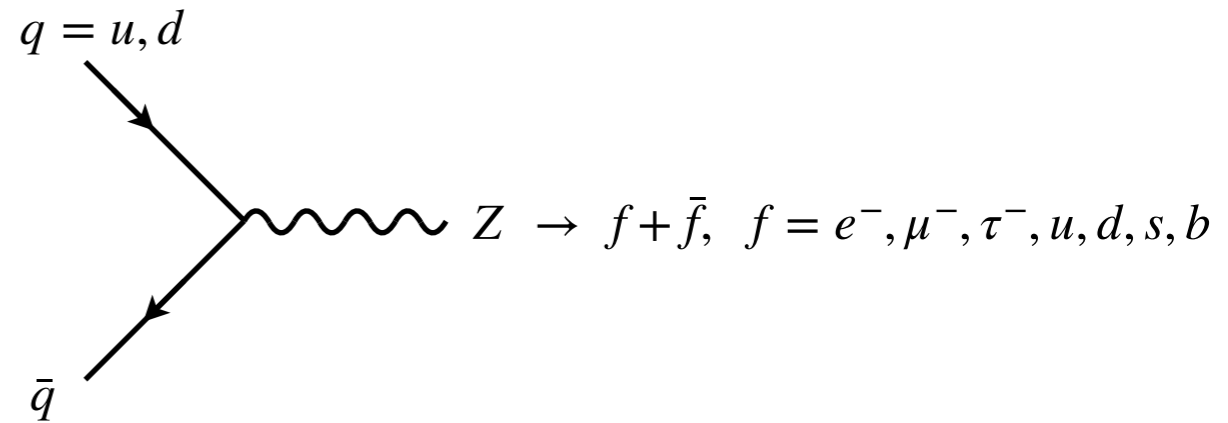
Η διάσπαση $D^+ \rightarrow K^0 + \pi^+$ απαιτεί επιπλέον και μια ταλάντωση $\bar{K}^0 \rightarrow K^0$ που περιλαμβάνει δύο ακόμη ανταλλαγές μποζονίων W.

2.8 Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman χαμηλότερης τάξης για τις ακόλουθες διεργασίες.

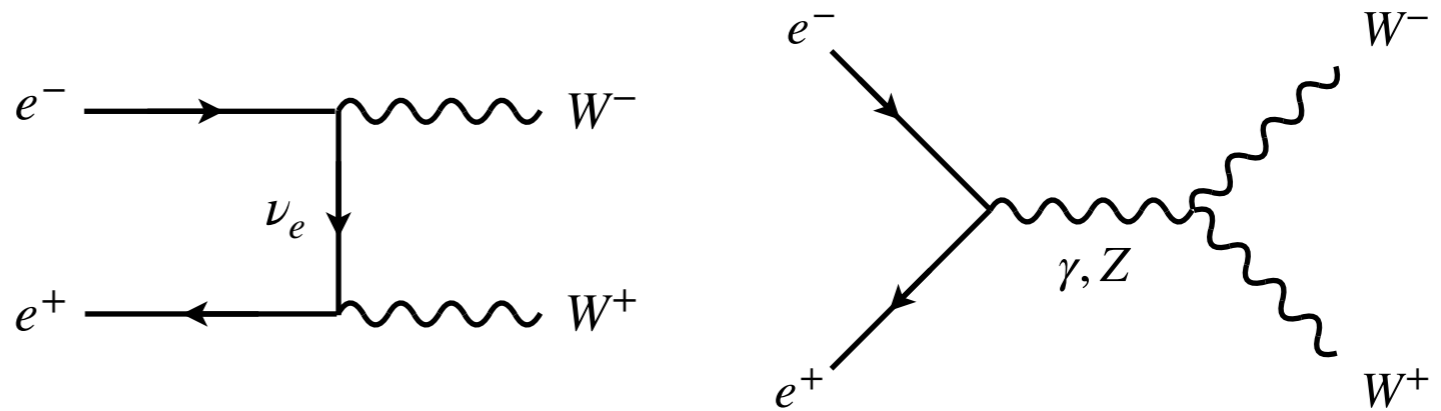
(a) Αλληλεπίδραση κουάρκ-γλουονίου για την παραγωγή ενός κουάρκ κι ενός φωτονίου:



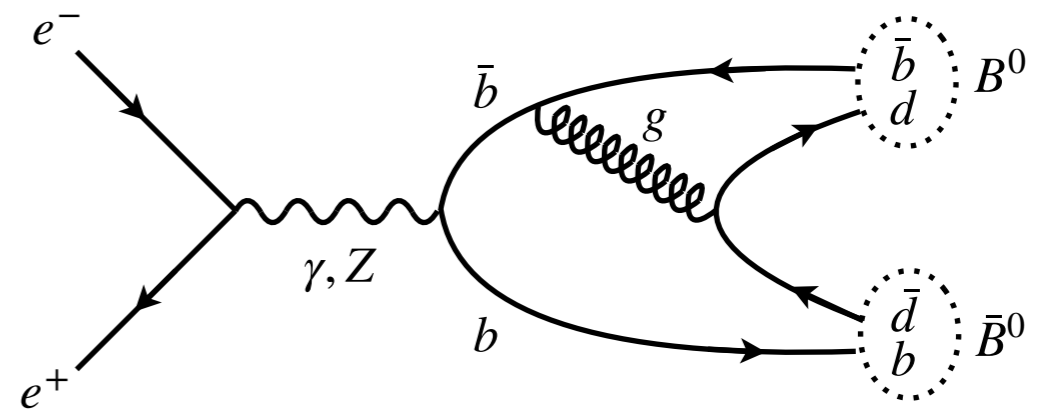
(b) Παραγωγή μποζονίου Z από κρούση πρωτονίου-αντιπρωτονίου:



(c) Εξαΰλωση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου με παραγωγή ζεύγους μποζονίων W:



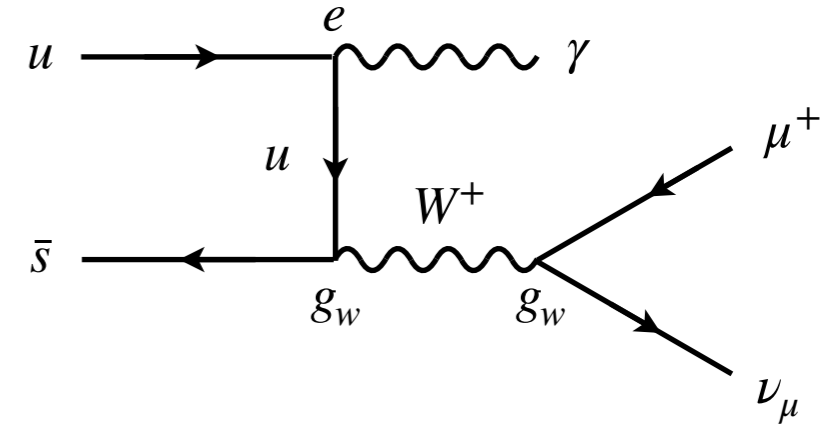
(d) Εξαΰλωση ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου με παραγωγή ζεύγους ουδέτερων πτυθμενικών μεσονίων:



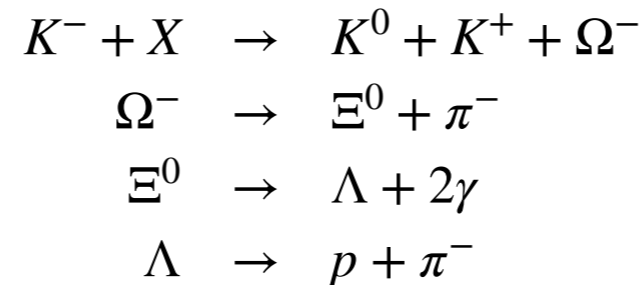
2.9 Σχεδιάστε το διάγραμμα Feynman χαμηλότερης τάξης για τη διάσπαση $K^+(u\bar{s}) \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \gamma$ και εξάγετε την εξάρτηση του εύρους της διάσπασης από τις παραμέτρους σύζευξης.

$$\mathcal{M} \sim eg_w^2 \Rightarrow \Gamma(K^+ \rightarrow \mu^+ + \nu_\mu + \gamma) \sim |\mathcal{M}|^2 \sim e^2 g_w^4 \sim \alpha G_F^2$$

$$e^2 = 4\pi\alpha \quad G_F = \frac{\sqrt{2}g_w^2}{8m_W^2}$$



2.10 Το βαρυόνιο Ω^- ανακαλύφθηκε σε αντιδράσεις όπως οι ακόλουθες:



(a) Βρείτε το ηλεκτρικό φορτίο και την παραδοξότητα του σωματιδίου X και προτείνετε την ταυτότητά του.

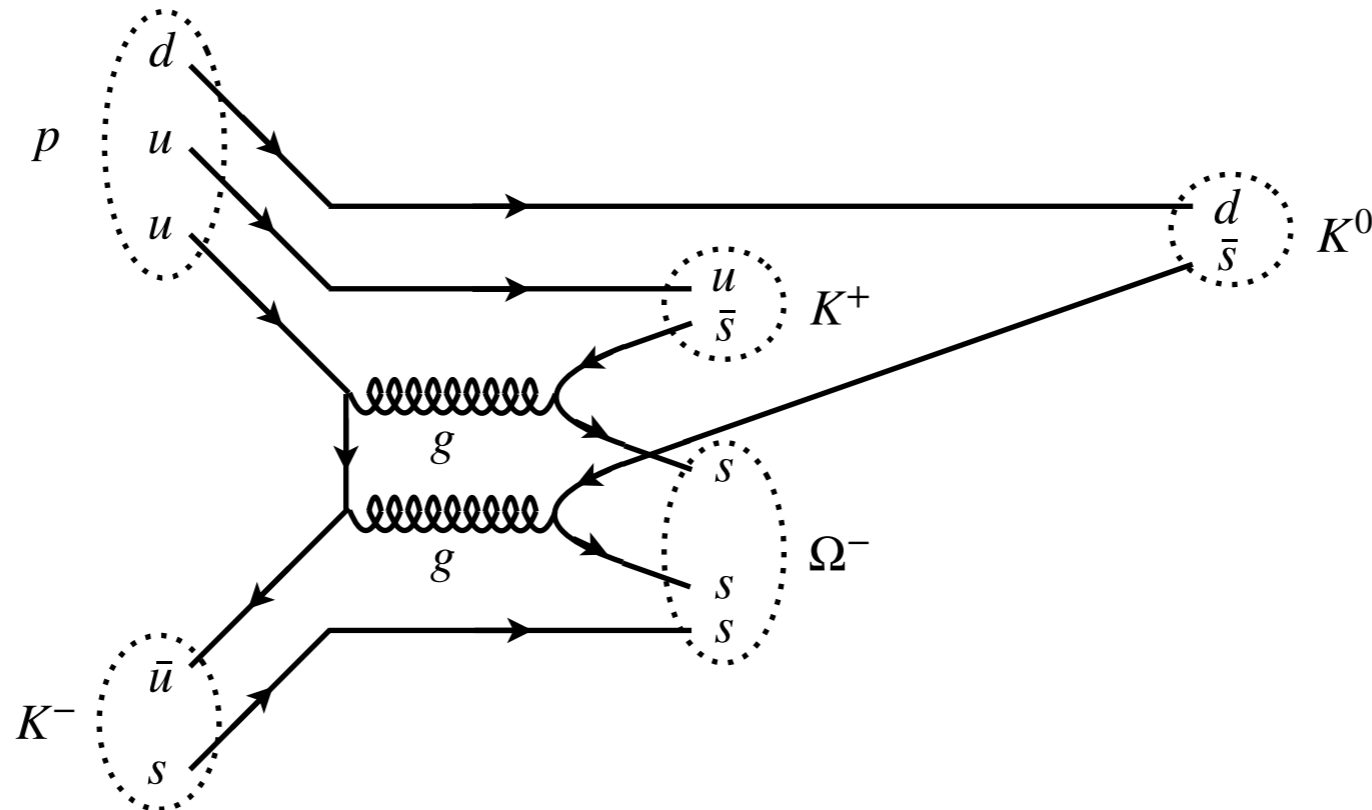
(b) Σχεδιάστε τα διαγράμματα Feynman χαμηλότερης τάξης για κάθε αντίδραση στην παραπάνω αλυσίδα παραγωγής και διάσπασης του Ω^- .

(a) Σε επίπεδο κουάρκ η παραγωγή του βαρυονίου Ω^- αναλύεται ως εξής:

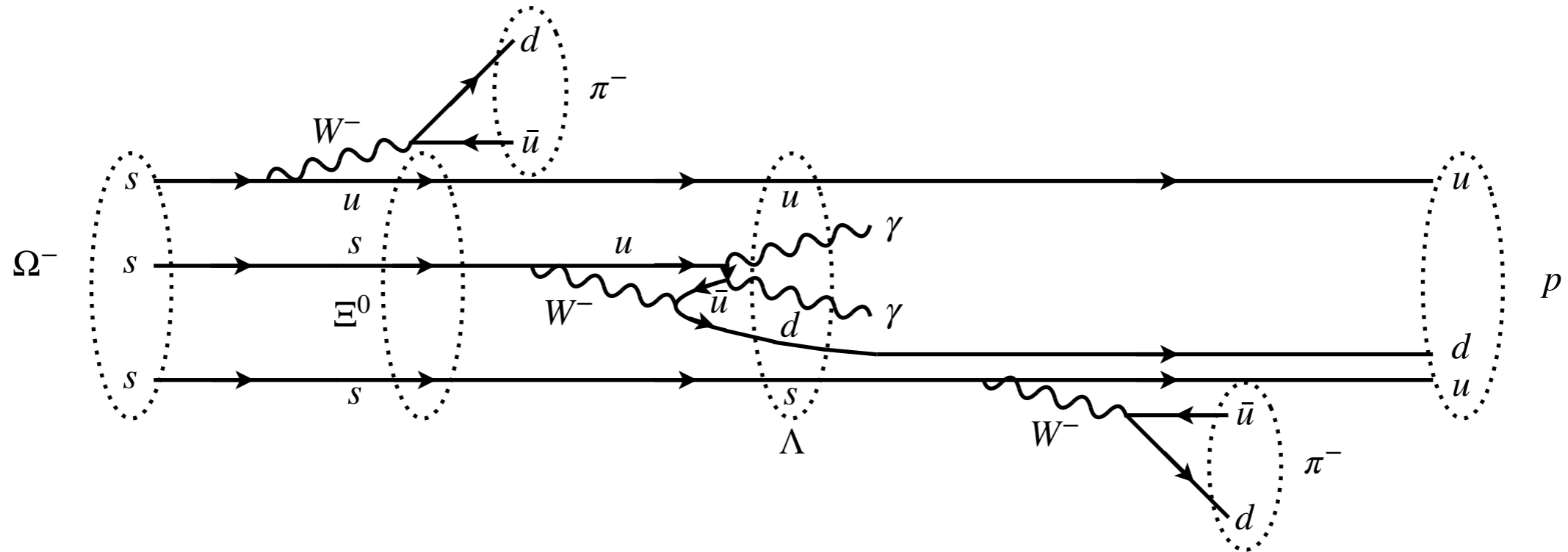
$$\begin{array}{rcccc}
 & K^- & + & X & \rightarrow & K^0 & + & K^+ & + & \Omega^- \\
 & \bar{u}s & & & & d\bar{s} & & u\bar{s} & & sss \\
 \text{Q :} & -1 & & & & 0 & & +1 & & -1 \\
 \text{B :} & 0 & & & & 0 & & 0 & & +1 \\
 \text{S :} & -1 & & & & +1 & & +1 & & -3
 \end{array}$$

Από τους τρεις κβαντικούς αριθμούς, το φορτίο Q και ο βαρυονικός αριθμός B πρέπει οπωσδήποτε να διατηρούνται, συνεπώς Q=+1 και B=+1. Οι επιλογές που μένουν για το X είναι το πρωτόνιο, το Δ^+ και το Σ^+ . Αλλά το Δ^+ και το Σ^+ έχουν χρόνους ζωής της τάξης των 10^{-23} sec και δεν προλαβαίνουν να αντιδράσουν με το καόνιο. Άρα το X πρέπει να είναι πρωτόνιο, δηλαδή S=0, οπότε και η παραδοξότητα διατηρείται.

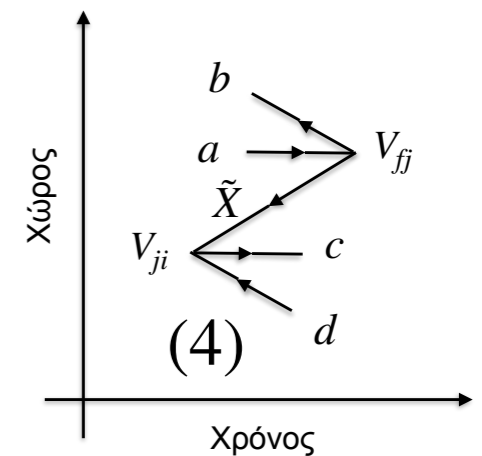
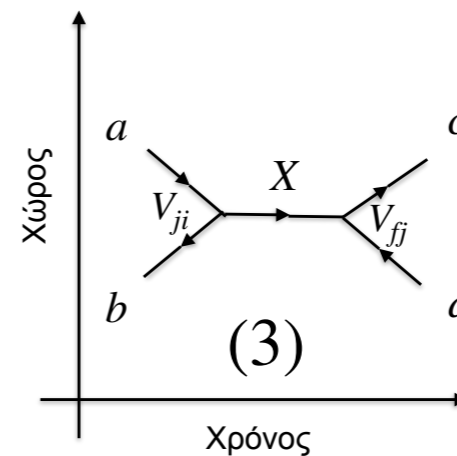
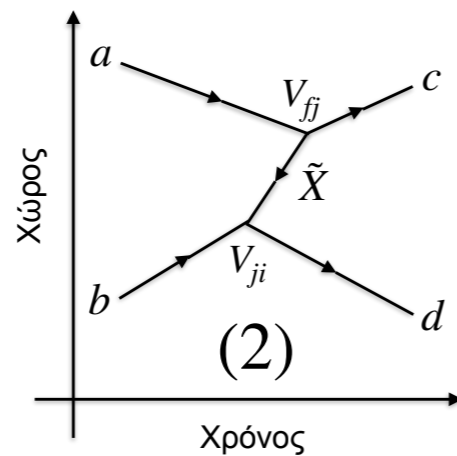
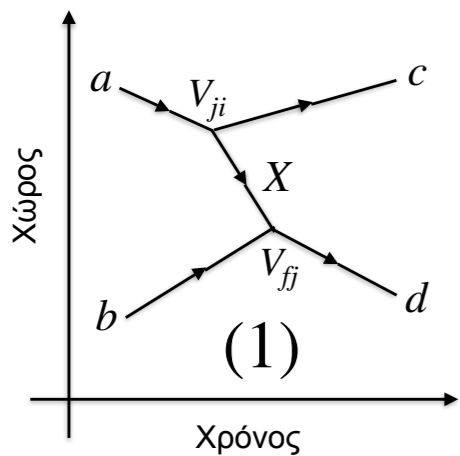
(a) Διάγραμμα παραγωγής:



Διάγραμμα διάσπασης:



2.11 Επαναλαμβάνοντας τα βήματα κατασκευής του αναλλοίωτου πλάτους σκέδασης $a + b \rightarrow c + d$ από την επαλληλία των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων ανταλλαγής (1) και (2) του σχήματος, δείξτε ότι και η επαλληλία των χρονικά διατεταγμένων διαγραμμάτων εξαΐλωσης-σχηματισμού (3) και (4) οδηγεί στην ίδια μορφή του διαδότη του σωματιδίου X .



4.1 Πόσες διακριτές καταστάσεις μεσονίων μπορείτε να φτιάξετε με 1, 2, 3, 4, 5, και 6 διακριτές γεύσεις κουάρκ; Ποιος είναι ο γενικός τύπος του αριθμού διακριτών μεσονικών καταστάσεων για n διακριτές γεύσεις;

Από τη σύνθεση των σπιν κουάρκ-αντικουάρκ έχουμε δύο κατηγορίες μεσονικών καταστάσεων με φυσική ομοτιμία, τα ψευδοβαθμωτά ($J^P = 0^-$) και τα διανυσματικά ($J^P = 1^-$), για κάθε αριθμό διακριτών γεύσεων.

Με n γεύσεις μπορούμε να φτιάξουμε n^2 διακριτούς συνδυασμούς κουάρκ-αντικουάρκ.

Άρα, μπορούμε γενικά να φτιάξουμε $2n^2$ διακριτές θεμελιώδεις μεσονικές καταστάσεις από n διακριτές γεύσεις: n^2 ψευδοβαθμωτά και n^2 διανυσματικά μεσόνια.

Π.χ.	$n = 2$	(u, d)	Γεύση:	$2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1$	\rightarrow ισοβαθμωτά μεσόνια
			Σπιν:	$2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1$	
			διανυσματικά μεσόνια	\swarrow	\searrow
				\uparrow	\rightarrow ψευδοβαθμωτά μεσόνια

Τα 3 ισοδιανυσματικά μεσόνια (3 καταστάσεις φορτίου) και το ισοβαθμωτό είναι διακριτά \Rightarrow 4 διακριτά μεσόνια σε 2 οικογένειες ($J^P = 0^-$ και $J^P = 1^-$) \Rightarrow σύνολο = $2 \times 4 = 8$ διακριτά μεσόνια

$n = 3$	(u, d, s)	Γεύση:	$3 \otimes \bar{3} = 8 \oplus 1$
		Σπιν:	$2 \otimes \bar{2} = 3 \oplus 1$
		διανυσματικά μεσόνια	\swarrow
			\searrow
			\uparrow
			\rightarrow ψευδοβαθμωτά μεσόνια

Σύνολο = $2 \times 9 = 18$ διακριτά μεσόνια

4.2 Το ίδιο πρόβλημα για τις καταστάσεις βαρυονίων.

Για τα βαρυόνια, έχουμε δύο θεμελιώδεις οικογένειες με διακριτές καταστάσεις σπιν-ομοτιμίας, $J^P = 1/2^+$ και $J^P = 3/2^+$, για κάθε αριθμό διακριτών γεύσεων.

Στην περίπτωση των βαρυονίων, η συμμετρία της κυματοσυνάρτησης σπιν-γεύσης δεσμεύει τους επιτρεπτούς συνδυασμούς παραγόντων γεύσης με παράγοντες σπιν. Για δύο κουάρκ από n διαθέσιμες γεύσεις, η κυματοσυνάρτηση μπορεί να αναλυθεί σε $n(n+1)/2$ συμμετρικούς και $n(n-1)/2$ αντισυμμετρικούς συνδυασμούς:

Άρα, με τρία κουάρκ:

$$\begin{array}{ccc}
 n \otimes n = \frac{n(n+1)}{2} \oplus \frac{n(n-1)}{2} & \Rightarrow & n \otimes n \otimes n = \left(n \otimes \frac{n(n+1)}{2} \right) \oplus \left(n \otimes \frac{n(n-1)}{2} \right) \\
 \downarrow & & \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \\
 n^2 = \frac{n(n+1)}{2} + \frac{n(n-1)}{2} & & \text{πλήρως συμμετρικοί + μικτά} \quad \text{μικτά συμμετρικοί συνδυασμοί} \\
 \text{συνδυασμοί} & & \text{συμμετρικοί συνδυασμοί}
 \end{array}$$

Για το σπιν: $2 \otimes 2 \otimes 2 = 2 \otimes (3 \oplus 1) = (2 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 1) = 4 \oplus \underbrace{2 \oplus 2}$

\swarrow ↘
 πλήρως συμμετρικοί συνδυασμοί μικτά συμμετρικοί συνδυασμοί

Οι πλήρως συμμετρικοί συνδυασμοί γεύσης συνδυάζονται με τους πλήρως συμμετρικούς συνδυασμούς σπιν (αντίστοιχους σε $J^P = 3/2^+$) και οι συνδυασμοί μικτής συμμετρίας γεύσης συνδυάζονται με τους συνδυασμούς μικτής συμμετρίας σπιν (αντίστοιχους σε $J^P = 1/2^+$), έτσι ώστε το γινόμενο να είναι πάντα συμμετρικό. Επομένως, ο αριθμός των διακριτών θεμελιωδών βαρυονίων προσδιορίζεται μόνο από τον παράγοντα γεύσης που περιέχει τους πλήρως συμμετρικούς συνδυασμούς και είναι $n^2(n+1)/2$.

Π.χ. $n = 2$ (u, d) Γεύση: $2 \otimes 2 \otimes 2 = \boxed{(2 \otimes 3)} \oplus (2 \otimes 1) = \boxed{4} \oplus \boxed{2 \oplus 2}$

Σπιιν: $2 \otimes 2 \otimes 2 = (2 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 1) = \boxed{4} \oplus \boxed{2 \oplus 2}$

$J^P = \frac{3^+}{2}$ $J^P = \frac{1^+}{2}$

$4 \oplus 2 = 6$ βαρυόνια ($4 \Delta + 2 N$)



$2 \otimes 2 \otimes 2 = \boxed{(2 \otimes 3)} \oplus (2 \otimes 1) = \boxed{4} \oplus \boxed{2 \oplus 2}$

$2 \otimes 2 \otimes 2 = (2 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 1) = \boxed{4} \oplus \boxed{2 \oplus 2}$

$J^P = \frac{3^+}{2}$

$J^P = \frac{1^+}{2}$

$10 \oplus 8 = 18$ βαρυόνια ($10\acute{\alpha}\delta\alpha + 8\acute{\alpha}\delta\alpha$)



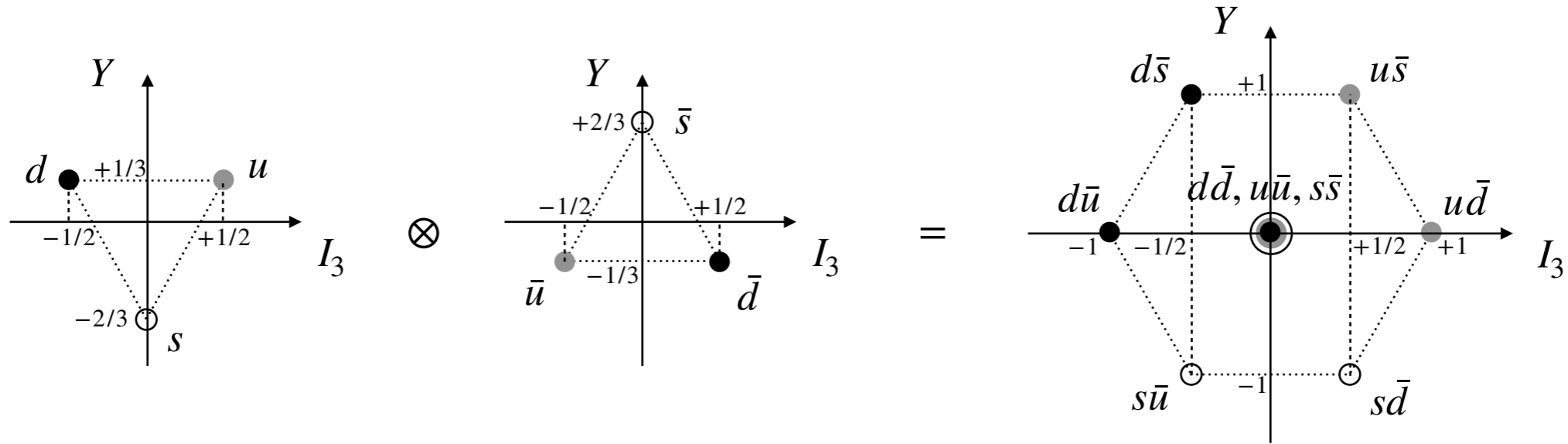
$n = 3$ (u, d, s) Γεύση: $3 \otimes 3 \otimes 3 = \boxed{(3 \otimes 6)} \oplus (3 \otimes 3) = \boxed{10} \oplus \boxed{8 \oplus 8 \oplus 1}$

Σπιιν: $2 \otimes 2 \otimes 2 = (2 \otimes 3) \oplus (2 \otimes 1) = \boxed{4} \oplus \boxed{2 \oplus 2}$

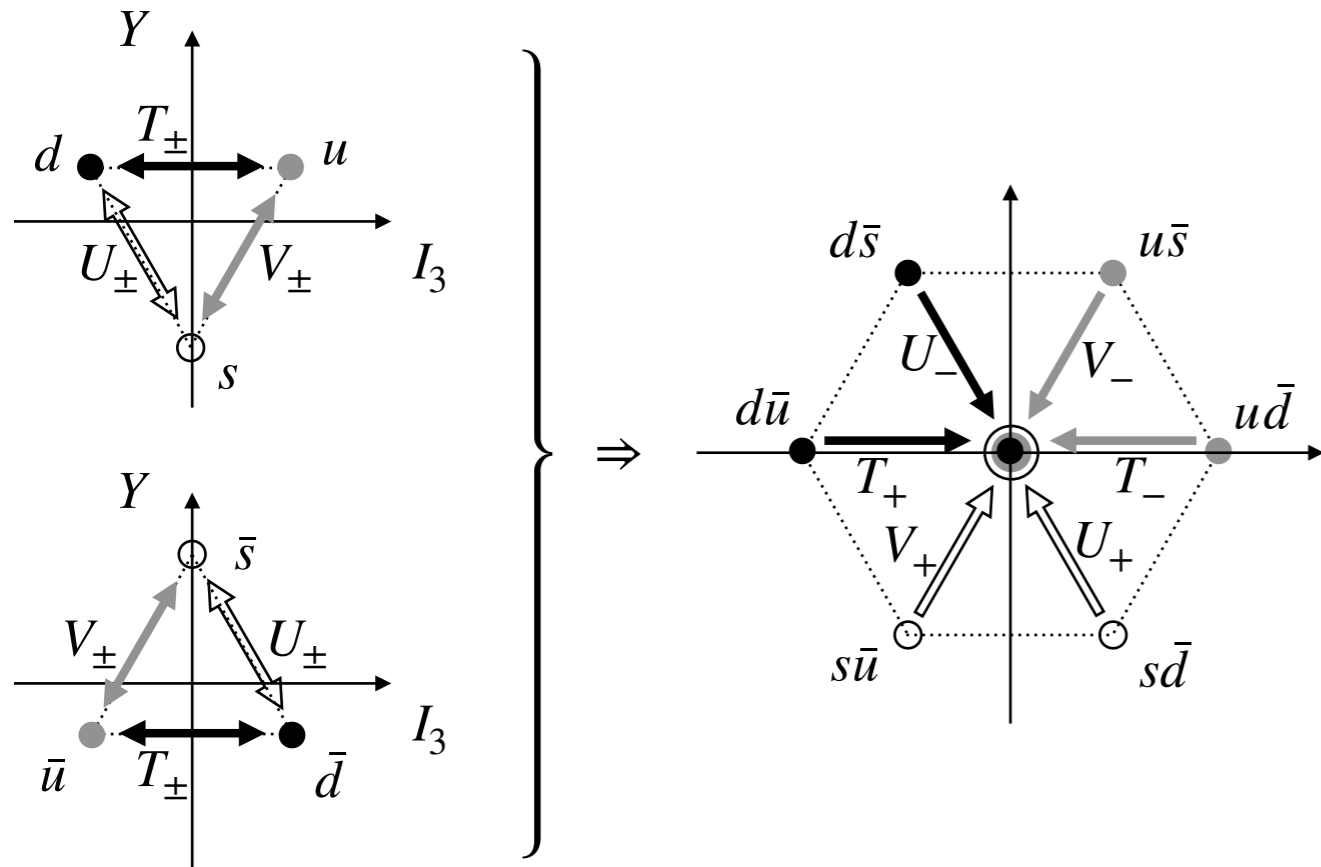
$J^P = \frac{3^+}{2}$

$J^P = \frac{1^+}{2}$

4.3 Χρησιμοποιώντας τους τελεστές κλίμακας, βρείτε τις φυσικές καταστάσεις μεσονίων με τις τρεις ελαφρότερες γεύσεις u, d, s .



Οι τρεις κεντρικές καταστάσεις με $Y = 0, I_3 = 0$ μπορούν να κατασκευαστούν με τους τελεστές κλίμακας και τη συνθήκη ορθογωνιότητας. Στο διάγραμμα (I_3, Y) , ξεκινώντας από τις κορυφές του εξαγώνου, μπορούμε να πάμε στο κέντρο με 6 τρόπους:



$$\begin{aligned}
 T_+ |d\bar{u}\rangle &= |(T_+ d)\bar{u}\rangle + |d(T_+ \bar{u})\rangle = |u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle \\
 T_- |u\bar{d}\rangle &= |(T_- u)\bar{d}\rangle + |u(T_- \bar{d})\rangle = |d\bar{d}\rangle - |u\bar{u}\rangle = -T_+ |d\bar{u}\rangle \\
 V_+ |s\bar{u}\rangle &= |(V_+ s)\bar{u}\rangle + |s(V_+ \bar{u})\rangle = |u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle \\
 V_- |u\bar{s}\rangle &= |(V_- u)\bar{s}\rangle + |u(V_- \bar{s})\rangle = |s\bar{s}\rangle - |u\bar{u}\rangle = -V_+ |s\bar{u}\rangle \\
 U_+ |s\bar{d}\rangle &= |(U_+ s)\bar{d}\rangle + |s(U_+ \bar{d})\rangle = |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle \\
 U_- |d\bar{s}\rangle &= |(U_- d)\bar{s}\rangle + |d(U_- \bar{s})\rangle = |s\bar{s}\rangle - |d\bar{d}\rangle = -U_+ |s\bar{d}\rangle
 \end{aligned}$$

Μόνο δύο από τις έξι κεντρικές καταστάσεις που κατασκευάστηκαν με τους τελεστές κλίμακας είναι γραμμικά ανεξάρτητες. Υπάρχουν όμως τρεις καταστάσεις με $Y = 0$, $I_3 = 0$. Άρα, μία κατάσταση δεν είναι μέλος της ίδιας πολλαπλής και δεν μπορεί να κατασκευαστεί με τους τελεστές κλίμακας.

Κατασκευάζουμε πρώτα τις δύο γραμμικά ανεξάρτητες καταστάσεις από τους τρεις συνδυασμούς που βρήκαμε με τους τελεστές κλίμακας:

$$|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle \quad |u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle \quad |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle$$

Ταυτοποιούμε μία κατάσταση με το μέλος $I_3 = 0$ της ισοτριπλής που είχαμε κατασκευάσει με δύο γεύσεις, u και d :

$$|\pi^0\rangle = |\psi_1\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}} (|u\bar{u}\rangle - |d\bar{d}\rangle)$$

Η δεύτερη γραμμικά ανεξάρτητη κατάσταση κατασκευάζεται παίρνοντας το γραμμικό συνδυασμό των άλλων δύο καταστάσεων που βρήκαμε με τους τελεστές κλίμακας:

$$|\psi_2\rangle = \alpha (|u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle) + \beta (|d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle)$$

και απαιτώντας να είναι κι αυτός κανονικοποιημένος στη μονάδα και ορθογώνιος στην $|\psi_1\rangle$:

$$\langle\psi_1|\psi_2\rangle = 0 \quad \langle\psi_2|\psi_2\rangle = 1$$

$$\begin{aligned}\langle \psi_1 | \psi_2 \rangle = 0 &\Rightarrow \alpha (\langle u\bar{u} | - \langle d\bar{d} |) (|u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle) + \beta (\langle u\bar{u} | - \langle d\bar{d} |) (|d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle) = 0 \\ &\Rightarrow \alpha \langle u\bar{u} | u\bar{u} \rangle - \beta \langle d\bar{d} | d\bar{d} \rangle = 0 \Rightarrow \alpha - \beta = 0 \Rightarrow \alpha = \beta\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \psi_2 | \psi_2 \rangle = 1 &\Rightarrow \alpha^2 (\langle u\bar{u} | - \langle s\bar{s} |) (|u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle) + 2\alpha\beta (\langle u\bar{u} | - \langle s\bar{s} |) (|d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle) + \beta^2 (\langle d\bar{d} | - \langle s\bar{s} |) (|d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle) = 1 \\ &\Rightarrow \alpha^2 (\langle u\bar{u} | u\bar{u} \rangle + \langle s\bar{s} | s\bar{s} \rangle) + 2\alpha\beta \langle s\bar{s} | s\bar{s} \rangle + \beta^2 (\langle d\bar{d} | d\bar{d} \rangle + \langle s\bar{s} | s\bar{s} \rangle) = 1 \\ &\Rightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha\beta + 2\beta^2 = 1 \Rightarrow 2\alpha^2 + 2\alpha^2 + 2\alpha^2 = 1 \Rightarrow 6\alpha^2 = 1 \Rightarrow \alpha = \beta = \frac{1}{\sqrt{6}} \\ &\Rightarrow |\psi_2\rangle = \frac{1}{\sqrt{6}} (|u\bar{u}\rangle - |s\bar{s}\rangle + |d\bar{d}\rangle - |s\bar{s}\rangle) = \frac{1}{\sqrt{6}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle - 2|s\bar{s}\rangle)\end{aligned}$$

Η τρίτη κατάσταση με $Y = 0$, $I_3 = 0$ δεν είναι μέλος της ίδιας πολλαπλής, άρα είναι μόνη της μια απλή, και κατασκευάζεται με ένα στοιχειώδη γραμμικό συνδυασμό, απαιτώντας να είναι κανονικοποιημένος στη μονάδα και ορθογώνιος στις $|\psi_1\rangle$ και $|\psi_2\rangle$:

$$|\psi_3\rangle = \kappa |u\bar{u}\rangle + \lambda |d\bar{d}\rangle + \mu |s\bar{s}\rangle \quad \langle \psi_1 | \psi_3 \rangle = 0 \quad \langle \psi_2 | \psi_3 \rangle = 0 \quad \langle \psi_3 | \psi_3 \rangle = 1$$

$$\begin{aligned}\langle \psi_1 | \psi_3 \rangle = 0 &\Rightarrow \kappa (\langle u\bar{u} | - \langle d\bar{d} |) |u\bar{u}\rangle + \lambda (\langle u\bar{u} | - \langle d\bar{d} |) |d\bar{d}\rangle + \mu (\langle u\bar{u} | - \langle d\bar{d} |) |s\bar{s}\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \kappa \langle u\bar{u} | u\bar{u} \rangle - \lambda \langle d\bar{d} | d\bar{d} \rangle = 0 \Rightarrow \kappa - \lambda = 0 \Rightarrow \kappa = \lambda\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\langle \psi_2 | \psi_3 \rangle = 0 &\Rightarrow \kappa (\langle u\bar{u} | + \langle d\bar{d} | - 2\langle s\bar{s} |) |u\bar{u}\rangle + \lambda (\langle u\bar{u} | + \langle d\bar{d} | - 2\langle s\bar{s} |) |d\bar{d}\rangle + \mu (\langle u\bar{u} | + \langle d\bar{d} | - 2\langle s\bar{s} |) |s\bar{s}\rangle = 0 \\ &\Rightarrow \kappa \langle u\bar{u} | u\bar{u} \rangle + \lambda \langle d\bar{d} | d\bar{d} \rangle - 2\mu \langle s\bar{s} | s\bar{s} \rangle = 0 \Rightarrow \kappa + \lambda - 2\mu = 0 \Rightarrow 2\kappa = 2\mu \Rightarrow \kappa = \lambda = \mu\end{aligned}$$

$$\langle \psi_3 | \psi_3 \rangle = 1 \Rightarrow \kappa^2 (\langle u\bar{u} | + \langle d\bar{d} | + \langle s\bar{s} |) (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle) = 1$$

$$\Rightarrow \kappa^2 (\langle u\bar{u} | u\bar{u} \rangle + \langle d\bar{d} | d\bar{d} \rangle + \langle s\bar{s} | s\bar{s} \rangle) = 1 \Rightarrow 3\kappa^2 = 1 \Rightarrow \kappa = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow |\psi_3\rangle = \frac{1}{\sqrt{3}} (|u\bar{u}\rangle + |d\bar{d}\rangle + |s\bar{s}\rangle)$$

Μπορούμε να επαληθεύσουμε ότι η κατάσταση $|\psi_3\rangle$ είναι όντως μια “άγευστη” απλή χρησιμοποιώντας τους τελεστές κλίμακας:

$$T_+ |\psi_3\rangle = \frac{|u(T_+\bar{u})\rangle + |(T_+d)\bar{d}\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{-|u\bar{d}\rangle + |u\bar{d}\rangle}{\sqrt{3}} = 0$$

$$V_+ |\psi_3\rangle = \frac{|u(V_+\bar{u})\rangle + |(V_+s)\bar{s}\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{-|u\bar{s}\rangle + |u\bar{s}\rangle}{\sqrt{3}} = 0$$

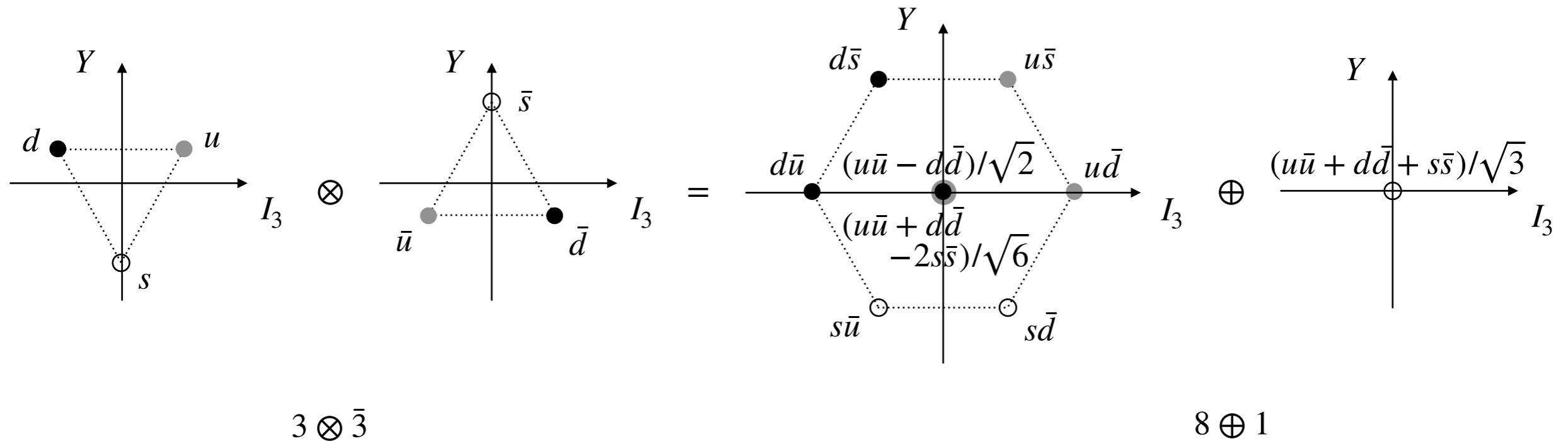
$$U_+ |\psi_3\rangle = \frac{|d(U_+\bar{d})\rangle + |(U_+s)\bar{s}\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{-|d\bar{s}\rangle + |d\bar{s}\rangle}{\sqrt{3}} = 0$$

$$T_- |\psi_3\rangle = \frac{|(T_-u)\bar{u}\rangle + |d(T_-d)\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{|d\bar{u}\rangle - |d\bar{u}\rangle}{\sqrt{3}} = 0$$

$$V_- |\psi_3\rangle = \frac{|(V_-u)\bar{u}\rangle + |s(V_-s)\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{|s\bar{u}\rangle - |s\bar{u}\rangle}{\sqrt{3}} = 0$$

$$U_- |\psi_3\rangle = \frac{|(U_-d)\bar{d}\rangle + |s(U_-s)\rangle}{\sqrt{3}} = \frac{|s\bar{d}\rangle - |s\bar{d}\rangle}{\sqrt{3}} = 0$$

Επομένως, ο συνδυασμός ενός κουάρκ (τριπλή) κι ενός αντικουάρκ (αντιτριπλή) δημιουργούν εννέα καταστάσεις που ομαδοποιούνται σε οκτώ (οκταπλή) και μία (απλή):



Η συμμετρία γεύσης SU(3) θα ήταν ακριβής αν όλα τα κουάρκ των τριών ελαφρότερων γεύσεων είχαν την ίδια μάζα. Γνωρίζουμε όμως ότι το κουάρκ s είναι σημαντικά βαρύτερο από τα κουάρκ u και d . Περιμένουμε συνεπώς η συμμετρία γεύσης SU(3) να είναι μόνο προσεγγιστική, οπότε οι φυσικές καταστάσεις μεσονίων θα είναι μίγματα των καταστάσεων γεύσης της ομάδας SU(3). Πειραματικά βρίσκουμε ότι για τα ψευδοβαθμωτά μεσόνια:

$$\pi^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

$$\eta \approx \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s})$$

$$\eta' \approx \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s})$$

Για τα διανυσματικά μεσόνια βρίσκουμε ότι είναι κατά προσέγγιση “ιδανικά αναμεμιγμένα”:

$$\rho^0 = \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} - d\bar{d})$$

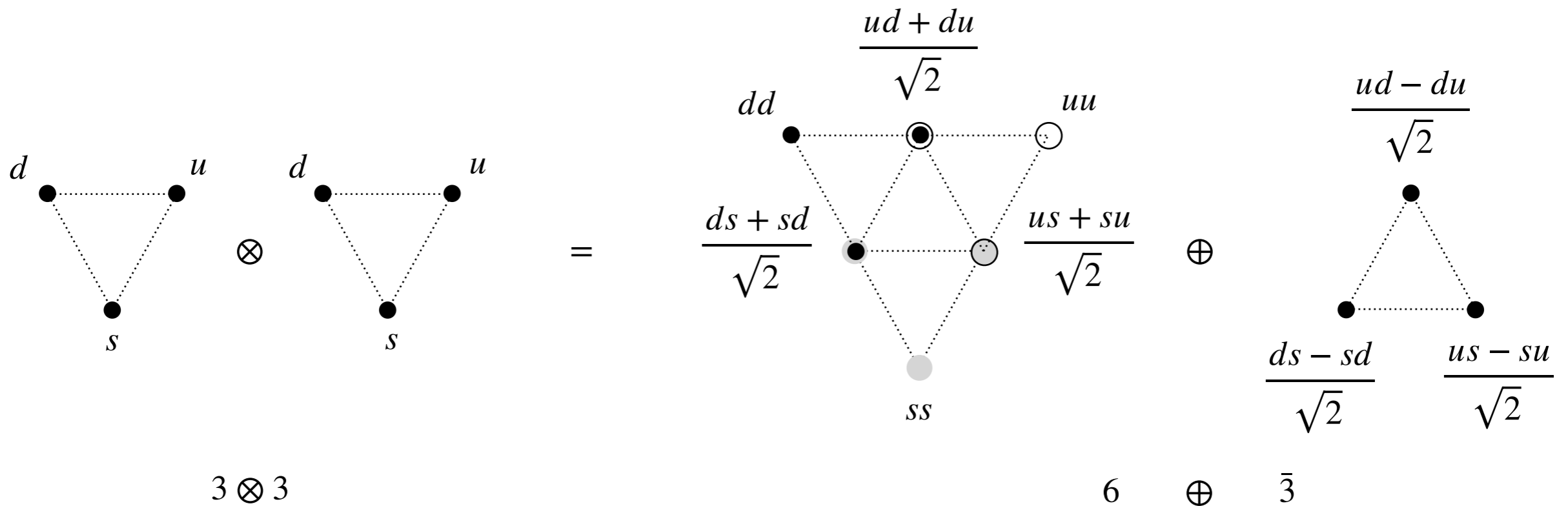
$$\omega \approx \frac{1}{\sqrt{2}}(u\bar{u} + d\bar{d})$$

$$\phi \approx s\bar{s}$$

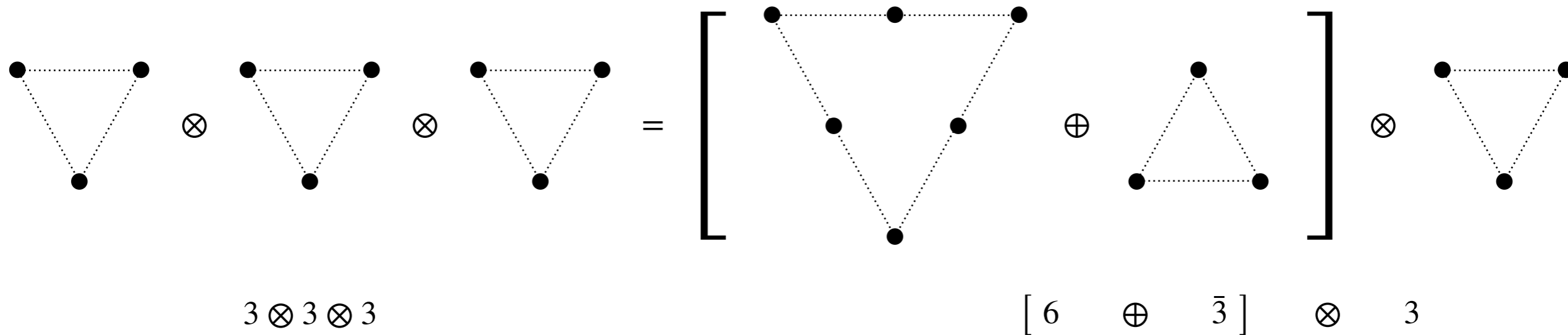
4.4 Φτιάξτε τις κυματοσυναρτήσεις σπιν-γεύσης του βαρυονίου $\Sigma^+(J^P = 1/2^+)$ με (τρίτη προβολή του) σπιν επάνω και του βαρυονίου $\Lambda(J^P = 1/2^+)$ με σπιν κάτω.

Και τα δύο βαρυόνια είναι μέλη της βαρυονικής οκτάδας με παραδοξότητα -1 . Επομένως, πρέπει να δούμε πώς κατασκευάζονται οι κυματοσυναρτήσεις τις οκτάδας. Η σύνθεση των σπιν από τρεις διπλές της $SU(2)$ είναι γνωστή, αλλά χρειάζεται η σύνθεση των γεύσεων από τρεις τριπλές της $SU(3)$. Ένας κομψός και εύχρηστος τρόπος είναι με τη γραφική αναπαράσταση στις άλγεβρας $SU(3)$.

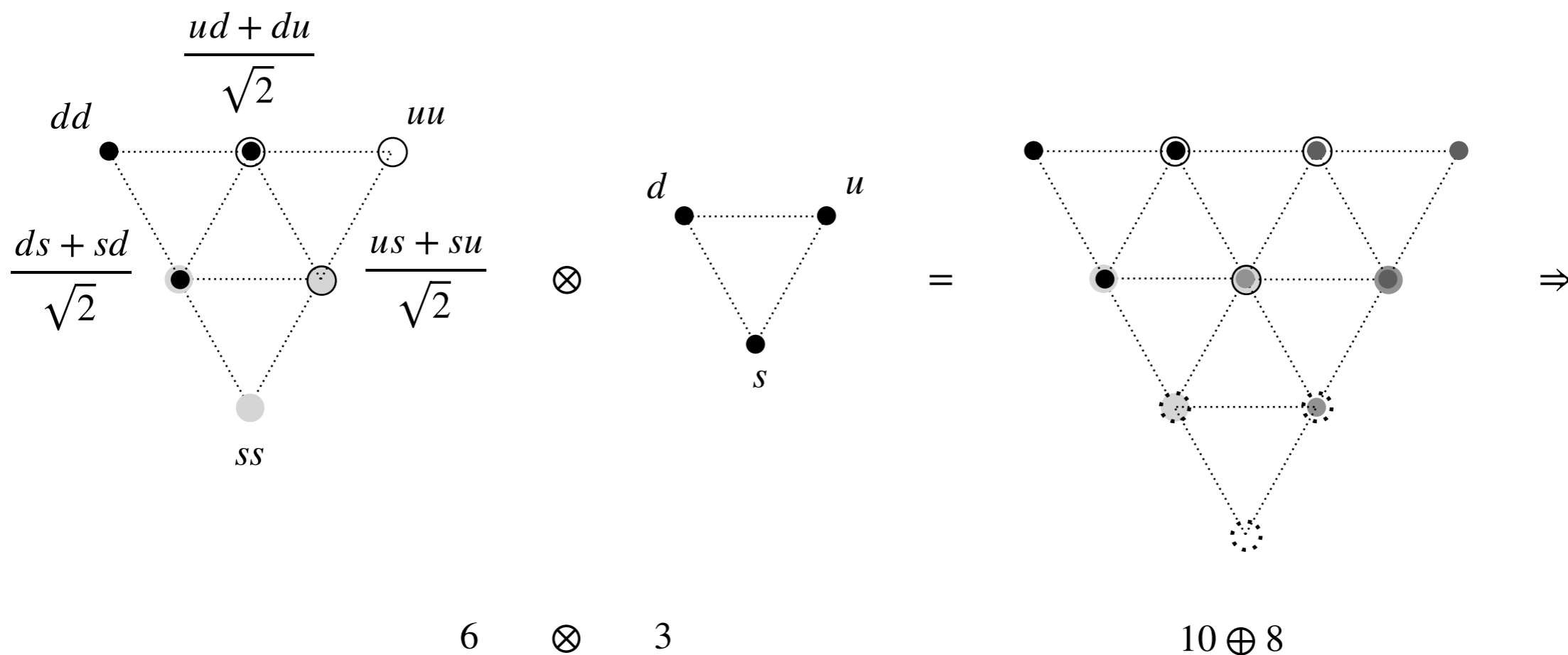
Η σύνθεση δύο τριπλών γεύσης δίνει μια συμμετρική εξαπλή και μια αντισυμμετρική τριπλή:

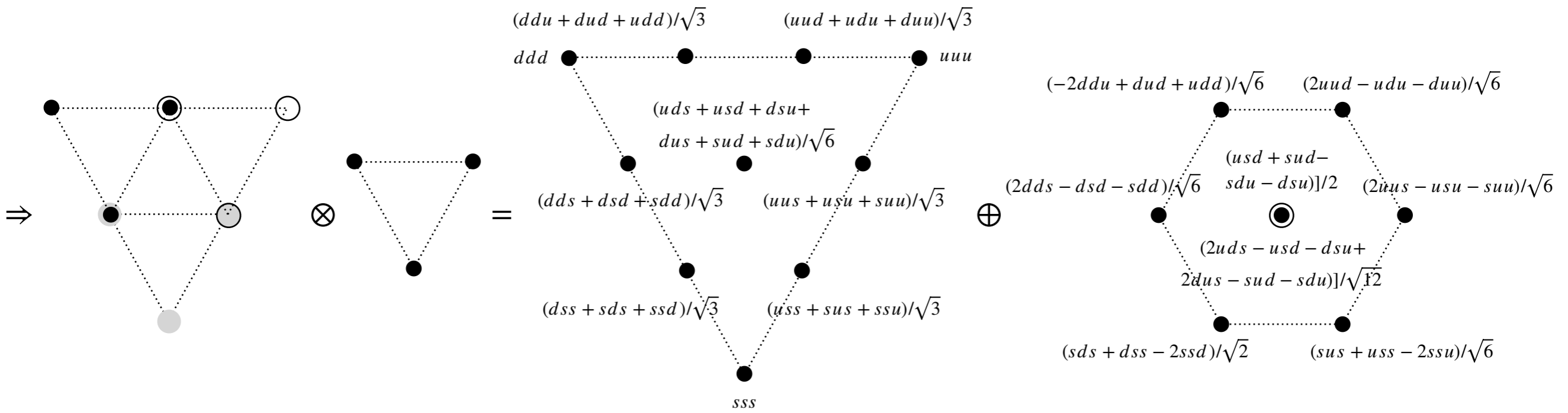


Προσθήκη άλλης μιας τριπλής:



Σύνθεση της τρίτης τριπλής με τη συμμετρική εξαπλή:

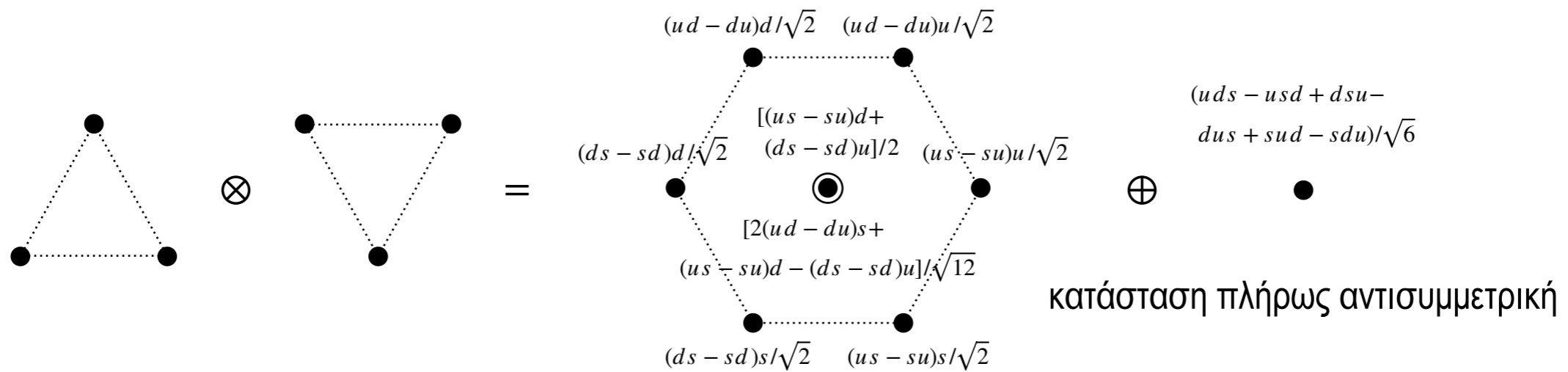




καταστάσεις πλήρως συμμετρικές

καταστάσεις 1↔2 συμμετρικές
ορθογώνιες στα μέλη της δεκαπλής

Σύνθεση της τρίτης τριπλής με την αντισυμμετρική τριπλή:



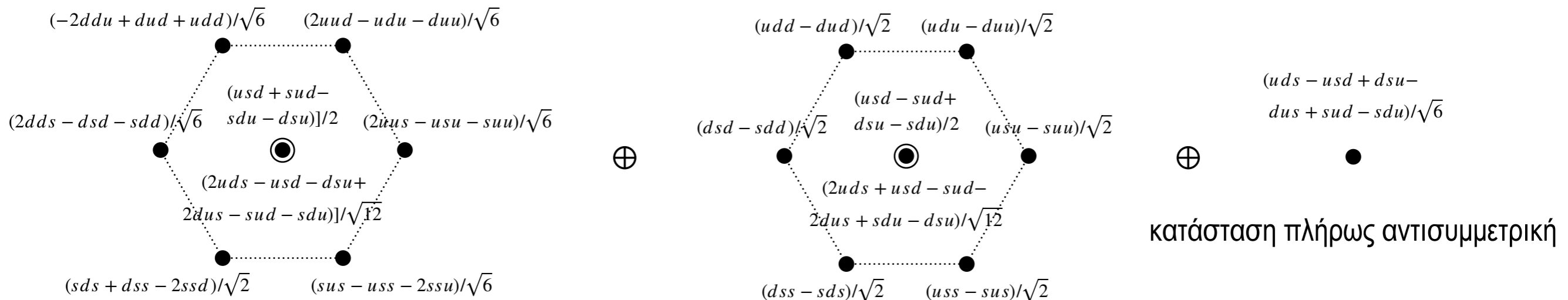
κατάσταση πλήρως αντισυμμετρική

καταστάσεις 1↔2 αντισυμμετρικές

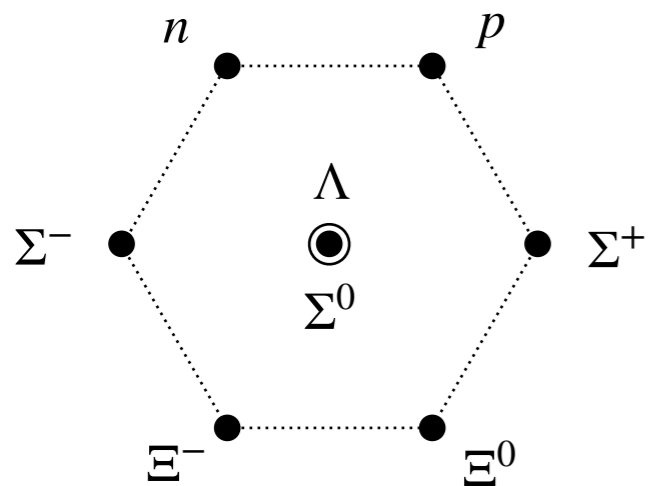
$$\bar{3} \otimes 3$$

$$8 \oplus 1$$

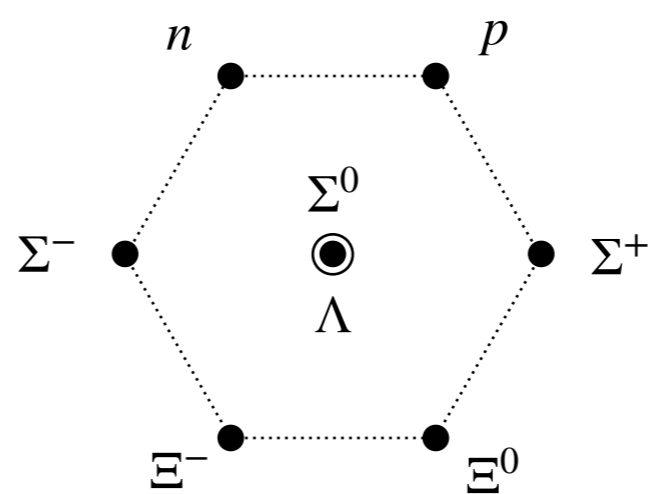
Η οκτάδα:



καταστάσεις 1 ↔ 2 συμμετρικές



καταστάσεις 1 ↔ 2 αντισυμμετρικές



Λ
 δεν δίνει συμμετρικό γινόμενο σπιν-γεύσης (δεν υπάρχει πλήρως αντισυμμετρικός συνδυασμός 3 σπιν)

Με βάση τη μικτή συμμετρία της οκτάδας, έχοντας κατασκευάσει την κυματοσυνάρτηση ενός μέλους (π.χ. του πρωτονίου), μπορούμε να κατασκευάσουμε τις κυματοσυναρτήσεις άλλων μελών της οκτάδας με απλή αλλαγή μιας γεύσης:

$$\begin{aligned}
 p &\leftrightarrow n \quad (u \leftrightarrow d) & p &\leftrightarrow \Sigma^+ \quad (d \leftrightarrow s) \\
 \Sigma^+ &\leftrightarrow \Sigma^- \quad (u \leftrightarrow d) & n &\leftrightarrow \Sigma^0 \quad (d \leftrightarrow s) \\
 \Xi^0 &\leftrightarrow \Xi^- \quad (u \leftrightarrow d) & &
 \end{aligned}$$

Άρα:

$$\begin{aligned}
 |\Sigma^+ \uparrow \rangle &= (2uus - usu - suu)(2 \uparrow \uparrow \downarrow - \uparrow \downarrow \uparrow - \downarrow \uparrow \uparrow) + (usu - suu)(\uparrow \downarrow \uparrow - \downarrow \uparrow \uparrow) \\
 &= (2u \uparrow u \uparrow s \downarrow - u \uparrow u \downarrow s \uparrow - u \downarrow u \uparrow s \uparrow + 2u \uparrow s \downarrow u \uparrow - u \uparrow s \uparrow u \downarrow - u \downarrow s \uparrow u \uparrow \\
 &\quad + 2s \downarrow u \uparrow u \uparrow - s \uparrow u \uparrow u \downarrow - s \uparrow u \downarrow u \uparrow) / \sqrt{18}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 |\Lambda \uparrow \rangle &= (usd + sud - sdu - dsu)(2 \uparrow \uparrow \downarrow - \uparrow \downarrow \uparrow - \downarrow \uparrow \uparrow) + \\
 &\quad (2uds + usd - sud - 2dus + sdu - dsu)(\uparrow \downarrow \uparrow - \downarrow \uparrow \uparrow) \\
 &= (u \uparrow d \downarrow s \uparrow - u \downarrow d \uparrow s \uparrow + d \downarrow u \uparrow s \uparrow - d \uparrow u \downarrow s \uparrow + s \uparrow d \downarrow u \uparrow - s \uparrow d \uparrow u \downarrow + u \uparrow s \uparrow d \downarrow - u \downarrow s \uparrow d \uparrow \\
 &\quad + s \uparrow u \uparrow d \downarrow - s \uparrow u \downarrow d \uparrow + d \downarrow s \uparrow u \uparrow - d \uparrow s \uparrow u \downarrow) / \sqrt{12}
 \end{aligned}$$

Η κανονικοποίηση υπολογίζεται στο τέλος από το άθροισμα των τετραγώνων των συντελεστών όλων των όρων της κυματοσυνάρτησης:

$$|\psi_{\text{baryon}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (\kappa_1 |a \uparrow b \downarrow c \downarrow\rangle + \kappa_2 |a \downarrow b \uparrow c \downarrow\rangle + \dots) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_i \kappa_i |\psi_i(abc)\rangle \right) \Rightarrow N = \sum_i |\kappa_i|^2$$

$$|\psi_{\text{meson}}\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} (\lambda_1 |a \uparrow \bar{b} \downarrow\rangle + \lambda_2 |a \downarrow \bar{b} \uparrow\rangle + \dots) = \frac{1}{\sqrt{N}} \left(\sum_i \lambda_i |\psi_i(a\bar{b})\rangle \right) \Rightarrow N = \sum_i |\lambda_i|^2$$

4.5 Ένας εμπειρικός τύπος υπολογισμού της μάζας των μεσονίων είναι:

$$M_{\text{meson}} = m_1 + m_2 + A \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2} \quad (1)$$

όπου $m_{1,2}$ είναι οι μάζες του ζεύγους κουάρκ-αντικουάρκ που απαρτίζουν το μεσόνιο “ντυμένες” με την ενέργεια αλληλεπίδρασής τους, $m_u \sim m_d \sim 300 \text{ MeV}$ και $m_s \sim 500 \text{ MeV}$ και A είναι μια παράμετρος σθένους της “χρωμομαγνητικής” αλληλεπίδρασης μεταξύ των σπιν $\vec{S}_{1,2}$ του ζεύγους, η προσαρμογή της οποίας στα δεδομένα δίνει $A \sim (2m_u)^2 \times 160 \text{ MeV}$. Εκτιμήστε με αυτόν τον τύπο τις μάζες των θεμελιωδών ψευδοβαθμωτών και διανυσματικών μεσονίων.

Υπολογίζουμε πρώτα τις ιδιοτιμές του τελεστή $\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2$:

$$\begin{aligned} \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 &\Rightarrow S^2 = S_1^2 + S_2^2 + 2\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 \Rightarrow \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2) \\ &\Rightarrow \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 = \frac{1}{2}[S(S+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1)] \\ &= \frac{1}{2} \left[S(S+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[S(S+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right] = \frac{S(S+1)}{2} - \frac{3}{4} = \begin{cases} 0 - \frac{3}{4} = -\frac{3}{4} & S = 0 \\ 1 - \frac{3}{4} = +\frac{1}{4} & S = 1 \end{cases} \end{aligned}$$

Θεωρούμε ότι κάθε όρος της κυματοσυνάρτησης γεύσης συνεισφέρει σύμφωνα με τον εμπειρικό τύπο (1) και προσθέτουμε τις συνεισφορές σταθμισμένες με τα τετράγωνα των συντελεστών, εφόσον η μάζα λαμβάνεται ως η μέση τιμή του αντίστοιχου τελεστή στη θεμελιώδη κατάσταση του μεσονίου και συνεπώς εξαρτάται τετραγωνικά από την αντίστοιχη κυματοσυνάρτηση, π.χ.

$$\pi^0 = (u\bar{u} - d\bar{d})/\sqrt{2} \Rightarrow M_{\pi^0} = (1/2)M_{u\bar{u}} + (1/2)M_{d\bar{d}}$$

Επομένως, για τα ψευδοβαθμωτά μεσόνια (σε παρένθεση οι πειραματικές τιμές):

$$M_{\pi} \sim 2m_u - 4m_u^2 \times 160 \text{ MeV} \times \frac{3}{4m_u^2} = (2 \times 300 - 3 \times 160) \text{ MeV} = (600 - 480) \text{ MeV} = 120 \text{ MeV} \quad (140 \text{ MeV})$$

$$M_K \sim m_u + m_s - 4m_u^2 \times 160 \text{ MeV} \times \frac{3}{4m_u m_s} = (300 + 500 - 3 \times \frac{3}{5} \times 160) \text{ MeV} = (800 - 288) \text{ MeV} = 512 \text{ MeV} \quad (500 \text{ MeV})$$

$$\eta = \frac{1}{\sqrt{6}}(u\bar{u} + d\bar{d} - 2s\bar{s}) \Rightarrow M_{\eta} \sim \frac{1}{6}M_{u\bar{u}} + \frac{1}{6}M_{d\bar{d}} + \frac{4}{6}M_{s\bar{s}} = \frac{2}{6}M_{\pi} + \frac{4}{6}M_{s\bar{s}} = \frac{1}{3}M_{\pi} + \frac{2}{3}M_{s\bar{s}}$$

$$= \frac{1}{3} \left(M_{\pi} + 2 \times 2m_s + 2 \times 4m_u^2 \times 160 \text{ MeV} \times \frac{-3/4}{m_s^2} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(120 \text{ MeV} + 2000 \text{ MeV} - 6 \times 160 \times \frac{3^2}{5^2} \text{ MeV} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(2120 \text{ MeV} - 960 \times \frac{9}{25} \text{ MeV} \right)$$

$$= \frac{1}{3}(2120 - 346) \text{ MeV} = \frac{1}{3} \times 1774 \text{ MeV} = 591 \text{ MeV} \quad (549 \text{ MeV})$$

$$\eta' = \frac{1}{\sqrt{3}}(u\bar{u} + d\bar{d} + s\bar{s}) \Rightarrow M_{\eta'} \sim \frac{1}{3}M_{u\bar{u}} + \frac{1}{3}M_{d\bar{d}} + \frac{1}{3}M_{s\bar{s}} = \frac{2}{3}M_{\pi} + \frac{1}{3}M_{s\bar{s}}$$

$$= \frac{1}{3} \left(240 \text{ MeV} + 1000 \text{ MeV} - 3 \times 160 \times \frac{3^2}{5^2} \text{ MeV} \right)$$

$$= \frac{1}{3} \left(1240 \text{ MeV} - 480 \times \frac{9}{25} \text{ MeV} \right)$$

$$= \frac{1}{3}(1240 - 173) \text{ MeV} = \frac{1}{3} \times 1067 \text{ MeV} = 356 \text{ MeV} \quad (958 \text{ MeV})$$

Για τα διανυσματικά μεσόνια:

$$M_\rho \sim M_\omega \sim 2m_u + 4m_u^2 \times 160 \text{ MeV} \times \frac{1}{4m_u^2} = (2 \times 300 + 160) \text{ MeV} = 760 \text{ MeV} \quad (770, 783 \text{ MeV})$$

$$M_{K^*} \sim m_u + m_s + 4m_u^2 \times 160 \text{ MeV} \times \frac{1}{4m_u m_s} = (300 + 500 + \frac{3}{5} \times 160) \text{ MeV} = (800 + 96) \text{ MeV} = 896 \text{ MeV} \quad (896 \text{ MeV})$$

$$M_\phi \sim 2m_s + 4m_u^2 \times 160 \text{ MeV} \times \frac{1}{4m_s^2} = \left(2 \times 500 + \frac{9}{25} \times 160 \right) \text{ MeV} = (1000 + 58) \text{ MeV} = 1058 \text{ MeV} \quad (1020 \text{ MeV})$$

Γενικά, η συμφωνία με το πείραμα είναι καλή, με αποκλίσεις το πολύ της τάξης του 10%, εκτός από την περίπτωση του η' όπου η πρόβλεψη και το πείραμα διαφέρουν σχεδόν κατά έναν παράγοντα 3

4.6 Ο αντίστοιχος εμπειρικός τύπος υπολογισμού της μάζας των βαρυονίων είναι:

$$M_{\text{baryon}} = m_1 + m_2 + m_3 + A' \left(\frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2}{m_1 m_2} + \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3}{m_1 m_3} + \frac{\vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3}{m_2 m_3} \right) \quad (2)$$

όπου $m_{1,2,3}$ είναι οι μάζες των κουάρκ που απαρτίζουν το βαρυόνιο “ντυμένες” με την ενέργεια αλληλεπίδρασής τους, $m_u \sim m_d \sim 360 \text{ MeV}$ και $m_s \sim 540 \text{ MeV}$ και A' είναι μια παράμετρος σθένους της “χρωμομαγνητικής” αλληλεπίδρασης μεταξύ των σπιν $\vec{S}_{i,j}$ του ζεύγους κουάρκ $\{i, j\}$, η προσαρμογή της οποίας στα δεδομένα δίνει $A' \sim (2m_u)^2 \times 50 \text{ MeV}$. Εκτιμήστε με αυτόν τον τύπο τις μάζες των βαρυονίων της θεμελιώδους οκτάδας και δεκάδας.

Η επεξεργασία των όρων “χρωμομαγνητικής” αλληλεπίδρασης είναι ευκολότερη όταν οι “ντυμένες” μάζες των κουάρκ είναι ίσες, οπότε οι παρονομαστές παραγοντοποιούνται και η ιδιοτιμή του αθροίσματος των τελεστών $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ υπολογίζεται εύκολα:

$$\begin{aligned} \vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2 + \vec{S}_3 &\Rightarrow S^2 = S_1^2 + S_2^2 + S_3^2 + 2(\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3) \\ &\Rightarrow \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 = \frac{1}{2}(S^2 - S_1^2 - S_2^2 - S_3^2) \\ &= \frac{1}{2}[S(S+1) - S_1(S_1+1) - S_2(S_2+1) - S_3(S_3+1)] \\ &= \frac{1}{2} \left[S(S+1) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + 1 \right) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[S(S+1) - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} - \frac{3}{4} \right] = \frac{S(S+1)}{2} - \frac{9}{8} \\ &= \begin{cases} \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \left(\frac{1}{2} + 1 \right) = \frac{3}{8} - \frac{9}{8} = -\frac{3}{4} & S = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} \times \left(\frac{3}{2} + 1 \right) = \frac{15}{8} - \frac{9}{8} = +\frac{3}{4} & S = \frac{3}{2} \end{cases} \end{aligned}$$

Εφαρμόζουμε τον ίδιο κανόνα υπολογισμού της μάζας των βαρυονίων με την περίπτωση των μεσονίων, δηλαδή ότι κάθε όρος της κυματοσυνάρτησης γεύσης συνεισφέρει σύμφωνα με τον εμπειρικό τύπο (2) και οι συνεισφορές προστίθενται σταθμισμένες με τα τετράγωνα των συντελεστών, π.χ.

$$\Delta^+ = \frac{1}{\sqrt{3}}(uud + udu + duu) \Rightarrow M_{\Delta} = \frac{1}{3} \times 3 \times M_{uud} = M_{uud}$$

Τα βαρυόνια που αποτελούνται από κουάρκ με ίσες “ντυμένες” μάζες είναι τα N , Δ και Ω , συνεπώς:

$$M_N \sim 3m_u - 4m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \frac{3}{4m_u^2} = (3 \times 360 - 3 \times 50) \text{ MeV} = (1080 - 150) \text{ MeV} = 930 \text{ MeV} \quad (939 \text{ MeV})$$

$$M_{\Delta} \sim 3m_u + 4m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \frac{3}{4m_u^2} = (3 \times 360 + 3 \times 50) \text{ MeV} = (1080 + 150) \text{ MeV} = 1230 \text{ MeV} \quad (1232 \text{ MeV})$$

$$M_{\Omega} \sim 3m_s + 4m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \frac{3}{4m_s^2} = \left(3 \times 540 + 150 \times \frac{2^2}{3^2} \right) \text{ MeV} = (1620 + 22) \text{ MeV} = 1642 \text{ MeV} \quad (1672 \text{ MeV})$$

χρησιμοποιώντας και το δεδομένο $m_u/m_s = 360 \text{ MeV} / 540 \text{ MeV} = 2/3$

Για τα υπόλοιπα βαρυόνια της δεκάδας, Σ^* και Ξ^* , τα σπιν των κουάρκ είναι όλα ομοπαράλληλα, οπότε όλοι οι τελεστές $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$ έχουν την ίδια ιδιοτιμή $1/4$, όπως στην περίπτωση των διανυσματικών μεσονίων, η οποία παραγοντοποιείται από το άθροισμα των όρων “χρωμομαγνητικής” αλληλεπίδρασης:

$$\begin{aligned} M_{\Sigma^*} &\sim 2m_u + m_s + \frac{A'}{4} \left(\frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_u m_s} \right) = 2m_u + m_s + m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \left(\frac{1}{m_u^2} + \frac{2}{m_u m_s} \right) \\ &= \left[2 \times 360 + 540 + 50 \times \left(1 + 2 \times \frac{2}{3} \right) \right] \text{ MeV} = (1260 + 117) \text{ MeV} = 1377 \text{ MeV} \quad (1384 \text{ MeV}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_{\Xi^*} &\sim m_u + 2m_s + \frac{A'}{4} \left(\frac{2}{m_u m_s} + \frac{1}{m_s^2} \right) = m_u + 2m_s + m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \left(\frac{2}{m_u m_s} + \frac{1}{m_s^2} \right) \\
&= \left[360 + 2 \times 540 + 50 \times \left(2 \times \frac{2}{3} + \frac{2^2}{3^2} \right) \right] \text{ MeV} = \left[360 + 1080 + \frac{100}{3} \times \left(2 + \frac{2}{3} \right) \right] \text{ MeV} \\
&= (1440 + 89) \text{ MeV} = 1529 \text{ MeV} \quad (1533 \text{ MeV})
\end{aligned}$$

Στην οκτάδα, τα κουάρκ u και d έχουν ομοπαράλληλα σπιν στο βαρυόνιο Σ , οπότε η ιδιοτιμή του τελεστή $\vec{S}_u \cdot \vec{S}_d$ είναι $1/4$, όπως στην περίπτωση των διανυσματικών μεσονίων, ενώ έχουν αντιπαράλληλα σπιν στο βαρυόνιο Λ , οπότε η ιδιοτιμή του τελεστή $\vec{S}_u \cdot \vec{S}_d$ είναι $-3/4$, όπως στην περίπτωση των διανυσματικών μεσονίων

Στους όρους “χρωμομαγνητικής” αλληλεπίδρασης ξεχωρίζουμε τον τελεστή $\vec{S}_u \cdot \vec{S}_d$ από το άθροισμα των $\vec{S}_i \cdot \vec{S}_j$, ώστε να διαιρείται μόνο αυτός με το γινόμενο $m_u m_d$, και μετά στους όρους που περιλαμβάνουν το κουάρκ s αφαιρούμε τον $\vec{S}_u \cdot \vec{S}_d$, ώστε το άθροισμα να παραμένει αναλλοίωτο:

$$\begin{aligned}
M_{\Sigma} &\sim m_u + m_d + m_s + A' \left(\frac{\vec{S}_u \cdot \vec{S}_d}{m_u m_d} + \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 - \vec{S}_u \cdot \vec{S}_d}{m_u m_s} \right) \\
&= 2m_u + m_s + 4m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \left(\frac{1/4}{m_u^2} + \frac{-3/4 - 1/4}{m_u m_s} \right) = 2m_u + m_s + m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \left(\frac{1}{m_u^2} - \frac{4}{m_u m_s} \right) \\
&= \left[2 \times 360 + 540 + 50 \times \left(1 - 4 \times \frac{2}{3} \right) \right] \text{ MeV} = \left(720 + 540 - \frac{250}{3} \right) \text{ MeV} \\
&= (1260 - 83) \text{ MeV} = 1177 \text{ MeV} \quad (1193 \text{ MeV})
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
M_\Lambda &\sim m_u + m_d + m_s + A' \left(\frac{\vec{S}_u \cdot \vec{S}_d}{m_u m_d} + \frac{\vec{S}_1 \cdot \vec{S}_2 + \vec{S}_1 \cdot \vec{S}_3 + \vec{S}_2 \cdot \vec{S}_3 - \vec{S}_u \cdot \vec{S}_d}{m_u m_s} \right) \\
&= 2m_u + m_s + 4m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \left(\frac{-3/4}{m_u^2} + \frac{-3/4 + 3/4}{m_u m_s} \right) = 2m_u + m_s - 4m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \frac{3}{4m_u^2} \\
&= (2 \times 360 + 540 - 150) \text{ MeV} = (1260 - 150) \text{ MeV} = 1110 \text{ MeV} \quad (1116 \text{ MeV})
\end{aligned}$$

Το βαρυόνιο Ξ^- ή Ξ^0 της οκτάδας έχει όμοια δομή γεύσης με το Σ^- ή Σ^+ , αντίστοιχα, μετά από αντικατάσταση ενός κουάρκ πρώτης γενιάς με ένα κουάρκ s , οπότε:

$$\begin{aligned}
M_\Xi &\sim m_u + 2m_s + m_u^2 \times 50 \text{ MeV} \times \left(\frac{1}{m_s^2} - \frac{4}{m_u m_s} \right) = \left[360 + 2 \times 540 + 50 \times \left(\frac{2^2}{3^2} - 4 \times \frac{2}{3} \right) \right] \text{ MeV} \\
&= \left(360 + 1080 - 50 \times \frac{4 - 72}{27} \right) \text{ MeV} \\
&= (1440 - 126) \text{ MeV} = 1314 \text{ MeV} \quad (1318 \text{ MeV})
\end{aligned}$$

Σε όλες τις περιπτώσεις οι αποκλίσεις από το πείραμα είναι μικρότερες από 2%

4.7 Η ιδιάζουσα (intrinsic) μαγνητική διπολική ροπή ενός “σημειακού” φερμιονίου μάζας m και φορτίου q σε ηρεμία ορίζεται από το σπιν του:

$$\vec{\mu} = \frac{q}{m} \vec{S} \Rightarrow \mu_z = \frac{q}{m} S_z$$

όπου ο λόγος q/m ταυτίζεται με τον κλασικό “γυρομαγνητικό” λόγο g του σωματιδίου. Κατά σύμβαση, ο όρος “μαγνητική ροπή” στο σύστημα μονάδων SI (αποκαθιστώντας τις σταθερές \hbar και c) συνδέεται με το μισό του γυρομαγνητικού λόγου, $\mu = (g/2)(\hbar/c) = (q\hbar)/(2mc)$. Χρησιμοποιώντας τις “ντυμένες” μάζες $m_u \sim m_d \sim 338 \text{ MeV}$ των κουάρκ πρώτης γενιάς, υπολογίστε την μαγνητική ροπή του πρωτονίου και του νετρονίου, καθώς και το λόγο τους.

Ενδιαφερόμαστε για τη μέση τιμή του τελεστή συνολικής μαγνητικής ροπής σε μια ορισμένη κατάσταση συνολικού σπιν του βαρυονίου οκτάδας, έστω την κατάσταση με σπιν “επάνω” (η κατάσταση με σπιν “κάτω” είναι ακριβώς συμμετρική), οπότε:

$$\mu_B = 2 \langle B \uparrow | (\mu_1 + \mu_2 + \mu_3)_z | B \uparrow \rangle = 2 \left\langle B \uparrow \left| \left(\frac{\mu_1}{\hbar} S_{1_z} + \frac{\mu_2}{\hbar} S_{2_z} + \frac{\mu_3}{\hbar} S_{3_z} \right) \right| B \uparrow \right\rangle = 2 \sum_{i=1}^3 \frac{\mu_i}{\hbar} \langle B \uparrow | S_{i_z} | B \uparrow \rangle$$

Η κυματοσυνάρτηση σπιν-γέυσης του πρωτονίου με σπιν “επάνω” είναι:

$$|p \uparrow \rangle = (2u \uparrow u \uparrow d \downarrow - u \uparrow u \downarrow d \uparrow - u \downarrow u \uparrow d \uparrow + 2u \uparrow d \downarrow u \uparrow - u \uparrow d \uparrow u \downarrow - u \downarrow d \uparrow u \uparrow + 2d \downarrow u \uparrow u \uparrow - d \uparrow u \uparrow u \downarrow - d \uparrow u \downarrow u \uparrow) / \sqrt{18}$$

Η κυματοσυνάρτηση αυτή αποτελείται από τρεις τριάδες όρων που διαφέρουν μεταξύ τους μόνο ως προς τη μετάθεση του κουάρκ d , οπότε η συνεισφορά κάθε τριάδας είναι η ίδια και συνεπώς:

$$\begin{aligned} \mu_p = \frac{3 \times 2}{\hbar} & (4 \langle u \uparrow u \uparrow d \downarrow | (\mu_1 S_{1_z} + \mu_2 S_{2_z} + \mu_3 S_{3_z}) | u \uparrow u \uparrow d \downarrow \rangle \\ & + \langle u \uparrow u \downarrow d \uparrow | (\mu_1 S_{1_z} + \mu_2 S_{2_z} + \mu_3 S_{3_z}) | u \uparrow u \downarrow d \uparrow \rangle \\ & + \langle u \downarrow u \uparrow d \uparrow | (\mu_1 S_{1_z} + \mu_2 S_{2_z} + \mu_3 S_{3_z}) | u \downarrow u \uparrow d \uparrow \rangle) / 18 \end{aligned}$$

όπου λαμβάνεται υπόψη η ορθοκανονικότητα των διαφορετικών όρων και οι συντελεστές τετραγωνίζονται όταν παίρνουμε τη μέση τιμή, ενώ οι ιδιοτιμές κάθε τελεστή S_z είναι $\pm 1/2$, οπότε:

$$\mu_p = \frac{1}{3} \left[4 \left(\frac{\mu_u}{2} + \frac{\mu_u}{2} - \frac{\mu_d}{2} \right) + \left(\frac{\mu_u}{2} - \frac{\mu_u}{2} + \frac{\mu_d}{2} \right) + \left(-\frac{\mu_u}{2} + \frac{\mu_u}{2} + \frac{\mu_d}{2} \right) \right] = \frac{1}{3} \left[2(2\mu_u - \mu_d) + \frac{\mu_d}{2} + \frac{\mu_d}{2} \right] = \frac{1}{3}(4\mu_u - 2\mu_d + \mu_d)$$

$$\Rightarrow \mu_p = \frac{4\mu_u - \mu_d}{3} = \frac{4(q_u\hbar)/(2m_u c) - (q_d\hbar)/(2m_d)c}{3} = \frac{4q_u/e - q_d/e}{3} \cdot \frac{m_N}{m_u} \cdot \frac{e\hbar}{2m_N c} = \frac{8/3 + 1/3}{3} \cdot \frac{m_N}{m_u} \mu_N = \frac{m_N}{m_u} \mu_N = 2.78 \mu_N$$

σε πολύ καλή συμφωνία με την πειραματική τιμή $\mu_p = 2.79 \mu_N$, όπου $m_N = 939 \text{ MeV}$ είναι η μάζα του νουκλεονίου, $m_u = 338 \text{ MeV}$ είναι μια καλύτερη προσέγγιση της “ντυμένης” μάζας των κουάρκ πρώτης γενιάς, e είναι η μονάδα (θετικού) ηλεκτρικού φορτίου και $\mu_N = (e\hbar)/(2m_N c)$ είναι η μονάδα πυρηνικής μαγνητικής ροπής που ονομάζεται “μαγνητόνη”

Για το νετρόνιο η ισοτοπική συμμετρία των κουάρκ u και d οδηγεί στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα μετά την εναλλαγή των γεύσεων:

$$\Rightarrow \mu_n = \frac{4\mu_d - \mu_u}{3} = \frac{4q_d/e - q_u/e}{3} \cdot \frac{m_N}{m_u} \cdot \frac{e\hbar}{2m_N c} = \frac{-4/3 - 2/3}{3} \cdot \frac{m_N}{m_u} \mu_N = -\frac{2}{3} \cdot \frac{m_N}{m_u} \mu_N = -1.85 \mu_N$$

σε καλή συμφωνία με την πειραματική τιμή $\mu_n = -1.91 \mu_N$, με μια απόκλιση της τάξης του 3%

Με τον ίδιο τρόπο μπορούν να υπολογιστούν οι μαγνητικές ροπές όλων των βαριονίων της οκτάδας, ενώ λαμβάνοντας υπόψη ότι οι “ντυμένες” μάζες των κουάρκ πρώτης γενιάς είναι ίσες, ο λόγος των μαγνητικών ροπών του νετρονίου και του πρωτονίου είναι:

$$\frac{\mu_n}{\mu_p} = \frac{4\mu_d - \mu_u}{4\mu_u - \mu_d} \sim \frac{4q_d - q_u}{4q_u - q_d} = \frac{4 - (q_u/q_d)}{4(q_u/q_d) - 1} = \frac{4 - (-2)}{4(-2) - 1} = \frac{6}{-9} = -\frac{2}{3}$$

σε καλή συμφωνία με την πειραματική τιμή -0.685 , με μια απόκλιση της τάξης του 3%

4.8 Στη δεκαετία του 1970 προτάθηκε ένα πρότυπο στο οποίο όλα τα κουάρκ και τα λεπτόνια συνθέτονται από δύο ακόμη πιο στοιχειώδη συστατικά με μηδενική μάζα ηρεμίας και σπιν 1/2: το c , με φορτίο $-1/3$, το n , με φορτίο 0, και τα αντίστοιχά τους αντισωματίδια \bar{c} και \bar{n} . Επιτρέπεται να συνδυαστούν σε ομάδες τριών σωματιδίων ή τριών αντισωματιδίων (π.χ. ccn ή $\bar{n}\bar{n}\bar{n}$). Φτιάξτε όλα τα οκτώ κουάρκ και λεπτόνια της πρώτης γενιάς του Καθιερωμένου Προτύπου με αυτόν τον τρόπο (οκτώ σημαίνει τα σωματίδια και τα αντισωματίδια). Οι άλλες γενιές υποτίθεται ότι είναι διεγερμένες καταστάσεις της πρώτης γενιάς. Σημειώστε ότι καθεμιά από τις τέσσερις καταστάσεις κουάρκ περιλαμβάνει τρεις δυνατές μεταθέσεις (π.χ. ccn, cnc, ncc), οι οποίες, σε αυτό το πρότυπο, αντιστοιχούν στα τρία χρώματα. Μεσάζοντες δυνάμειων (μποζόνια με σπιν 1) μπορούν να σχηματιστούν από δύο τριάδες σωματιδίων ή αντισωματιδίων. Τα μποζόνια W^\pm, Z και γ περιλαμβάνουν τρία ίδια σωματίδια και τρία ίδια αντισωματίδια (π.χ. $W^- = ccc\bar{n}\bar{n}\bar{n}$). Φτιάξτε τα μποζόνια W^+, Z και γ με αυτόν τον τρόπο. Τα γλουόνια περιλαμβάνουν μικτούς συνδυασμούς (π.χ. $ccn\bar{c}\bar{c}\bar{n}$). Πόσες δυνατότητες υπάρχουν για τα γλουόνια; Μπορείτε να σκεφτείτε έναν τρόπο για να τις περιορίσετε σε οκτώ, όσες και οι χρωματικές καταστάσεις βάσης της QCD;

Η πρώτη γενιά των φερμιονίων:

$$\begin{aligned}
 e^- &= ccc & \nu_e &= nnn \\
 u &= (\bar{n}\bar{c}\bar{c})_R, & (\bar{c}\bar{n}\bar{c})_B, & (\bar{c}\bar{c}\bar{n})_G \\
 d &= (cnn)_R, & (ncn)_B, & (nnc)_G \\
 e^+ &= \bar{c}\bar{c}\bar{c} & \bar{\nu}_e &= \bar{n}\bar{n}\bar{n} \\
 \bar{u} &= (ncc)_{\bar{R}}, & (cnc)_{\bar{B}}, & (ccn)_{\bar{G}} \\
 \bar{d} &= (\bar{c}\bar{n}\bar{n})_{\bar{R}}, & (\bar{n}\bar{c}\bar{n})_{\bar{B}}, & (\bar{n}\bar{n}\bar{c})_{\bar{G}}
 \end{aligned}$$

Ηλεκτρασθενή μποζόνια:

$$\begin{aligned}
 W^+ &= \alpha(\bar{c}\bar{c}\bar{c}nnn) + \beta(\bar{c}\bar{c}\bar{c}\bar{n}\bar{n}\bar{n}) & W^- &= \alpha(ccc\bar{n}\bar{n}\bar{n}) + \beta(cccnnn) & |\alpha|^2 + |\beta|^2 &= 1 \\
 Z/\gamma &= \kappa(nnn\bar{n}\bar{n}\bar{n}) + \lambda(ccc\bar{c}\bar{c}\bar{c}) & & & |\kappa|^2 + |\lambda|^2 &= 1
 \end{aligned}$$

Επιτρέπονται όλες οι διασπάσεις των ασθενών μποζονίων:

$$\begin{array}{cccc}
 W^+ \rightarrow \underbrace{e^+\nu_e}, & \underbrace{u\bar{d}} & W^- \rightarrow \underbrace{e^-\bar{\nu}_e}, & \underbrace{\bar{u}d} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \beta = 0 & \beta = 1 & \beta = 0 & \beta = 1 \\
 \\
 Z \rightarrow \underbrace{e^-e^+}, & \underbrace{\nu_e\bar{\nu}_e}, & \underbrace{u\bar{u}}, & \underbrace{d\bar{d}} \\
 \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\
 \lambda = 1 & \lambda = 0 & \lambda = \sqrt{\frac{2}{3}} & \lambda = \sqrt{\frac{1}{3}}
 \end{array}$$

Τα γλουόνια ταξινομούνται σε χρωματικούς πίνακες:

$$\begin{array}{ccc}
 & \bar{R} & \bar{B} & \bar{G} \\
 R & \begin{bmatrix} \bar{n}n \\ \bar{c}c \\ \bar{c}c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{n}c \\ \bar{c}n \\ \bar{c}c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{n}c \\ \bar{c}c \\ \bar{c}n \end{bmatrix} \\
 B & \begin{bmatrix} \bar{c}n \\ \bar{n}c \\ \bar{c}c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{c}c \\ \bar{n}n \\ \bar{c}c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{c}c \\ \bar{n}c \\ \bar{c}n \end{bmatrix} \\
 G & \begin{bmatrix} \bar{c}n \\ \bar{c}c \\ \bar{n}c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{c}c \\ \bar{c}n \\ \bar{n}c \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \bar{c}c \\ \bar{c}c \\ \bar{n}n \end{bmatrix} \\
 & \text{u-γλουόνια } (g_u) & &
 \end{array}
 \qquad
 \begin{array}{ccc}
 & \bar{R} & \bar{B} & \bar{G} \\
 R & \begin{bmatrix} c\bar{c} \\ n\bar{n} \\ n\bar{n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c\bar{n} \\ n\bar{c} \\ n\bar{n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} c\bar{n} \\ n\bar{n} \\ n\bar{c} \end{bmatrix} \\
 B & \begin{bmatrix} n\bar{c} \\ c\bar{n} \\ n\bar{n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} n\bar{n} \\ c\bar{c} \\ n\bar{n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} n\bar{n} \\ c\bar{n} \\ n\bar{c} \end{bmatrix} \\
 G & \begin{bmatrix} n\bar{c} \\ n\bar{n} \\ c\bar{n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} n\bar{n} \\ n\bar{c} \\ c\bar{n} \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} n\bar{n} \\ n\bar{n} \\ c\bar{c} \end{bmatrix} \\
 & \text{d-γλουόνια } (g_d) & &
 \end{array}$$

Από τους πίνακες αυτούς μπορούν να φτιαχτούν 9 γραμμικοί συνδυασμοί του τύπου $\xi g_u + \eta g_d$, $|\xi|^2 + |\eta|^2 = 1$, που επιτρέπουν τις διασπάσεις $g \rightarrow u\bar{u}$ και $g \rightarrow d\bar{d}$ με όλους τους δυνατούς χρωματικούς συνδυασμούς, από τους οποίους ο $R\bar{R} + B\bar{B} + G\bar{G}$ είναι άχρωμος (χρωματική απλή), οπότε καταλήγουμε σε 8 διακριτούς χρωματικούς συνδυασμούς γλουονίων, όσους έχει και η QCD