



ΕΛΛΗΝΙΚΗ ΔΗΜΟΚΡΑΤΙΑ

Εθνικόν και Καποδιστριακόν  
Πανεπιστήμιον Αθηνών

— ΙΔΡΥΘΕΝ ΤΟ 1837 —

# ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Ακαδημαϊκό Έτος 2021-2022

Ευστάθιος Στυλιάρης

Δευτέρα 14:00-16:00



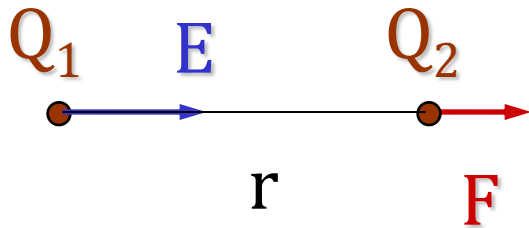
# ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Ακαδημαϊκό Έτος 2021-2022  
Ευστάθιος Στυλιάρης

## ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΔΥΝΑΜΗ & ΜΕΣΟ ΠΕΔΙΟ

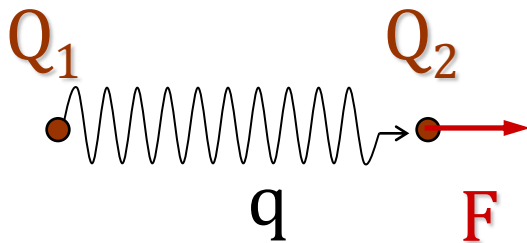
- Κλασσική & Κβαντική Εικόνα Πεδίου
- Η Πυρηνική Δύναμη – Θεωρία Yukawa
- Ο Ρόλος του Πιονίου στην Πυρηνική Δύναμη
- Δυναμικό Νουκλεονίου-Νουκλεονίου
- Αναγκαιότητα του Μέσου Πεδίου

# Κλασική & κβαντική εικόνα πεδίου



Κλασικό Πεδίο  $E(r)$

$$\vec{F} = \vec{E}(r) \cdot Q_2 = \frac{Q_1}{r^2} \hat{r} \cdot Q_2 = \frac{Q_1 Q_2}{r^2} \hat{r}$$



Ανταλλαγή δυνητικού φωτονίου  
ορμής  $q$

$$qr \approx \hbar \Rightarrow q \approx \frac{\hbar}{r} \Rightarrow q \approx \frac{\hbar}{ct} \Rightarrow \frac{dq}{dt} \approx \frac{\hbar}{ct^2} \Rightarrow \frac{dq}{dt} \approx \frac{\hbar c}{r^2}$$

# Κλασική & κβαντική εικόνα πεδίου

Στην περίπτωση λοιπόν της αλληλεπίδρασης των δύο ηλεκτρονίων θα έχουμε:

## Κλασική Εικόνα

$$F = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{r^2}$$

## Κβαντική Εικόνα

$$F = g_e \cdot g_e \cdot \frac{dq}{dt} = g_e^2 \frac{\hbar c}{r^2}$$

Το  $g_e$  εκφράζει την πιθανότητα εκπομπής ή απορρόφησης του φωτονίου από το ηλεκτρόνιο.

Η ισοδυναμία των δύο αυτών εκφράσεων επιτρέπει τον προσδιορισμό της σταθεράς ζεύξης  $g$  για το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο:

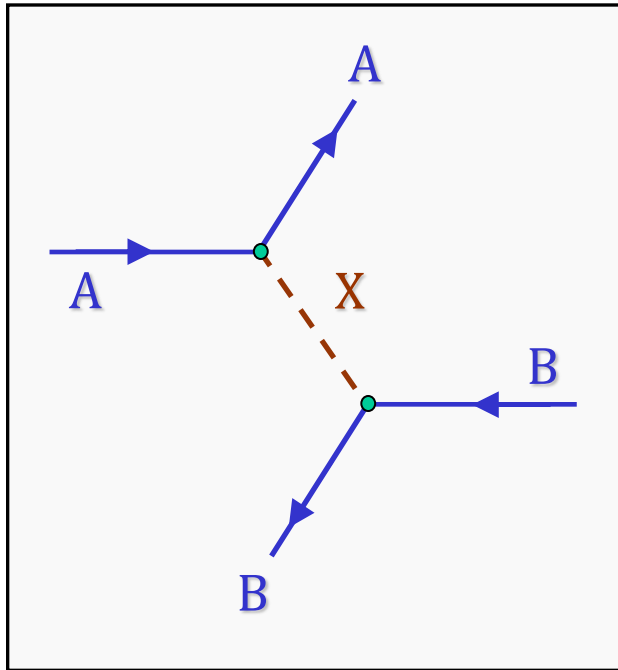
$$g_e^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0} \cdot \frac{1}{\hbar c} = \alpha$$



$$g_e = \sqrt{\alpha} = \sqrt{\frac{1}{137}}$$

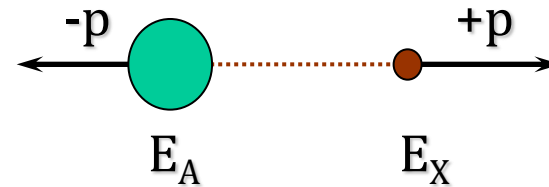
όπου  $\alpha$  η σταθερά της **λεπτής υφής**.

# Κλασική & κβαντική εικόνα πεδίου



Αλληλεπίδραση σωματίων A και B μέσω της ανταλλαγής του σωματιδίου X με μάζα  $M_X$

Στο σύστημα αναφοράς του σωματιδίου A, η εκπομπή του σωματιδίου X προσδίδει ανάκρουση στο A με ίσες κατά μέτρο ορμές.



Η ενεργειακή διαφορά υπολογίζεται:

$$\Delta E = E_A + E_X - M_A c^2$$

$$\Delta E = \sqrt{p^2 c^2 + M_A^2 c^4} + \sqrt{p^2 c^2 + M_X^2 c^4} - M_A c^2$$

απ' όπου συνάγεται:

$$\text{για } p \rightarrow \infty \Rightarrow \Delta E = 2pc$$

$$\text{\& για } p \rightarrow 0 \Rightarrow \Delta E = M_X c^2$$

# Κλασική & κβαντική εικόνα πεδίου

Η ενεργειακή αυτή παραβίαση  $\Delta E$  πρέπει υποχρεωτικά να διαρκεί για μέγιστο χρόνο  $\Delta t$  που να καλύπτεται από την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg:

$$\Delta t = \frac{\hbar}{\Delta E}$$

Η μέγιστη εμβέλεια λοιπόν που μπορεί να έχει το σωματίδιο X είναι κατά συνέπεια:

$$R = c \cdot \Delta t = c \cdot \frac{\hbar}{\Delta E} = c \cdot \frac{\hbar}{M_X c^2}$$

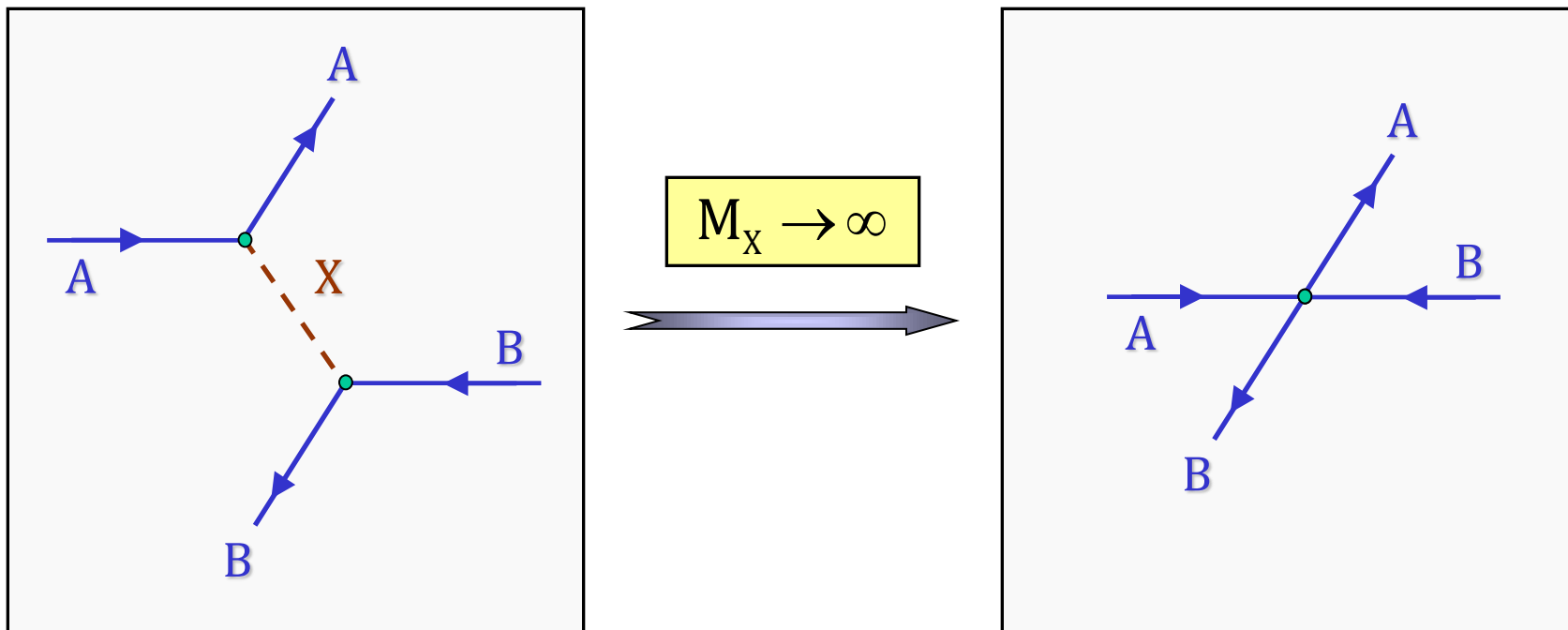


$$R = \frac{\hbar}{M_X c}$$

*Η εμβέλεια του πεδίου είναι αντιστρόφως ανάλογη της μάζας του διαδότη.*

Στην περίπτωση της ηλεκτρομαγνητικής αλληλεπίδρασης όπου ο διαδότης είναι το φωτόνιο με μηδενική μάζα ηρεμίας, είναι προφανές πως η εμβέλεια του πεδίου γίνεται άπειρη.

# Κλασική & κβαντική εικόνα πεδίου



Στην περίπτωση όπου η **μάζα** του διαδότη γίνεται πρακτικά **άπειρη**, τότε η **εμβέλεια** του πεδίου **μηδενίζεται** και η αλληλεπίδραση συρρικνώνεται σε ένα μόνο σημείο του χώρου (**zero range interaction**).

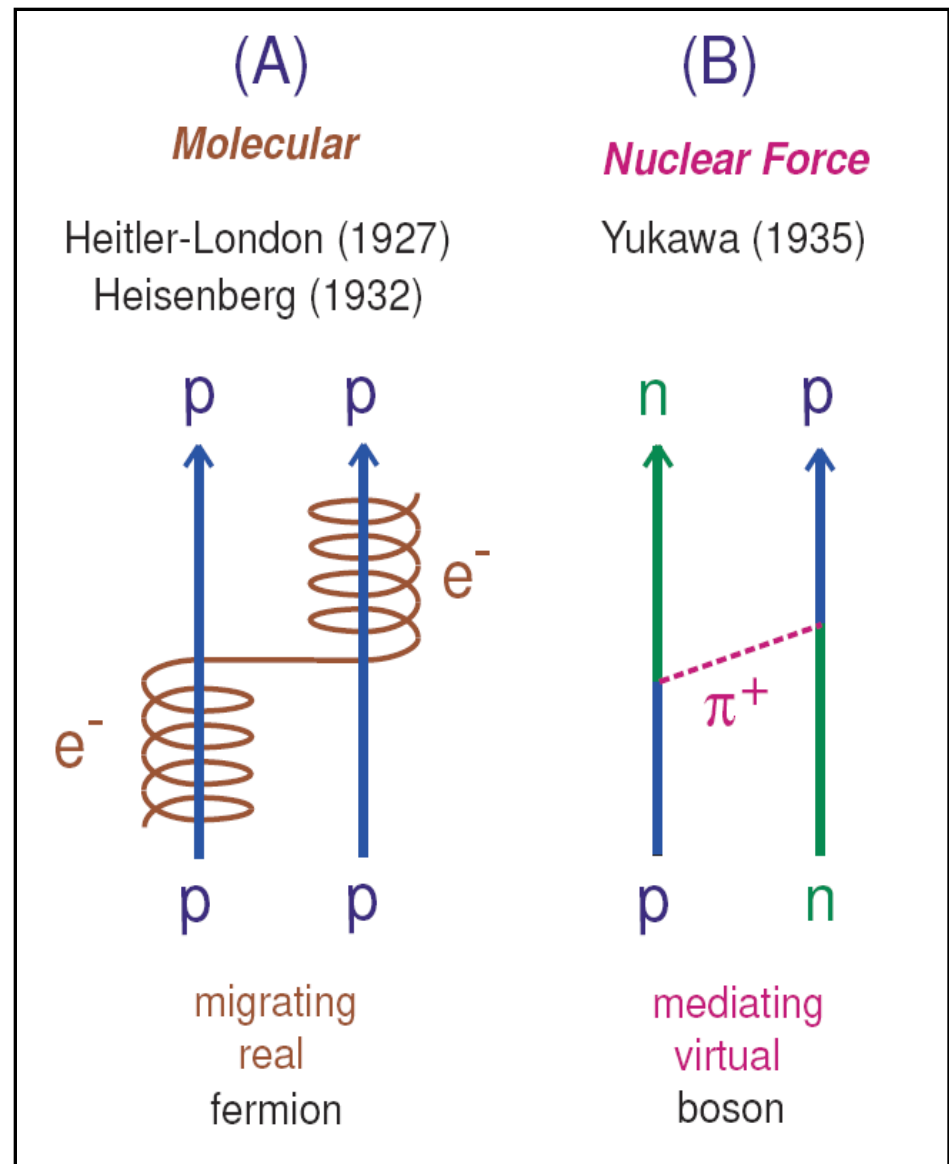
# Θεωρία Yukawa

Προσπάθεια εξήγησης της πυρηνικής δύναμης, μετά την ανακάλυψη του νετρονίου από τον Chadwick (1932):

(A) Εικόνα του Heisenberg με ανταλλαγή ηλεκτρονίου, όμοια με τον μηχανισμό δημιουργίας μοριακών δεσμών. Πρόβλημα με τον φερμιονικό χαρακτήρα του ηλεκτρονίου.

(B) Προταθείσα ιδέα από τον Yukawa με ανταλλαγή ενός μποζονίου (Bose electron).

Toshimitsu Yamazaki: *"Interplay between Yukawa and Tomonaga in the Birth of Mesons"*, arXiv:0712.4355v2 [hep-ph]





# Θεωρία Yukawa

Έχουμε δει πως η σχετικιστική εξίσωση  $E^2 = p^2 c^2 + m^2 c^4$  με την αντικατάσταση των φυσικών μεγεθών από τους αντίστοιχους τελεστές

$$E \rightarrow i\hbar \frac{\partial}{\partial t}, \quad \vec{r} \rightarrow \vec{r}, \quad \vec{p} \rightarrow -i\hbar \nabla$$

καταλήγει στην εξίσωση:

$$-\hbar^2 \frac{\partial^2 \psi(\vec{r}, t)}{\partial t^2} = -\hbar^2 c^2 \nabla^2 \psi(\vec{r}, t) + m^2 c^4 \cdot \psi(\vec{r}, t)$$

Η εξίσωση αυτή περιγράφει τη διάδοση στο κενό σωματιδίου μάζας  $m$  χωρίς spin, είναι γνωστή σαν εξίσωση **Klein-Gordon**. Ισχύει ότι:

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r} \frac{\partial}{\partial r}$$

# Θεωρία Yukawa

- Η εξίσωση Klein-Gordon περιγράφει για  $m=0$  την διάδοση ηλεκτρομαγνητικού κύματος
- Αγνοώντας το **χρονοεξαρτώμενο** μέρος της, καταλήγουμε σε σφαιρικά συμμετρική εξίσωση για **στατικό δυναμικό**  $U(r)$

$$\nabla^2 U(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} U(r)$$

Αναζητούνται λύσεις της μορφής:

$$U(r) = \frac{A}{r} e^{-r/R}$$

όπου το  $R$  ταυτίζεται με την έννοια της **εμβέλειας** της πυρηνικής δύναμης και το  $A$  εκφράζει την κανονικοποιημένη **ένταση** του ισχυρού πεδίου.

# Θεωρία Yukawa

$$U(r) = \frac{A}{r} e^{-r/R}$$



$$\nabla^2 U(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial U}{\partial r} \right) = \frac{m^2 c^2}{\hbar^2} U(r)$$

Επαληθεύεται πράγματι ότι η  $U(r)$  ικανοποιεί την Klein-Gordon και μάλιστα από την αντικατάσταση προκύπτει:

$$R = \frac{\hbar}{mc}$$

Η σταθερά  $A$ , η οποία δεν μπορεί να δεσμευτεί από την παραπάνω εξίσωση, για λόγους σφαιρικής κανονικοποίησης που εξηγούνται παρακάτω, αντικαθίσταται από την έκφραση  $g/4\pi$  και η τελική λύση δίνεται στην μορφή:

$$U(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-r/R}, \quad R = \frac{\hbar}{mc}$$

# Θεωρία Yukawa

Μελέτη της λύσης

$$U(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-r/R}, \quad R = \frac{\hbar}{mc}$$

- Η **σταθερά g** προκύπτει ως σταθερά της ολοκλήρωσης και ταυτίζεται με την **ισχύ σημειακής πηγής** στο κέντρο.
- Υπάρχει άμεση αναλογία με την εξίσωση  $\nabla^2 U(r) = 0$  από την ηλεκτρομαγνητική θεωρία, της οποίας λύση είναι το δυναμικό  $U(r) = Q/4\pi r$ .
- Κατά συνέπεια, το **g** της θεωρίας Yukawa παίζει τον ίδιο ρόλο με το φορτίο στην ηλεκτροστατική και είναι το μέτρο του «**ισχυρού πυρηνικού φορτίου**».

# Θεωρία Yukawa

Μελέτη της λύσης

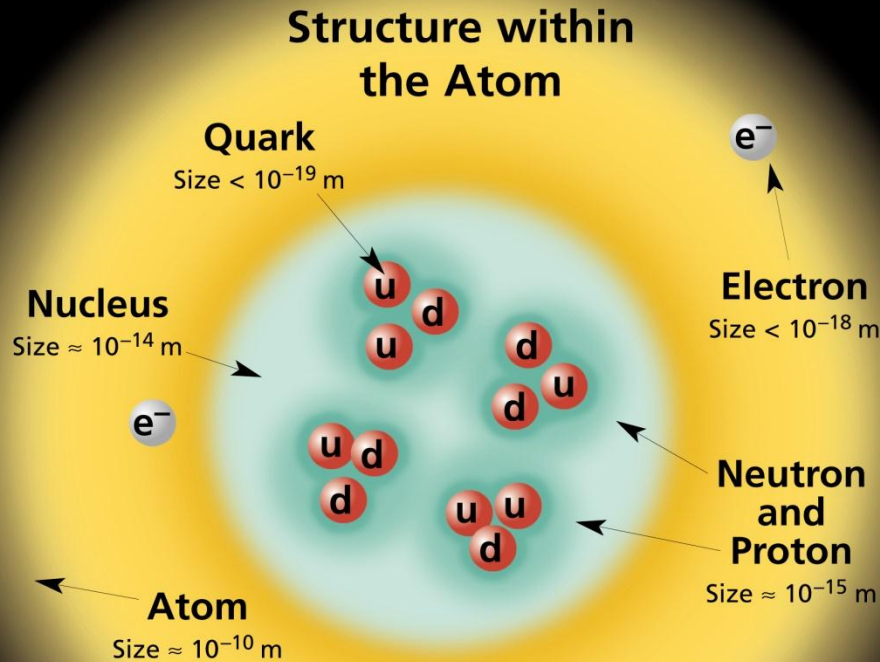
$$U(r) = \frac{g}{4\pi r} e^{-r/R}, \quad R = \frac{\hbar}{mc}$$

- Το R εκφράζει την εμβέλεια του πεδίου.
- Δεδομένου ότι το R είναι της τάξεως του  $10^{-15}$  m, μπορούμε να προβλέψουμε τη μάζα του διαδότη:

$$R = \frac{\hbar}{mc} \Rightarrow mc = \frac{\hbar}{R} \Rightarrow mc^2 = \frac{\hbar c}{R} \Rightarrow mc^2 \approx \frac{197 \text{ MeV} \cdot \text{fm}}{1.4 \text{ fm}} \approx 140 \text{ MeV}$$

Το αποτέλεσμα ταυτίζεται με τη **μάζα του πιονίου**, το οποίο ανακαλύφτηκε το 1947.

# Οι Ατομικοί Πυρήνες



If the protons and neutrons in this picture were 10 cm across, then the quarks and electrons would be less than 0.1 mm in size and the entire atom would be about 10 km across.

Οι ατομικοί πυρήνες αποτελούν το μόνο προσιτό προς πειραματισμό πυρηνικό σύστημα.

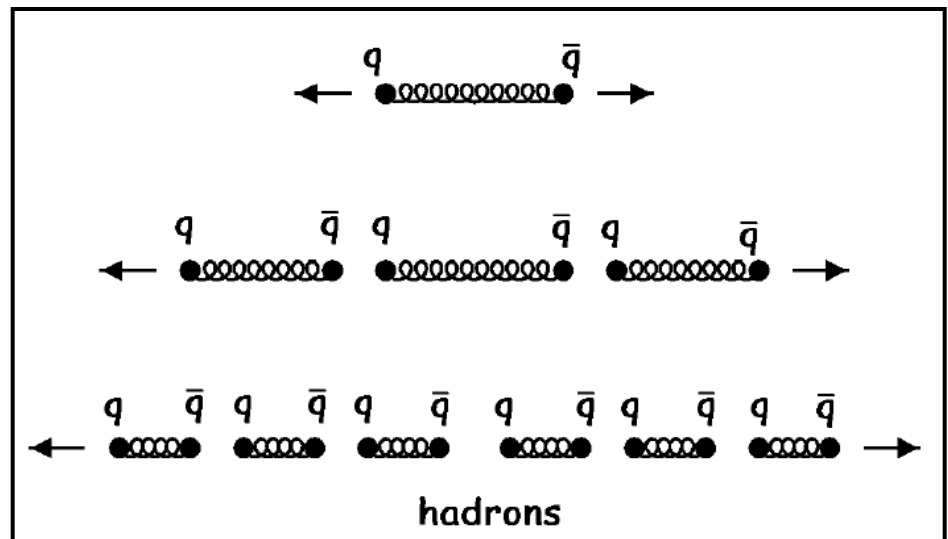
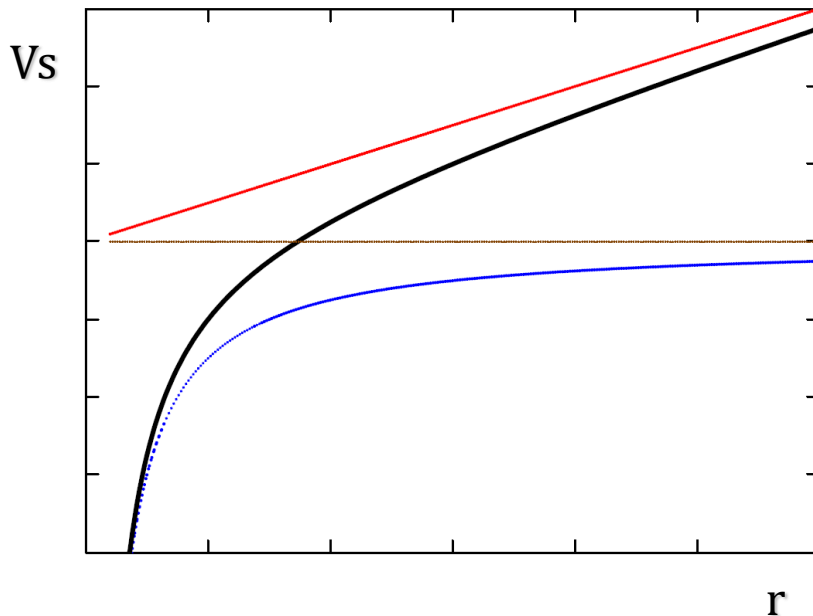
Η ταξινόμηση τους και η συστηματική κατανόηση των ιδιοτήτων τους αποτελεί την σημαντικότερη πηγή πληροφορίας για όλα τα πυρηνικά συστήματα.

# Πυρηνική Δύναμη

Η μορφή του δυναμικού μεταξύ δύο κουάρκ που χρησιμοποιείται συνηθέστερα είναι:

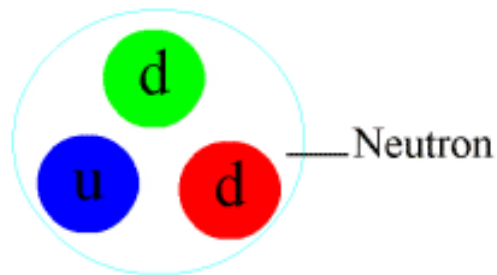
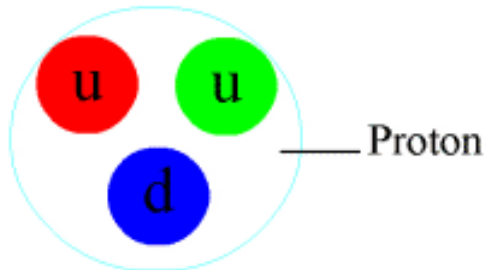
$$V_s = -\frac{4}{3} \frac{a_s}{r} + kr$$

- Πειραματική μαρτυρία και για τους δύο όρους.
- Εγκλωβισμός των κουάρκ σε μεγάλα  $r$ !



# Πυρηνική Δύναμη

Ισχυρός χαρακτήρας της πυρηνικής δύναμης μέσω της ανταλλαγής πιονίου μεταξύ των νουκλεονίων.



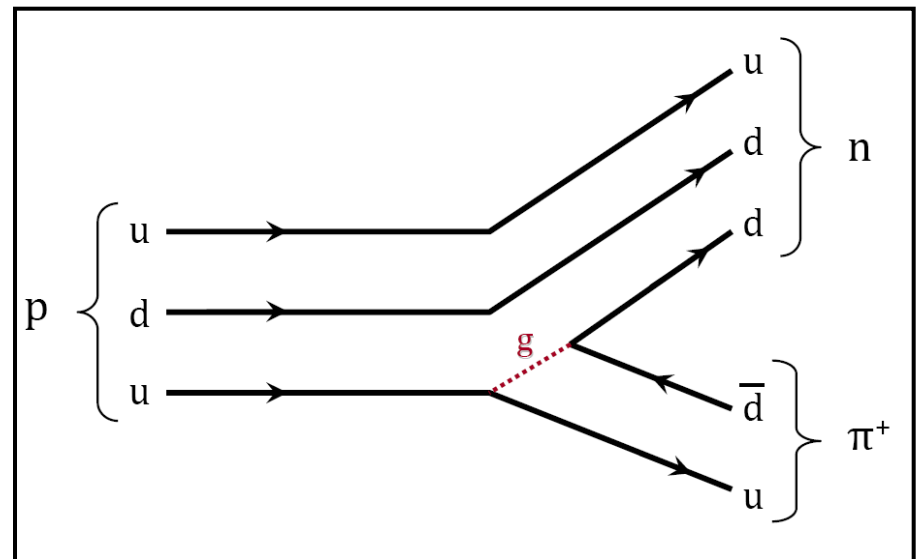
## Ανταλλαγή πιονίου

$$p \rightarrow n + \pi^+$$

$$n \rightarrow p + \pi^-$$

$$p \rightarrow p + \pi^0$$

$$n \rightarrow n + \pi^0$$





# Συστήματα Δύο Νουκλεονίων

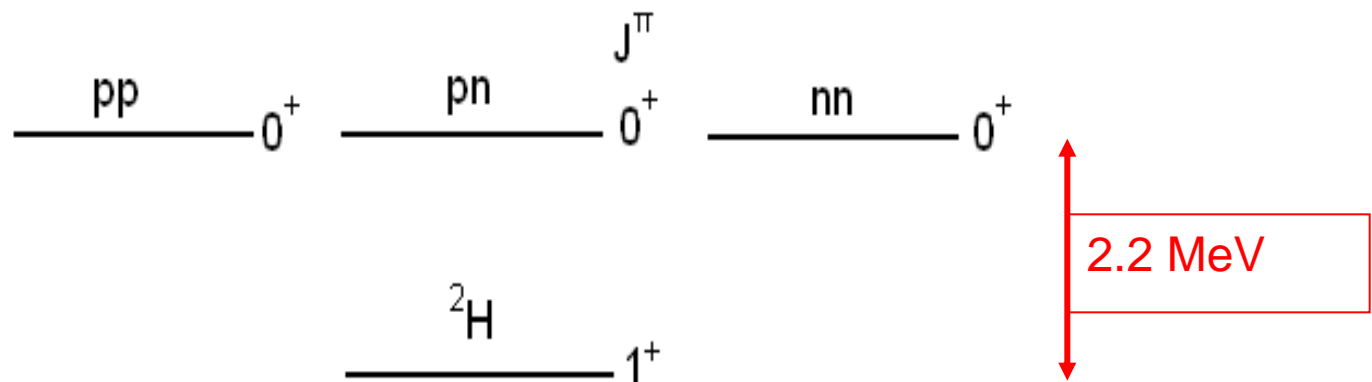
Κάνοντας χρήση του φορμαλισμού του ισοσπίν, βλέπουμε ότι έχουμε τέσσερις πιθανές καταστάσεις, μια τριπλή και μια μονή κατάσταση.

$$I = 1 \begin{cases} I_3 = +1 & pp \\ I_3 = 0 & pn \\ I_3 = -1 & nn \end{cases}$$

Isotriplet

$$I = 0 \quad I_3 = 0$$

Isosinglet



# Το Δευτέριο

Δέσμιο n-p σύστημα. Το μόνο δέσμιο σύστημα N-N.

Πειραματικά δεδομένα:

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} \cong 2.1 \text{ fm} \quad I = 0, I_3 = 0$$

$J^\pi=1^+$  Ενέργεια σύνδεσης :  $2,22463 \pm 0,00004 \text{ MeV}$ .

Δεν παρατηρούμε καμιά διεγερμένη κατάσταση.

Μαγνητική Διπολική ροπή:  $\langle \vec{\mu} \rangle = 0.8574376 \pm 0.0000004 \mu_N$

Τετραπολική Ηλεκτρική ροπή:  $Q = 0.00288 \pm 0.000002 b$

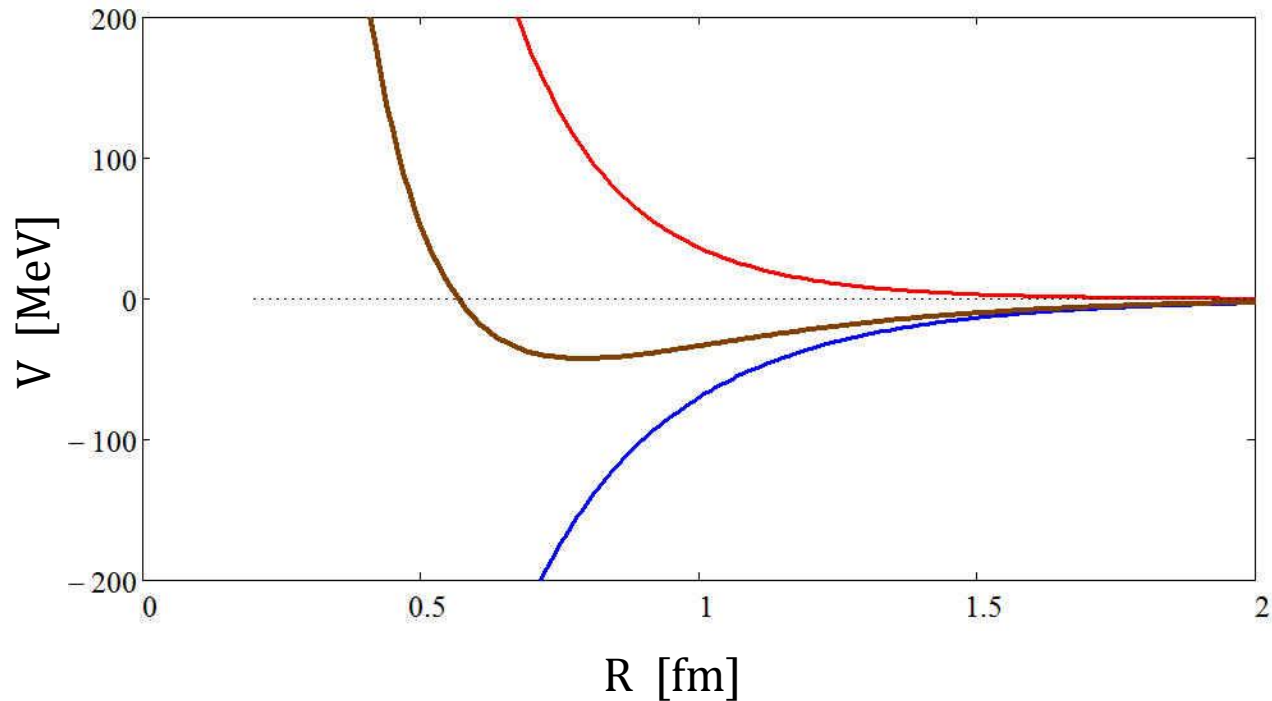
# Το Δευτέριο

Δέσμιο n-p σύστημα. Το μόνο δέσμιο σύστημα N-N.

Πειραματικά δεδομένα:

$$\langle r^2 \rangle^{1/2} \cong 2.1 \text{ fm}$$

$$I = 0, I_3 = 0$$



Περιγραφή του δυναμικού n-p με δύο όρους Yukawa.

# Θεωρίες Μέσου Πεδίου

- Η θεωρία μέσου πεδίου αποτελεί το θεωρητικό υπόβαθρο στην κβαντική θεωρία πολλών σωμάτων για την κατανόηση (και υπολογισμό) των τροχιακών, που αποτελούν την θεμελίωση της κίνησης ανεξάρτητου σωματίου.



- Μέσο πεδίο
  - Τροχιακά
  - Φλοιώδης δομή
- Κλασσικό παράδειγμα η ατομική θεωρία όπου
    - Το μέσο πεδίο είναι το ηλεκτροστατικό πεδίο που «βλέπει» κάθε ηλεκτρόνιο.
    - Η κίνηση ανεξάρτητου σωματίου αναφέρεται στην κίνηση των ηλεκτρονίων, όπου λόγω και της χαμηλής πυκνότητας είναι και διαισθητικά προφανής.
    - Δεν είναι καθόλου προφανές πως και γιατί προκύπτει κίνηση ανεξάρτητου σωματίου για τα νουκλεόνια στους ιδιαίτερα πυκνούς ατομικούς πυρήνες.

# Προσέγγιση Μέσου Πεδίου

Οι ιδιότητες του περίπλοκου συστήματος  $N$  νουκλεονίων εμπεριέχονται στην κυματοσυνάρτηση  $\Psi(\mathbf{1}, \dots, \mathbf{N})$  η οποία είναι η λύση της εξίσωσης Schrödinger :

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \nabla_i^2 + \sum_{i < j} U_{ij} + \sum_{i < j < k} V_{ijk} \quad H\Psi = i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \Psi \quad H\Psi = E_n \Psi$$

Αν η πλήρης Χαμιλτονιανή  $H$  μπορεί να προσεγγιστεί με Χαμιλτονιανή ενός σώματος  $H_0$  τότε:

$$H \approx H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \nabla_i^2 + \sum_i V_i$$

$$H_0(j)\varphi_\lambda(j) = \varepsilon_\lambda \varphi_\lambda(j)$$

$$E_n = \sum_\lambda \varepsilon_\lambda \quad \& \quad \Psi = \prod_\lambda \varphi_\lambda$$

# Προσέγγιση Μέσου Πεδίου

Η πλήρως αντισυμμετρική λύση, η απαιτούμενη για φερμιόνια, είναι:

$$\Psi_A = \frac{1}{\sqrt{N!}} \begin{vmatrix} \varphi_\alpha(1) & \varphi_\alpha(2) & \dots & \varphi_\alpha(N) \\ \varphi_\beta(1) & \varphi_\beta(2) & \dots & \varphi_\beta(N) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_\lambda(1) & \varphi_\lambda(2) & \dots & \varphi_\lambda(N) \end{vmatrix}$$

Διακρίνουσα Slater

Οι κυματοσυναρτήσεις ενός σώματος  $\varphi_\lambda(r,\theta,\varphi)$  με τις οποίες οικοδομούμε την πλήρη κυματοσυνάρτηση  $\Psi_A$  αποκαλούνται **τροχιακά**.

# ΠΥΡΗΝΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ

Ακαδημαϊκό Έτος 2021-2022  
Ευστάθιος Στυλιάρης

## ΘΕΩΡΙΕΣ ΜΕΣΟΥ ΠΕΔΙΟΥ

- Θεώρηση Μέσου Πεδίου
- Θεωρία Fermi
- Φλοιώδης Δομή του Πυρήνα
- Σύζευξη Spin – Τροχιάς (LS coupling)

# Θεωρίες Μέσου Πεδίου

## Υπενθύμιση:

Σε θεωρίες μέσου πεδίου:

$$H \approx H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \nabla_i^2 + \sum_i V_i$$

Η Επιλογή του Μέσου δυναμικού  $V_i$  ορίζει το πρότυπο.

Αέριο Fermi:

$$V_i = \begin{cases} 0 & r < R \\ \infty & r \geq R \end{cases}$$

Woods – Saxon:

$$U^{ws}(r) = \frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$



**Ανάγκη κατανόησης Πυρηνικών Δυνάμεων**

Το αέριο Fermi αποτελεί την πιο ακραία μορφή θεωρίας μέσου πεδίου. Μπορούμε να παραγάγουμε λύσεις και με πιο περίπλοκα δυναμικά.



# Θεωρίες Μέσου Πεδίου

## Υπενθύμιση:

Σε θεωρίες μέσου πεδίου:

$$H \approx H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \nabla_i^2 + \sum_i V_i$$

Η Επιλογή του Μέσου δυναμικού  $V_i$  ορίζει το πρότυπο.

Αέριο Fermi:

$$V_i = \begin{cases} 0 & 0 < R \\ \infty & \geq R \end{cases}$$

Woods – Saxon:

$$U^{ws}(r) = \frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$



**Ανάγκη κατανόησης Πυρηνικών Δυνάμεων**

Το αέριο Fermi αποτελεί την πιο ακραία μορφή θεωρίας μέσου πεδίου. Μπορούμε να παραγάγουμε λύσεις και με πιο περίπλοκα δυναμικά.

Ας δούμε τι σημαίνει το πιο πάνω αποτέλεσμα στον χώρο των ορμών:

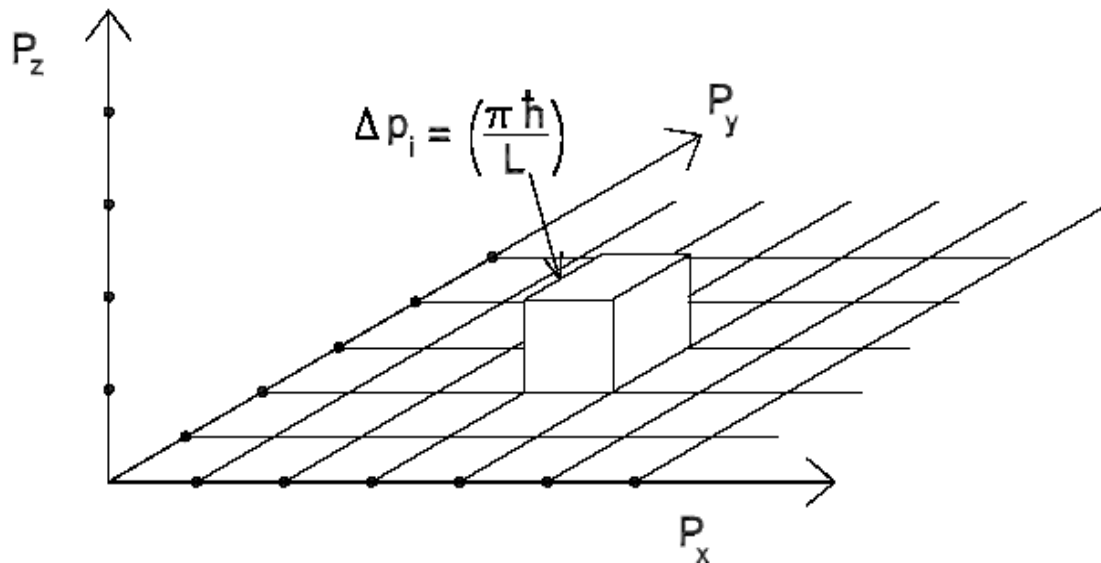
- «Όγκος» που καταλαμβάνει κάθε κατάσταση:

$$\left(\frac{\pi\hbar}{L}\right) = v_i$$

$$\Delta p_i = \left(\frac{\pi\hbar}{L}\right)$$

- Αριθμός καταστάσεων ανά μονάδα «όγκου» στον χώρο των ορμών:

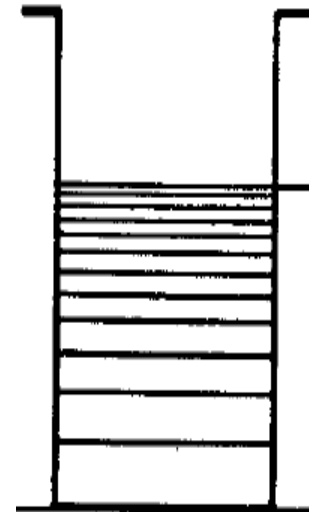
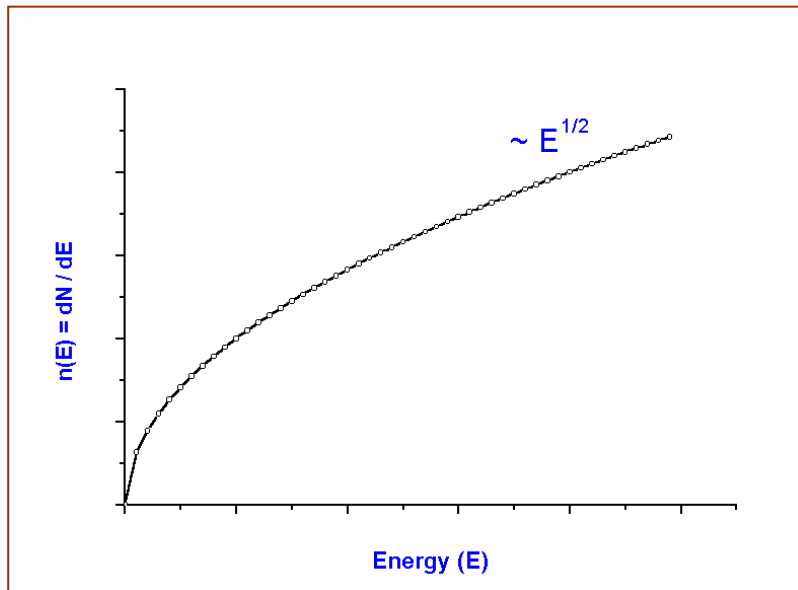
$$\frac{1}{v_i} = \left(\frac{L}{\pi\hbar}\right)^3 = \frac{V}{(\pi\hbar)^3}$$



# Θεωρία Αερίου Fermi

- ❑ Τα νουκλεόνια είναι φερμιόνια (spin  $\frac{1}{2}$ ) και υπακούουν στην απαγορευτική αρχή του Pauli.
- ❑ Δεχόμενοι ότι η πυκνότητα καταστάσεων  $n(E)=dN/dE$  ακολουθεί τη στατιστική ενός Fermi αερίου, έχουμε:

$$n(E) = \frac{dN}{dE} \cong cVE^{1/2}$$



## Προσοχή:

- Μας ενδιαφέρει μόνο το τεταρτημόριο (+++) δηλαδή το 1/8 του διαθέσιμου χώρου. Αρνητικό πρόσημο σε οποιαδήποτε επιμέρους κυματοσυνάρτηση δεν έχει ξεχωριστή σημασία.
- Αν το φερμιόνιο έχει spin  $S$  τότε η αρχή του Pauli μας επιτρέπει να έχουμε  $(2S+1)$  φερμιόνια να καταλαμβάνουν την ίδια κατάσταση.

A)  $N(p_o)$ : ολοκληρωμένη πυκνότητα καταστάσεων

Ο αριθμός των καταστάσεων (στον συγκεκριμένο γεωμετρικό όγκο  $V$ ) με το περιορισμό η ορμή οποιασδήποτε κατάστασης να μην υπερβαίνει το  $p_o$ .

$$\begin{aligned} N(p_o) &= (\text{όγκος τεταρτημορίου}) \times (\text{Αριθμός καταστάσεων ανά μονάδα όγκου}) = \\ &= \left[ \frac{1}{8} \left( \frac{4\pi}{3} p_o^3 \right) \right] \times \left[ \frac{V}{(\pi\hbar)^3} \right] = \frac{V}{(2\pi\hbar)^3} \frac{4\pi}{3} p_o^3 \rightarrow p_o^3 = \left( \frac{3}{4\pi} \right) \left( \frac{N_o}{V} \right) \left( \frac{1}{2\pi\hbar} \right)^3 \end{aligned}$$

B)  $n(p_o)$ : πυκνότητα καταστάσεων

Ο αριθμός καταστάσεων με  $p$  τέτοιο:  $p_o < p < p_o + dp_o$

Το διαφορικό της πιο πάνω σχέσης είναι:

$$\frac{V}{(2\pi\hbar)^3} 4\pi p_o^2 dp_o$$

# Θεωρία Αερίου Fermi

$$n(E) = \frac{dN}{dE} \cong cVE^{1/2}$$



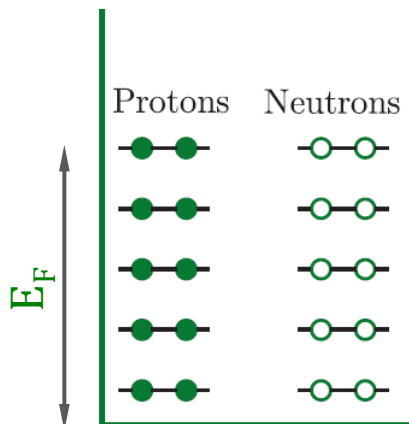
$$dN = cVE^{1/2}dE \Rightarrow \int dN = \int cVE^{1/2}dE \Rightarrow A = c_1 VE^{3/2}$$



$$E^{3/2} = \frac{1}{c_1} \frac{A}{V} = \frac{1}{c_1} \frac{A}{4/3\pi R^3} = \frac{1}{c_1} \frac{A}{4/3\pi (r_0 A^{1/3})^3} = \text{const}$$

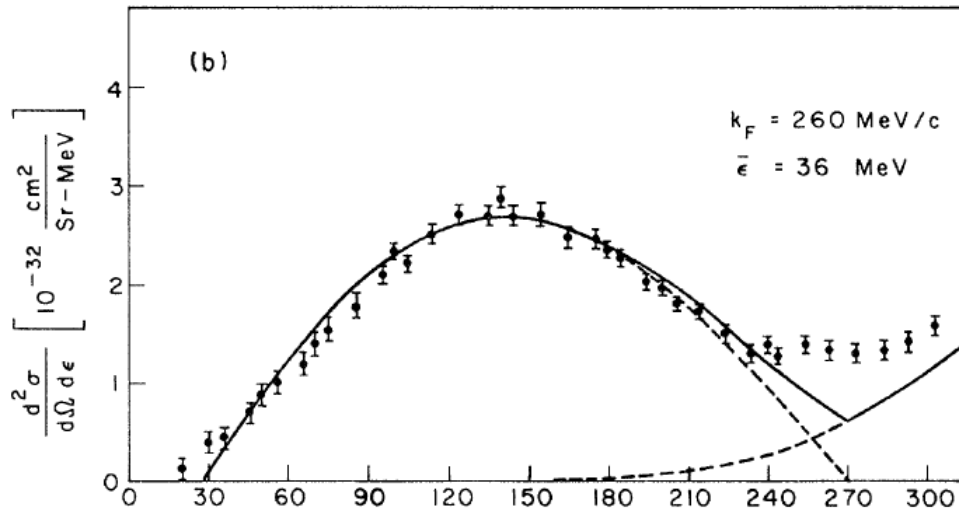


$$E_F = \text{const} \approx 35 \text{ MeV}$$

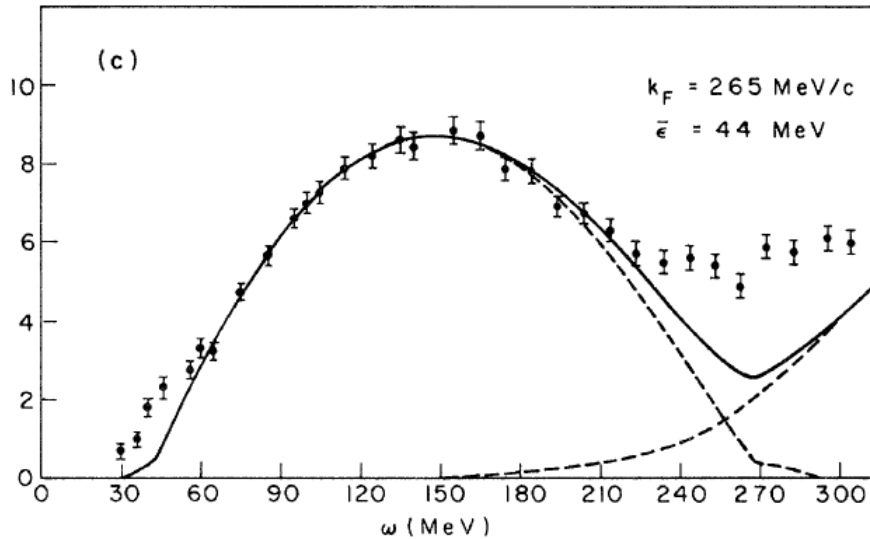
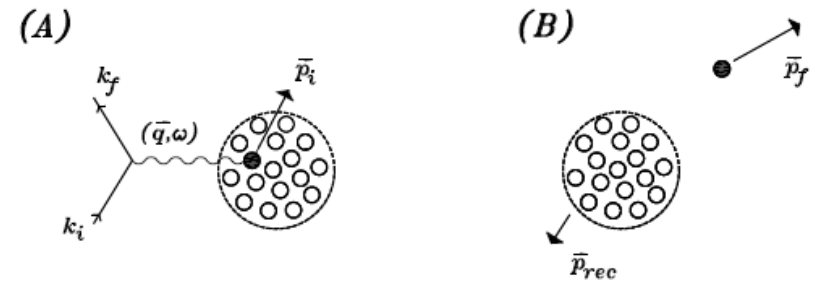


Η χαρακτηριστική αυτή ενέργεια  $E_F$  είναι **ανεξάρτητη** του **μαζικού αριθμού  $A$**  και άρα του μεγέθους του πυρήνα!

# Πειραματική Επιβεβαίωση Θεωρίας Fermi (με ημιελαστική σκέδαση)

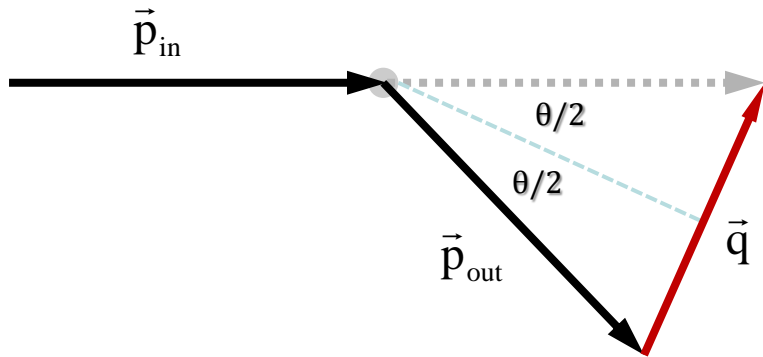


## Knock out πρωτονίου από πυρήνα



Πυρήνας	Ορμή $k_F$	Ενέργεια $\epsilon_F$
${}^6\text{Li}$	169	15
${}^{12}\text{C}$	221	26
${}^{24}\text{Mg}$	235	29
${}^{40}\text{Ca}$	251	34
${}^{89}\text{Y}$	260	36
${}^{118}\text{Sn}$	260	36
${}^{181}\text{Ta}$	265	37
${}^{208}\text{Pb}$	265	37

# Ημιαστική Σκέδαση $e^-$ σε Πυρήνα



$$\vec{q} = \vec{p}_{\text{in}} - \vec{p}_{\text{out}}$$

$$|\vec{p}_{\text{in}}| = |\vec{p}_{\text{out}}| = p \Rightarrow p \cdot \sin(\theta/2) = \frac{q}{2}$$

$$q = 2p \sin(\theta/2)$$

Υπολογίστε την γωνία σκέδασης ηλεκτρονίων ενέργειας 500 MeV  
ώστε να έχουμε διακριτική ικανότητα 1fm.

$$q = 1\text{fm}^{-1} = 197.3 \text{ MeV} = 2 \cdot (500\text{MeV}) \sin \frac{\theta_e}{2} \quad \Longrightarrow \quad \theta_e \approx 22.8^\circ$$

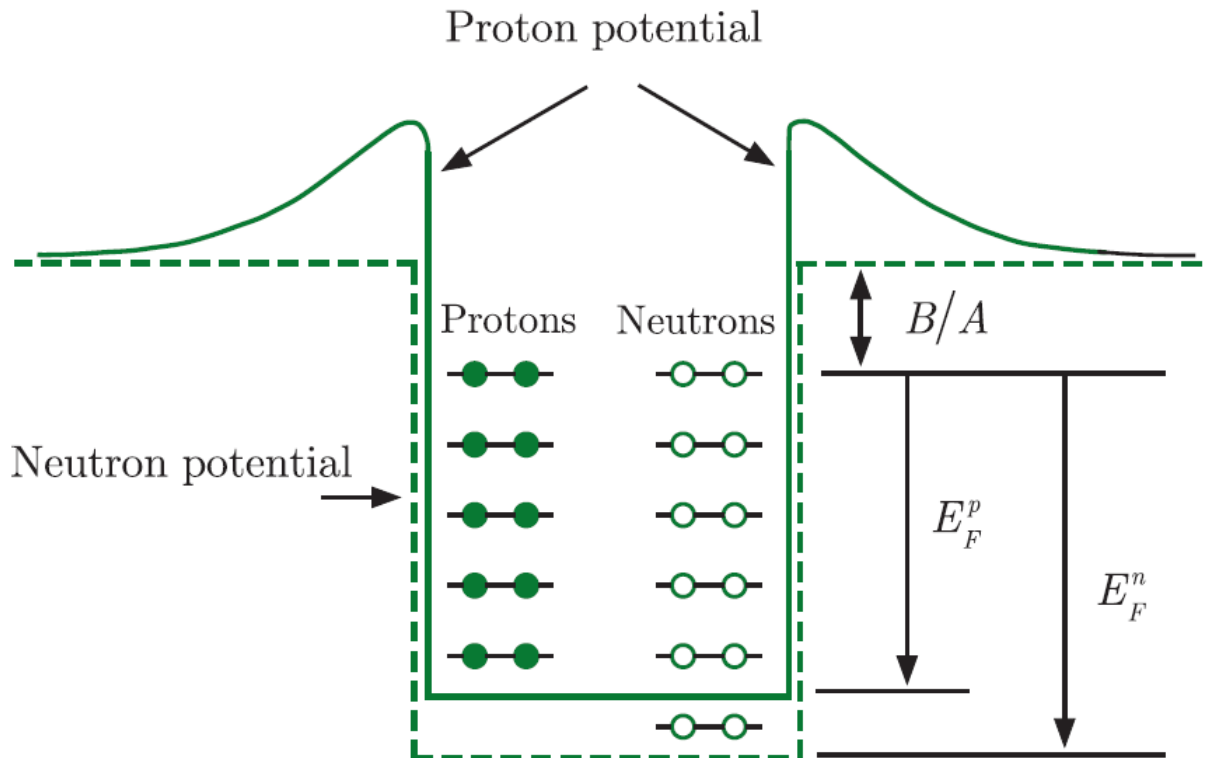
# Φλοιώδης Δομή του Πυρήνα

## Μοντέλο Fermi

Δεχόμενοι μια πυκνότητα καταστάσεων  $dN/dE \sim cVE^{1/2}$  καταλήγουμε σε ένα βάθος δυναμικού  $E_F$  ικανό να συγκρατήσει τα  $Z$  πρωτόνια και  $N$  νετρόνια

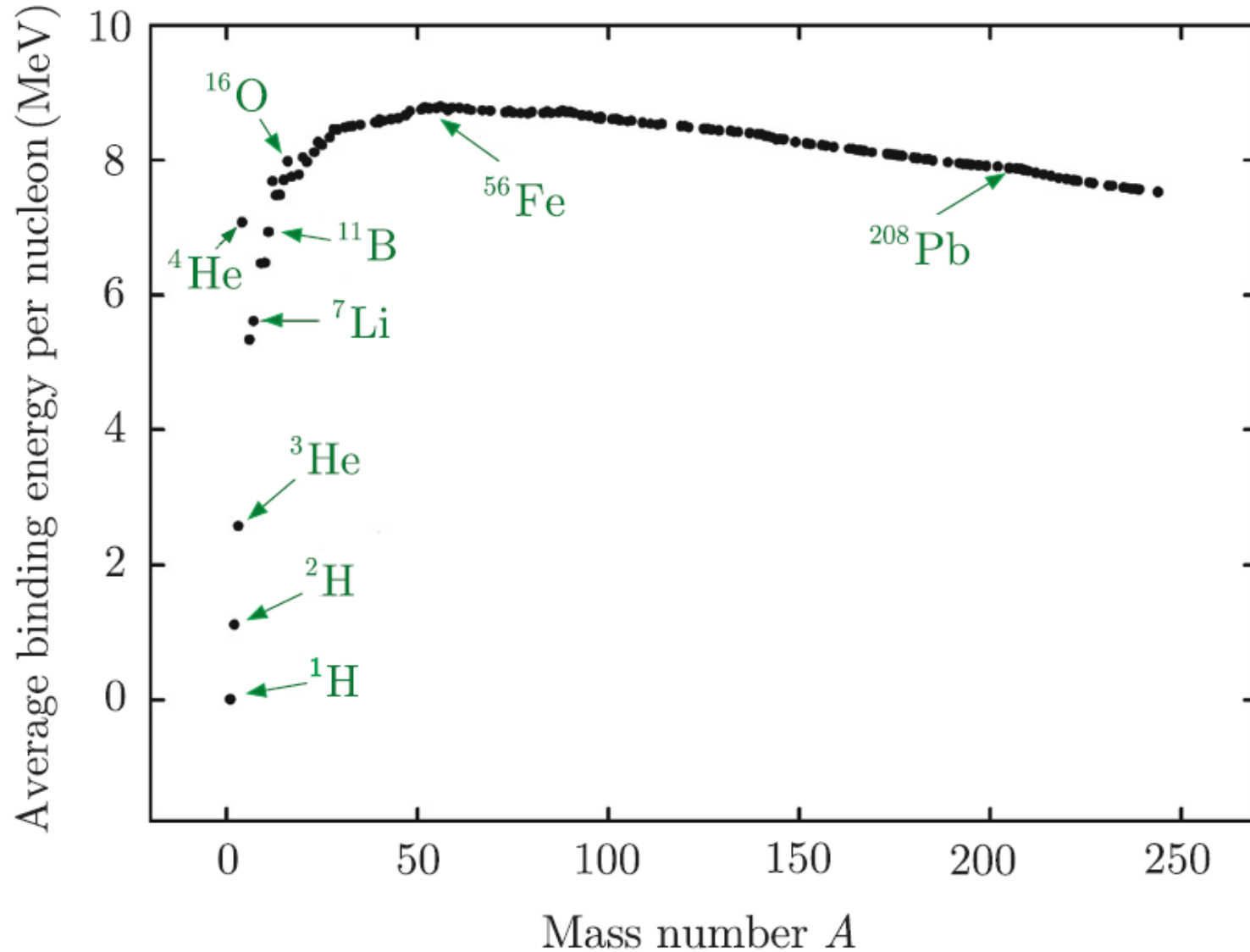
$$E_F \approx 33\text{MeV} \Rightarrow V_0 = E_F + B/A \approx 40\text{MeV}$$

Το  $E_F$  δεν εξαρτάται από τον μαζικό αριθμό  $A$ !





# Ενέργεια Σύνδεσης ανά Νουκλεόνιο



# Ημ εμπειρικός Τύπος Ενέργειας Σύνδεσης

$$B(N,Z) = \mathbf{a} A \quad (\text{Όγκου})$$
$$- \mathbf{b} A^{2/3} \quad (\text{Επιφάνειας})$$
$$- \mathbf{s} (N-Z)^2 / A \quad (\text{Συμμετρίας})$$
$$- \mathbf{d} Z^2 / A^{1/3} \quad (\text{Coulomb})$$
$$- \mathbf{\delta} / A^{1/2} \quad (\text{Ζευγαρώματος})$$

$$a = 15.835 \text{ MeV}$$

$$b = 18.33 \text{ MeV}$$

$$s = 23.20 \text{ MeV}$$

$$d = 0.714 \text{ MeV}$$

$$\delta = \{+11.2, 0, -11.2\} \text{ MeV (oo, oe, ee)}$$

# Ημειμπειρικός Τύπος Ενέργειας Σύνδεσης

$$B(N,Z) = \mathbf{a} A$$

$$- \mathbf{b} A^{2/3}$$

$$- \mathbf{s} (N-Z)^2 / A$$

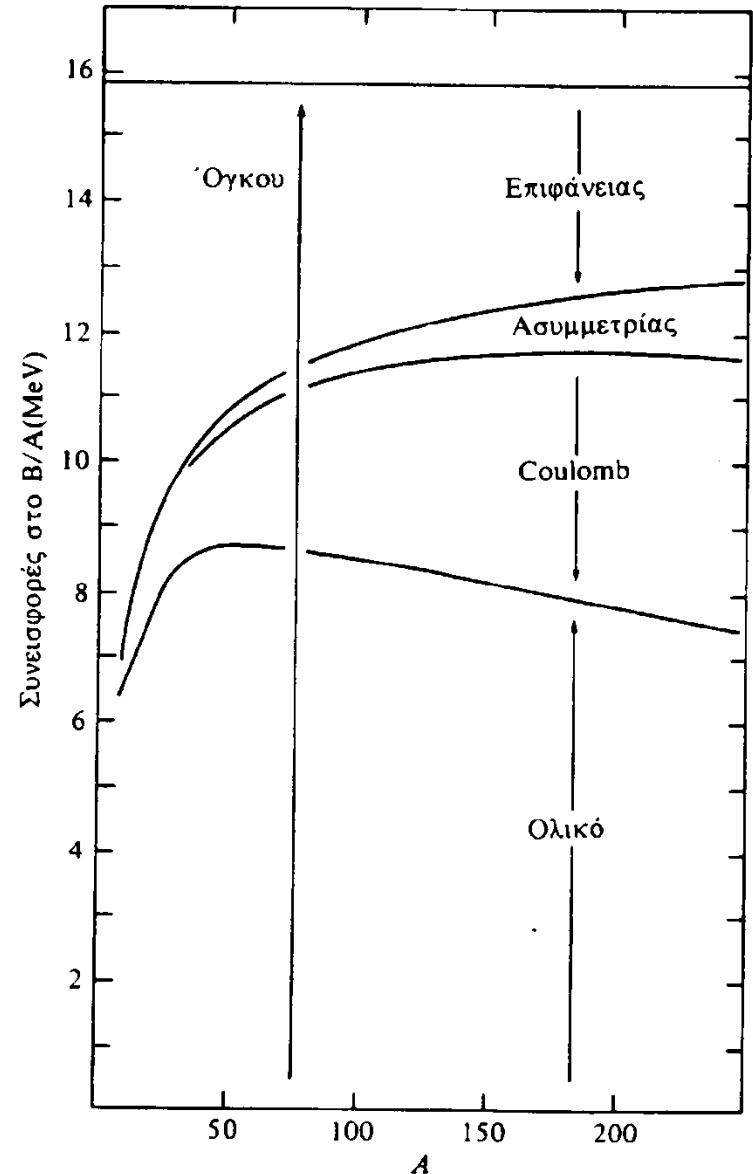
$$- \mathbf{d} Z^2 / A^{1/3}$$

$$- \mathbf{\delta} / A^{1/2}$$

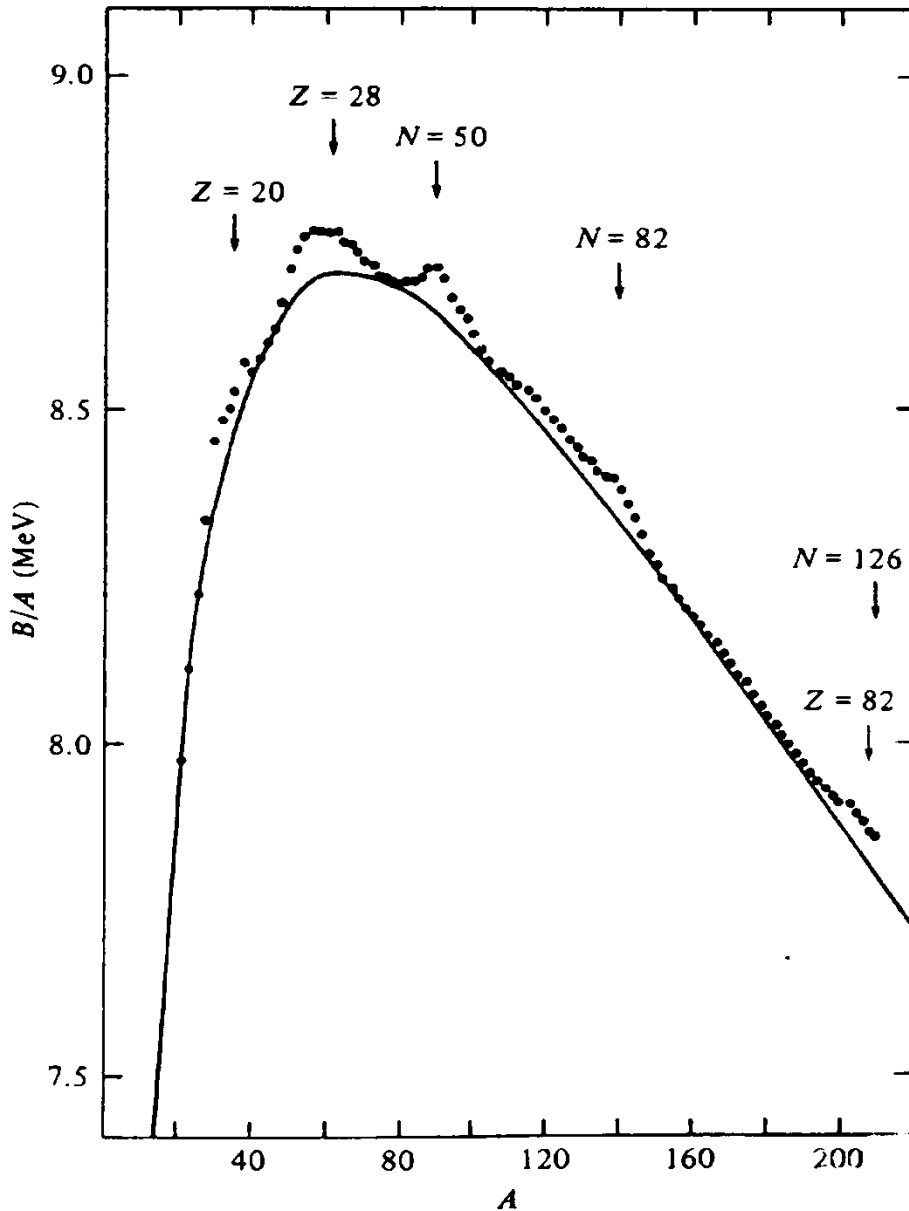
$$a = 15.835 \text{ MeV} \quad b = 18.33 \text{ MeV}$$

$$s = 23.20 \text{ MeV} \quad d = 0.714 \text{ MeV}$$

$$\delta = \{+11.2, 0, -11.2\} \text{ MeV (oo, oe, ee)}$$



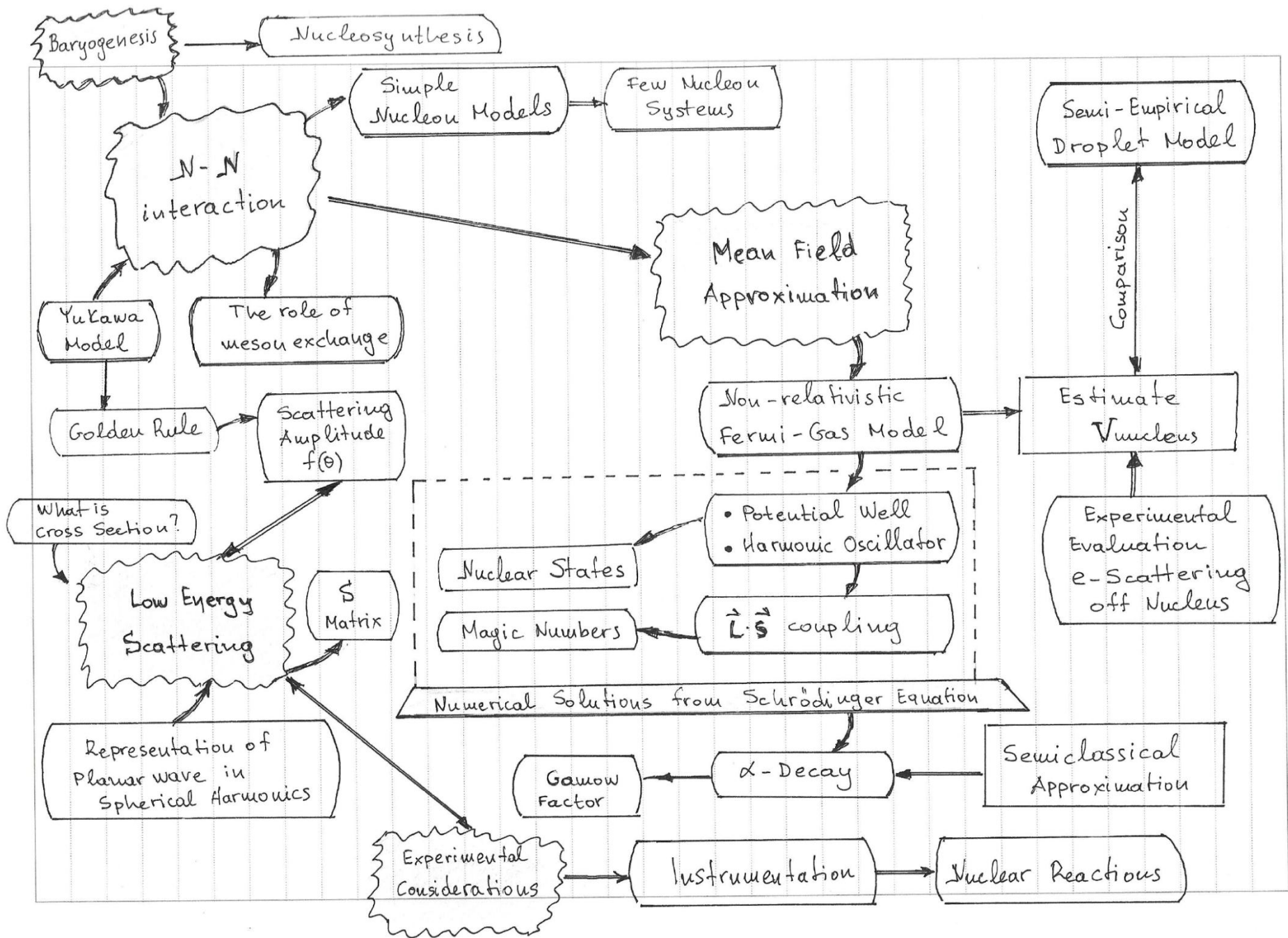
# Ενέργεια Σύνδεσης ανά Νουκλεόνιο



## ΠΡΟΣΟΧΗ

*Η περιγραφή είναι γενικά καλή αλλά όχι τέλεια.*

*Εμφάνιση (για μια ακόμη φορά) των «Μαγικών Αριθμών».*



# Φλοιώδης Δομή του Πυρήνα

## Μέσο Πεδίο

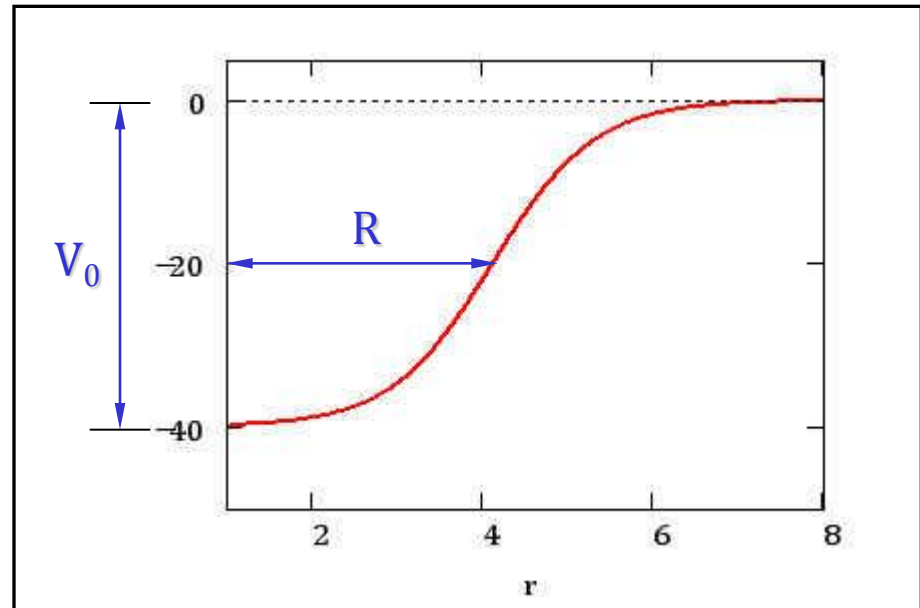
Η θεωρία μέσου πεδίου αποτελεί το θεωρητικό υπόβαθρο στην κβαντική θεωρία πολλών σωμάτων για την κατανόηση (και υπολογισμό) των τροχιακών, που αποτελούν την θεμελίωση της κίνησης ανεξάρτητου σωματίου.

Μέσο πεδίο → Τροχιακά → Φλοιώδης δομή

$$H \approx H_0 = -\frac{\hbar^2}{2m} \sum_i \nabla_i^2 + \sum_i V_i$$

Προσέγγιση Πυρηνικού Δυναμικού  
Woods-Saxon

$$U^{WS}(r) = \frac{V_0}{1 + e^{(r-R)/a}}$$



# Φλοιώδης Δομή του Πυρήνα

Ενεργειακοί Φλοιοί και Στροφορμή

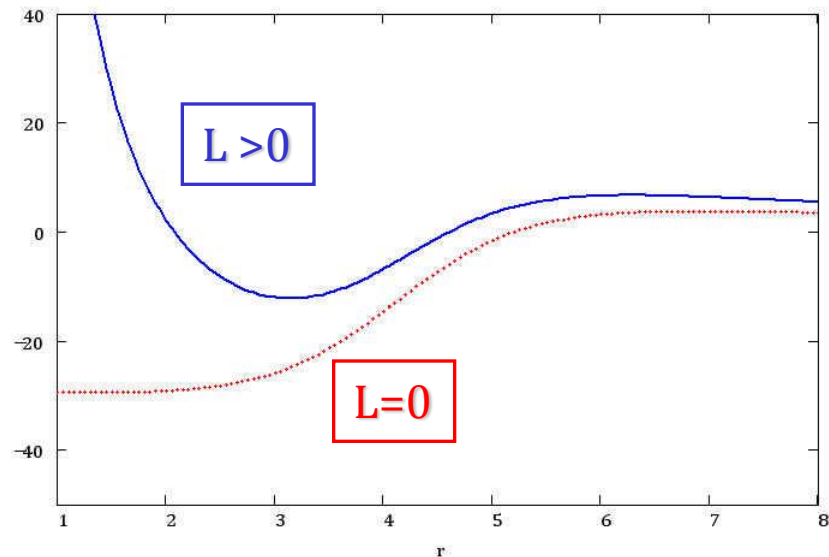
Διαχωρισμός μεταβλητών στην εξίσωση Schrödinger

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot Y_l^m(\theta, \varphi)$$

Επίλυση της ακτινικής συνάρτησης

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R_{nl}(r) + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R_{nl}(r) = \varepsilon_{nl} R_{nl}(r)$$

$$V_{\text{tot}}(r) = V_N(r) + V_C(r) + \frac{\hbar^2}{2m} \frac{l(l+1)}{r^2}$$



Η λύση  $u_l(r)$  έχει πεπερασμένη τιμή στο  $r=0$  και μηδέν στα τοιχώματα.

# Φλοιώδης Δομή του Πυρήνα

## Επίλυση της Ακτινικής Συνιστώσας

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R_{nl}(r) + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R_{nl}(r) = \epsilon_{nl} R_{nl}(r)$$

$$\nabla^2 = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right)$$

και

$$R_{nl}(r) = \frac{u_{nl}(r)}{r}$$

$$\Rightarrow \nabla^2 R(r) = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^2 \frac{\partial}{\partial r} \right) \frac{u(r)}{r} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial u(r)}{\partial r} - u(r) \right)$$

$$\Rightarrow \nabla^2 R(r) = \frac{1}{r^2} \left( \frac{\partial u(r)}{r} + r \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} - \frac{\partial u(r)}{\partial r} \right) = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2}$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{1}{r} \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] \frac{u(r)}{r} = \epsilon_{nl} \frac{u(r)}{r}$$



# Φλοιώδης Δομή του Πυρήνα

## Επίλυση της Ακτινικής Συνιστώσας

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 R_{nl}(r) + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] R_{nl}(r) = \varepsilon_{nl} R_{nl}(r)$$



$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] u(r) = \varepsilon_{nl} u(r)$$



$$\frac{\partial^2 u(r)}{\partial r^2} + \frac{2m}{\hbar^2} \left\{ \varepsilon_{nl} - \left[ V(r) + \frac{l(l+1)\hbar^2}{2mr^2} \right] \right\} u(r) = 0$$



$$\frac{d^2 u(r)}{dr^2} + \frac{2m}{\hbar^2} [\varepsilon_{nl} - V_{\text{TOT}}(r)] u(r) = 0 \quad u(0) = u(\infty) = 0$$

# Φλοιώδης Δομή του Πυρήνα

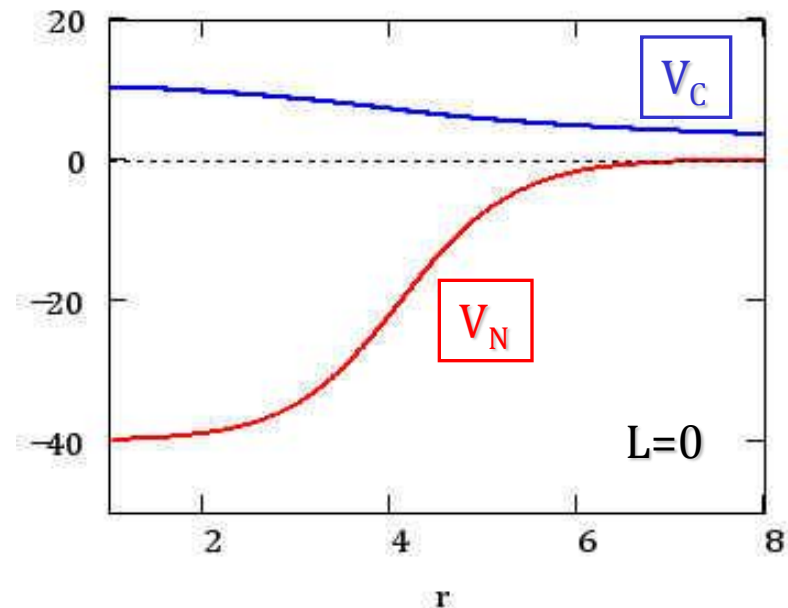
## Πυρηνικό Δυναμικό και Δυναμικό Coulomb

Δυναμική Ενέργεια Coulomb ενός πρωτονίου μέσα σε ομοιόμορφα φορτισμένη σφαίρα ολικού φορτίου  $(Z-1)e$ .

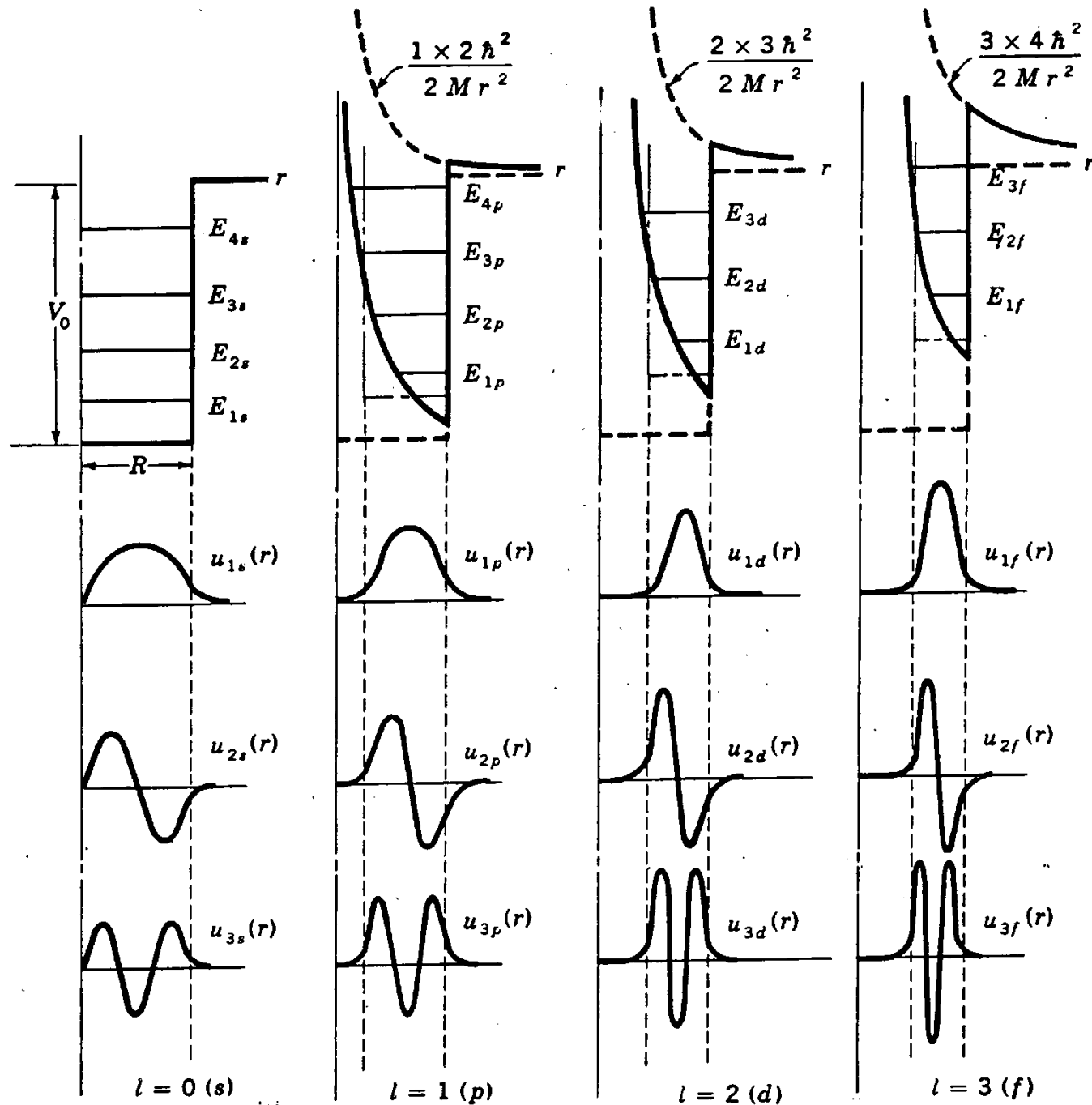
$$U_c(r) = \begin{cases} \frac{(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 R} \left[ \frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right], & r < R \\ \frac{(Z-1)e^2}{4\pi\epsilon_0 r}, & r > R \end{cases}$$

$$V_{\text{tot}}(r) = V_N(r) + V_C(r) + \frac{\hbar^2 l(l+1)}{2m r^2}$$

Πυρηνικό Δυναμικό: Αρνητικό (ελκτικό)  
Δυναμικό Coulomb: Θετικό (απωστικό)



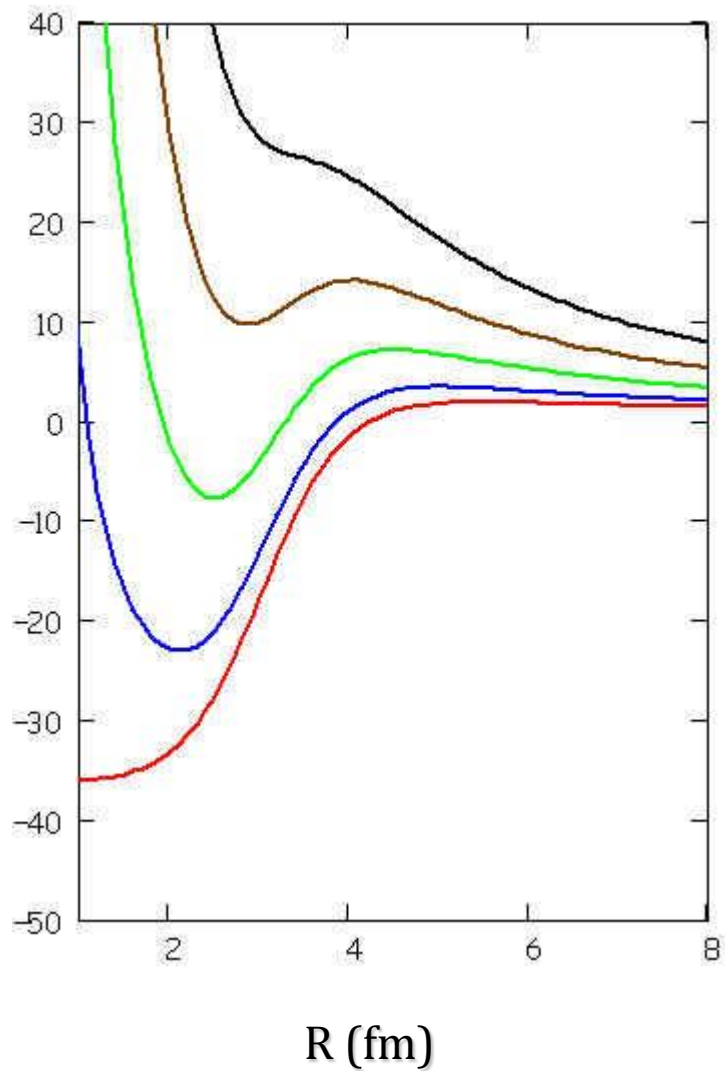
# Φλοιώδης Δομή του Πυρήνα



Ενεργειακοί Φλοιοί  
και Στροφορμή

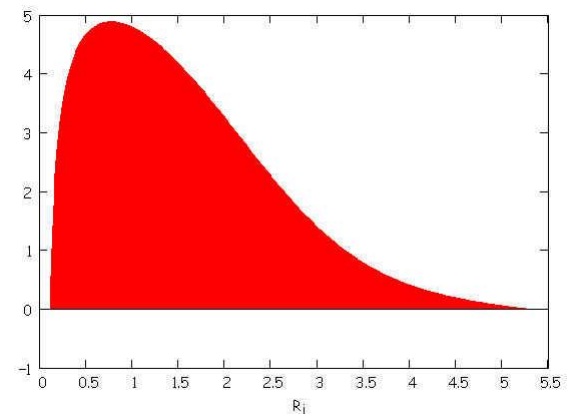
# Φλοιώδης Δομή του Πυρήνα

$V_{\text{tot}}(r)$

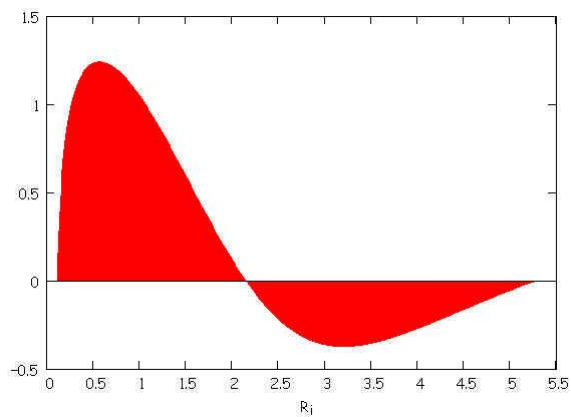


$L = 0$

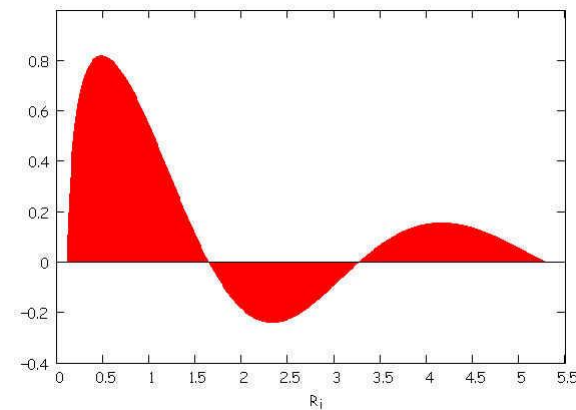
$n = 1$



$n = 2$

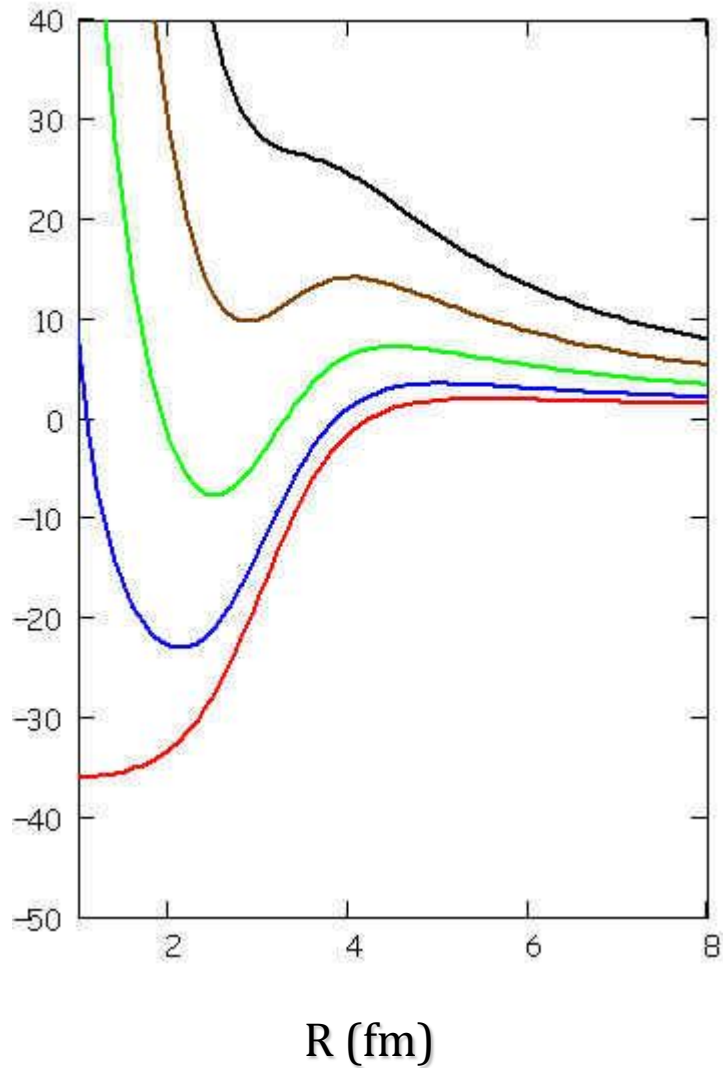


$n = 3$



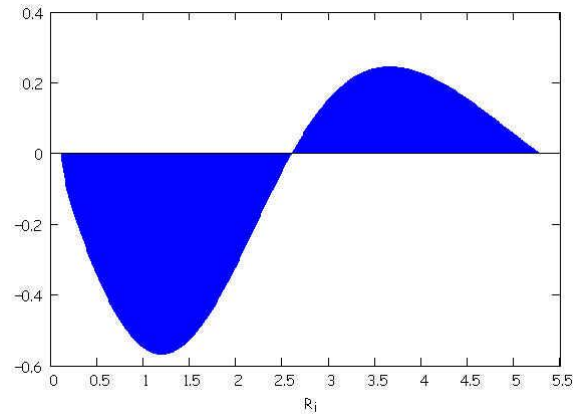
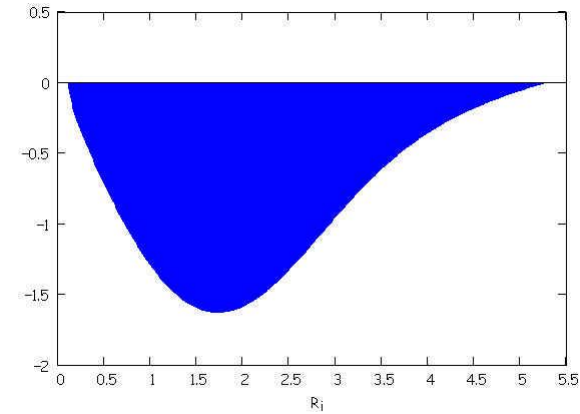
# Φλοιώδης Δομή του Πυρήνα

$V_{\text{tot}}(r)$



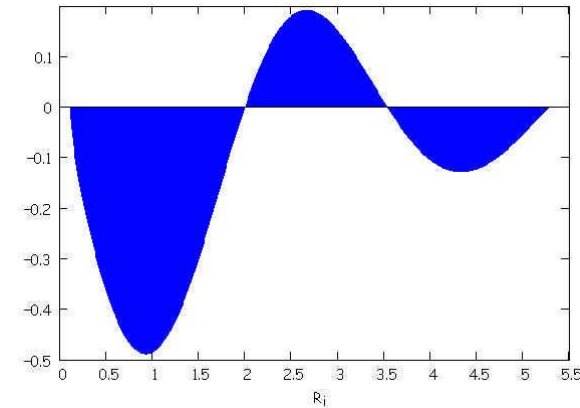
$L = 1$

$n = 1$

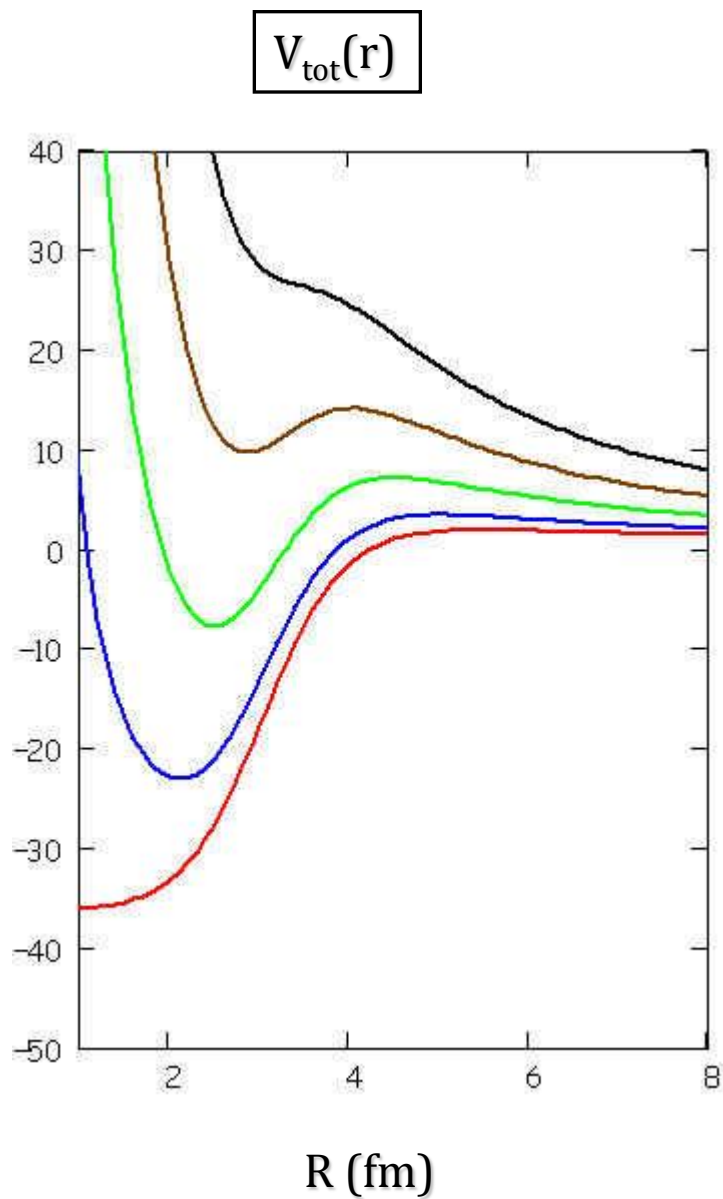


$n = 2$

$n = 3$

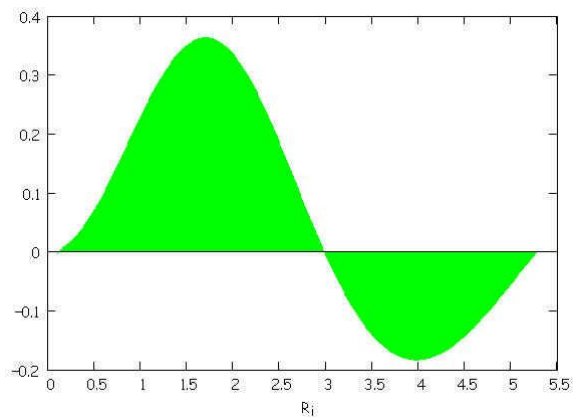
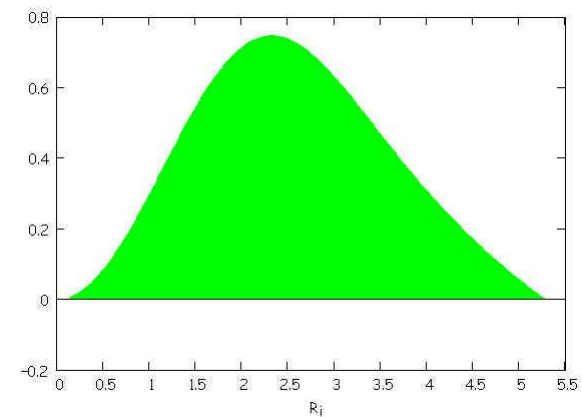


# Φλοιώδης Δομή του Πυρήνα



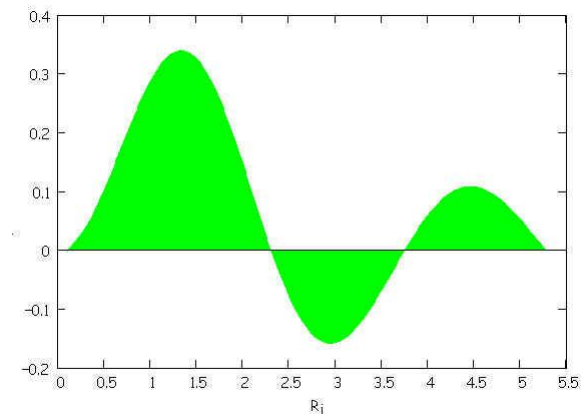
$L = 2$

$n = 1$



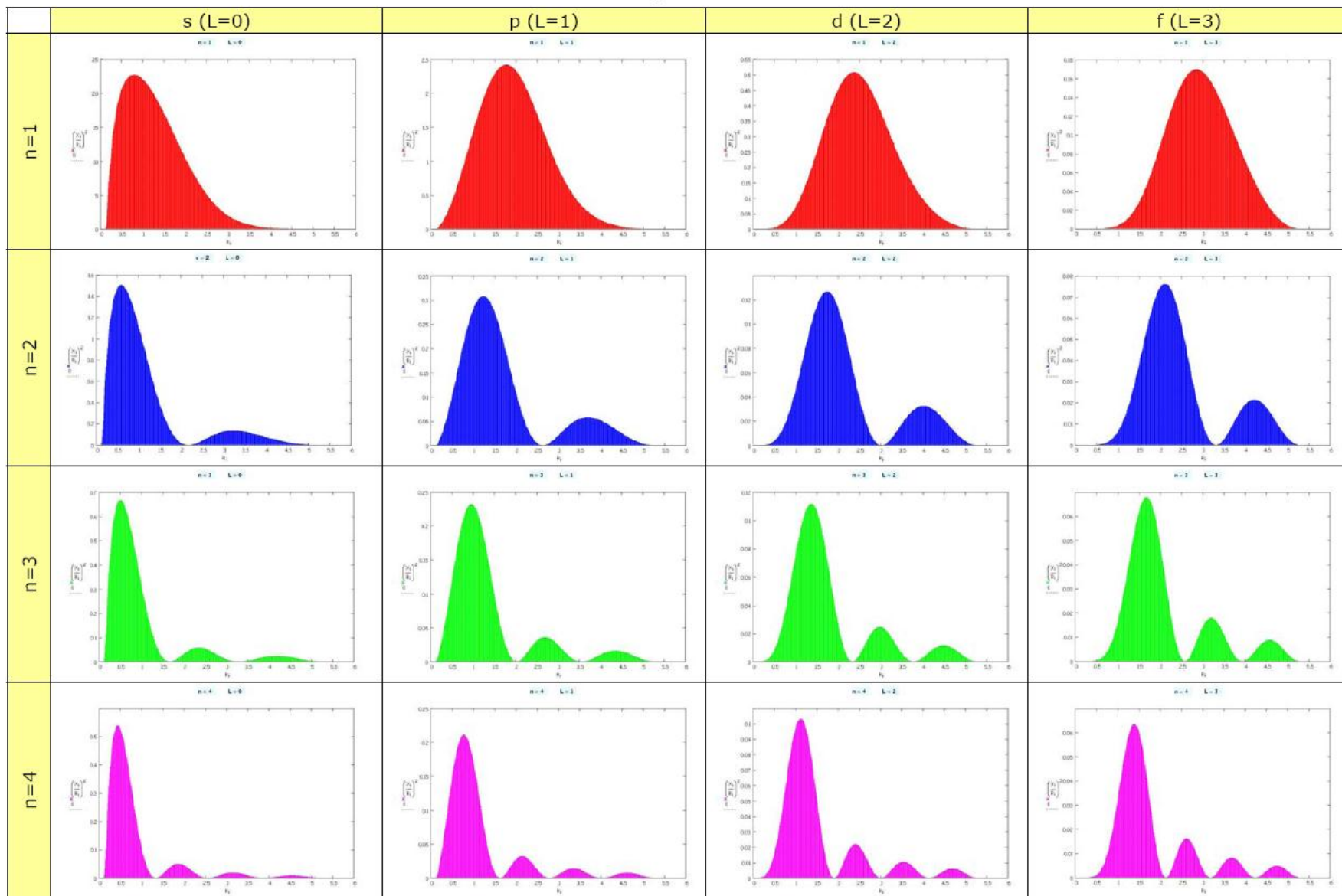
$n = 2$

$n = 3$



# Φλοιώδης Δομή του Πυρήνα

Density Functions



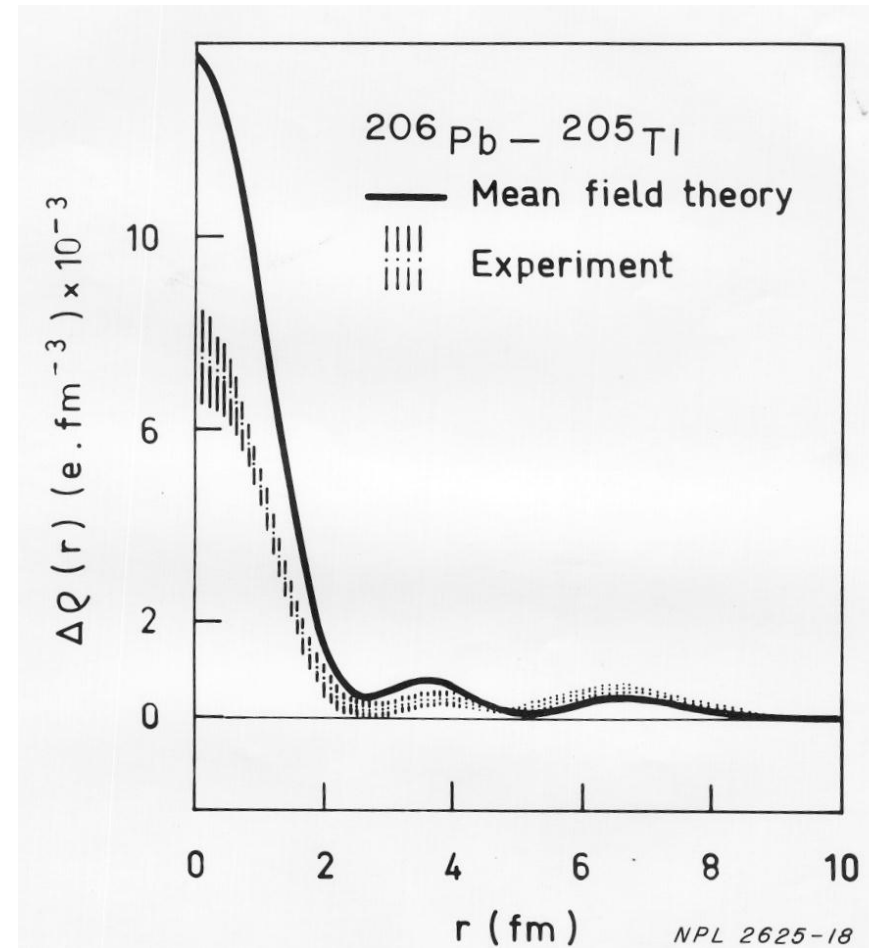
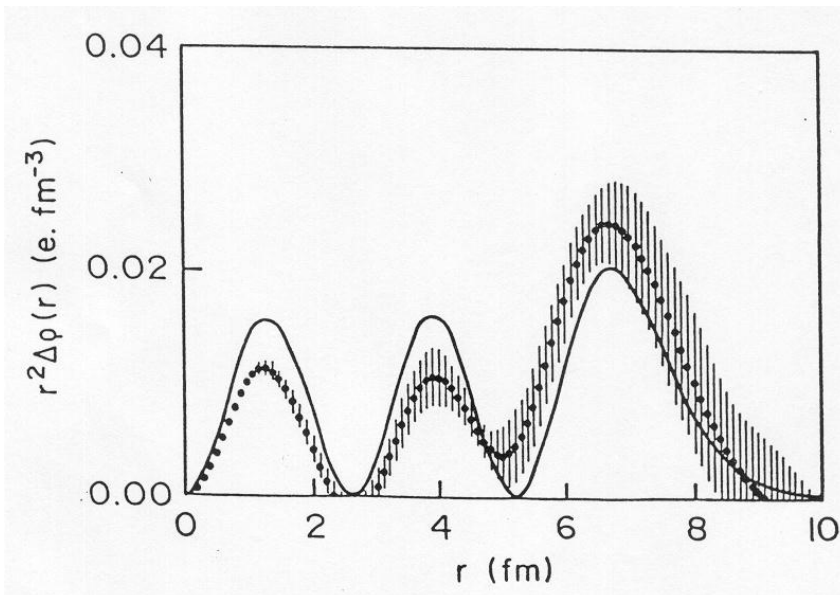
# Πειραματική επιβεβαίωση συμπεριφοράς ανεξάρτητου σωματίου

«Μέτρηση» κυματοσυνάρτησης ενός  $3s_{1/2}$  πρωτονίου!

Διαφορά της κατανομής φορτίου σε  $^{206}\text{Pb}$  και  $^{205}\text{Tl}$  από πειραματικά δεδομένα.

Η καμπύλη δείχνει τη πρόβλεψη του προτύπου φλοιών για ένα  $3s_{1/2}$  πρωτόνιο.

B. Frois and C.N. Papanicolas ANRPS (1987)





# Ενεργειακοί Φλοιοί

Χωρίς σύζευξη L·s

Αρμονικός ταλαντωτής και ορθογώνιο πηγάδι δυναμικού με ενδιάμεσες τιμές.

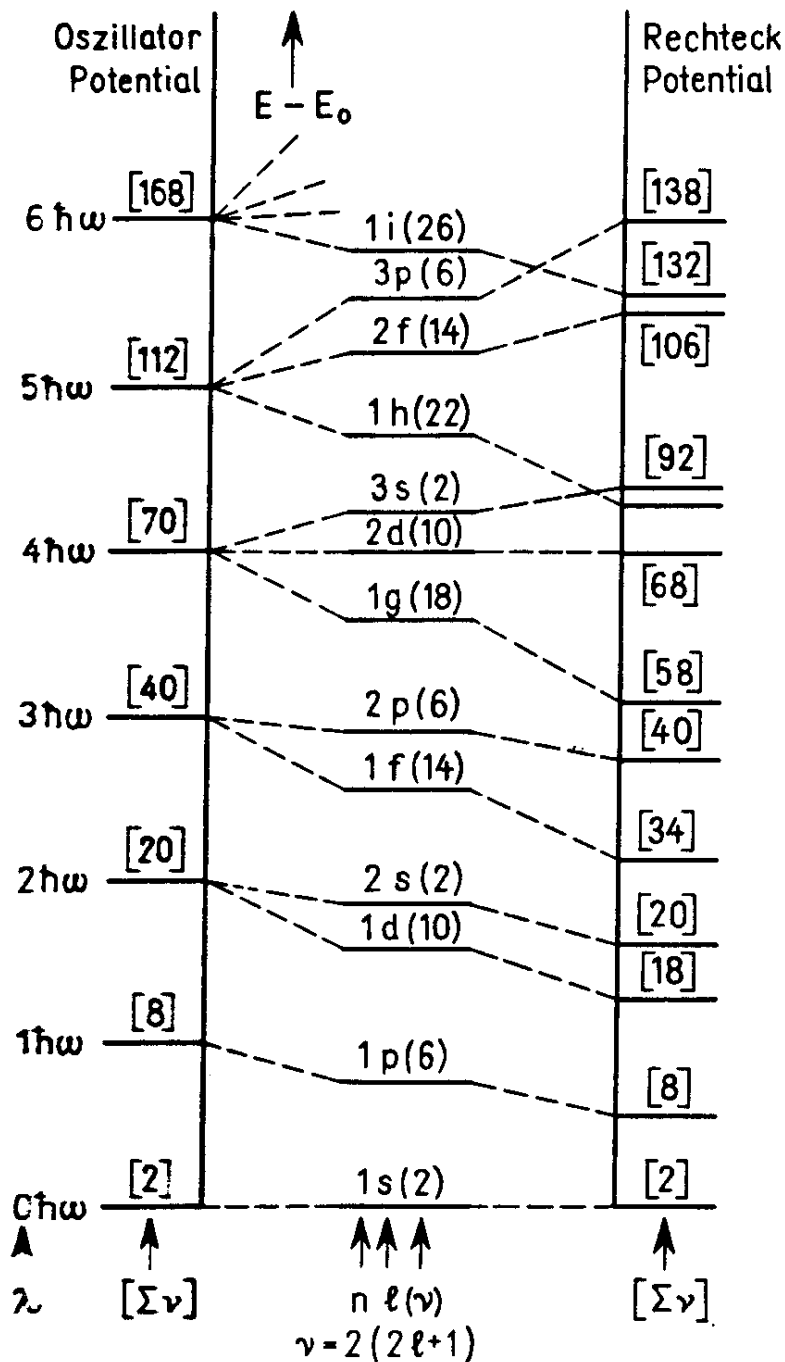
M. Goepfert-Mayer and J.H.D. Jensen,  
Elementary Theory of Nuclear Shell  
Structure, New York 1955

$2(2l+1)$   
νουκλεόνια  
στη στάθμη  $l$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda = 2(n-1) + l = 0, 1, 2, \dots$$



# Σύζευξη Spin-Τροχιάς

Στο πυρηνικό δυναμικό πρέπει να προστεθεί ο όρος σύζευξης Spin-Τροχιάς:

$$U_{SO}(r) \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} \quad \text{με} \quad \mathbf{J} = \mathbf{L} + \mathbf{s}$$

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{s} = \frac{1}{2} [ (\mathbf{L} + \mathbf{s})^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{s}^2 ] = \frac{1}{2} [ \mathbf{J}^2 - \mathbf{L}^2 - \mathbf{s}^2 ]$$

Αναμενόμενη Τιμή

$$\langle \mathbf{L} \cdot \mathbf{s} \rangle = \frac{1}{2} \{ j(j+1) - l(l+1) - s(s+1) \} \hbar^2$$

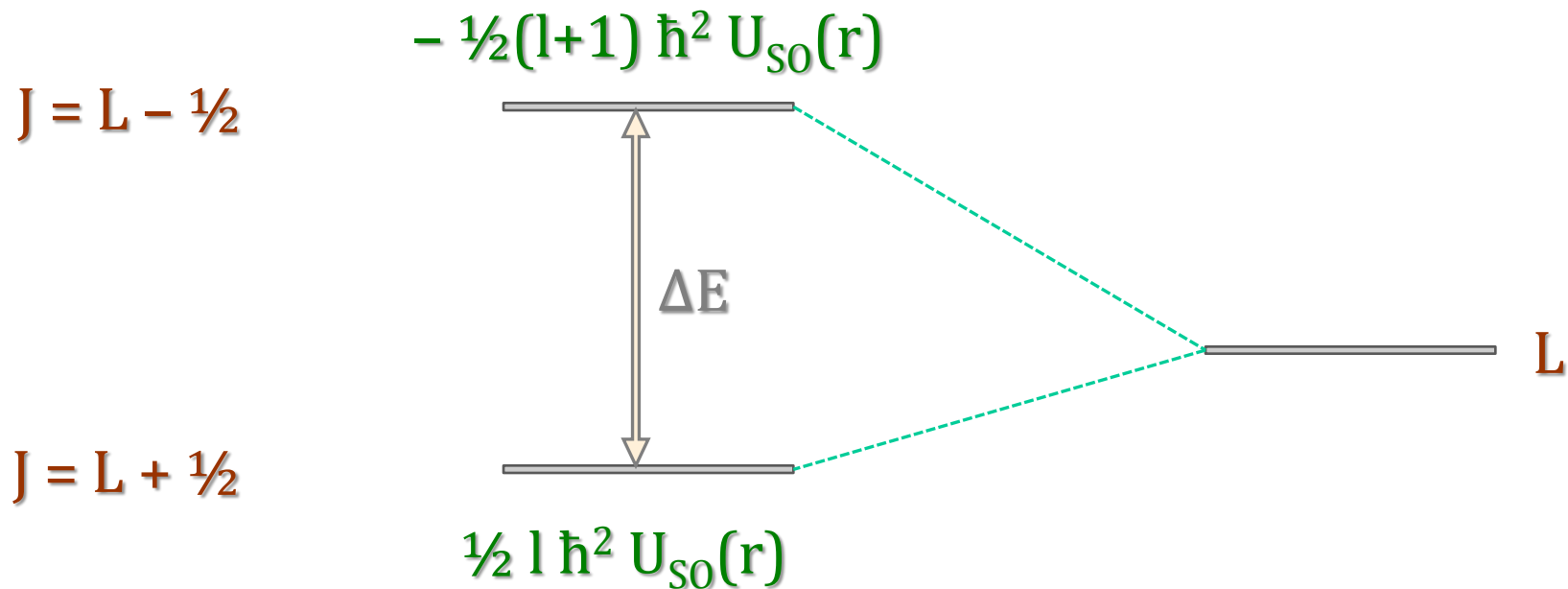
$$+\frac{1}{2} l \hbar^2 \quad \leftarrow \text{εάν } j = l + \frac{1}{2}$$

$$-\frac{1}{2} (l+1) \hbar^2 \quad \leftarrow \text{εάν } j = l - \frac{1}{2}$$

# Σύζευξη Spin-Τροχιάς

## ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

Με τη σύζευξη spin-τροχιάς ( $L \cdot s$ ) κάθε τροχιακό διασπάται σε δύο ενεργειακές στάθμες σύμφωνα με τον επιπλέον όρο  $V_{S0}$  που εισάγεται στο συνολικό δυναμικό:



# Σύζευξη Spin-Τροχιάς

## ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

Το πείραμα δείχνει πως ο όρος  $U_{so}(r)$  είναι **αρνητικός!**

Άρα η σύζευξη με  $j = l - 1/2$  είναι ενεργειακά υψηλότερα!

Η απόσταση των δύο εκφυλισμένων καταστάσεων είναι:

$$\Delta E = \frac{1}{2} l \hbar^2 + \frac{1}{2} (l+1) \hbar^2 = l \hbar^2 + \frac{1}{2} \hbar^2$$

Είναι κατά συνέπεια **ανάλογη του  $l$** , με αποτέλεσμα ο διαχωρισμός αυτός να αλλάζει έντονα την τροχιακή ακολουθία για μεγάλες τιμές στροφορμής  $l$ .

# Ενεργειακοί Φλοιοί

Χωρίς σύζευξη L·s

Αρμονικός ταλαντωτής και ορθογώνιο πηγάδι δυναμικού με ενδιάμεσες τιμές.

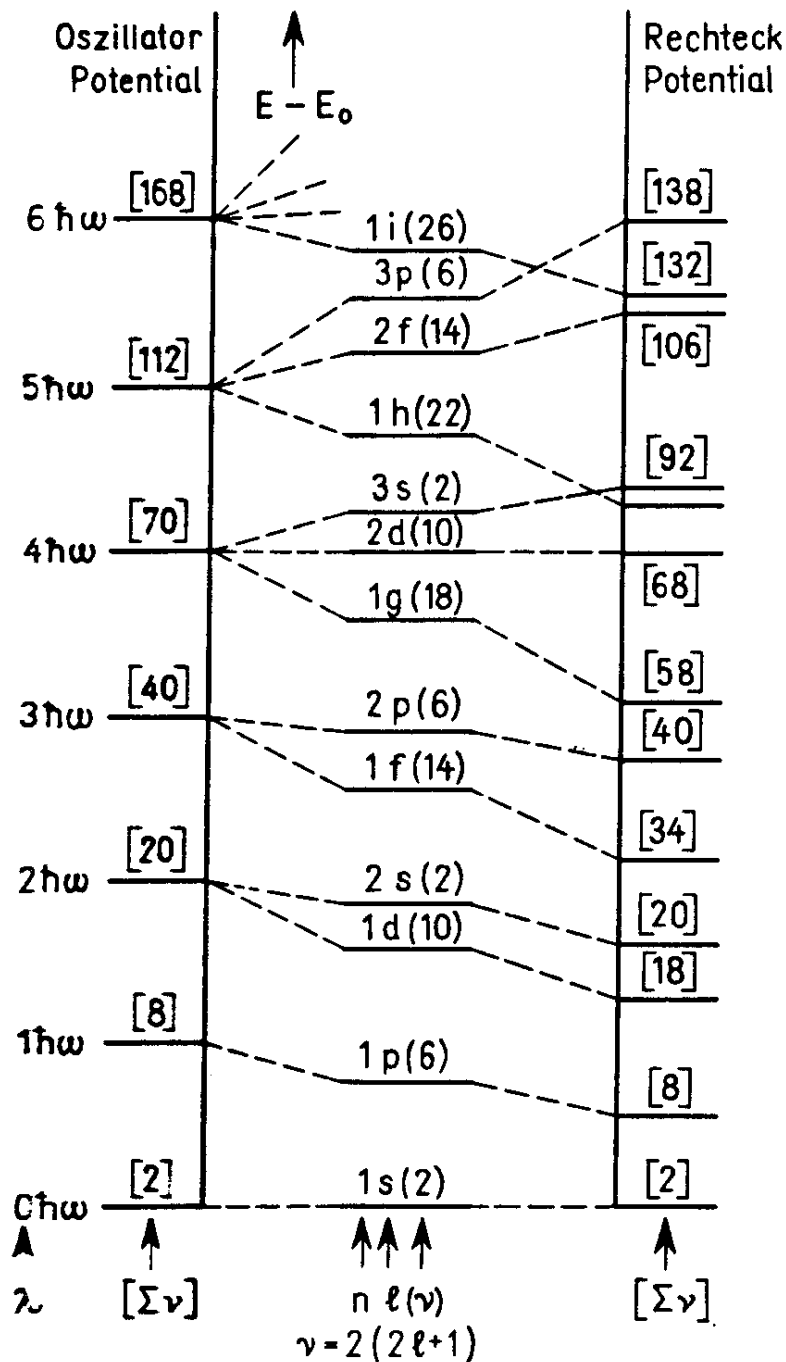
M. Goepfert-Mayer and J.H.D. Jensen,  
Elementary Theory of Nuclear Shell  
Structure, New York 1955

$2(2l+1)$   
νουκλεόνια  
στη στάθμη  $l$

$$n = 1, 2, 3, \dots$$

$$l = 0, 1, 2, \dots$$

$$\lambda = 2(n-1) + l = 0, 1, 2, \dots$$



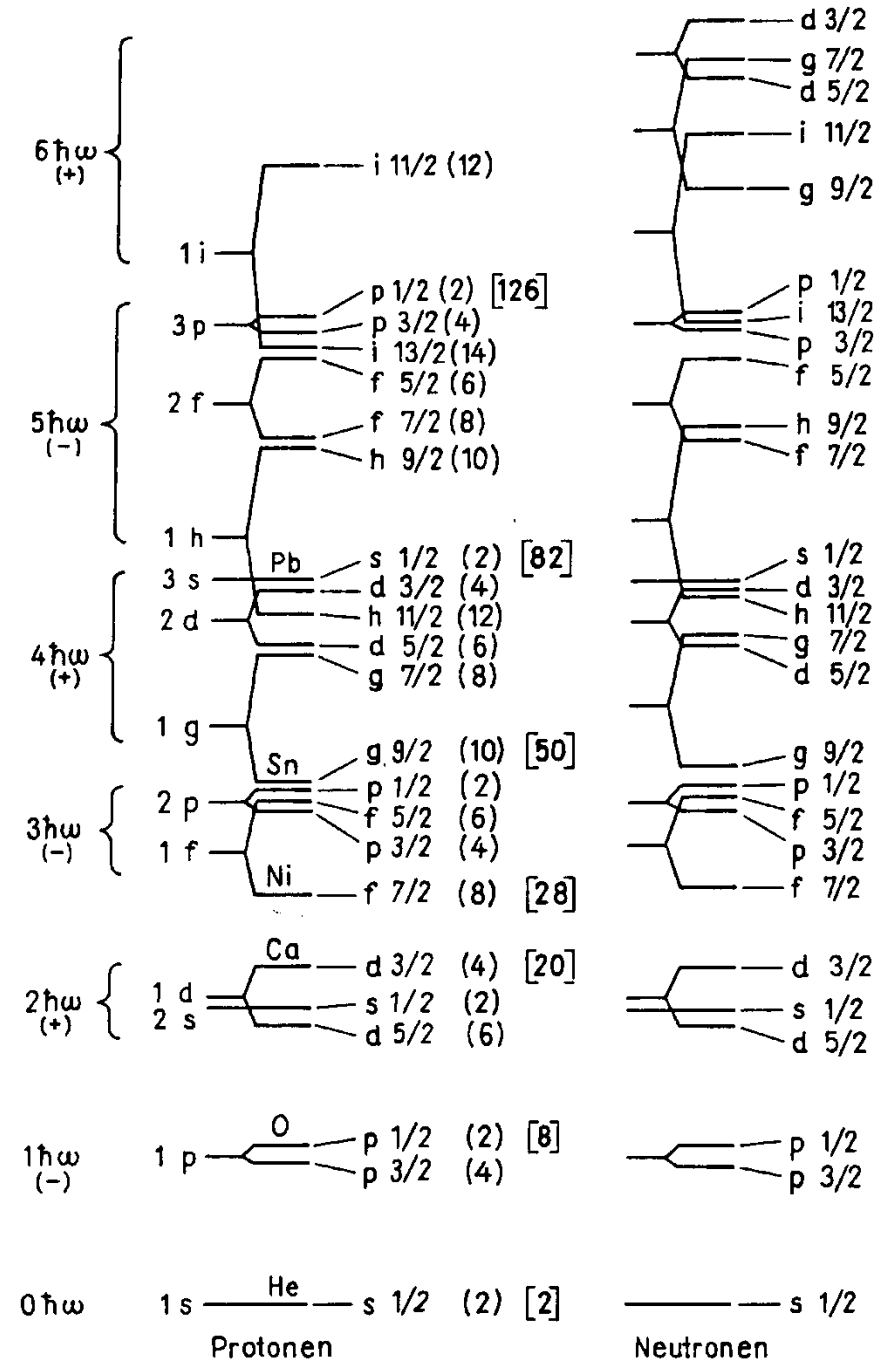
# Ενεργειακοί Φλοιοί

## Με σύζευξη L·s

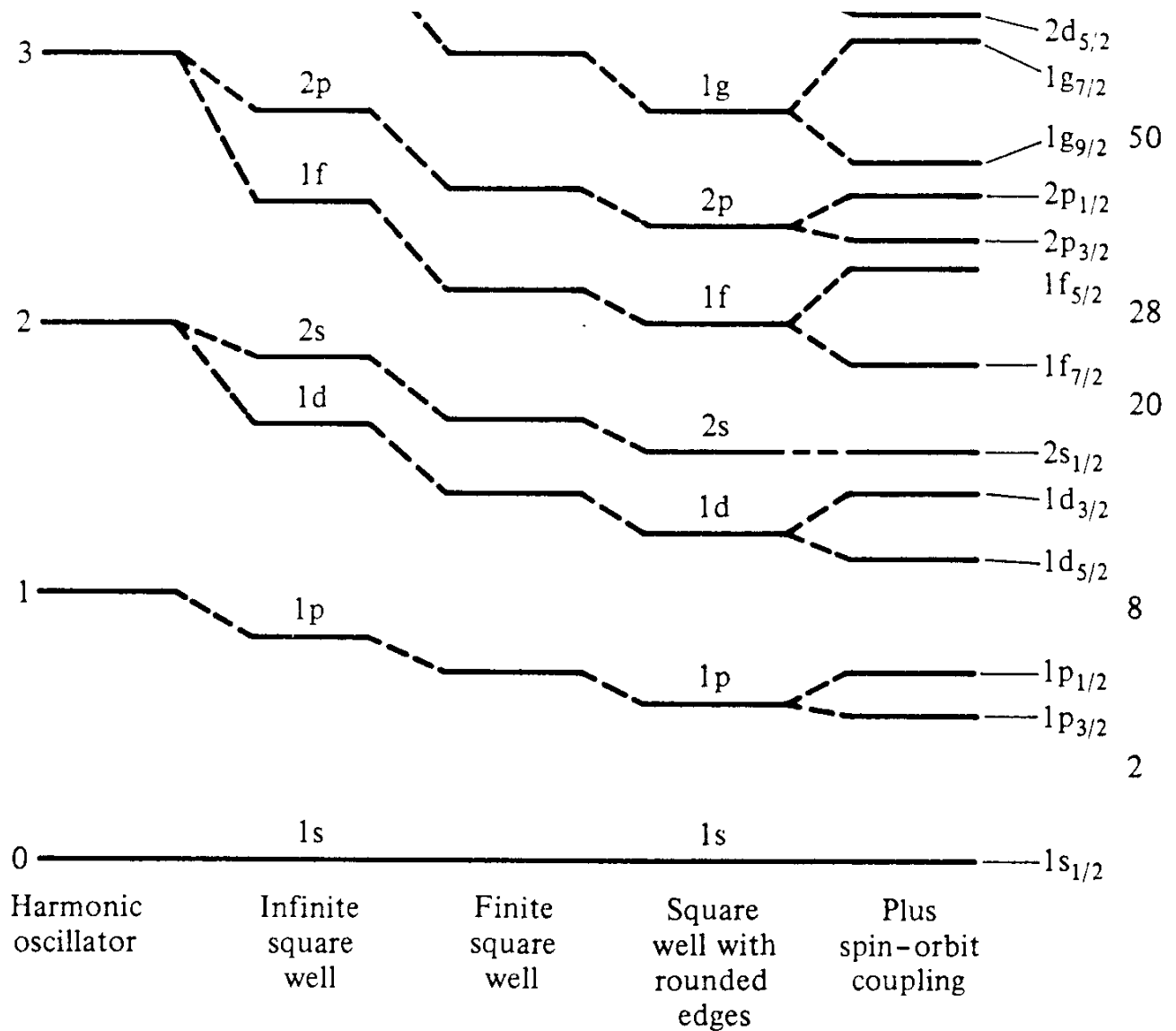
Αρμονικός ταλαντωτής και πηγάδι δυναμικού με σύζευξη spin-τροχιάς.

P. Klingenberg, Rev. Mod. Phys. 24 (1952) 63

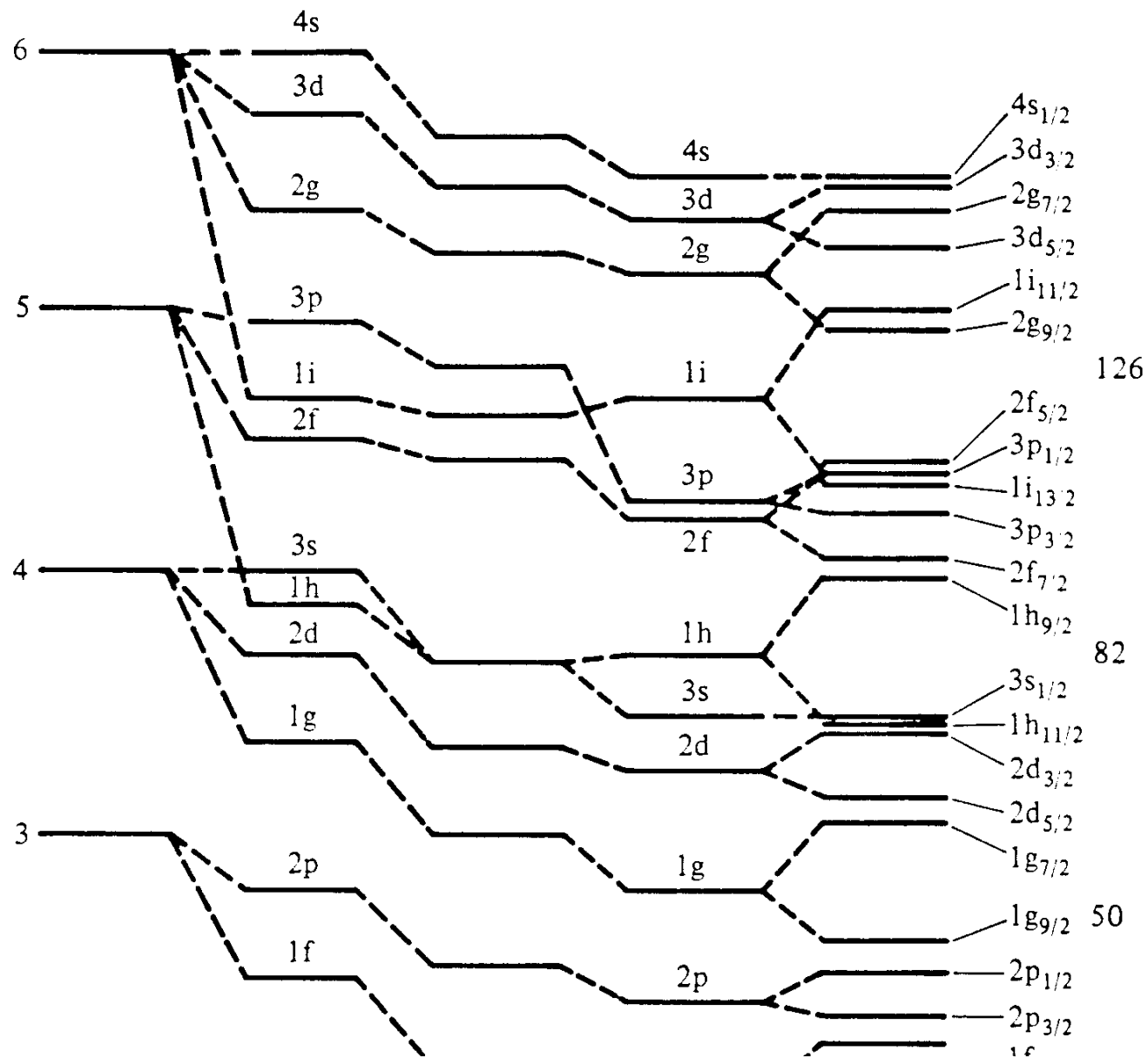
2j+1  
νουκλεόνια  
στη στάθμη j



# Ενεργειακοί Φλοιοί



# Ενεργειακοί Φλοιοί





# Πυρηνικό Πρότυπο Φλοιών

## ΟΜΟΤΙΜΙΑ

Η ομοτιμία μιας κατάστασης (τροχιακού) εξαρτάται μόνο από τον κβαντικό αριθμό της στροφορμής  $L$  και δίνεται από τη σχέση

$$\pi = (-1)^L$$

### Απόδειξη

$$\hat{\Pi}(r, \theta, \varphi) = (r, \pi - \theta, \pi + \varphi)$$



$$\hat{\Pi} \Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = \Psi_{nlm}(r, \pi - \theta, \pi + \varphi)$$

$$\Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot Y_l^m(\theta, \varphi)$$



$$\hat{\Pi} \Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot Y_l^m(\pi - \theta, \pi + \varphi)$$

$$Y_l^m(\theta, \varphi) = C_{lm} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta)$$



$$\hat{\Pi} \Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot C_{lm} e^{im(\pi+\varphi)} P_l^m[\cos(\pi - \theta)]$$



$$\hat{\Pi} \Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot C_{lm} e^{im\pi} e^{im\varphi} P_l^m(-\cos\theta)$$

$$P_l^m(-\xi) = (-1)^{l+m} P_l^m(\xi)$$



$$\hat{\Pi} \Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = R_{nl}(r) \cdot C_{lm} (-1)^m e^{im\varphi} (-1)^{l+m} P_l^m(\cos\theta)$$



$$\hat{\Pi} \Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = (-1)^{2m+l} R_{nl}(r) \cdot C_{lm} e^{im\varphi} P_l^m(\cos\theta)$$



$$\hat{\Pi} \Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi) = (-1)^l \Psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$$

# Πυρηνικό Πρότυπο Φλοιών

## ΕΠΙΤΥΧΕΙΣ ΠΡΟΒΛΕΨΕΙΣ

### 1. Στροφορμής και Ομοτιμίας της Θεμελιώδους Κατάστασης

- **ΑΡΤΙΟΙ-ΑΡΤΙΟΙ** : Spin 0 - Ομοτιμία +
- **ΑΡΤΙΟΙ-ΠΕΡΙΤΤΟΙ** : Το ασύζευκτο νουκλεόνιο καθορίζει Spin-Parity
- **ΠΕΡΙΤΤΟΙ-ΠΕΡΙΤΤΟΙ** : Δεν υπάρχει συστηματικός τρόπος

### 2. Μαγικοί Αριθμοί

Το ενεργειακό χάσμα που εμφανίζεται μετά τη συμπλήρωση στοιβάδας εξηγείται εύκολα με το πυρηνικό πρότυπο των φλοιών.

**Μαγικοί Αριθμοί: 2, 8, 20, 28, 50, 82 και 126**

# Ερωτήσεις

Γιατί ο πυρήνας  $^{208}\text{Pb}$  ( $Z=82$ ) είναι σταθερός;

$Z=82$  και  $N=208-82=126 \rightarrow$  διπλά μαγικός

Ποιο είναι το Spin και η ομοτιμία του  $^{17}\text{O}$ ;

$Z=8$  και  $N=17-8=9 \rightarrow$  Το περιττό νετρόνιο καθορίζει τις τιμές

Βρίσκεται στο φλοιό  $1d_{5/2}$  άρα έχει  $5/2+$

Ποιο είναι το Spin και η ομοτιμία του  $^{16}\text{O}$ ;

$Z=8$  και  $N=8 \rightarrow$  Μάλλον  $0+$

# Ερωτήσεις

Ποιο είναι το Spin και η ομοτιμία του  $^{14}\text{N}$ ;

$Z=7$  και  $N=7$

Είναι περιττός-περιττός με τα νουκλεόνια στην  $1p_{1/2}$

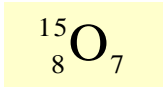
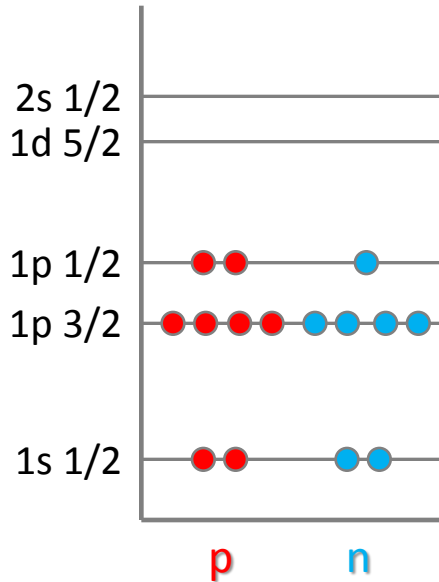
Spin = 1 Ομοτιμία +

Ποιο είναι το Spin και η ομοτιμία του  $^{31}\text{P}$  ( $Z=15$ );

$Z=15$  και  $N=16$  → Το περιττό πρωτόνιο βρίσκεται στην  $2s_{1/2}$

Spin = 1/2 Ομοτιμία +

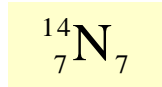
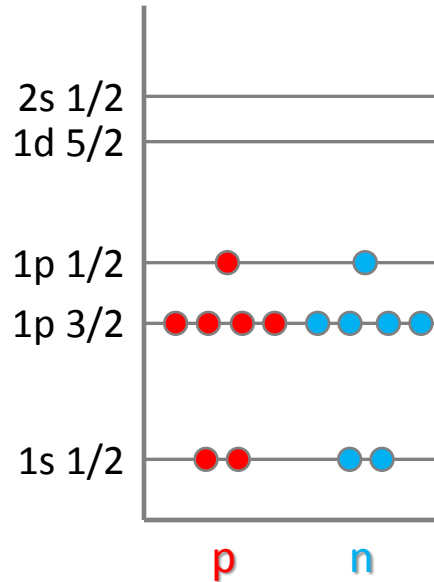
# Διαγραμματικές Επεξηγήσεις



1 ασύζευκτο n  $1p_{1/2}$

$$\pi = (-1)^1$$

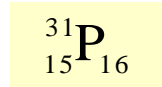
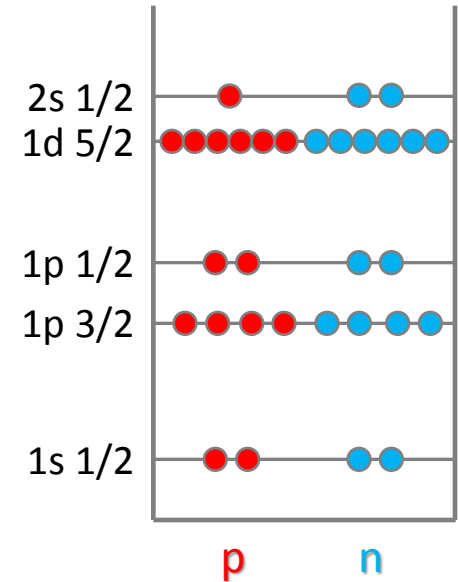
$$J^\pi = 1/2^-$$



1 ασύζευκτο p  $1p_{1/2}$   
1 ασύζευκτο n  $1p_{1/2}$

$$\pi = (-1)^1 \times (-1)^1$$

$$J^\pi = 0^+ \text{ ή } J^\pi = 1^+$$



1 ασύζευκτο p  $2s_{1/2}$

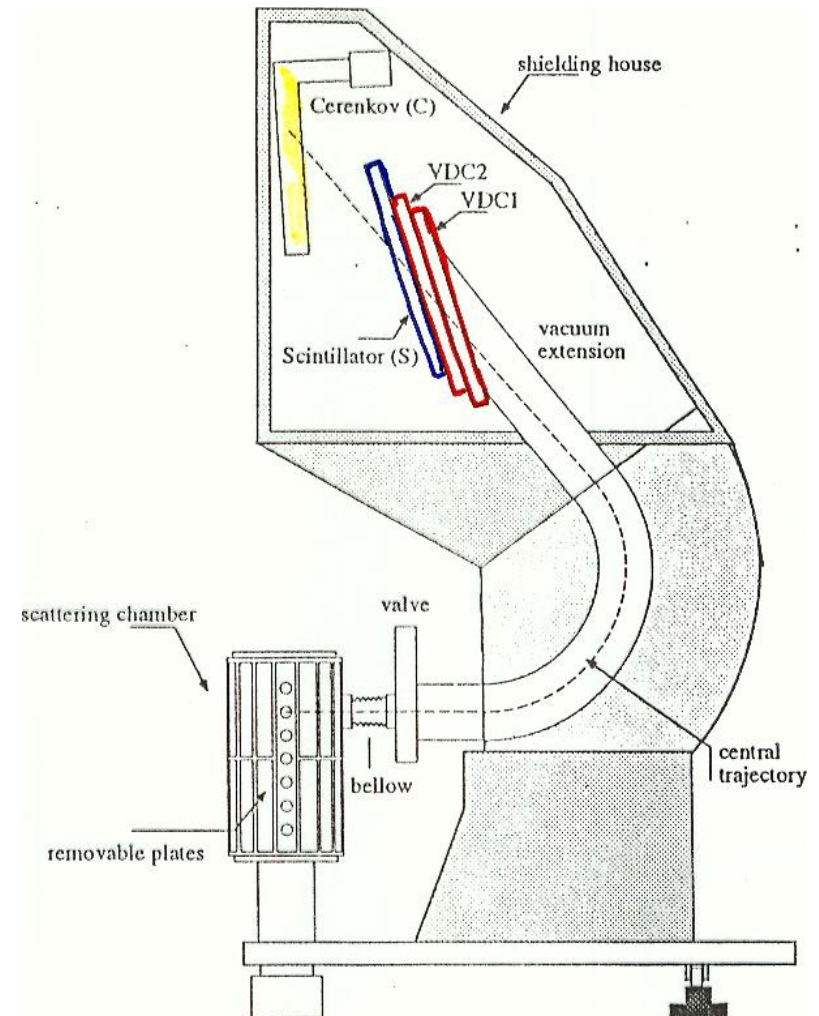
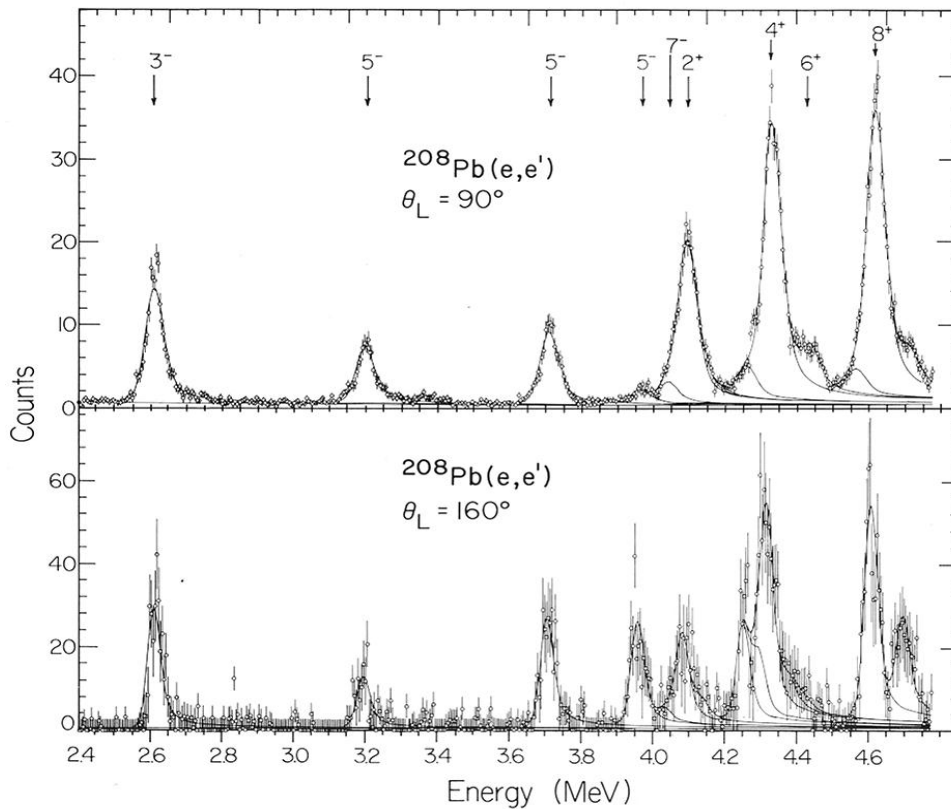
$$\pi = (-1)^0$$

$$J^\pi = 1/2^+$$

# Μαγνητικός Φασματογράφος Σωματίων

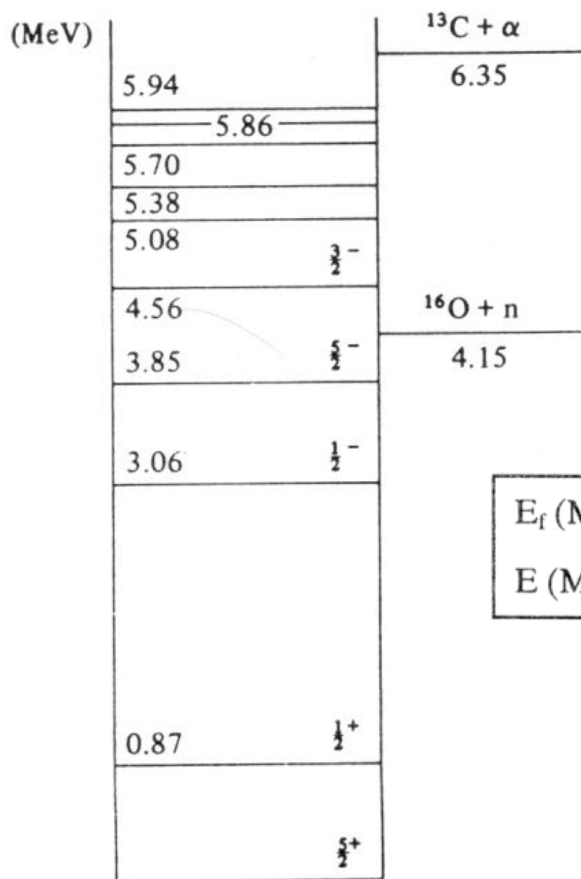
Ταυτοποιεί το σκεδαζόμενο σωματίο και προσδιορίζει:

- *Ορμή & Γωνία σκέδασης*
- *Ενεργειακό φάσμα*



# Πειραματικός Καθορισμός Διεγερμένων Καταστάσεων

Παράδειγμα: Η αντίδραση μεταφοράς (d, p)

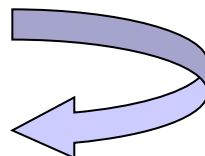


$$E_i = 14.95 \text{ MeV}$$

$$\theta = 19^\circ$$

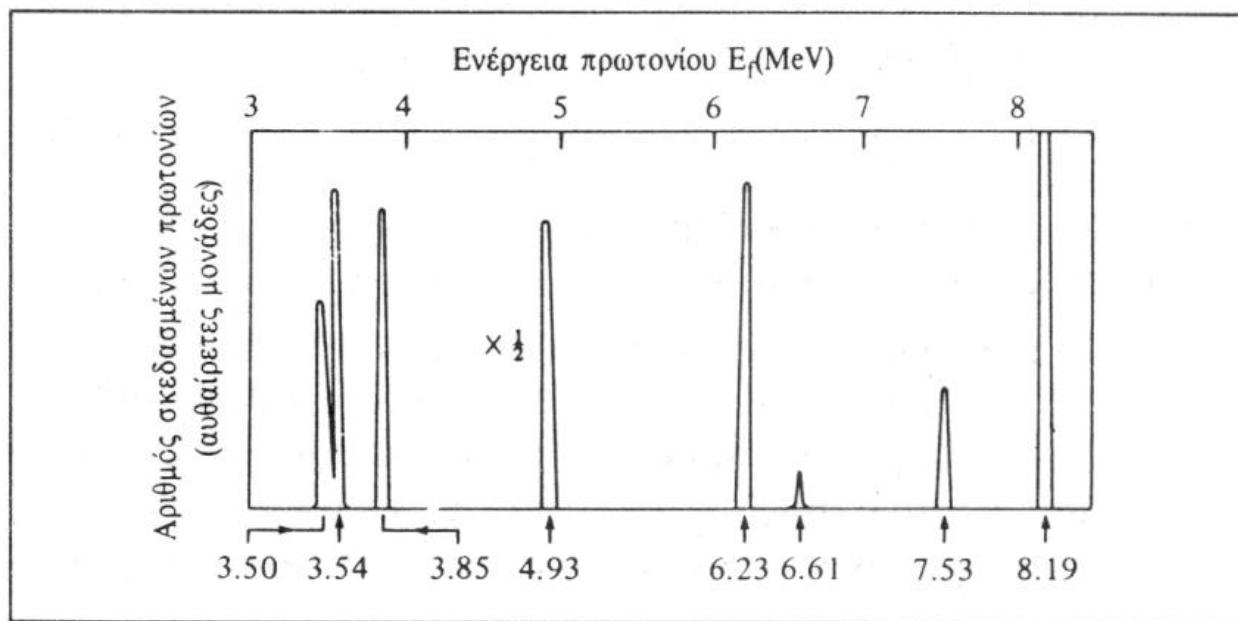
$$E_0 = 1.93 \text{ MeV}$$

$E_f$ (MeV)	11.42	11.97	12.69	13.50	15.74	16.62
$E$ (MeV)	5.08	4.56	3.85	3.06	0.87	0.0

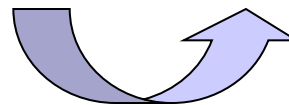
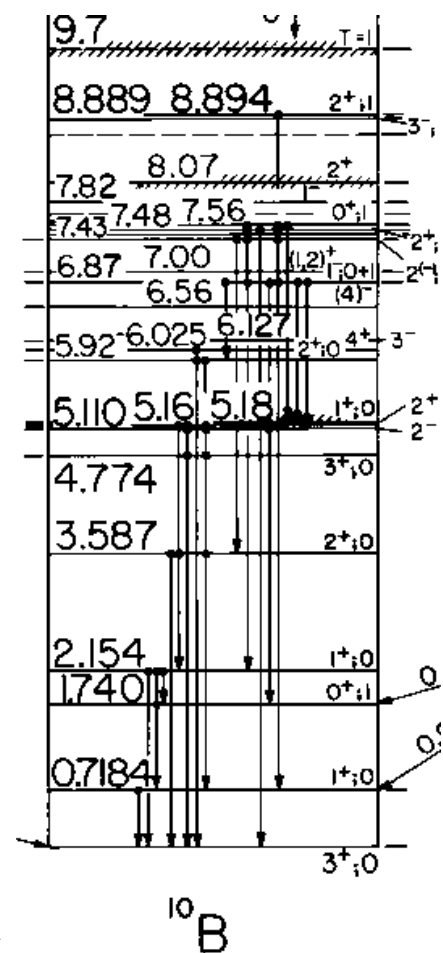


# Πειραματικός Καθορισμός Διεγερμένων Καταστάσεων

Σκέδαση πρωτονίων:  $p + {}^{10}\text{B}$   $E_p = 10.02 \text{ MeV}$   $\theta = 90^\circ$



1.  $E_{gs} (E_f = 8.19) = 0.00 \text{ MeV}$
2.  $E_{1x} (E_f = 7.53) = 0.74 \text{ MeV}$
3.  $E_{2x} (E_f = 6.61) = 1.75 \text{ MeV}$
4.  $E_{3x} (E_f = 6.23) = 2.16 \text{ MeV}$
5.  $E_{4x} (E_f = 4.93) = 4.78 \text{ MeV}$





(MeV)	8.92	$\frac{5}{2}^-$	${}^7\text{Li} + \alpha$ 8.67
	8.56	$\frac{3}{2}^-$	
	7.98	$\frac{3}{2}^+$	
	7.29	$\frac{5}{2}^+$	
	6.79	$\frac{1}{2}^+$	
	6.74	$\frac{7}{2}^-$	
	5.02	$\frac{3}{2}^-$	
	4.45	$\frac{5}{2}^-$	
	2.13	$\frac{1}{2}^-$	
		$\frac{3}{2}^-$	

${}^{11}_3\text{B}$

	8.42	$\frac{5}{2}^-$	${}^{10}\text{B} + p$ 8.69
	8.11	$\frac{3}{2}^-$	
	7.50	$\frac{3}{2}^+$	${}^7\text{Be} + \alpha$ 7.55
	6.91	$\frac{5}{2}^+$	
	6.48	$\frac{7}{2}^-$	
	6.34	$\frac{1}{2}^+$	
	4.80	$\frac{3}{2}^-$	
	4.32	$\frac{5}{2}^-$	
	2.00	$\frac{1}{2}^-$	
		$\frac{3}{2}^-$	

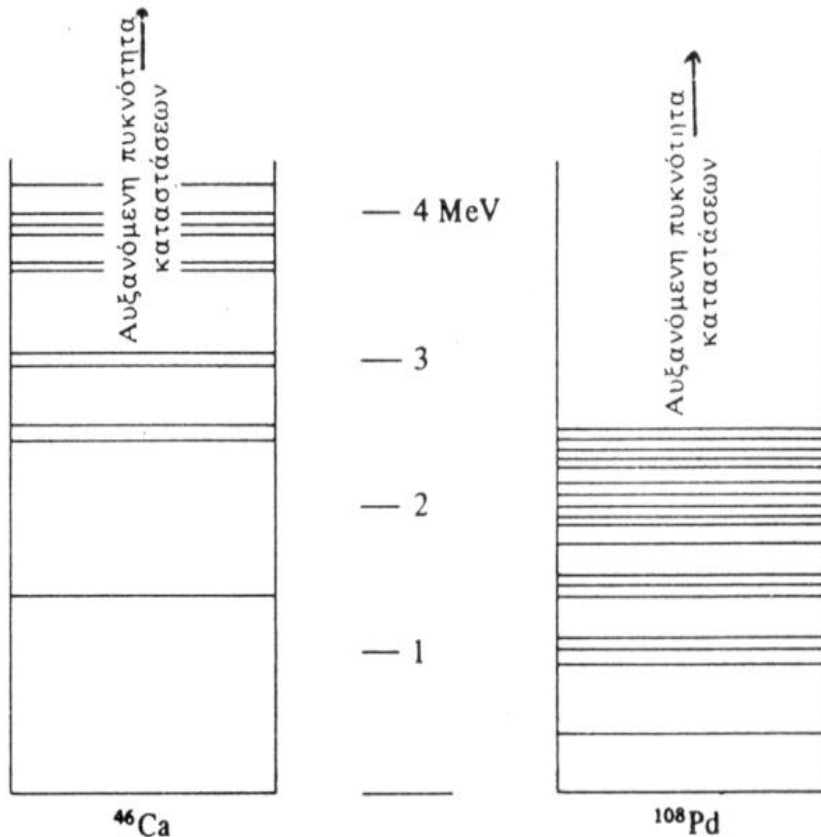
${}^{11}_6\text{C}$

# Γενικά Χαρακτηριστικά Διεγερμένων Καταστάσεων

Κατοπτρικοί Πυρήνες

# Γενικά Χαρακτηριστικά Διεγερμένων Καταστάσεων

Βαρύτερος πυρήνας → Περισσότερες διεγερμένες καταστάσεις



- Ο αριθμός διεγερμένων καταστάσεων αυξάνεται ραγδαία με το  $A$ .
- Το Δευτέριο δεν έχει διεγερμένες καταστάσεις!

Nuclear Data Sheets of the National Nuclear Data Centre for Nuclear Data Evaluation 37(1982)290 & 38(1983)467

# Γενικά Χαρακτηριστικά Διεγερμένων Καταστάσεων

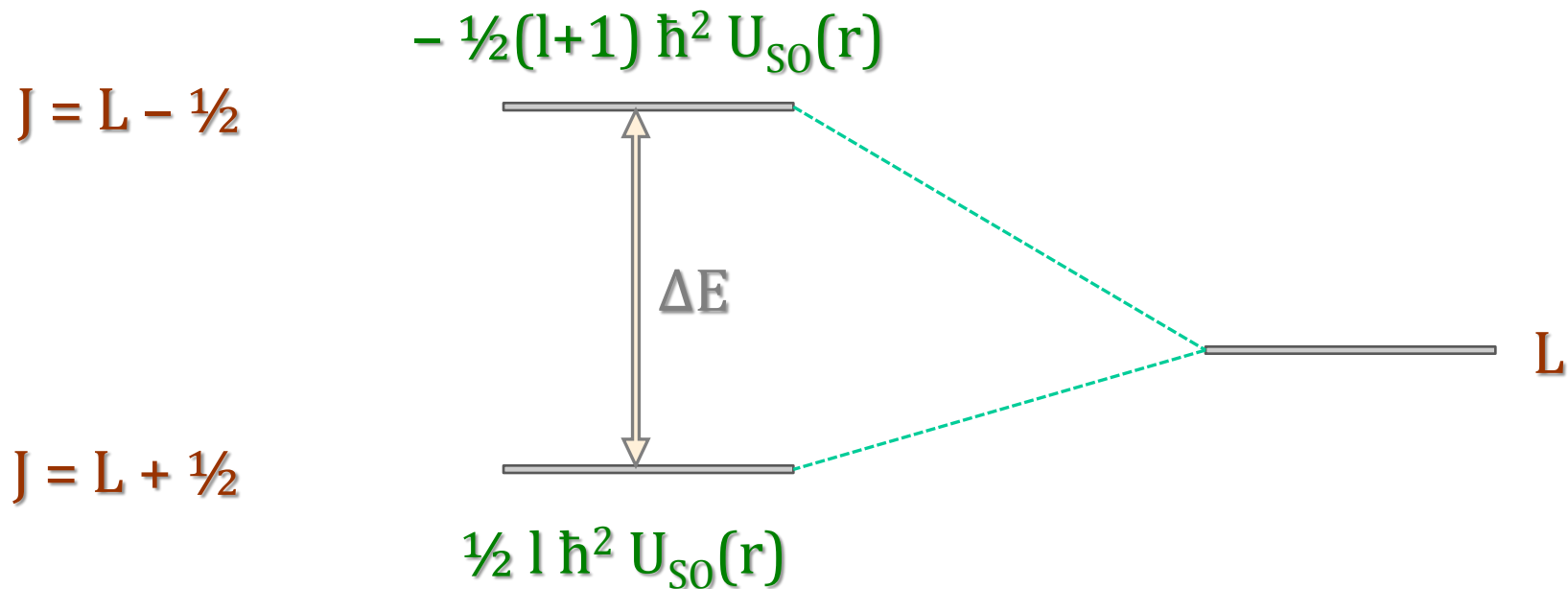
Βαρύτερος πυρήνας → Περισσότερες διεγερμένες καταστάσεις

- Για δεδομένη ενέργεια διέγερσης, ο βαρύτερος πυρήνας έχει μεγαλύτερη πυκνότητα διεγερμένων καταστάσεων.
- Για δεδομένο πυρήνα η πυκνότητα καταστάσεων μεγαλώνει όσο μεγαλώνει και η ενέργεια διέγερσης.
- Σε πυρήνες με συμπληρωμένους φλοιούς το χάσμα ενεργειών μεταξύ σταθμών τείνει να είναι μεγαλύτερο στις μικρότερες ενέργειες.

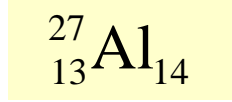
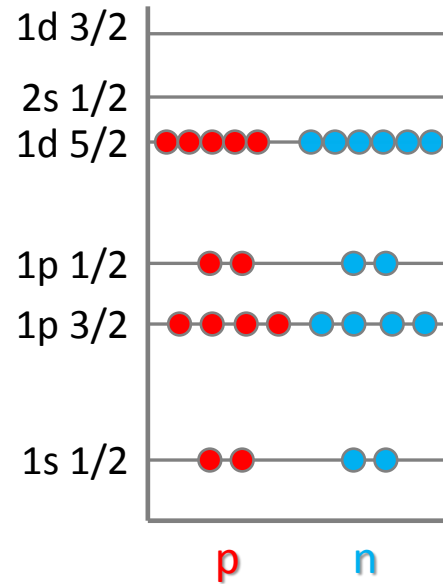
# Σύζευξη Spin-Τροχιάς

## ΣΥΝΕΠΕΙΕΣ

Με τη σύζευξη spin-τροχιάς ( $L \cdot s$ ) κάθε τροχιακό διασπάται σε δύο ενεργειακές στάθμες σύμφωνα με τον επιπλέον όρο  $V_{S0}$  που εισάγεται στο συνολικό δυναμικό:



Εάν μια διεγερμένη κατάσταση του  $^{27}\text{Al}$  έχει  $J^\pi=3/2^+$  και βρίσκεται σε ενέργεια  $E_x=1.0\text{ MeV}$  πάνω από τη βασική στάθμη, να υπολογίσετε το σθένος της σύζευξης spin-τροχιάς LS για τον πυρήνα αυτόν.



Το πυρηνικό δυναμικό μέσου πεδίου για σφαιρικό πυρήνα με  $A=27$  περιγράφεται ικανοποιητικά από τη σχέση Woods-Saxon

$$V(r) = \frac{V_0}{1 + \exp\left(\frac{r - R}{a}\right)}$$

(α) Επιλέξτε τις κατάλληλες τιμές για τις παραμέτρους  $V_0$ ,  $R$  και  $a$  και σχεδιάστε το δυναμικό αυτό συναρτήσει του  $r$ .

(β) Μπορείτε να προσεγγίσετε το δυναμικό αυτό με έναν ισοδύναμο αρμονικό ταλαντωτή; Υπολογίστε τη συναρτησιακή μορφή του νέου αυτού δυναμικού.

(γ) Ποια η αναμενόμενη κατανομή πρωτονίων-νετρονίων για τις δύο παραπάνω μορφές δυναμικού εάν γνωρίζετε πως η προβολή του ισοτοπικού spin  $T_z$  του πυρήνα αυτού είναι  $-1/2$  ;