1

Δυναμικό Νουκλεονίου-Νουκλεονίου – Θεώρηση Yukawa

Θεωρείστε ένα απλό δυναμικό νουκλεονίου-νουκλεονίου (N-N) το οποίο περιγράφεται από όρους δυναμικού Yukawa της μορφής $Y = C\frac{e^{-ar}}{ar}$, όπου C το σθένος του δυναμικού.

1. Ποια η φυσική σημασία της σταθεράς a;
2. Γιατί απαιτούνται τουλάχιστον δύο όροι για την περιγραφή ενός ρεαλιστικού δυναμικού N-N;
3. Στην περίπτωση του δευτερίου, πώς θα μπορούσατε να προσδιορίσετε τη σχέση των παραπάνω σταθερών ώστε να αποδίδεται σωστά η ακτίνα του r_0 ;

(Μάιος 2023, Πτυχιακή)

Μέσο Πεδίο – Θεώρηση Fermi – Ημιελαστική Σκέδαση e-

1. Θεωρώντας γνωστή την κατά Fermi πυκνότητα καταστάσεων σε τρισδιάστατο κβαντικό σύστημα $n(E)=\frac{dN}{dE}=C_1 V\sqrt{E}$, όπου C_1 σταθερά και V ο προσφερόμενος όγκος του συστήματος, να αποδείξετε πως η ενέργεια σύνδεσης ανά νουκλεόνιο σε πυρήνα με συνολικά Α νουκλεόνια είναι σταθερή και δίνεται από τη σχέση:

$$\frac{BE(A)}{A}=\frac{3}{5}E_F$$

με $E_F \simeq 35$MeV. Πώς συγκρίνεται το αποτέλεσμα αυτό με την πειραματικά προσδιοριζόμενη τιμή των ~8MeV ανά νουκλεόνιο; Πού οφείλεται η απόκλιση;

2. Σε πείραμα ημιελαστικής σκέδασης ηλεκτρονίων από πυρήνα, να υπολογίσετε την γωνία σκέδασης των ηλεκτρονίων ενέργειας 500 MeV, ώστε το ανταλλασσόμενο δυνητικό φωτόνιο να διαθέτει ορμή 300 MeV/c . Ποιο είναι το ισοδύναμο μήκος κύματος του φωτονίου αυτού;

(Φεβρουάριος 2021)

Μέσο Πεδίο – Θεώρηση Fermi

1. Γνωρίζοντας πως η πυκνότητα ενεργειακών καταστάσεων με βάση το πρότυπο Fermi δίνεται από τη σχέση:

$$n(E)=\frac{dN}{dE}=C_1 V\sqrt{E} \quad (C_1\text{: σταθερά, } V\text{: όγκος τους συστήματος})$$

να αποδείξετε πως η ενέργεια σύνδεσης πυρήνα με A νουκλεόνια μπορεί να γραφεί στη μορφή:

$$BE(A) \approx A^{5/3}\, V^{-2/3}$$

2. Να αποδώσετε σχηματικά την κατανομή νουκλεονίων σε τροχιακά του πυρήνα ^{15}N (Z=7) με βάση τη θεώρηση μέσου πεδίου, όπου το κεντρικό δυναμικό είναι της μορφής:

(α) Αρμονικού ταλαντωτή,

(β) Woods-Saxon χωρίς σύζευξη spin-τροχιάς (*LS*),

(γ) Woods-Saxon με σύζευξη spin-τροχιάς (*LS*).

3. Να επιλεγεί η κατάλληλη συναρτησιακή μορφή του δυναμικού αρμονικού ταλαντωτή του παραπάνω ερωτήματος και να αποδοθούν οι τιμές των εισερχόμενων μεταβλητών, ώστε να περιγράφει ισοδύναμα την αντίστοιχη αλληλεπίδραση Woods-Saxon.

(Σεπτέμβριος 2023)

Πυρηνική Δομή – Σύζευξη Spin-Τροχιάς

1. Για την μελέτη του ισοτόπου ^{25}Al μέσω πυρηνικής αντίδρασης μεταφοράς, χρησιμοποιείται επιταχυντής με δέσμη ιόντων ^{12}C τα οποία προσπίπτουν σε λεπτό, σταθερό στόχο ^{28}Si.

(α) Να αναγραφεί η αντίστοιχη πυρηνική αντίδραση και να υπολογισθεί η ελάχιστη απαιτούμενη ενέργεια της δέσμης του ^{12}C ώστε να καθίσταται δυνατή η φασματοσκόπιση του ^{25}Al, δεδομένου ότι η αντίδραση αυτή είναι ενδόθερμη με $Q = -12.7$ MeV.

(β) Ποιό το αναμενόμενο spin και η ομοτιμία J^{π} της βασικής και των δύο πρώτων διεγερμένων καταστάσεων του ^{25}Al;

(γ) Πειραματικές μετρήσεις δίνουν για την δεύτερη διεγερμένη κατάσταση του ^{25}Al $E_x = 0.95$ MeV. Εκτιμείστε το σθένος του δυναμικού σύζευξης spin-τροχιάς (LS) για τον πυρήνα αυτόν.

2. Πώς κατανέμονται τα νουκλεόνια του πυρήνα ^{25}Al με βάση (i) το πρότυπο Fermi (ii) το πρότυπο μέσου πεδίου με δυναμικό αρμονικού ταλαντωτή; Τι συμπεράσματα συνάγονται για την προβλεπόμενη ομοτιμία των δύο αυτών προτύπων σε σχέση με την πραγματική τιμή;

(Φεβρουάριος 2021)

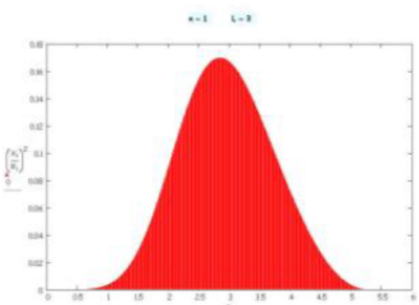
Πυρηνική Δομή – Σύζευξη Spin-Τροχιάς – Τροχιακά

1. Ποιό το αναμενόμενο σπιν και ομοτιμία (J^π) της βασικής και πρώτης διεγερμένης κατάστασης του νουκλιδίου $^{21}_{10}\mathrm{Ne}$ σύμφωνα με το πρότυπο μέσου πεδίου, όπου το κεντρικό πυρηνικό δυναμικό είναι της μορφής:

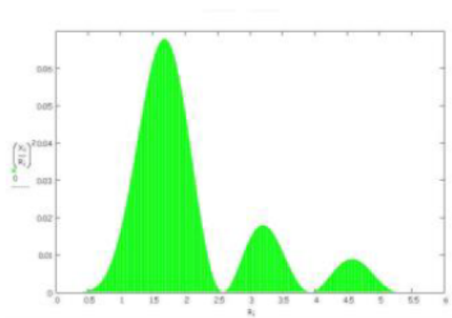
(a) Αρμονικού ταλαντωτή
(b) Woods-Saxon χωρίς σύζευξη LS
(c) Woods-Saxon με σύζευξη LS

2. Διακιολογείστε γιατί στον αρμονικό ταλαντωτή ο αριθμός κατοχής της ενεργειακής κατάστασης N δίνεται από το γινόμενο (N+1)(N+2).

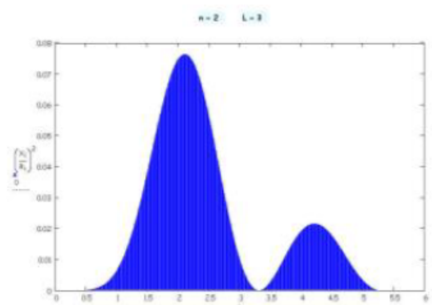
3. Τα παρακάτω διαγράμματα παριστούν τις πυκνότητες πιθανότητας $|u(r)|^2$ τροχιακών λύσεων νουκλεονίου που αντιστοιχούν σε καταστάσεις 1s, 1f, 2f και 3p. Δώστε τη σωστή αντιστοίχηση των καταστάσεων με τα διαγράμματα δικαιολογώντας πλήρως την απάντησή σας.



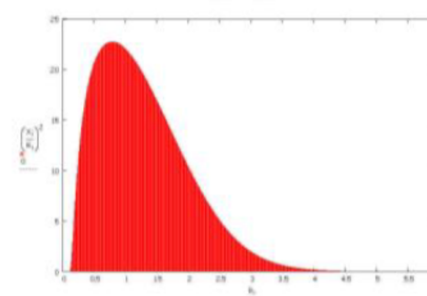
(α)



(β)



(γ)



(δ)

(Μάιος 2018, Πτυχιακή)

Πυρηνική Δομή – Σύζευξη Spin-Τροχιάς

(1) Για τον πυρήνα $^{23}_{11}\mathrm{Na}$ να σχεδιάσετε την κατανομή των νουκλεονίων σε ενεργειακές στάθμες βασιζόμενοι στο πυρηνικό πρότυπο μέσου πεδίου με κεντρικό δυναμικό Woods-Saxon και σύζευξη LS. Ποια είναι η πρόβλεψη του προτύπου αυτού για το spin και την ομοτιμία (J^{π}) της θεμελιακής και πρώτης διεγερμένης κατάστασής του;

(2) Πώς θα μελετούσατε πειραματικά τη δομή του παραπάνω πυρήνα $^{23}_{11}\mathrm{Na}$ σε επιταχυντικό κέντρο, όπου διατίθεται δέσμη πυρήνων $^{3}_{2}\mathrm{He}$ και σταθερός στόχος $^{22}_{10}\mathrm{Ne}$, κάνοντας χρήση πυρηνικής αντίδρασης μεταφοράς; Πόση είναι η ελάχιστα απαιτούμενη ενέργεια της δέσμης στο σύστημα του εργαστηρίου ώστε να πραγματοποιηθεί η αντίδραση αυτή, εάν γνωρίζετε ότι είναι εξώθερμη ($Q>0$);

(Μάιος 2022, Πτυχιακή)

α Διάσπαση – Παράγοντας Gamow

(α) Ποια η φυσική σημασία του παράγοντα Gamow $G = \frac{\pi}{197}(1.44 \cdot Z_1 \cdot Z_2)\sqrt{\frac{2mc^2}{Q}} F\left(\frac{R_S}{R_C}\right)$ στην α-διάσπαση και πώς συνδέεται αυτός με το χρόνο ζωής του α ραδιενεργού ισοτόπου; Τι περιγράφουν τα μεγέθη R_s και R_c στην παραπάνω έκφραση;

(β) Στην α-διάσπαση του Πολωνίου-218 ο ενεργειακός παράγοντας είναι Q=+6.2 MeV, ο δε πειραματικά προσδιοριζόμενος μέσος χρόνος ζωής τ= 260s:

$$^{218}_{84}\mathrm{Po} \rightarrow {}^{214}_{82}\mathrm{Pb} + \mathrm{a}$$

Βασιζόμενοι στην παραπάνω έκφραση Gamow, υπολογίστε τον μέσο χρόνο ζωής του $^{218}_{84}\mathrm{Po}$ και συγκρίνετε το αποτέλεσμα με την προαναφερθείσα πειραματική τιμή. Δικαιολογήστε τυχόν υπάρχουσες αποκλίσεις.

Δίδονται τιμές της συνάρτησης F(x): `F(0)=1, F(0.1)=0.60, F(0.2)=0.45, F(0.5)=0.18, F(1)=0.`

(Μάρτιος 2022, Πτυχιακή INPP)

1

(α) Αντιπαραβάλλοντας τη δοσμένη μορφή του δυναμικού με την

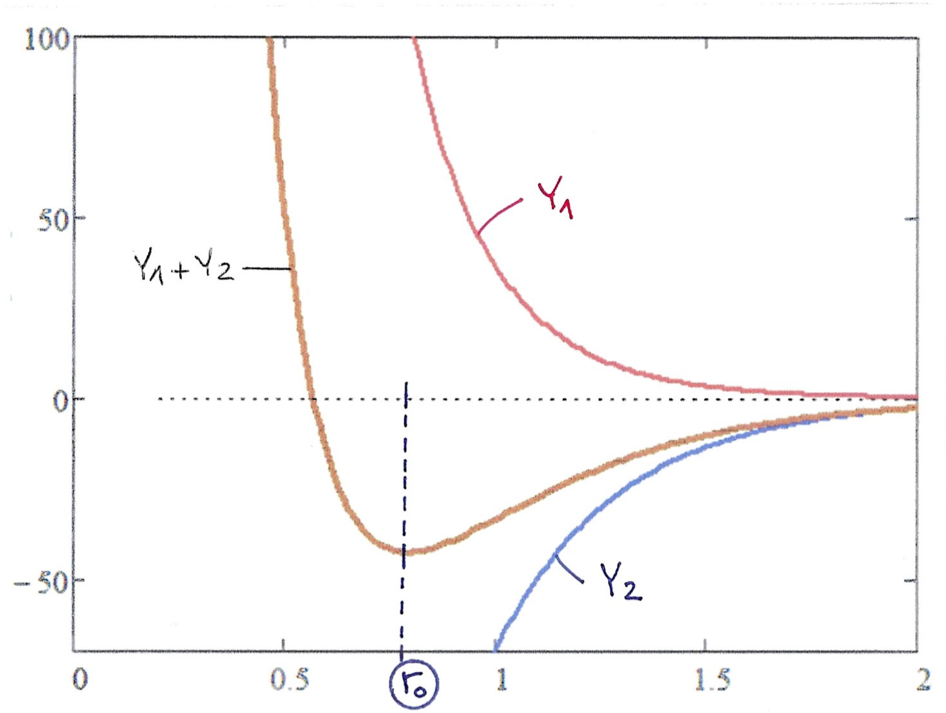
$$Y(r) = \frac{A}{r}\, e^{-r/R} \Longleftrightarrow \boxed{Y(r) = C\,\frac{e^{-ar}}{ar}}$$

είναι προφανές πως η σταθερά α ταυτίζεται με το αντίστροφο της εμβέλειας $\boxed{\alpha = \frac{1}{R} = \frac{mc}{\hbar} = \frac{mc^2}{\hbar c}}$, δηλαδή αποδίδει τη μάζα του διαδότη σε μονάδες $\hbar c = 197$ MeV·fm

(β) Δύο όροι Yukawa με αντίθετο πρόσημο έντασης κ διαφορετική εμβέλεια: Ο θετικός όρος αντιστοιχεί σε απωστικό δυναμικό, ο αρνητικός σε ελκτικό δυναμικό.

$$Y(r) = Y_1(r) + Y_2(r) = C_1 \cdot \frac{e^{-a_1 \cdot r}}{a_1 r} + C_2\,\frac{e^{-a_2 \cdot r}}{a_2 \cdot r}$$

$$\boxed{C_1 > 0,\ C_2 < 0}$$



(γ) Η r_0 εκφράζει τη θέση ισορροπίας για το δυναμικό Y, οπότε:

$$\frac{dY}{dr} = 0 \Longrightarrow C_1 \cdot \left\{ \frac{e^{-a_1 \cdot r}}{r} + \frac{e^{-a_1 \cdot r}}{a_1 r^2} \right\} + C_2 \cdot \left\{ \frac{e^{-a_2 r}}{r} + \frac{e^{-a_2 r}}{a_2 r^2} \right\} = 0$$

Η παραπάνω σχέση πρέπει να επαληθεύεται για την ακτίνα του Δευτερίου $R = R_0 A^{1/3} = 1.3 \times 2^{1/3} \approx 1.6$ fm

(Το M3Y δυναμικό του σχήματος αποδίδει σωστά $r_0 = 0.8$ fm στο CM συστήματος N-N).

(2)

(1)

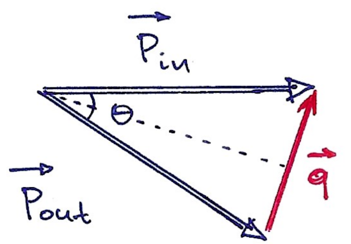
$$A = \int_0^{E_F} \frac{dN}{dE}\, dE = \int_0^{E_F} C_1 \cdot V \cdot E^{1/2}\, dE \Longrightarrow A = \frac{2}{3} C_1 \cdot V \cdot E_F^{3/2} \quad (a)$$

$$BE = \int_0^{A} E\, dN = \int_0^{E_F} E \frac{dN}{dE}\, dE = \int_0^{E_F} E \cdot C_1 V \cdot E^{1/2}\, dE \Longrightarrow BE = \frac{2}{5} C_1 \cdot V \cdot E_F^{5/2} \quad (\beta)$$

$$\frac{(\beta)}{(a)} \Longrightarrow \frac{BE}{A} = \frac{\frac{2}{5} C_1 \cdot V \cdot E_F^{5/2}}{\frac{2}{3} C_1 \cdot V \cdot E_F^{3/2}} \Longrightarrow \boxed{\frac{BE}{A} = \frac{3}{5} E_F}$$

Για $E_F \approx 35$ MeV προκύπτει $\frac{BE}{A} \approx 21$ MeV, μεγαλύτερος του πειραματικά προσδιοριζόμενου, δεδομένου ότι δεν έχουν αφαιρεθεί οι απωστικοί όροι (Coulomb, Ασυμμετρίας, ...).
Ο αντίστοιχος όρος στο μοντέλο υγρής σταγόνας είναι συγκρίσιμος (~ 16 MeV).

(2)



$$\vec{P}_{in} = \vec{P}_{out} + \vec{q} \longrightarrow \vec{q} = \vec{P}_{in} - \vec{P}_{out}$$

Στην ημιελαστική σκέδαση ηλεκτρονίων $\|\vec{P}_{in}\| = \|\vec{P}_{out}\| = p$

οπότε από τη γεωμετρία του ισοσκελούς τριγώνου:

$p \cdot c \approx E$ (με αμελητέα)

$$\sin\theta/2 = \frac{q/2}{p} = \frac{\frac{300}{2}\ \frac{MeV}{c}}{500\ \frac{MeV}{c}} \longrightarrow \sin\theta/2 = 0.3 \rightsquigarrow \boxed{\theta \approx 35^\circ}$$

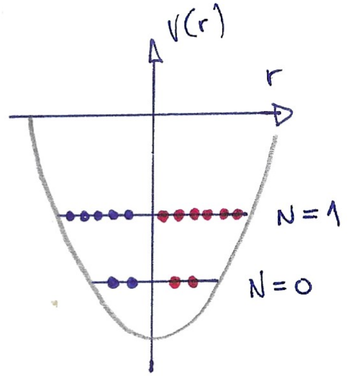
$$E = hf = \frac{hc}{\lambda} \Longrightarrow \lambda = \frac{hc}{E} \Longrightarrow ƛ = \frac{\hbar c}{pc} = \frac{197\ MeV \cdot fm}{300\ MeV} \approx 0.66\ fm$$

③

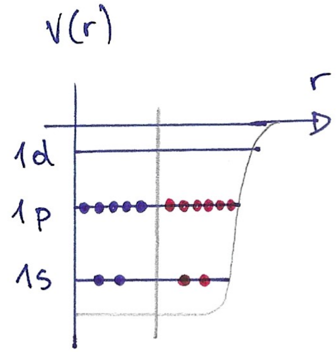
(1) Όπως προηγούμενα (a) $A = \frac{2}{3} C_1 \cdot V \cdot E_F^{3/2} \Longrightarrow E_F \sim \left(\frac{A}{V}\right)^{2/3}$

& $BE = \int_0^{E_F} E \frac{dN}{dE}\, dE = \frac{2}{5} C_1 \cdot V \cdot E_F^{5/2} \Longrightarrow BE \sim V \cdot E_F^{5/2} \sim V \cdot \left(\frac{A}{V}\right)^{5/3} \sim \frac{A^{5/3}}{V^{2/3}}$

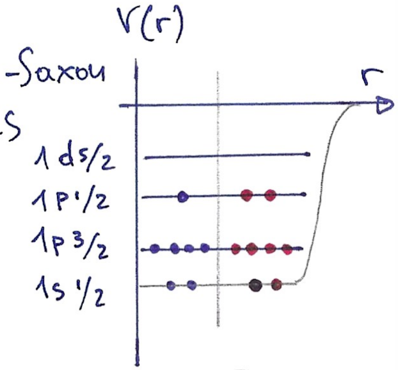
(2) Αρμονικός Ταλαντωτής



Woods-Saxon χωρίς LS

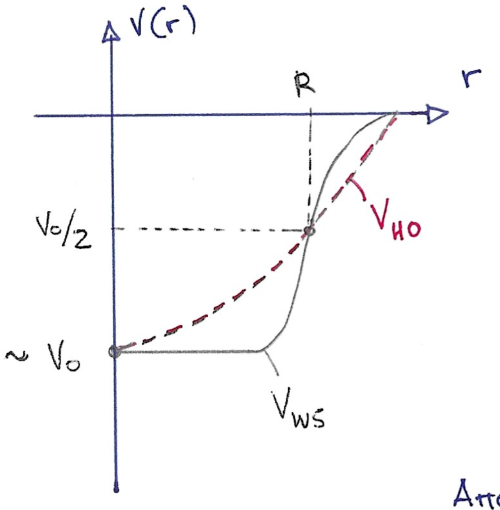


Woods-Saxon με LS



Αριθμός κατοχής: $(N+1)(N+2)$ $\Pi = -1$ $\quad 2(2\ell+1)$ 1^- $\quad 2j+1$ $\frac{1}{2}^-$

(3)



$$\boxed{V_{WS} = \frac{V_0}{1 + e^{\frac{r-R}{\alpha}}} \qquad V_{HO} = k \cdot (r - r_0)^2}$$

Δύο ικανοποιητικές συνθήκες για το αρμονικό δυναμικό είναι:

$$V_{HO}(r=0) \approx V_0 \Longrightarrow K r_0^2 = V_0 \quad (1)$$

$$V_{HO}\left(r = \frac{R}{2}\right) = \frac{V_0}{2} \Longrightarrow k (R - r_0)^2 = \frac{V_0}{2} \quad (2)$$

Απο τις (1) & (2)

$$\frac{(1)}{(2)} \Longrightarrow \left(\frac{r_0}{R - r_0}\right)^2 = 2 \Longrightarrow \boxed{r_0 = R \frac{\sqrt{2}}{1 + \sqrt{2}}} \quad (r_0 \sim 0.6R)$$

και αντίστοιχα για το K.

④

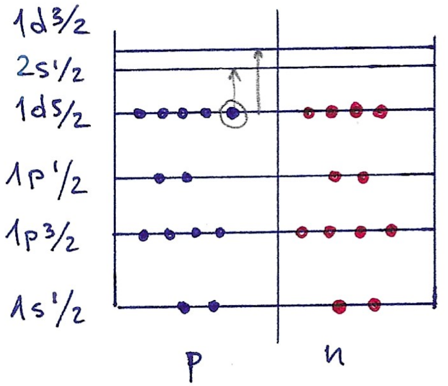
(α) $\;{}^{12}_{6}C + {}^{28}_{14}Si \longrightarrow {}^{15}_{7}N + {}^{25}_{13}Al \qquad Q = -12.7\ \text{MeV}$

$$E^{CM}_{min} = V_c(R_1+R_2) + \|Q\| = k\cdot\frac{Z_1 Z_2}{R_1+R_2} + \|Q\| = 1.44\,\frac{6\times 14}{6.4} + 12.7 = 31.6\ \text{MeV}$$

$$R_1 = 1.2\cdot 12^{1/3} = 2.8\ \text{fm}$$
$$R_2 = 1.2\cdot 28^{1/3} = 3.6\ \text{fm}$$
$$R_1+R_2 = 6.4\ \text{fm}$$

$$E^{LAB}_{min} = E^{CM}_{min}\cdot\frac{A_1+A_2}{A_2} = 31.6\,\frac{12+28}{28} \cong 45\ \text{MeV}$$

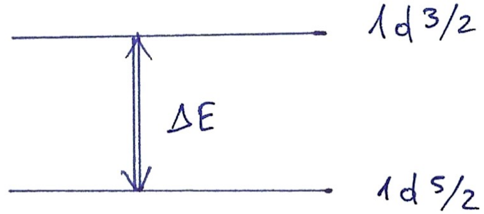
(β)



${}^{25}_{13}Al_{12}$

$$J^{\pi}_{g.s.} = 5/2^{+} \quad (\ell=2)$$
$$J^{\pi}_{*} = 1/2^{+} \quad (\ell=0)$$
$$J^{\pi}_{**} = 3/2^{+} \quad (\ell=2)$$

(γ)

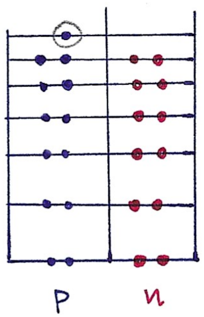


$$\Delta E \sim (\ell+1/2)\cdot V^{0}_{LS}$$

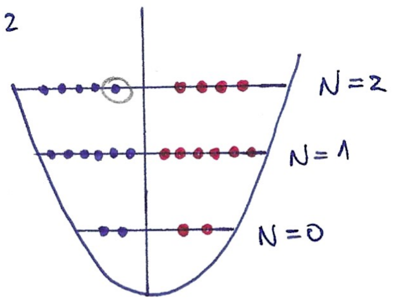
$$\Longrightarrow V^{0}_{LS} \sim \frac{\Delta E}{\ell+1/2} = \frac{0.95}{2+1/2}$$

$$\Longrightarrow V^{0}_{LS} \sim 0.38\ \text{MeV}$$

(δ)



Fermi



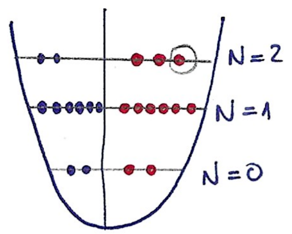
Αρμονικός Ταλαντωτής

Ομοτιμία από τον αρμονικό ταλαντωτή (+)

5

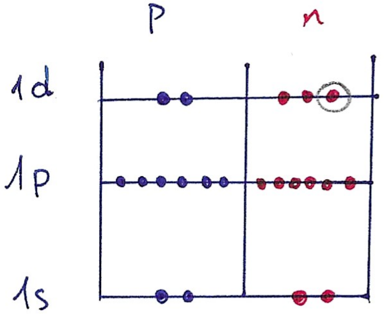
(1)

H.O.



Αριθμός κατοχής: $(N+1)(N+2)$

ομοτιμία: $(+)$



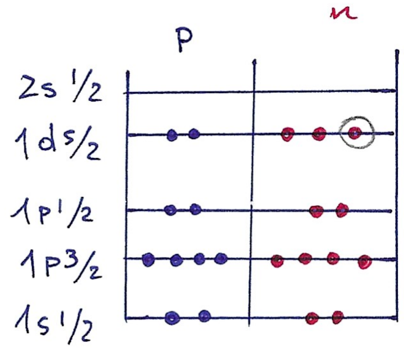
W.S. χωρίς LS

$2(2\ell+1)$

$J^\pi = 2^+$

$(\ell=2)$

$\boxed{^{21}_{10}Ne_{11}}$



W.S. με LS σύζευξη

$2j+1$

$J^\pi = 5/2^+ \quad (\ell=2)$

(2) Για άρτιο $N=2\nu$ του αρμονικού ταλαντωτή, η διατήρηση της ομοτιμίας επιβάλλει συνεισφορά μόνο από άρτια ℓ του μοντέλου π.χ. WS, ενώ η διατήρηση ενέργειας καθορίζει το μέγιστο δυνατό $\ell_{max} = N$. Οπότε:

$$\text{Αριθμός κατοχής H.O.} = \underbrace{2}_{\ell=0} + \underbrace{10}_{\ell=2} + \underbrace{18}_{\ell=4} + \dots + \underbrace{2(2\ell_{max}+1)}_{2(2N+1)}$$

Το παραπάνω άθροισμα αποτελεί άθροισμα όρων αριθμητικής προόδου με βήμα 8, πρώτο όρο $=2$, τελευταίο όρο $=2(2N+1)$, σύνολο όρων $=\nu+1$. Οπότε

$$\Sigma = \frac{2+2(2N+1)}{2}\cdot(\nu+1) = (2N+2)\cdot(\nu+1) = 2(N+1)(\nu+1) = (N+1)(2\nu+2)$$

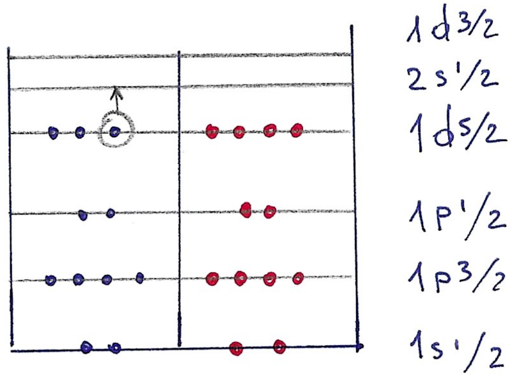
$$\longrightarrow \boxed{\Sigma = (N+1)(N+2)}$$

Ομοίως για $N=2\nu+1$.

(3) $\underbrace{1s \to (\delta) \quad 1f \to (\alpha)}_{\text{Θέση μεγίστου}}, \quad \underbrace{2f \to (\gamma) \quad 3p \to (\beta)}_{\text{Αριθμός κόμβων}}$

(6)

(1)



P

$\boxed{{}^{23}_{11}\mathrm{Na}_{12}}$

W.S

με LS σύζευξη

$$J^{\pi}_{g.s} = 5/2^{+} \quad (\ell = 2)$$

$$J^{\pi}_{*} = 1/2^{+} \quad (\ell = 0)$$

(2)

$${}^{3}_{2}\mathrm{He}_{1} + {}^{22}_{10}\mathrm{Ne}_{12} \longrightarrow {}^{2}_{1}\mathrm{H}_{1} + {}^{23}_{11}\mathrm{Na}_{12}$$

$$E^{min}_{CM} = V_c(R_1 + R_2) + \cancel{\|Q\|} = k\frac{Z_1 Z_2}{R_1 + R_2} = 1.44\,\frac{2\times 10}{5.1} = 5.6\ \mathrm{MeV}$$

δεν απαιτείται
(εξώθερμη!)

$$R_1 = 1.2 \times 3^{1/3} = 1.7\ \mathrm{fm}$$
$$R_2 = 1.2 \times 22^{1/3} = 3.4\ \mathrm{fm}$$
$$R_1 + R_2 = 5.1\ \mathrm{fm}$$

$$E^{min}_{LAB} = E_{CM}\cdot\frac{A_1 + A_2}{A_2} = 5.6\cdot\frac{3+22}{22}$$

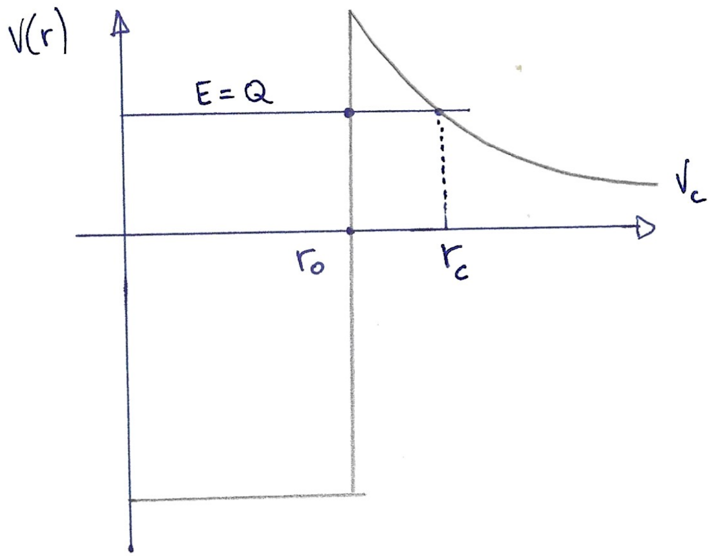
$$\Rightarrow \boxed{E^{min}_{LAB} = 6.4\ \mathrm{MeV}}$$

7

(α) $\tau = \tau_0 \cdot e^{G}$ $G \simeq -\lambda$: πιθανότητα διέλευσης μέσω φαινομένου σήραγγος από το δυναμικό Coulomb.

$\underline{\tau_0 = 7 \times 10^{-23}\ s}$

(β) $^{218}_{84}Po \longrightarrow {}^{214}_{82}Pb + {}^{4}_{2}He + Q = 6.2\ MeV$



r_s : απόσταση σχηματισμού σωματιδίου α

r_c : απόσταση διαφυγής

$$r_s = R_{\mu} - R_{\alpha} = 1.2\left(218^{1/3} - 4^{1/3}\right) = 5.3\ fm$$

$$Q = V_c(r_c) \Rightarrow Q = k \cdot \frac{Z_d \cdot Z_\alpha}{r_c} \Rightarrow r_c = k \cdot \frac{Z_d \cdot Z_\alpha}{Q}$$

$$\Longrightarrow r_c = 1.44\ \frac{82 \times 2}{6.2} = 38\ fm$$

Άρα $\frac{r_s}{r_c} \approx \frac{5.3}{38} \approx 0.139 \Longrightarrow F\left(\frac{r_s}{r_c}\right) \approx 0.42$, $G = \frac{\pi}{197}\left\{1.44\ Z_1 Z_2\right\}\sqrt{\frac{2mc^2}{Q}}\ F\left(\frac{r_s}{r_c}\right)$

$$= \frac{\pi}{197}\left\{1.44 \times 82 \times 2\right\} \times \sqrt{\frac{2 \times 3700}{6.2}} \times 0.42 \approx \underline{56}$$

$\tau = \tau_0 \cdot e^{G} \approx 150\ s$ Τάξη μεγέθους σε καλή συμφωνία με πειραματική τιμή