

Πυρηνική Φυσική
Θεόδωρος Μερτζιμέκης
Επιλογή λυμένων ασκήσεων
τελευταία ενημέρωση 18 Δεκεμβρίου 2025

Άσκηση 1 Δέσμη νετρονίων 100 keV χάνει το 50% της αρχικής της έντασης περνώντας μέσα από στόχο ^{12}C με επιφανειακή πυκνότητα 10 g cm^{-2} . Ποια είναι η μεταβολή φάσης για το s-wave;

Λύση

Γνωρίζουμε ότι γενικά η επιβίωση μιας δέσμης σωματιδίων με αρχική ένταση I_0 μετά από διαδρομή x μέσα σε κάποιο μέσο με το οποίο αλληλεπιδρά διέπεται από τον εκθετικό νόμο

$$I(x) = I_0 e^{-\Sigma x}$$

όπου Σ είναι ο ενεργός συντελεστής εξασθένισης ($\Sigma = \mu/\rho$, συνήθως σε μονάδες cm^2/g). Το ίδιο μέγεθος αναπαριστά το μακροσκοπικό ανάλογο της (μικροσκοπικής) ενεργού διατομής, σ , καθώς αναπαριστά το αποτέλεσμα των συνολικών σκεδάσεων των σωματιδίων δέσμης από τα σωματίδια του στόχου. Επομένως στο παρόν πρόβλημα,

$$\frac{I}{I_0} = \frac{50}{100} = e^{-10 \cdot \Sigma}$$

το οποίο δίνει $\Sigma = (1/10) \ln 2 = 0.0693 \text{ cm}^2 \text{g}^{-1}$. Επιπλέον, ισχύει ότι

$$\Sigma = \sigma \frac{N_A}{A} = \frac{6 \cdot 10^{23}}{12} = 0.0693$$

και επομένως η (μικροσκοπική) ενεργός διατομή σ για σκέδαση από έναν πυρήνα ^{12}C είναι:

$$\sigma = 1.38 \cdot 10^{-24} \text{ cm}^2 = 1.38 \cdot 10^{-28} \text{ m}^2$$

Η ενέργεια της δέσμης στο σύστημα εργαστηρίου είναι $E = 100 \text{ keV} = 0.1 \text{ MeV}$, ενώ για τη μετατροπή της στο σύστημα κέντρου μάζας, είναι αναγκαία η ανηγμένη μάζα του συστήματος:

$$\mu = \left(\frac{1 \cdot 12}{1 + 12} \right) M = \frac{12}{13} M$$

Λόγω της σκέδασης έχουμε ακόμη ότι

$$k^2 \hbar^2 = 2\mu E \Rightarrow k^2 = 2 \left(\frac{12}{13} \right) \frac{1.67 \cdot 10^{-27} \cdot 0.1 \cdot 1.6 \cdot 10^{-13}}{(1.05 \cdot 10^{-34})^2} = 0.447 \cdot 10^{28} \text{ m}^{-2}$$

Γνωρίζουμε ότι

$$\sigma_o = \frac{4\pi \sin^2 \delta_o}{k^2}$$

άρα με αντικατάσταση της προηγούμενης τιμής

$$\sin \delta_o = \sqrt{\frac{k^2 \sigma_o}{4\pi}} = \dots = \pm 0.2216 \text{ rad}$$

ή ισοδύναμα

$$\delta_o = \pm 12.8^\circ$$



Άσκηση 2 Σε ποια ενέργεια νετρονίου στο εργαστήριο το p-wave γίνεται σημαντικό κατά τη σκέδαση n-p;

Λύση

Η στροφορμή γενικά μπορεί να οριστεί ως $\vec{l} = \vec{r} \times \vec{p}$ ή απλά rp . Στο σύστημα κέντρου μάζας για σχετική στροφορμή $l = 1$ (δηλ. p-wave), ορμή p και απόσταση μεταξύ p-n ίση με $\alpha \approx 2 \text{ fm}$ ισχύει ότι

$$\alpha p_{cm} = l\hbar = 1 \cdot \hbar = \hbar \Rightarrow p = \frac{\hbar}{\alpha}$$

Η ενέργεια στο κέντρο μάζας (CM) μπορεί να γραφεί ως

$$E_{cm} = \frac{p_{cm}^2}{2\mu} = \frac{p_{cm}^2}{2\frac{M}{2}} = \frac{p_{cm}^2}{M} = \left(\frac{\hbar^2}{\alpha^2} \right) \frac{1}{M}$$

Αντίστοιχα στο σύστημα εργαστηρίου (lab)

$$E_{lab} = 2E_{cm} = \frac{2\hbar^2}{M\alpha^2} = \frac{2\hbar^2 c^2}{Mc^2 \alpha^2} = \frac{2 \cdot 197.3^2 (\text{MeV} \cdot \text{fm})^2}{940 \text{ MeV} \cdot 2^2 \text{ fm}^2} = 20.6 \text{ MeV}$$



Άσκηση 3 Νετρόνια ενέργειας 1 MeV σκεδάζονται από στόχο. Η τελική γωνιακή κατανομή στο κέντρο μάζας είναι ισότροπη, ενώ η ολική ενεργός διατομή βρίσκεται να είναι 10^{-25} cm^2 . Να υπολογιστεί η μετατόπιση φάσης για $l = 0$ (s-wave)

Λύση

Επειδή η γωνιακή κατανομή είναι ισότροπη συμπεραίνουμε ότι δεν υπάρχει εξάρτηση από τη γωνία. Η μόνη περίπτωση είναι λοιπόν να υπάρχει μόνο s-wave. Επομένως:

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi}{k^2} \sin^2 \delta_0$$

Λόγω της σχέσης $k^2 \hbar^2 = p^2 = 2m_N E$, με m_N τη μάζα νουκλεονίου, η ενεργός διατομή γράφεται

$$\sigma_{total} = \frac{4\pi \hbar^2}{2m_N E} \sin^2 \delta_0$$

$$\sin^2 \delta_0 = \frac{2m_N E \sigma}{4\pi \hbar^2} = \frac{m_N c^2 E \sigma}{2\pi \hbar^2 c^2} \Rightarrow \frac{940 \text{ MeV} \cdot 1 \text{ MeV} \cdot 10 \text{ fm}^2}{2\pi (197 \text{ MeV} \cdot \text{fm})^2}$$

ή

$$\sin^2 \delta_0 = 0.03857 \Rightarrow \delta_0 = \pm 11.3^\circ$$



Άσκηση 4 Για το δευτέριο, να βρεθεί η απόσταση (rms) μεταξύ πρωτονίου και νετρονίου με χρήση της κανονικοποιημένης κυματοσυνάρτησης βασικής στάθμης ($\alpha^{-1}=4.3 \text{ fm}$):

$$\Psi = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{\alpha}{2\pi}} e^{-\alpha r}$$

Λύση

Αναζητούμε την τιμή της ακτίνας rms, η οποία ορίζεται γενικά ως

$$\begin{aligned}\langle r^2 \rangle &= \int \Psi^* r^2 \Psi dV \\ &= \int_0^\infty \frac{r^2}{r^2} \frac{\alpha}{2\pi} e^{-2\alpha r} 4\pi r^2 dr \\ &= \int_0^\infty 2\alpha r^2 e^{-2\alpha r} dr \\ &= 2\alpha \int_0^\infty r^2 e^{-2\alpha r} dr \\ &= 2\alpha \frac{1}{4\alpha^3} \\ &= \frac{1}{2\alpha^2}\end{aligned}$$

Τελικά

$$\sqrt{\langle r^2 \rangle} = \sqrt{\frac{1}{2\alpha^2}} = \frac{1}{\alpha\sqrt{2}} = \frac{4.3 \text{ fm}}{\sqrt{2}} \approx 3 \text{ fm}$$



Άσκηση 5 Να δείξετε ότι για κάποια τιμή ενέργειας τα p-waves έχουν μεγαλύτερη επίδραση στη συμπεριφορά της διαφορικής ενεργού διατομής από ό,τι στην ολική ενεργό διατομή. Θεωρήστε ότι στην ενέργεια αυτή $\delta_0 = 20^\circ$, $\delta_1 = 2^\circ$.

Λύση

Γνωρίζουμε ότι οι τιμές $l = 0, 1$ αντιστοιχούν σε s- και p-waves.

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^1 (2l+1) \sin^2 \delta_l \\ &= \frac{4\pi}{k^2} (\sin^2 \delta_0 + 3 \sin^2 \delta_1)\end{aligned}$$

Ανάλογα, η διαφορική ενεργός διατομή μπορεί να γραφεί ως:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{1}{k^2} (\sin^2 \delta_0 + 6 \sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos(\delta_1 - \delta_0) \cos \theta + 9 \sin^2 \delta_1 \cos^2 \theta)$$

Για τις δοθείσες τιμές φάσεως, $\delta_0 = 20^\circ$, $\delta_1 = 2^\circ$

$$\sigma_p \approx 0.03\sigma_{total}$$

Επομένως η συνεισφορά της δ_1 είναι μόνο 3% της ολικής, ενώ για τη διαφορική ενεργό διατομή, η συνεισφορά φαίνεται ότι είναι της τάξης του 350%:

$$\frac{\frac{d\sigma}{d\Omega}(0^\circ)}{\frac{d\sigma}{d\Omega}(180^\circ)} = 3.5$$

όπου στην τελευταία σχέση έχει χρησιμοποιηθεί ο λόγος γωνιών 0-180 για να αναδειχθεί η μεταβολή της τιμής της διαφορικής σ .



Άσκηση 6 Η ανάλυση σκεδαζομένων σωματιδίων μάζας m και ενέργειας E από σταθερό κέντρο σκέδασης με εμβέλεια a έδωσε:

$$\delta_l = \sin^{-1} \left(\frac{(i\alpha k)^l}{\sqrt{(2l+1)(l!)}} \right)$$

Να δειχθεί ότι η ολική ενεργός διατομή σε δεδομένη ενέργεια δίνεται προσεγγιστικά από τη σχέση

$$\sigma = \frac{2\pi\hbar^2}{mE} \exp \left(\frac{-2mEa^2}{\hbar^2} \right)$$

Λύση

Από την εκφώνηση έχουμε ότι:

$$\sin \delta_l = \frac{(i\alpha k)^l}{\sqrt{(2l+1)(l!)}}$$

και γενικά γνωρίζουμε ότι:

$$\sigma = \frac{4\pi}{k^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l$$

Επίσης $k^2\hbar^2 = p^2 = 2mE$. Με αντικατάσταση:

$$\begin{aligned}
 \sigma &= \frac{4\pi\hbar^2}{k^2\hbar^2} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \\
 &= \frac{4\pi\hbar^2}{2mE} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \sin^2 \delta_l \\
 &= \frac{2\pi\hbar^2}{mE} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \left(\frac{(i\alpha k)^l}{\sqrt{(2l+1)(l!)}} \right)^2 \\
 &= \frac{2\pi\hbar^2}{mE} \sum_{l=0}^{\infty} (2l+1) \frac{(i\alpha k)^{2l}}{(2l+1)(l!)} \\
 &= \frac{2\pi\hbar^2}{mE} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^2 k^2)^l}{l!} \\
 &= \frac{2\pi\hbar^2}{mE} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-\alpha^2 k^2 \hbar^2 / \hbar^2)^l}{l!} \\
 &= \frac{2\pi\hbar^2}{mE} \sum_{l=0}^{\infty} \frac{(-2mE\alpha^2 / \hbar^2)^l}{l!} \\
 &= \frac{2\pi\hbar^2}{mE} \exp \left(-2mE\alpha^2 / \hbar^2 \right)
 \end{aligned}$$

--✱--

Άσκηση 7 Για δυναμικό σκληρής σφαίρας από το οποίο η σκέδαση d-wave μπορεί να αγνοηθεί τελείως, ναδειχθεί ότι:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \approx \alpha^2 \left(1 - \frac{k^2\alpha^2}{3} + 2(k\alpha)^2 \cos \theta \right)$$

και

$$\sigma = 4\pi \left(1 - \frac{k^2\alpha^2}{3} \right)$$

Λύση Ξεκινώντας από τη γενική σχέση

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) = |f(\theta)|^2 = \frac{1}{k^2} \left| \sum_l (2l+1) e^{i\delta_l} \sin \delta_l P_l(\cos \theta) \right|^2$$

και γνωρίζοντας ότι τα πολυώνυμα Legendre για s- και p-waves ($l = 0, 1$, αντίστοιχα) δίνονται από: $P_0 = 1$, $P_1 = \cos \theta$, έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) &= \frac{1}{k^2} \left| e^{i\delta_0} \sin \delta_0 + 3e^{i\delta_1} \sin \delta_1 \cos \theta \right|^2 \\
 &= \frac{1}{k^2} \left(\sin^2 \delta_0 + 3 \sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos \theta e^{-i\delta_0} e^{+i\delta_1} + 3 \sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos \theta e^{+i\delta_0} e^{-i\delta_1} + 9 \sin^2 \delta_1 \cos^2 \theta \right) \\
 &= \frac{1}{k^2} \left(\sin^2 \delta_0 + 6 \sin \delta_0 \sin \delta_1 \cos \theta \cos(\delta_0 - \delta_1) + 9 \sin^2 \delta_1 \cos^2 \theta \right)
 \end{aligned}$$

Αγνοώντας όρους 2ης τάξης στο δ_1 και αναπτύσσοντας κατά Taylor το $\sin \delta_0$ γράφουμε

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \approx \frac{1}{k^2} \left(\left(\delta_0 - \frac{\delta_0^3}{3!} \right)^2 + 6\delta_0\delta_1 \cos \theta \cdot 1 \right)$$

όπου κρατώντας τους όρους μικρότερης τάξης στο δ_0

$$\frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) \approx \frac{1}{k^2} \left(\delta_0^2 - \frac{\delta_0^4}{3} + 6\delta_0\delta_1 \cos \theta \right)$$

Με αντικατάσταση των $\delta_0 = k\alpha$, $\delta_1 = \frac{k^3\alpha^3}{3}$ στην τελευταία σχέση έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d\sigma}{d\Omega}(\theta) &= \frac{1}{k^2} \left(k^2\alpha^2 - \frac{1}{3}k^4\alpha^4 + 6(k\alpha) \left(\frac{k^3\alpha^3}{3} \right) \cos \theta \right) \\ &= \alpha^2 - \frac{k^2\alpha^4}{3} + 2k^2\alpha^4 \cos \theta \\ &= \alpha^2 \left(1 - \frac{k^2\alpha^2}{3} + 2k^2\alpha^2 \cos \theta \right) \end{aligned}$$

Αντίστοιχα, η ολική ενεργός διατομή υπολογίζεται:

$$\begin{aligned} \sigma &= \int \frac{d\sigma}{d\Omega} d\Omega \\ &= 2\pi \int_{-1}^{+1} \alpha^2 \left(1 - \frac{k^2\alpha^2}{3} + 2k^2\alpha^2 \cos \theta \right) d(\cos \theta) \\ &= 4\pi\alpha^2 \left(1 - \frac{k^2\alpha^2}{3} \right) \end{aligned}$$

όπου όπως αναμένεται έχει εξαφανισθεί η εξάρτηση από τη γωνία θ .



Άσκηση 8 Να χαρακτηρισθούν οι παρακάτω διασπάσεις

1. ${}^3\text{H} \rightarrow {}^3\text{He} + \text{e}^- + \nu_e$
2. ${}^{14}\text{O} \rightarrow {}^{14}\text{N}^* + \text{e}^+ + \nu_e$
3. ${}^{13}\text{B} \rightarrow {}^{13}\text{C} + \text{e}^- + \bar{\nu}_e$

Λύση

1. Τα σπιν/ομοτιμίες είναι $\frac{1}{2}^{+}$ και για τα δύο ισότοπα, επομένως: $\Delta J = 0, \Delta \pi = 0$
Μπορεί να είναι και Fermi, αλλά και Gamow-Teller (μεικτή β αποδιέγερση)
2. Αρχικό και τελικό σπιν 0^{+} (λόγω διεγερμένης κατάστασης του ^{14}N , θα δίνεται το σπιν της στάθμης), επομένως: $\Delta J = 0, \Delta \pi = 0$
Η αποδιέγερση είναι τύπου Fermi
3. Αρχικό σπιν $\frac{3}{2}^{-}$, τελικό σπιν $\frac{1}{2}^{-}$ (πιθανώς δε θα δίνεται σε μια τέτοια περίπτωση και θα πρέπει να εξαχθεί με το πρότυπο των φλοιών. Είναι λοιπόν $\Delta J = 1, \Delta \pi = 0$
Πρόκειται για επιτρεπτή Gamow-Teller



Άσκηση 9 Θεωρούμε τις επιτρεπτές διασπάσεις β στις οποίες παρατηρείται μεγάλη έκλυση ενέργειας E_0 . Αν αγνοηθεί το φαινόμενο Coulomb όπως και οι μάζες των λεπτονίων, ΝΔΟ:

1. $\tau \sim E_0^{-5}$
2. $\langle E_e \rangle \approx E_0/2$

Λύση

1. Αν αγνοηθεί η αλληλεπίδραση Coulomb, τότε ο παράγοντας Fermi, $F(Z, E_0) = 1$. Επομένως από το χρυσό κανόνα του Fermi, η σταθερά διάσπασης μπορεί να γραφεί:

$$\lambda = \frac{G_F |M_F|^2 m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^3} f$$

όπου

$$f(E, Z_0) = \frac{1}{(m_e c^2)^5} \int_0^{E_0} (E_0 - E_e)^2 E_e^2 dE_e$$

που με απλή ολοκλήρωση ως προς E_e δίνει:

$$f = \frac{1}{30} \left(\frac{E_0}{m_e c^2} \right)^5$$

Με αντικατάσταση της τιμής του f και γνωρίζοντας ότι εξ ορισμού $\lambda = 1/\tau$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{G_F |M_F|^2 m_e^5 c^4}{2\pi^3 \hbar^3} \cdot \frac{1}{30} \left(\frac{E_0}{m_e c^2} \right)^5$$

$$\frac{1}{\tau} = \frac{G_F |M_F|^2}{60\pi^3 \hbar^3 c^6} \cdot E_0^5$$

οπότε τελικά $\tau \sim E_0^{-5}$. Η σχέση ονομάζεται και *Sargent's Law*

2. Σε πολύ καλή προσέγγιση, μπορεί να θεωρηθεί ότι η συνάρτηση $f(E, Z_o)$ είναι συμμετρική στο εύρος ενεργειών $(0, E_0)$. Οπότε η μέση τιμή είναι $\langle E_e \rangle \approx E_0/2$.



Άσκηση 10 Να βρεθεί το ανηγμένο στοιχείο πίνακα για μια ηλεκτρική μετάπτωση E1 με γνωστό τ και $E_\gamma = 0.32$ MeV στο ^{11}Be

Λύση

Εφόσον δίνεται το είδος της μετάπτωσης (E1) μπορούμε να αναζητήσουμε από το τυπολόγιο το ανηγμένο στοιχείο πίνακα $B(E\lambda)$, με $\lambda = 1$ για τη συγκεκριμένη περίπτωση.

Γενικά,

$$\frac{1}{\tau} = \lambda = C(E\lambda) \cdot E_\gamma^{2\lambda+1} \cdot B(E\lambda)$$

με

$$C(E\lambda) = \alpha \hbar c \frac{8\pi(\lambda+1)}{\lambda((2\lambda+1)!!)^2} \frac{1}{\hbar} \left(\frac{1}{\hbar c} \right)^{2\lambda+1}$$

όπου α είναι η σταθερά λεπτής υφής. Με απλή αντικατάσταση των τιμών/μεγεθών, μπορεί να υπολογιστεί η τιμή $B(E1)$ από την προκύπτουσα έκφραση:

$$B(E1) = \frac{9\hbar(\hbar c)^3}{\alpha \hbar c \cdot 8\pi \cdot 2\tau \cdot E_\gamma^3} = \dots$$

Στο σημείο αυτό θυμίζουμε ότι σε προσέγγιση, $\hbar c = 197.2$ MeV·fm και η σταθερά λεπτής υφής $\alpha \approx 1/137$.



Άσκηση 11 Να βρεθεί το πλάτος Γ για τη μετάβαση $\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{3}{2}^-$ στάθμης 2.13 MeV στο ^{11}B , θεωρώντας ότι είναι σωματιδιακή μετάβαση.

Λύση

Αρκεί να βρεθεί ο μέσος χρόνος ημιζωής τ ή ισοδύναμα η σταθερά διάσπασης λ . Ισχύει $\Gamma = \hbar/\tau$.

Από τους κανόνες επιλογής ακτινοβολίας γ , για τα δεδομένα της άσκησης προκύπτει ότι η μετάβαση $\frac{1}{2}^- \rightarrow \frac{3}{2}^-$ είναι τύπου M1 (μαγνητικό δίπολο). Άρα από το τυπολόγιο έχουμε:

$$\frac{1}{\tau} = C(M\lambda) \cdot E_\gamma^{2\lambda+1} \cdot B(M\lambda)$$

ή σε σχέση με το ηλεκτρικό πολύπολο

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{\hbar c}{2m_p c^2} \right)^2 \cdot C(E\lambda) \cdot E_\gamma^{2\lambda+1} \cdot B(M\lambda)$$

και για $\lambda = 1$

$$\frac{1}{\tau} = \left(\frac{\hbar c}{2m_p c^2} \right)^2 \cdot C(E1) \cdot E_\gamma^3 \cdot B(M1)$$

Ο συντελεστής $C(E1)$ υπολογίζεται όπως στην άσκηση 10, ενώ το $B(M1)$ είναι από το τυπολόγιο. Πολλαπλασιάζοντας την παραπάνω εξίσωση με $\hbar$ έχουμε το τελικό αποτέλεσμα για το πλάτος μετάβασης Γ .



Άσκηση 12 Διεγερμένη στάθμη με σπίν/ομοτιμία 6^+ σε ενέργεια 109 keV και $\tau=632$ yrs αποδιεγείρεται με διάσπαση γ στη βασική στάθμη (1^+) του ^{108}Ag , η οποία αποδιεγείρεται με τη σειρά της μέσω διάσπασης β^- και μέσο χρόνο ζωής $\tau=3.4$ min. Εξηγήστε πώς είναι δυνατό η ισομερής στάθμη να είναι πιο σταθερή από τη θεμελιώδη.

Λύση

Οι δύο διασπάσεις πραγματοποιούνται με δύο διαφορετικές αλληλεπιδράσεις. Στην αποδιέγερση γ η αλληλεπίδραση Coulomb είναι υπεύθυνη για τη μετάβαση με ένα πολύπολο 5ης τάξης ($\Delta J=6-1=5$), ενώ η αποδιέγερση της βασικής στάθμης γίνεται μέσω ασθενούς αλληλεπίδρασης. Η τιμή $\log ft$ της β αποδιέγερσης στην περίπτωση αυτή (από 1^+ σε 2^+ στο θυγατρικό ισότοπο) είναι 5.45 (πηγή: [Nudat3](#)).



Άσκηση 13 Αν η Q-value της αντίδρασης (p,n) του τριτίου είναι ίση με -0.7637 MeV και E_{max} είναι η μέγιστη ενέργεια της β -διάσπασης του τριτίου, να υπολογιστεί η E_{max} δεδομένου ότι η διαφορά μάζας μεταξύ νετρονίου και ατόμου του υδρογόνου είναι 0.78 MeV.

Λύση

Έχουμε διαδοχικά (όλες οι τιμές ενέργειας σε MeV)

$$\begin{aligned} m_n - m(H) &= 0.78 \\ {}^3\text{H} + p &\rightarrow {}^3\text{He} + n - 0.7637 \\ m({}^3\text{H})c^2 - m({}^3\text{He})c^2 &\rightarrow m_n c^2 - m_p c^2 - 0.7637 \end{aligned}$$

από τη β διάσπαση:

$$\begin{aligned} {}^3\text{H} &\rightarrow {}^3\text{He} + e^- + \bar{\nu}_e + E_{max} \\ m({}^3\text{H}) &\rightarrow m({}^3\text{He})c^2 + m_e c^2 + 0 + E_{max} \end{aligned}$$

και συνδυάζοντας τις σχέσεις;

$$E_{max}/c^2 = m_n - (m_p + m_e) - 0.7637$$

$$E_{max}/c^2 = m_n - m(H) - 0.7637$$

$$E_{max}/c^2 = 0.781 - 0.7637 = 0.0173$$

Η τιμή 17.3 keV είναι το άνω όριο που θέτει στη μάζα του νετρίνου η μελέτη της αποδιέγερσης β του τριτίου.



Άσκηση 14 Σε πείραμα σκέδασης, στόχος Al πάχους $L=10 \mu\text{m}$ βομβαρδίζεται από δέσμη νετρονίων με ροή $3 \cdot 10^{12}$ σωμάτια/ $\text{cm}^2 \text{ s}$. Η διαφορική ενεργός διατομή δίνεται από τον τύπο:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = A + B \cos^2 \theta$$

με A,B σταθερές. Όταν τοποθετηθεί ανιχνευτής διαστάσεων $0.1 \times 0.1 \text{ m}^2$ σε απόσταση 5 m από το στόχο καταμετρούνται κατά μέσο όρο 20 σωμ/s στις 30° και 15.75 σωμ/s στις 60° . Να βρεθούν τα A,B όταν για το Al ($A=27$ και $\rho=2.7 \text{ g/cm}^3$).

Λύση

Από τον τύπο της διαφορικής ενεργού διατομής:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{I(\theta)}{I_0 N d\Omega} = A + B \cos^2 \theta$$

Στην παραπάνω σχέση, η αρχική δέσμη διαθέτει

$$I_0 = \frac{3 \cdot 10^{12}}{\text{m}^2 \cdot \text{s}} = \frac{3 \cdot 10^8}{\text{cm}^2 \cdot \text{s}}$$

ανά μονάδα εμβαδού ($\Sigma \text{ cm}^2$) της διατομής της δέσμης. Στην απόσταση που βρίσκεται ο ανιχνευτής ορίζει στερεά γωνία ίση με:

$$d\Omega = \frac{0.1 \cdot 0.1 \text{ m}^2}{5^2 \text{ m}^2} = \frac{10^{-2} \text{ m}^2}{25 \text{ m}^2} = 4 \cdot 10^{-4} \text{ sr}$$

Επιπλέον τα σωματίδια στόχου που βρίσκονται στην πορεία της δέσμης (με την πυκνότητα να αντιστοιχεί στη γραμμική πυκνότητα σε g/cm) είναι:

$$N = \frac{N_A \rho L}{A} = \frac{6 \cdot 10^{23} \cdot 2.7 \text{ g/cm} \cdot 10 \mu\text{m}}{27 \text{ g}} = 6 \cdot 10^{19}$$

και το αποτέλεσμα προκύπτει με απλή αντικατάσταση, λύνοντας το σύστημα δύο εξισώσεων για $\theta=30^\circ, 60^\circ$:

$$2.778 \cdot 10^{-22} = A + B \cos^2 30$$

$$2.188 \cdot 10^{-22} = A + B \cos^2 60$$

Οι τιμές που προκύπτουν είναι αντίστοιχα $A=89.3 \text{ b/sr}$, $B=118 \text{ b/sr}$



Άσκηση 15 Βρείτε την Q-value της αντίδρασης $^{30}\text{Si} + d \rightarrow ^{31}\text{Si} + p + Q$ όταν ξέρετε ότι

$$\begin{aligned} ^{30}\text{Si} + d &\rightarrow ^{31}\text{P} + n + 5.10 \text{ MeV} \\ ^{31}\text{Si} &\rightarrow ^{31}\text{P} + e^- + 1.51 \text{ MeV} \\ n &\rightarrow p + e^- + 0.78 \text{ MeV} \end{aligned}$$

Λύση

Θεωρώντας όλες τις ενέργειες σε MeV και εγκαταλείποντας το σύμβολο της μάζας, έχουμε:

$$^{30}\text{Si} + d \rightarrow ^{31}\text{Si} + p + Q$$

$$^{30}\text{Si} + d \rightarrow 1.51 + ^{31}\text{P} + e^- + p + Q$$

$$^{30}\text{Si} + d \rightarrow 1.51 + ^{31}\text{P} + n - 0.78 + Q$$

$$\text{Τελικά: } 1.51 - 0.78 + Q = 5.10, \text{ δηλ. } Q = 4.37 \text{ MeV}$$



Άσκηση 16 Η διάσπαση β^- του $^{66}_{29}\text{Cu}$ πραγματοποιείται στο 80% των περιπτώσεων προς διεγερμένη στάθμη του θυγατρικού πυρήνα με εκπομπή ηλεκτρονίου μέγιστης ενέργειας 1.6 MeV. Να βρεθεί η ενέργεια της διεγερμένης στάθμης

Λύση

Εφόσον το ισότοπο διασπάται 80% προς διεγερμένη στάθμη, το υπόλοιπο 20% των περιπτώσεων μπορούμε να υποθέσουμε με ασφάλεια ότι αποδιεγείρεται προς τη βασική στάθμη του θυγατρικού. Η ενεργειακή διαφορά των σταθμών, ΔE , είναι το τελικό ζητούμενο.

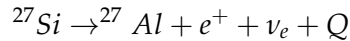
Το πρώτο ζητούμενο είναι η Q-value. Η μάζα του $^{66}_{29}\text{Cu}$ μπορεί να βρεθεί από τον τύπο της μάζας (δίνεται στο τυπολόγιο), έστω $m(\text{Cu})$. Ομοίως του θυγατρικού του, ο οποίος είναι (λόγω της β^-) με τιμές $Z=30, A=66$ (είναι το ισότοπο $^{66}_{30}\text{Zn}$), έστω $m(\text{Zn})$.

Τότε η Q-value είναι $Q = m(\text{Cu}) - m(\text{Zn}) - m_e c^2 = (\text{γνωστή})$. Αντίστοιχα στη διεγερμένη στάθμη η Q' αντιστοιχεί στη μέγιστη ενέργεια του ηλεκτρονίου, άρα $Q' = 1.6 \text{ MeV}$. Τελικά από την εξίσωση $Q - Q' = \Delta E$ λαμβάνουμε τη ζητούμενη ενεργειακή διαφορά.



Άσκηση 17 Οι πυρήνες ^{27}Si και ^{27}Al είναι κατοπτρικοί. Ο πρώτος εκπέμπει ποζιτρόνια με ενέργεια $E_{\max} = 3.48 \text{ MeV}$. Να βρεθεί το μέτρο της ακτίνας r_0 .

Λύση Η διάσπαση β^+ του ^{27}Si γίνεται ως εξής:



Επειδή οι πυρήνες είναι κατοπτρικοί, η διαφορά στην ενέργεια σύνδεσης των δύο ισοτόπων είναι καθαρά λόγω της διαφοράς της ενέργειας Coulomb (όρος a_c στον αντίστοιχο ημιεμπειρικό τύπο, ο οποίος εξαρτάται από τον ατομικό αριθμό του ισοτόπου). Η ενέργεια Coulomb ομογενώς φορτισμένης σφαίρας δίνεται από τον τύπο:

$$E_c = \frac{3q^2}{20\pi\epsilon_0 R} = \frac{3Z^2e^2}{20\pi\epsilon_0 r_0 A^{1/3}}$$

όπου χρησιμοποιήθηκε ως ολικό φορτίο $q = Ze$ και $R = r_0 A^{1/3}$. Συνεπώς, η διαφορά στην ενέργεια Coulomb ανάμεσα στα δύο κατοπτρικά ισότοπα με φορτίο Ze και $(Z-1)e$, αντίστοιχα, δίνεται από:

$$\Delta E_c = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R} (Z^2 - (Z-1)^2) = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R} (2Z-1) = \frac{3e^2}{20\pi\epsilon_0 R} A$$

όπου έχει χρησιμοποιηθεί η σχέση για τους συγκεκριμένους κατοπτρικούς πυρήνες της άσκησης:

$$2Z - 1 = A$$

Επιπλέον, ισχύει ότι $e^2/4\pi\epsilon_0 = 1.44 \text{ MeV fm}$. Ενεργειακά, για τη διάσπαση έχουμε:

$$\Delta E_c = E_{\max} + m_e c^2 + (m_n - m_p) c^2$$

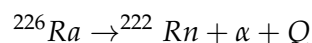
όπου η διαφορά στις μάζες μεταξύ μητρικού και θυγατρικού είναι απλά η διαφορά μεταξύ μαζών νετρονίου-πρωτονίου, ίση με $1.29 \text{ MeV}/c^2$. Ακόμη, $m_e c^2 = 0.511 \text{ MeV}$ και τελικά με αντικατάσταση όλων των τιμών ($A=27$, $E_{\max} = 3.48 \text{ MeV}$), προκύπτει ότι $r_0 = 1.47 \text{ fm}$.



Άσκηση 18 Δείξτε ότι το ισότοπο ($^{226}_{88}\text{Ra}$) είναι ασταθές και μπορεί να διασπασθεί μέσω διάσπασης άλφα. Δίνονται οι μάζες $m(^{226}_{88}\text{Ra}) = 226.025360 \text{ amu}$, $m(^{222}_{86}\text{Rn}) = 222.017531 \text{ amu}$, $m(^4_2\text{He}) = 4.002603 \text{ amu}$

Λύση Η αστάθεια μπορεί να ελεγχθεί μέσω του υπολογισμού της Q-value σε αυθόρμητες διασπάσεις. Δηλ. για τη συγκεκριμένη περίπτωση

Διάσπαση α



$$Q / c^2 \text{ (σε amu)} = m(^{226}_{88}\text{Ra}) - m(^{222}_{86}\text{Rn}) - m(^4_2\text{He}) = 226.025360 - 222.017531 - 4.002603 = 0.005226 > 0$$

Η θετική τιμή ισοδυναμεί με το ότι η διάσπαση είναι εφικτή.

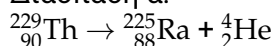


Άσκηση 19 Να δείξετε ότι ο πυρήνας $^{229}_{90}\text{Th}$ μπορεί να διασπασθεί. Επιπλέον, να κρίνετε αν η διάσπαση θα είναι α ή β. Δίνονται τα πλεονάσματα μάζας για τους πυρήνες (σε $\text{amu} \times 10^{-6}$): $\Delta(^4_2\text{He})=2603$, $\Delta(^{225}_{88}\text{Ra})=23528$, $\Delta(^{229}_{89}\text{Ac})=32800$, $\Delta(^{229}_{90}\text{Th})=31652$, $\Delta(^{229}_{91}\text{Pa})=32022$

Λύση

Το πλεόνασμα μάζας είναι $\Delta=m-A$ για κάθε ισότοπο με μάζα m και μαζικό αριθμό A . Συνολικά πρέπει να ελεγχθούν οι τρεις περιπτώσεις αυθόρμητων διασπάσεων:

Διάσπαση α:

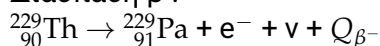


Το κριτήριο για να πραγματοποιείται η διάσπαση α είναι $M_1 - M_2 - \alpha > 0$

$$\begin{aligned} m(^{229}_{90}\text{Th}) - m(^{225}_{88}\text{Ra}) - m(^4_2\text{He}) &= (90 + \Delta(^{229}_{90}\text{Th})) - (88 + m(^{225}_{88}\text{Ra})) - (4 + m(^4_2\text{He})) \\ &= \Delta(^{229}_{90}\text{Th}) - \Delta(^{225}_{88}\text{Ra}) - \Delta(^4_2\text{He}) = 0.005521 \text{ amu} \end{aligned}$$

επομένως η διαφορά είναι μεγαλύτερη από το 0 και η α διάσπαση είναι εφικτή

Διάσπαση β-:

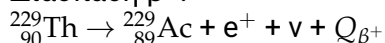


Το κριτήριο για να πραγματοποιείται η διάσπαση β- είναι $M_1 - M_2 > 0$

$$\begin{aligned} m(^{229}_{90}\text{Th}) - m(^{229}_{91}\text{Pa}) &= (90 + \Delta(^{229}_{90}\text{Th})) - (88 + m(^{229}_{91}\text{Pa})) \\ &= \Delta(^{229}_{90}\text{Th}) - \Delta(^{229}_{91}\text{Pa}) = 0.031652 - 0.032022 \text{ amu} = -0.000370 \text{ amu} < 0 \end{aligned}$$

επομένως η διαφορά είναι μικρότερη από το 0 και η β- διάσπαση ΔΕΝ είναι εφικτή

Διάσπαση β+:



Το κριτήριο για να πραγματοποιείται η διάσπαση β+ είναι $M_1 - M_2 - 2m_e > 0$

$$\begin{aligned} m(^{229}_{90}\text{Th}) - m(^{229}_{89}\text{Ac}) - 2m_e &= (90 + \Delta(^{229}_{90}\text{Th})) - (88 + m(^{229}_{89}\text{Ac})) - 2m_e \\ &= \Delta(^{229}_{90}\text{Th}) - \Delta(^{229}_{89}\text{Ac}) - 2m_e \\ &= 0.031652 - 0.032800 - 2 \times 0.000548 \text{ amu} = -0.002244 \text{ amu} < 0 \end{aligned}$$

επομένως η διαφορά είναι μικρότερη από το 0 και η β+ διάσπαση ΔΕΝ είναι εφικτή. Σημειώνεται ότι στον τελευταίο υπολογισμό χρησιμοποιήθηκε η μάζα του ηλεκτρονίου σε amu και όχι στη συνήθη της τιμή $0.511 \text{ MeV}/c^2$.



Άσκηση 20 Ο πυρήνας $^{22}_{11}\text{Na}$ διασπάται προς $^{22}_{10}\text{Ne}$ μέσω εκπομπής ποζιτρονίου με $T_{\max} = 0.542 \text{ MeV}$, ακολουθούμενη από αποδιέγερση γ με ενέργεια φωτονίου $E_{\gamma} = 1.277 \text{ MeV}$. Αν η $m(^{22}_{10}\text{Ne}) = 21.991385 \text{ amu}$, να προσδιορισθεί η μάζα του $^{22}_{11}\text{Na}$.

Λύση

Η διάσπαση γράφεται: $^{22}_{11}\text{Na} \rightarrow ^{22}_{10}\text{Ne} + e^+ + \nu$

Ενεργειακά: $m(^{22}_{11}\text{Na}) = m(^{22}_{10}\text{Ne}) + 2m_e c^2 + E$

$$E = (T_{\max} + T_{\gamma}) \text{ MeV} = \frac{T_{\max} + T_{\gamma}}{931.5} \text{ amu} = \frac{0.542 + 1.277}{931.5} \text{ amu} = 0.001953 \text{ amu}$$

Με αντικατάσταση, $m(^{22}_{11}\text{Na}) = 21.991385 + 2 \times 0.000548 + 0.001953 = 21.994434 \text{ amu}$



Άσκηση 21 Σωματίδια β ($E_{\max} = 1.7 \text{ MeV}$) εκπέμπονται από το ισότοπο ^{32}P και ανιχνεύονται σε ανιχνευτή Geiger-Mueller, ο οποίος διαθέτει τοίχωμα ενεργού πάχους 20 mg/cm^2 . Ποιο ποσοστό του αριθμού σωματιδίων απορροφάται από τα τοιχώματα; Υποθέστε ενεργό συντελεστή απορρόφησης $\mu = 10.87 \text{ cm}^2/\text{g}$.

Λύση

Η ένταση δέσμης σωματιδίων που απορροφούνται από κάποιο μέσο υπακούει στον εκθετικό νόμο $I(x) = I_0 \exp(-\Sigma x)$, όπου I_0 η αρχική ένταση, x το μήκος που έχει διανύσει, ρ η πυκνότητα του μέσου και Σ ο συντελεστής απορρόφησης του συγκεκριμένου μέσου. Η σχέση μπορεί να ξαναγραφεί μέσω του ενεργού συντελεστή απορρόφησης, μ , και του ενεργού πάχους του υλικού, d :

$$I(x) = I_0 \exp(-\Sigma x) = I_0 \exp\left(-\left(\frac{\Sigma}{\rho}\right)(\rho x)\right) = I_0 \exp(-\mu \cdot d)$$

Το ποσοστό απορρόφησης είναι: $f = \frac{I_0 - I(d)}{I_0} = 1 - \exp(-\mu d)$ και με απλή αντικατάσταση των τιμών, $f = 0.20$ ή 20%



Άσκηση 22 Να υπολογιστεί η ηλεκτρική τετραπολική ροπή Q στο ακραίο πρότυπο των φλοιών για τους πυρήνες $^{15}_7\text{N}$ και $^{11}_5\text{B}$. Να εκφράσετε το αποτέλεσμα ως συνάρτηση του $\langle r^2 \rangle$.

Λύση Στο ακραίο πρότυπο των φλοιών, θεωρούμε ότι οι κλειστοί φλοιοί δε συνεισφέρουν. Αυτό ισχύει και για την ηλεκτρική τετραπολική ροπή ενός πυρήνα, η οποία ορίζεται ως η αναμενόμενη τιμή

$$Q = \frac{1}{e} \sum \langle q(3z^2 - r^2) \rangle$$

Η άθροιση είναι σε όλα τα ασύζευκτα πρωτόνια (ή σπές). Η αναμενόμενη τιμή είναι για μια κατάσταση μέγιστης προβολής σπιν, δηλ. $|I, I_z = I\rangle$. Κατά συνέπεια η προηγούμενη εξίσωση, με χρήση και της σχέσης που ισχύει σε πολικές συντεταγμένες $z = r \cos \theta$, μπορεί να γραφεί αναλυτικά:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{1}{e} \sum \langle I, I_z | e(3z^2 - r^2) | I, I_z \rangle \\ &= \frac{e}{e} \sum \langle I, I_z | (3r^2 \cos^2 \theta - r^2) | I, I_z \rangle \\ &= \sum \langle r^2 \rangle \langle I, I_z | (3 \cos^2 \theta - 1) | I, I_z \rangle \end{aligned}$$

Η αναμενόμενη τιμή του $\cos^2 \theta$ μπορεί να γραφεί:

$$\begin{aligned} \langle I, I_z | \cos^2 \theta | I, I_z \rangle &= \langle I, I_z | \frac{z^2}{r^2} | I, I_z \rangle \\ &= \frac{\langle I, I_z | z^2 | I, I_z \rangle}{\langle I, I_z | r^2 | I, I_z \rangle} \\ &= \frac{I_z^2}{I^2} \\ &= \frac{I_z^2 \hbar^2}{I(I+1)\hbar^2} \\ &= \frac{I^2}{I(I+1)} \\ &= \frac{I}{(I+1)} \end{aligned}$$

και αντίστοιχα για το

$$\langle (3 \cos^2 \theta - 1) \rangle = 3 \frac{I}{I+1} - 1 = \frac{3I - I - 1}{I+1} = \frac{2I - 1}{I+1}$$

Για τις περιπτώσεις που ζητούνται, πρέπει να βρεθεί το σπιν της βασικής στάθμης. Το $^{15}_7\text{N}$ έχει ένα ασύζευκτο πρωτόνιο στη στάθμη $1p_{1/2}$ και κατά συνέπεια το σπιν είναι $1/2$. Με αντικατάσταση στον τύπο της ηλεκτρικής τετραπολικής ροπής παραπάνω, $Q=0$.

Αντίστοιχα, για το $^{11}_5\text{B}$, υπάρχει ένα ασύζευκτο πρωτόνιο στην $1p_{3/2}$ και συνεπώς το σπιν είναι $3/2$. Η αντικατάσταση δίνει:

$$Q = -\langle r^2 \rangle \frac{2I - 1}{(I + 1)} = -\langle r^2 \rangle \frac{2 \times \frac{3}{2} - 1}{(\frac{3}{2} + 1)} \\ = -\frac{4}{5} \langle r^2 \rangle$$

Για μια τυπική τιμή πυρηνικής ακτίνας $r \approx 3 \text{ fm}$, η παραπάνω σχέση δίνει $Q \approx -7 \text{ fm}^2$

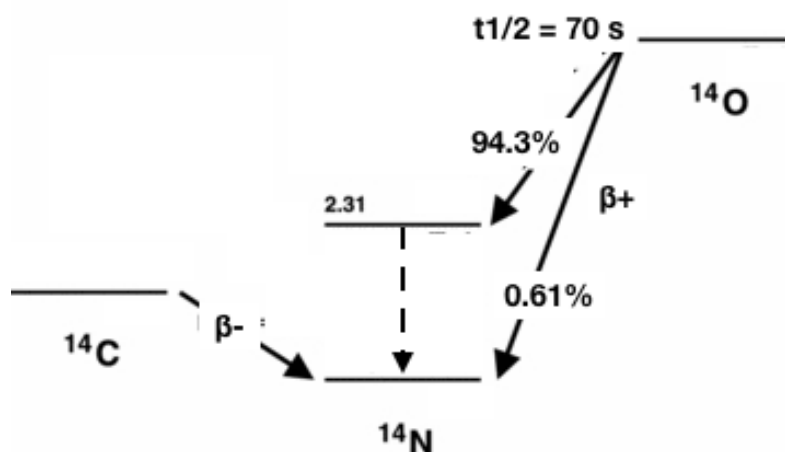


Άσκηση 23 Στο σχήμα απεικονίζεται μια κλασική περίπτωση υπερ-επιτρεπτής μετάβασης μέσω β^+ από το $^{14}_8\text{O}$ προς τη διεγερμένη στάθμη (στα 2.31 MeV) του $^{14}_7\text{N}$.

- Ποια είναι τα σπιν, οι ομοτιμίες και τα ισοσπιν της αρχικής και τελικής στάθμης αυτής της υπερ-επιτρεπτής μετάβασης; Να αιτιολογήσετε.
- Τι τύπου είναι οι μεταβάσεις β^- του $^{14}_6\text{C}$ και της β^+ του $^{14}_8\text{O}$ προς τη βασική στάθμη του $^{14}_7\text{N}$;

Χρησιμοποιήστε αναλογικές στάθμες/ισοσπιν στο συλλογισμό σας).

Λύση



Οι πυρήνες ^{14}C και ^{14}O είναι άρτιοι-άρτιοι και επομένως $J^\pi = 0^+$. Στο ^{14}O υπάρχουν δύο πλεονάζοντα πρωτόνια σε σχέση με τα νετρόνια κι επομένως, το ισοσπιν $T_z = (Z - N)/2$

είναι $T_z = 1$. Η χαμηλότερη ενεργειακή στάθμη θα έχει την ίδια τιμή ισοσπίν, άρα η βασική στάθμη του ισότοπου έχει $T = 1$.

Υπερεπιτρεπτές μεταβάσεις συμβαίνουν όταν $\Delta J = \Delta \pi = \Delta T = 0$. Έπεται έτσι ότι η στάθμη στα 2.31 MeV έχει κι αυτή $T = 1, J^\pi = 0^+$.

Το ^{14}N έχει ένα ασύζευκτο πρωτόνιο και ένα ασύζευκτο νετρόνιο και τα δύο σε στάθμες $1p_{1/2}$ (περιττός-περιττός πυρήνας). Η ομοτιμία της στάθμης συνολικά είναι το γινόμενο των ομοτιμιών των κυματοσυναρτήσεων των ασύζευκτων νουκλεονίων, η οποία είναι $\pi = (-1)^-(-1)^- = +$.

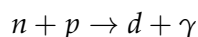
Το σπιν της στάθμης είναι $J = \overrightarrow{1/2} + \overrightarrow{1/2}$, δηλ. είτε 0 είτε 1. Αν είναι $J = 0$ τότε η αποδιέγερση γ είναι $0^+ \rightarrow 0^+$ δηλ. απαγορευμένη, επομένως $J^\pi = 1^+$ για τη βασική στάθμη στο ^{14}N . Ακόμη, επειδή $Z = N, T_z = T = 1$ για τη βασική στάθμη.

Η διάσπαση $\beta^+ \text{ } ^{14}\text{O}(\text{gs}) \rightarrow ^{14}\text{N}(\text{gs})$ είναι με $\Delta J = \Delta T = 1$ και $\Delta \pi = 0$, άρα επιτρεπτή Gamow-Teller. Αντίστοιχα για τη μετάβαση $\beta^- \text{ } ^{14}\text{C}(\text{gs}) \rightarrow ^{14}\text{N}(\text{gs})$, $\Delta J = \Delta T = 1$ και $\Delta \pi = 0$, επομένως είναι επιτρεπτή Gamow-Teller. Επιπλέον, επειδή ^{14}C και ^{14}O είναι κατοπτρικοί πυρήνες, οι ισχείς μετάβασης (στοιχεία πίνακα) είναι παρόμοιες.



Άσκηση 24

Η αντίδραση ανάμεσα σε ένα νετρόνιο με ένα πρωτόνιο οδηγεί στο σχηματισμό δευτερίου μέσω της αντίδρασης:



Να βρεθεί η ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου. Πόσο σημαντική είναι η ενέργεια ανάκρουσης του δευτερίου;

Λύση

Η αντίδραση σχηματισμού δευτερίου απελευθερώνει ενέργεια ίση με:

$$Q = (m_p + m_n - m_d)c^2 = 1.00783u + 1.008672u - 2.01410u = 2.234\text{MeV}$$

Η ενέργεια αυτή κατανέμεται στα δύο προϊόντα, δηλ. στο δευτέριο και το φωτόνιο. Αν υποθέσουμε ότι αυτά διαθέτουν ορμές $\vec{p}$ και $-\vec{p}$ τότε η Q value γράφεται ως:

$$Q = E_\gamma + E_d = pc + \frac{p^2}{2m_d}$$

το οποίο ξαναγράφεται ως:

$$(pc)^2 + 2m_d(pc) - 2m_dc^2Q = 0$$

Λύνοντας για (pc), έχουμε:

$$pc = m_dc^2 \left(-1 + \sqrt{1 + \frac{2Q}{m_dc^2}} \right)$$

καθώς $Q/m_dc^2 \ll 1$, η παραπάνω σχέση ξαναγράφεται προσεγγιστικά ως:

$$p \approx m_dc \left(-1 + 1 + \frac{Q}{m_dc^2} \right)$$

από την οποία τελικά υπολογίζεται η ενέργεια ανάκρουσης

$$E_{\text{rec}} = \frac{p^2}{2m_d} = \frac{Q}{2m_dc^2} = \frac{2.234^2}{2 \cdot 2.0141 \cdot 931} = 1.33 \cdot 10^{-3} \text{ MeV}$$

Εφόσον υπολογίζεται ότι

$$\frac{\Delta E_{\text{rec}}}{E_\gamma} = \frac{1.34 \cdot 10^{-3}}{2.234} = 6 \cdot 10^{-4}$$

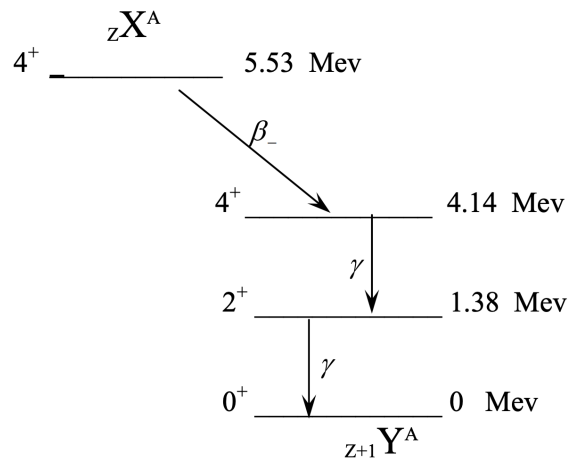
συνάγουμε ότι η επίδραση της ανάκρουσης είναι πολύ μικρή στην ενέργεια του εκπεμπόμενου φωτονίου.



Άσκηση 25

Ασταθές ισότοπο A_ZX διασπάται προς θυγατρικό ισότοπο $^{A}_{Z+1}Y$, όπως απεικονίζεται στο διάγραμμα διάσπασης παρακάτω. Πειραματιστής συλλέγει ένα φάσμα ηλεκτρονίων, στο οποίο όμως εμφανίζονται επιπλέον και δύο ξεκάθαρες κορυφές ποζιτρονίων σε καλά ορισμένες ενέργειες τελικού σημείου (end-point energies).

- α. Ποια διεργασία είναι πιθανώς υπεύθυνη για τη δημιουργία των ποζιτρονίων;
- β. Ποιες είναι οι αναμενόμενες ενέργειες των κορυφών των ποζιτρονίων στο φάσμα;
- γ. Να χαρακτηρίσετε όλες τις εμφανιζόμενες διασπάσεις/αποδιεγέρσεις του διαγράμματος



Λύση

- α. Το ισότοπο A_ZX διασπάται μόνο με β^- , επομένως τα ποζιτρόνια μπορούν να εμφανιστούν από την εκπομπή των φωτονίων γ δευτερογενώς, μέσω της δίδυμης γένεσης ηλεκτρονίου-ποζιτρονίου (με τη βασική προϋπόθεση ότι οι ενέργειες των φωτονίων είναι $> 1.022 \text{ MeV}$). Σε αυτήν περίπτωση, αναμένονται δύο κορυφές ποζιτρονίων, μία για το κάθε παραγόμενο φωτόνιο.

Εναλλακτικός τρόπος παραγωγής ποζιτρονίων θα ήταν μέσω του φαινομένου της εσωτερικής μετατροπής.

- β. Με βάση το [α.] και τις ενέργειες των σταθμών στο διάγραμμα:

$$4^+ \rightarrow 2^+ : E_\gamma = 4.14 - 1.38 = 2.76 \text{ MeV}$$

$$E_{\beta^+}(1) = 2.76 - 1.022 = 1.738 \text{ MeV}$$

$$2^+ \rightarrow 0^+ : E_\gamma = 1.38 - 0 = 1.38 \text{ MeV}$$

$$E_{\beta^+}(2) = 1.38 - 1.022 = 0.358 \text{ MeV}$$

οι ενέργειες αυτές αντιστοιχούν στις end-point energies των δύο κορυφών ποζιτρονίων.

- γ. Για τις εικονιζόμενες μεταβάσεις:

$$4^+ \rightarrow 4^+ : \Delta I = 4 - 4 = 0, \Delta\pi = no$$

επομένως είναι επιτρεπτή, ανάμεικτη Fermi/Gamow-Teller

$$4^+ \rightarrow 2^+ : 2 \leq L \leq 6, \Delta\pi = no, E2, (M3, E4, M5, E6)$$

$$2^+ \rightarrow 0^+ : 2 \leq L \leq 2, \Delta\pi = no, E2$$