

### ΑΣΚΗΣΕΙΣ (3<sup>ο</sup> Φυλλάδιο)

1. Για δέσμιες καταστάσεις ναδειχθεί ότι:

α. Η μέση τιμή της ορμής είναι μηδέν.

β. Ισχύει το θεώρημα virial

$$2 \langle T \rangle = \langle \vec{r} \cdot \vec{\nabla} V(\vec{r}) \rangle$$

όπου  $\hat{T} = \vec{p}^2 / (2m)$ .

γ. Για σωματίο μάζας  $m$  το οποίο κινείται σε μία διάσταση σε δυναμικό  $V(x) = \lambda x^{2n}$  ναδειχθεί ότι

$$\langle T \rangle = n \langle V \rangle, \quad \langle E \rangle = \frac{n+1}{n} \langle T \rangle = (n+1) \langle V \rangle.$$

2. Να ευρεθεί το κάτω φράγμα στην μέση τιμή της ενέργειας το οποίο προκύπτει από την σχέση αβεβαιότητας θέσης-ορμής για σωματίο μάζας  $m$  το οποίο κινείται:

α. Σε πηγάδι απείρου βάθους και εύρους  $L$ .

β. Σε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτού  $V(x) = m\omega^2 x^2 / 2$ .

γ. Στο δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτού ναδειχθεί ότι το κάτω φράγμα της ενέργειας μπορεί να επιτευχθεί από κυματικές συναρτήσεις οι οποίες έχουν ελάχιστο γινόμενο αβεβαιότητας θέσης-ορμής ( $\hbar/2$ ).

3. α. Να ευρεθεί η κυματική συνάρτηση στην οποία το γινόμενο των αβεβαιοτήτων θέσης-ορμής καθίσταται ελάχιστο.

β. Με βάση το ανωτέρω ερώτημα να ευρεθεί η βασική στάθμη του αρμονικού ταλαντωτού.

4. Στις ιδιοκαταστάσεις του πηγαδιού απείρου βάθους να υπολογισθούν η μέσες τιμές και οι διασπορές της θέσης και της ορμής. Να επιβεβαιωθεί η σχέση αβεβαιότητας.

5. Στην δέσμια κατάσταση του δυναμικού  $V(x) = -\lambda\delta(x)$ , ( $\lambda > 0$ ) να υπολογισθούν η μέσες τιμές και οι διασπορές της θέσης και της ορμής. Να επιβεβαιωθεί η σχέση αβεβαιότητας.

6. α. Να ευρεθούν οι δέσμιες καταστάσεις σωματίου μάζας το οποίο κινείται στο δυναμικό

$$-\lambda (\delta(x-a) + \delta(x+a)) \quad \lambda > 0.$$

**β.** Να ευρεθούν οι δέσμιες καταστάσεις, εάν υπάρχουν, σωματίου μάζας το οποίο κινείται στο δυναμικό

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & x < 0, \\ -\lambda\delta(x-a), & x > 0, \lambda, a > 0. \end{cases}$$

**7.** Σωματίο κινείται στο δυναμικό

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & |x| > L, \\ \lambda\delta(x), & |x| < L, \lambda > 0. \end{cases}$$

**α.** Να ευρεθούν οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας. Να συγκριθούν με τις αντίστοιχες του πηγαδιού απείρου βάθους.

**β.** Να συζητηθεί το κατάλληλο όριο στο οποίο η μόνη δέσμια κατάσταση που παραμένει είναι αυτή του δυναμικού  $\lambda\delta(x)$ .

**8.** Σωματίο μάζας το οποίο κινείται σε πηγάδι απείρου βάθους περιγράφεται την χρονική στιγμή από την κυματική συνάρτηση

$$\psi(x, 0) = e^{i\varphi_1} \cos \theta \psi_1(x) + e^{i\varphi_2} \sin \theta \psi_2(x)$$

όπου  $\psi_1, \psi_2$ , οι δύο πρώτες ιδιοσυναρτήσεις και  $\varphi_1, \varphi_2, \theta$ , πραγματικές σταθερές.

**α.** Να ευρεθεί η  $\psi(x, t)$ , για  $t > 0$ . Να ευρεθούν οι μέσες τιμές της θέσης και της ορμής ως συναρτήσεις του χρόνου. Να επιβεβαιωθεί το θεώρημα Ehrenfest.

**β.** Να απαντηθούν τα αυτά ερωτήματα εάν οι  $\psi_1, \psi_2$ , είναι ιδιοσυναρτήσεις δεσμών καταστάσεων τυχαίου δυναμικού.

**9.** Σωματίο το οποίο κινείται σε δυναμικό αρμονικού ταλαντωτού, την χρονική στιγμή  $t = 0$  έχει μέση τιμή της θέσης και της ορμής,  $x_0$  και  $p_0$  αντίστοιχα. Να ευρεθούν οι μέσες τιμές της θέσης και της ορμής ως συναρτήσεις του χρόνου.

**10.** Σωματίο μάζας το οποίο κινείται σε πηγάδι απείρου βάθους περιγράφεται την χρονική στιγμή από την κυματική συνάρτηση

$$\psi(x, 0) = \frac{1+i}{2} \psi_1(x) + \frac{1-i}{2} \psi_2(x)$$

όπου  $\psi_1, \psi_2$ , οι δύο πρώτες ιδιοσυναρτήσεις.

**α.** Να ευρεθεί η  $\psi(x, t)$ , για  $t > 0$ . Να ευρεθούν η μέση τιμή και η διασπορά της της θέσης ως συναρτήσεις του χρόνου. Να επιβεβαιωθεί η σχέση αβεβαιότητας ενέργειας-χρόνου.

**β.** Να απαντηθούν τα αυτά ερωτήματα εάν οι  $\psi_1, \psi_2$ , είναι ιδιοσυναρτήσεις δεσμών καταστάσεων τυχαίου δυναμικού.