cx

Σειρές Fourier-Μετασχηματισμός Fourier

•Έστω μια συνεχής (και σχετικά ομαλή) συνάρτηση $f(x)$, $x \in [0, L]$ για την οποία ξέρουμε ότι $f(0) = f(L) = 0$. Μια τέτοια συνάρτηση μπορούμε πάντα να τη γράψουμε :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) \qquad (1)$$

με

$$A_n = \frac{2}{L}\int_0^L dx f(x)\sin(\frac{n\pi x}{L}) \qquad (2)$$

Για να ελέγξουμε τον ισχυρισμό αυτό ας ξεκινήσουμε από την (1) την οποία πολλαπλασιάζουμε με $\sin(\frac{m\pi x}{L})$ και ολοκληρώνουμε :

$$\int_0^L dx f(x)\sin(\frac{m\pi x}{L}) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \int_0^L dx \sin(\frac{m\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi x}{L}) \qquad (3)$$

Το τελευταίο ολοκλήρωμα χωρίζεται σε δύο μέρη :

$$\int_0^L dx \sin(\frac{m\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi x}{L}) = \frac{1}{2}\int_0^L dx \cos(\frac{m-n}{L}\pi x) - \frac{1}{2}\int_0^L dx \cos(\frac{m+n}{L}\pi x) =$$

$$= \frac{1}{2}\frac{L}{\pi(m-n)}\int_0^L d\sin(\frac{m-n}{L}\pi x) - \frac{1}{2}\frac{L}{\pi(m+n)}\int_0^L d\sin(\frac{m+n}{L}\pi x) =$$

$$= \frac{L}{2}\frac{\sin[\pi(m-n)]}{\pi(m-n)} - \frac{L}{2}\frac{\sin[\pi(m+n)]}{\pi(m+n)} \qquad (4)$$

Ο τελευταίος όρος της (4) είναι πάντα μηδέν αφού το άθροισμα $m+n$ είναι πάντα ένας θετικός ακέραιος. Ο πρώτος όρος είναι κι αυτός μηδέν αν $m \neq n$. Αν, όμως, $m = n$ το αποτέλεσμα είναι $L/2$. Συνοψίζοντας :

$$\frac{2}{L}\int_0^L dx \sin(\frac{m\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi x}{L}) = \delta_{n,m} \equiv \begin{cases} 1 & \text{αν } m = n \\ 0 & \text{αν } m \neq n \end{cases} \qquad (5)$$

Επομένως έχουμε τη σχέση $\int_0^L dx f(x)\sin(\frac{m\pi x}{L}) = \frac{L}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n \delta_{m,n} = \frac{L}{2} A_m$

που αποδεικνύει την (2).

Να σημειώσουμε εδώ ότι η σχέση (5) ορίζει τις συναρτήσεις $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi x}{L})$

ως **ορθοκανονικές** : $\int_0^L dx \varphi_n(x)\varphi_m(x) = \delta_{n,m}$

Για την πλήρη απόδειξη της ανάλυσης (1)-(2) πρέπει να πάμε και αντίστροφα : Από τη σχέση (2) να καταλήξουμε στην (1). Επειδή αυτό είναι πιο πολύπλοκο το αφήνουμε για την ώρα και οπλισμένοι με το θάρρος του υπολογισμού που ήδη κάναμε θεωρούμε το ζευγάρι των σχέσεων (1)-(2) δεδομένο.

• Την προηγούμενη λογική μπορούμε να την εφαρμόσουμε και σε άλλες περιπτώσεις όπως, ας πούμε, σε συνεχείς συναρτήσεις $f(x)$, $x \in [-L, L]$ για τις οποίες ισχύει ότι $f(-L) = f(L)$.

Εδώ ο ισχυρισμός είναι ότι οποιαδήποτε τέτοια συνάρτηση μπορούμε να τη γράψουμε

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos(\frac{n\pi x}{L}) \tag{6}$$

όπου

$$A_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx f(x) \sin(\frac{n\pi x}{L}), B_n = \frac{1}{L}\int_{-L}^{L} dx f(x) \cos(\frac{n\pi x}{L}) \ \ , \ n = 1, 2, \ldots,$$

$$B_0 = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx f(x) \tag{7}$$

Μπορεί κανείς να ελέγξει τη διαδρομή (6)$\rightarrow$(7) ακολουθώντας τη λογιστική του προηγουμένου παραδείγματος αλλά, για λόγους που θα φανούν στη συνέχεια, θα προχωρήσουμε λίγο διαφορετικά.
Γράφοντας

$$\sin(\frac{n\pi x}{L}) = \frac{1}{2i}(e^{in\pi x/L} - e^{-in\pi x/L}) \ \ , \ \ \cos(\frac{n\pi x}{L}) = \frac{1}{2}(e^{in\pi x/L} + e^{-in\pi x/L})$$

η σχέση (6) θα πάρει τη μορφή:

$$\begin{aligned} f(x) &= B_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(B_n - iA_n)e^{in\pi x/L} + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(B_n + iA_n)e^{-in\pi x/L} = \\ &= B_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(B_n - iA_n)e^{in\pi x/L} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}(B_{-n} + iA_{-n})e^{in\pi x/L} \end{aligned} \tag{8}$$

Από τις σχέσεις (7) βλέπουμε ότι $A_{-n} = -A_n$, $A_0 = 0$ και $B_{-n} = B_n$ και επομένως

$$f(x) = B_0 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}(B_n - iA_n)e^{in\pi x/L} + \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{-1}(B_n - iA_n)e^{in\pi x/L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\pi x/L} \tag{9}$$

όπου

$$a_n = \frac{1}{2}(B_n - iA_n) = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx f(x)[\cos(\frac{n\pi x}{L}) - i\sin(\frac{n\pi x}{L})] = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx f(x) e^{-in\pi x/L} \tag{10}$$

Ξαναγράψαμε, επομένως, τις σχέσεις (6) και (7) με τη μορφή

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\pi x/L} \quad , \quad a_n = \frac{1}{2L}\int_{-L}^{L} dx f(x) e^{-in\pi x/L}$$

Αν θεωρήσουμε δεδομένη την πρώτη απ' αυτές είναι εύκολο να αποδείξουμε τη δεύτερη :

$$\int_{-L}^{L} dx e^{-i\pi m x/L} f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \int_{-L}^{L} dx e^{i\pi(n-m)x/L} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{L}{i\pi(n-m)} \int_{-L}^{L} d e^{i\pi(n-m)x/L} =$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{L}{i\pi(n-m)} (e^{i\pi(n-m)} - e^{-i\pi(n-m)}) = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{\sin[\pi(n-m)]}{\pi(n-m)} = 2L \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \delta_{n,m} = 2L a_m$$

Είναι συνηθισμένο (αλλά όχι απαραίτητο) να χρησιμοποιούμε μια πιο "συμμετρική" γραφή:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{in\pi x/L} \quad , \quad b_n = \frac{1}{\sqrt{2L}} \int_{-L}^{L} dx f(x) e^{-in\pi x/L} \tag{11}$$

Με την ορολογία του πρώτου παραδείγματος οι συναρτήσεις

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}} e^{in\pi x/L}$$

αποτελούν ένα **ορθοκανονικό** σύνολο συναρτήσεων : $\int_{-L}^{L} dx \varphi_n(x) \varphi_m^*(x) = \delta_{n,m}$

Και εδώ, όπως και στο πρώτο παράδειγμα, η αντίστροφη διαδρομή είναι πιο απαιτητική και την αφήνουμε για την ώρα.

• Οι σχέσεις (11) μπορούν να επεκταθούν και στην περίπτωση που $L \to \infty$. Αυτό γίνεται μέσω μιας οριακής διαδικασίας την οποία ξεκινάμε γράφοντας $\frac{\pi}{L} = \delta k$ και επομένως δίνοντας στις (11) τη μορφή :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} (\sqrt{\delta k} b_n) e^{i(n\delta k)x} \quad , \quad \sqrt{\delta k} b_n = \frac{\delta k}{\sqrt{2\pi}} \int_{-L}^{L} dx f(x) e^{-i(n\delta k)x} \equiv \delta k \tilde{f}(n\delta k) \tag{12}$$

Μπορούμε τώρα να πάρουμε το όριο $\delta k \to 0$:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \delta k \tilde{f}(n\delta k) e^{i(n\delta k)x} \underset{\delta k \to 0}{=} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k) e^{ikx} \tag{13}$$

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} f(x) e^{-ikx} \tag{14}$$

Το ζευγάρι των σχέσεων (13)-(14) ορίζει τον **μετασχηματισμό Fourier** και τον αντίστροφό του. Παρόλο που η πορεία που ακολουθήσαμε είναι, ίσως, ικανή να μας πείσει για την ισχύ των σχέσεων αυτών η άμεση απόδειξή τους είναι λίγο πιο πολύπλοκη εργασία.

Πριν προχωρήσουμε ας σημειώσουμε ότι στην Κβαντική Μηχανική οι προηγούμενες σχέσεις εμφανίζονται με τη μορφή

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dk}{\sqrt{2\pi\hbar}}g(k)e^{ipx/\hbar},\quad g(k)=\int_{-\infty}^{\infty}\frac{dx}{\sqrt{2\pi\hbar}}f(x)e^{-ipx/\hbar} \tag{15}$$

που προκύπτει με την αλλαγή $k=\frac{p}{\hbar},\quad \frac{1}{\sqrt{\hbar}}\tilde{f}(\frac{p}{\hbar})\equiv g(p)$ στα ολοκληρώματα (13) και (14).

Συνάρτηση δέλτα.

Η "συνάρτηση" δέλτα είναι αυτό που ονομάζεται **γενικευμένη συνάρτηση** ή **κατανομή** : Ορίζεται μόνο μέσω της ολοκλήρωσης της

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x-y)=f(y) \tag{16}$$

με οποιαδήποτε συνάρτηση (η οποία στη γειτονιά του y είναι ομαλή).
Είναι προφανές από τον ορισμό αυτό ότι η δ-συνάρτηση έχει μη μηδενική συνεισφορά μόνο στη γειτονιά του σημείου y.
Για να αποκτήσουμε μια αίσθηση της συνάρτησης αυτής ας θεωρήσουμε τη διακριτή έκδοση του ολοκληρώματος (16):

$$\sum_n \varepsilon f(n\varepsilon)\delta(n\varepsilon-m\varepsilon)=f(m\varepsilon) \tag{17}$$

(Για να καταλάβουμε την τελευταία μπορούμε να σκεφτούμε ότι διακριτοποιήσαμε μια περιοχή γύρω από το y με βήμα ε).
Αν συγκρίνουμε την (17) με την ταυτότητα

$$\sum_n f(n\varepsilon)\delta_{n,m}=f(m\varepsilon) \tag{18}$$

(Εδώ $\delta_{n,m}\equiv\begin{cases}1 & \text{αν } m=n\\ 0 & \text{αν } m\neq n\end{cases}$ το σύμβολο του Kronecker)

βλέπουμε ότι
$$\delta(n\varepsilon-m\varepsilon)=\frac{\delta_{n,m}}{\varepsilon} \tag{19}$$

Η τελευταία σχέση μας μαθαίνει αρκετά πράγματα για τη δ-συνάρτηση (την οποία πρέπει να ανακτήσουμε στο όριο $\varepsilon\to 0$)

1) Όταν $n\neq m$ μπορούμε στην (19) να πάρουμε το όριο $\varepsilon\to 0$ και επομένως να βγάλουμε το συμπέρασμα ότι $\delta(x-y)=0$ όταν $x\neq y$.
2) Όταν $n=m$ το όριο $\varepsilon\to 0$ οδηγεί την (19) σε απειρισμό και επομένως δεν μπορούμε να ορίσουμε τη συνάρτηση $\delta(x-y)$ όταν $x=y$.

Εντούτοις το όριο $\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_n \varepsilon f(n\varepsilon)\frac{\delta_{n,m}}{\varepsilon} = \lim_{\varepsilon\to 0} f(m\varepsilon) = f(y)$ είναι υπαρκτό και αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο λειτουργεί ο ορισμός (16).

Μετά από αυτά καταλαβαίνουμε ότι για τον ορισμό της δ-συνάρτησης χρειαζόμαστε μια οριακή διαδικασία (η οποία δεν είναι κατ' ανάγκη η διακριτοποίηση του ολοκληρώματος).

Το μόνο που χρειάζεται είναι να βρούμε μια (συνηθισμένη) συνάρτηση $\delta(\varepsilon, x-y)$ η οποία να είναι τέτοια ώστε $\lim_{\varepsilon\to 0}\delta(\varepsilon, x-y) = 0$ για $x \neq y$ και

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(\varepsilon, x-y) = f(y) \qquad (20)$$

Οποιαδήποτε τέτοια συνάρτηση ορίζει τη δ-συνάρτηση:

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(\varepsilon, x-y) \equiv \int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(x-y) \qquad (21)$$

Είναι προφανές ότι μπορούμε να βρούμε πολλές συναρτήσεις που να "αντιπροσωπεύουν" τη δ-συνάρτηση (με την έννοια της (21)).

Σαν ένα παράδειγμα μπορούμε να αναφέρουμε τη συνάρτηση

$$\delta(\varepsilon, x-y) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}\exp[-\frac{(x-y)^2}{\varepsilon}] \qquad (22)$$

που έχει τη μορφή κατανομής Gauss τόσο πιο συγκεντρωμένης γύρω από το y όσο πιο μικρό γίνεται το ε. Ο συντελεστής μπροστά από το εκθετικό φροντίζει για την κανονικοποίηση : Είναι φανερό από τον ορισμό (16) ότι

$$\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(x-y) = 1 \qquad (23)$$

και επομένως θα πρέπει $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx\delta(\varepsilon, x-y) = 1 \qquad (24)$

Θεωρείστε γνωστό το ολοκλήρωμα $\int_{-\infty}^{\infty} dx e^{-\alpha x^2} = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$ για να πιστοποιήσετε αμέσως ότι διαλέξαμε το συντελεστή στην (22) ώστε να ικανοποιείται η (24).

Ας δούμε τώρα το ολοκλήρωμα της (22) με κάποια συνάρτηση

$$I_\varepsilon(y) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\exp[-\frac{(x-y)^2}{\varepsilon}] \qquad (25)$$

Μπορούμε να αλλάξουμε μεταβλητές στο ολοκλήρωμα $x = y + w\sqrt{\varepsilon}$ και να γράψουμε

$$I_\varepsilon(y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dw f(y + w\sqrt{\varepsilon})e^{-w^2}$$

αφού η συνάρτηση f δεν έχει πρόβλημα στη θέση y μπορούμε να πάρουμε το όριο στην προηγούμενη σχέση

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_{\varepsilon}(y) = \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{-\infty}^{\infty} dx f(x)\delta(\varepsilon, x-y) = f(y)\frac{1}{\sqrt{\pi}}\int_{-\infty}^{\infty} dw e^{-w^2} = f(y) \qquad (26)$$

και επομένως πράγματι η συνάρτηση (22) αντιπροσωπεύει (με την έννοια της (21)) τη δ-συνάρτηση.

• Ας ξαναγυρίσουμε στα αναπτύγματα Fourier για ορισμένες επιπλέον παρατηρήσεις. Θα ξεκινήσουμε, καταρχή, από τη σχέση (2) και θα προσπαθήσουμε να φθάσουμε στην (1). Πολλαπλασιάζουμε την (2) με $\sin(\frac{n\pi y}{L})$ και αθροίζουμε :

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi y}{L}) = \frac{2}{L}\int_0^L dx f(x)\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi y}{L}) \qquad (27)$$

Θα πρέπει τώρα να αποδείξουμε ότι το αποτέλεσμα είναι η συνάρτηση $f(y)$. Είναι προφανές ότι για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει

$$\frac{2}{L}\sum_{n=1}^{\infty}\sin(\frac{n\pi x}{L})\sin(\frac{n\pi y}{L}) = \delta(x-y) \qquad (28)$$

Η απόδειξη της τελευταίας έχει το δικό της ενδιαφέρον αλλά για τη δική μας συζήτηση ας τη θεωρήσουμε δεδομένη.

Αν είναι έτσι, οι ορθοκανονικές (από την (5)) συναρτήσεις $\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{L}}\sin(\frac{n\pi x}{L})$ ικανοποιούν τη σχέση **πληρότητας**

$$\sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)\varphi_n(y) = \delta(x-y) \qquad (29)$$

και αποτελούν ένα **ορθοκανονικό** και **πλήρες** σύνολο συναρτήσεων.
Το σημαντικό εδώ είναι : Οποιαδήποτε συνάρτηση η οποία στο διάστημα $[0, L]$ είναι τέτοια ώστε $f(0) = f(L) = 0$ μπορεί να γραφεί:

$$f(x) \underset{(16)}{=} \int_0^L dy f(y)\delta(x-y) \underset{(29)}{=} \sum_{n=1}^{\infty}\varphi_n(x)[\int_0^L dy f(y)\varphi_n(y)] = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\frac{n\pi x}{L}) \qquad (30)$$

• Με την ίδια λογική για να αποδείξει κανείς τις (22) αρκεί να δείξει ότι το ορθοκανονικό σύνολο συναρτήσεων $\varphi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2L}}e^{in\pi x/L}$ είναι επίσης και πλήρες:

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\varphi_n(x)\varphi_n^*(y) = \frac{2}{L}\sum_{n=-\infty}^{\infty} e^{in\pi(x-y)/L} = \delta(x-y) \qquad (31)$$

Και εδώ δεν θα ασχοληθούμε με την απόδειξη της (31) αλλά η ισχύς της είναι σημαντική γιατί στο διάστημα $x\in[-L, L]$ οποιαδήποτε συνάρτηση ικανοποιεί τις συνοριακές απαιτήσεις $f(-L) = f(L)$ γράφεται:

$$f(x) \underset{(16)}{=} \int_{-L}^{L} dy f(y)\delta(x-y) \underset{(31)}{=} \sum_{n=1}^{\infty} \varphi_n(x)[\int_{-L}^{L} dy f(y)\varphi_n^*(y)] = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\pi x/L} \qquad (32)$$

• Ας τελειώσουμε με τον μετασχηματισμό Fourier.
Αν θεωρήσουμε δεδομένες τις σχέσεις (13) και (14) μπορούμε να διπιστώσουμε ότι

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} f(y) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y)[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)}]$$

και επομένως
$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{2\pi} e^{ik(x-y)} = \delta(x-y) \qquad (33)$$

Λίγη σκέψη θα μας πείσει ότι η σχέση αυτή δεν είναι παρά η επέκταση της (31) στο όριο $L \to \infty$ και επομένως εκφράζει την **πληρότητα** συναρτήσεων $\varphi_k(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{ikx}$ στο διάστημα $(-\infty, \infty)$. Το αντίστροφο είναι και εδώ σημαντικό : Αν θεωρήσουμε δεδομένη την πληρότητα, οποιαδήποτε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη,στο εν λόγω διάστημα, συνάρτηση γράφεται

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} dy f(y)\delta(x-y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}}[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dy}{\sqrt{2\pi}} e^{-iky} f(y)] e^{ikx} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{\sqrt{2\pi}} \tilde{f}(k) e^{ikx} .$$

Ο αντίστροφος μετασχηματισμός Fourier

$$\tilde{f}(k) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{2\pi}} e^{-ikx} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk'}{\sqrt{2\pi}} e^{ik'x} \tilde{f}(k') = \int_{-\infty}^{\infty} dk' \tilde{f}(k')[\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{ix(k'-k)}]$$

μας οδηγεί σε συμπέρασμα ανάλογο με αυτό της σχέσης (33)

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{2\pi} e^{ix(k'-k)} = \delta(k'-k) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \varphi_k^*(x) \varphi_{k'}(x) \qquad (34)$$

το οποίο εκφράζει την ορθοκανονικότητα των συναρτήσεων φ_k .

Η Εξίσωση Schrödinger

Για να σκεφτούμε την εξίσωση Schrödinger θα ξεκινήσουμε από ορισμένες "αρχές" οι οποίες τίθενται για την περιγραφή των πειραματικών δεδομένων :

- Σε κάθε κβαντομηχανικό συμβάν αντιστοιχεί μια μιγαδική συνάρτηση $\Psi(x,t)$ την οποία ονομάζουμε πλάτος πιθανότητας . Η συνάρτηση αυτή περιέχει όλες τις πληροφορίες που μπορούμε να έχουμε για το συμβάν αυτό.
- Η (πυκνότητα) πιθανότητας να πραγματοποιηθεί το εν λόγω συμβάν δίνεται από την $P = |\Psi|^2$.
- Αν κάποιο συμβάν μπορεί να πραγματοποιηθεί με περισσότερους από έναν τρόπους, το πλάτος πιθανότητας που αντιστοιχεί σ' αυτό είναι ίσο με το άθροισμα των πλατών πιθανότητας που αντιστοιχούν σε καθέναν από τους εναλλακτικούς τρόπους πραγματοποίησης του : $\Psi_{ολ.} = \Psi_1 + \Psi_2 + \ldots$ και $P_{ολ.} = |\Psi_1 + \Psi_2 + \ldots|^2$.
- Εαν μέσω κάποιου πειράματος μπορούμε να διακρίνουμε τους εναλλακτικούς τρόπους πραγματοποίησης ενός συμβάντος τότε η συνολική πιθανότητα είναι το άθροισμα των επιμέρους πιθανοτήτων : $P_{ολ.} = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2 + \ldots = P_1 + P_2 + \ldots$