Μονοδιάστατα προβλήματα.

Εξίσωση Schrödinger ιδιοτιμών : $\hat{H}\psi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\psi''(x) + V(x)\psi(x) = E\psi(x)$

E : ιδιοτιμή της ενέργειας

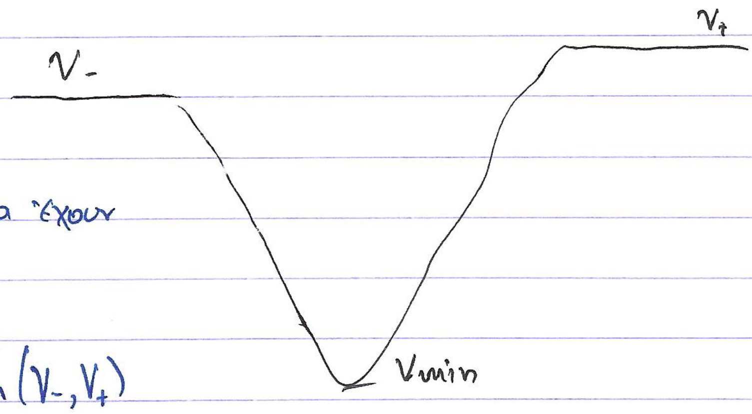
ψ(x): ιδιοσυνάρτηση.

$\psi(x)$, $\psi'(x)$ συνεχείς ⟶ { ακόμη και σε σημεία στα οποία το δυναμικό παρουσιάζει πεπερασμένη ασυνέχεια.

Ελεύθερο σωματίο : E έχει συνεχείς τιμές (συνεχές φάσμα)
$\psi(x)$ δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμες
(και υπάρχει εκφυλισμός $\hat{H}f_p(x) = \hat{H}f_{-p}(x)$).

Απειρόβαθο πηγάδι: Διακριτό φάσμα.
Ιδιοσυναρτήσεις τετραγωνικά ολοκληρώσιμες. } Δέσμιες καταστάσεις.

Έστω V(x) :



Οι δέσμιες καταστάσεις θα έχουν ενέργεια E με :

$$V_{min} < E < \min(V_-, V_+)$$

$$\left(V_- = \lim_{x\to-\infty} V(x), \quad V_+ = \lim_{x\to\infty} V(x)\right)$$

Πράγματι εάν υποθέσουμε ότι για $x<x_-$ το δυναμικό είναι πρακτικά σταθερό ίσο με V_- για $E>V_-$ η εξίσωση Schrödinger γίνεται:

$$\psi'' = -\underbrace{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_-)}_{k^2}\psi = -k^2\psi$$

με λύση $\psi = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$.

Μια τέτοια κυματική συνάρτηση δεν μπορεί να είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη ανεξάρτητα από την μορφή της για $x>x_-$.

Ομοίως εάν $V(x)=V_+$ για $x>x_+$.

Άρα $E<\min(V_+,V_-)$.

Επίσης εάν $\hat{H}\psi = E\psi \Rightarrow (\psi,\hat{H}\psi)=E$

εάν η ψ είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη, οπότε και λαμβάνεται κανονικοποιημένη.

Δηλαδή
$$E = \int \psi^* \frac{\hat{p}^2}{2m}\psi\,dx + \int \psi^* V(x)\psi\,dx$$
$$= \int \frac{1}{2m}(\hat{p}\psi)^*(\hat{p}\psi)\,dx + \int \psi^* V(x)\psi\,dx >$$
$$\int \psi^* V(x)\psi\,dx > V_{min}$$

>0 εκτός εάν $\psi=$ σταθερά οπότε δεν είναι τετραγωνικά ολοκληρώσιμη (προφανώς $\psi\neq 0$).

(i). Το διακριτό ενεργειακό φάσμα δεν έχει εκφυλισμό.

Έστω $\psi_1, \psi_2 :$ $\hat{H}\psi_1 = E\psi_1$

$\hat{H}\psi_2 = E\psi_2$

$$\left.\begin{aligned} \psi_1'' &= \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\psi_1 \\ \psi_2'' &= \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\psi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \psi_2\psi_1'' - \psi_1\psi_2'' = 0$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \frac{d}{dx}(\psi_2\psi_1' - \psi_1\psi_2') = 0 \Rightarrow \psi_2\psi_1' - \psi_1\psi_2' = c \\ &\text{για} \quad x \to \pm\infty \quad \psi_2\psi_1' - \psi_1\psi_2' \to 0 \Rightarrow c = 0 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\frac{\psi_1'}{\psi_1} = \frac{\psi_2'}{\psi_2} \Rightarrow (\ln\psi_1)' = (\ln\psi_2)' \Rightarrow \ln\psi_1 = \ln\psi_2 + d'$$

$$\Rightarrow \psi_1 = d\,\psi_2$$

Άρα οι δύο λύσεις δεν είναι γραμμικά ανεξάρτητες.

(ii). Οι ιδιοσυναρτήσεις διακριτού φάσματος μπορεί να ληφθούν πραγματικές.

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\psi'' + V(x)\psi = E\psi \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{2m}\psi^{*''} + V(x)\psi^* = E\psi^*$$

δηλαδή ψ, ψ^* ιδιοσυναρτήσεις με την ίδια ιδιοτιμή $\xrightarrow{(i)}$

$$\left.\begin{aligned} \psi &= c\,\psi^* \\ \psi^* &= c^*\psi \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \psi\psi^* = |c|^2\,\psi\psi^*$$

$$\Rightarrow |c|^2 = 1 \Rightarrow c = e^{i\theta}$$

Επομένως: $\psi = e^{i\theta}\psi^* \Rightarrow$

$e^{-i\theta/2}\psi = e^{i\theta/2}\psi^* \Rightarrow \quad e^{-\frac{i\theta}{2}}\psi = R$ πραγματική συνάρτηση

$$\Rightarrow \psi = e^{i\theta/2}R$$

↳ σταθερή φάση

(iii). Εάν $V(x) = V(-x)$ οι ιδιοσυναρτήσεις του διακριτού φάσματος θα είναι είτε άρτιες είτε περιττές.

(iv). Ρίζες των ιδιοσυναρτήσεων διακριτού φάσματος. (Θεώρημα ταλάντωσης).

Έστω $E_0 < E_1 < E_2 < \dots < E_n < \dots$

$\psi_0, \quad \psi_1, \quad \psi_2, \quad \psi_n, \dots$

το διακριτό φάσμα (E_0 η βασική στάθμη).

Στο ανοικτό διάστημα ορισμού του προβλήματος (εξαιρούνται δηλαδή τα άκρα)
η ψ_n έχει n ρίζες ρ_i, $\psi_n(\rho_i) = 0$.

Οι ρίζες της ψ_n ευρίσκονται ενδιάμεσα των ριζών της ψ_{n-1}, δηλ. μία μεταξύ δύο ριζών της ψ_{n-1}.

π.χ. ψ_2

ψ_3

Σύντομα αποδεικνύεται ότι εάν $E_2 > E_1$
η ψ_2 έχει ρίζα μεταξύ δύο διαδοχικών ριζών της ψ_1.

-Έστω $\psi_1(\rho_1) = \psi_2(\rho_2) = 0$ και

$$\left.\begin{aligned} -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_1'' + V\psi_1 &= E_1\psi_1 \\ -\frac{\hbar^2}{2m}\psi_2'' + V\psi_2 &= E_2\psi_2 \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} (\psi_2\psi_1'' - \psi_1\psi_2'')\,dx = +\frac{2m}{\hbar^2}(E_2 - E_1)\int_{\rho_1}^{\rho_2} \psi_1\psi_2\,dx \Rightarrow$$

$$\psi_2(\rho_2)\psi_1'(\rho_2) - \cancel{\psi_1(\rho_2)}\psi_2'(\rho_2) - \psi_2(\rho_1)\psi_1'(\rho_1) + \cancel{\psi_1(\rho_1)}\psi_2'(\rho_1) = \frac{2m}{\hbar^2}(E_2 - E_1)\int_{\rho_1}^{\rho_2}\psi_1\psi_2\,dx$$

Έστω ότι $\psi_1'(\rho_1) > 0$ και $\psi_1'(\rho_2) < 0 \Rightarrow \psi_1(x) > 0$ εάν $\rho_1 < x < \rho_2$

Εάν στο διάστημα (ρ_1, ρ_2) η ψ_2 διατηρεί πρόσημο έστω >0
τότε το αριστερό μέλος είναι αρνητικό και το δεξιό
θετικό $\rightarrow$ άτοπο.

Οπότε η ψ_2 έχει ρίζα στο διάστημα (ρ_1, ρ_2).

Ανάλογα ελέγχονται οι άλλες περιπτώσεις.

- Οι ρίζες είναι απλές : $\psi'(\rho_i) \neq 0$ για τις λύσεις της εξίσωσης Schrödinger. **

** Εάν

$$\psi(x) = \psi(0) + x\psi'(0) + \frac{1}{2}x^2\psi''(0) + \dots + \frac{1}{n!}x^n\psi^{(n)}(0) + \dots$$

$$\psi'(x) = \psi'(0) + x\psi''(0) + \frac{1}{2}x^2\psi'''(0) + \dots + \frac{1}{n!}x^n\psi^{(n+1)}(0) + \dots$$

$$\psi''(x) = \psi''(0) + x\psi'''(0) + \frac{1}{2}x^2\psi^{(4)}(0) + \dots + \frac{1}{n!}x^n\psi^{(n+2)}(0) + \dots$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{\psi''(0) + x\psi'''(0) + \dots + \frac{1}{n!}x^n\psi^{(n+2)}(0) + \dots\right\} =$$

$$(V(x)-E)\left\{\psi(0) + x\psi'(0) + \dots + \frac{1}{n!}x^n\psi^{(n)}(0) + \dots\right\}$$

$$= (V(0)-E)\psi(0) + \left[V'(0)\psi(0) + V(0)\psi'(0)\right]x +$$

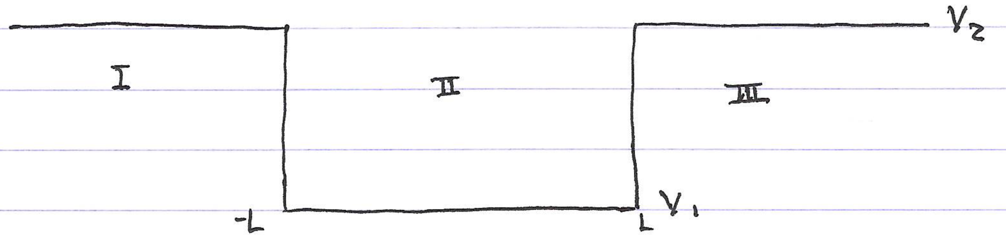
$$\frac{1}{2}\frac{1}{2}\left(V(0)\psi''(0) + 2V'(0)\psi'(0) + \psi(0)V''(0)\right)x^2 + \dots$$

$$\Rightarrow \quad \psi''(0)=0, \quad \psi'''(0)=0, \quad \psi^{(4)}(0)=0, \dots, \psi^{(n)}(0)=0, \dots$$

$$\Rightarrow \quad \psi(x)=0.$$

$\Rightarrow$ Έχουμε μόνον απλές ρίζες.

1. Σε συμμετρικό πηγάδι πεπερασμένου βάθους, να ευρεθούν οι δέσμιες καταστάσεις.



Ιδιοτιμές διακριτού φάσματος: $V_1 < E < V_2$.

Δυναμικό συμμετρικό $\Rightarrow$ Ιδιοσυναρτήσεις άρτιες ή περιττές.

α). Άρτιες ιδιοσυναρτήσεις.

* I: $x<-L$: $\psi_I = A e^{qx}$, $q=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_2-E)}$,

II: $-L<x<L$: $\psi_{II} = B\cos kx$, $k=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(E-V_1)}$,

III: $x>L$: $\psi_{III} = A e^{-qx}$.

Στο σημείο $x=-L$.

Συνέχεια της κυμ. συνάρτησης:

$$B\cos kL = A e^{-qL}$$

Συνέχεια της πρώτης παραγώγου:

$$-kB\sin(-kL) = qAe^{-qL} \Rightarrow kB\sin kL = qAe^{-qL}$$

$\Rightarrow$

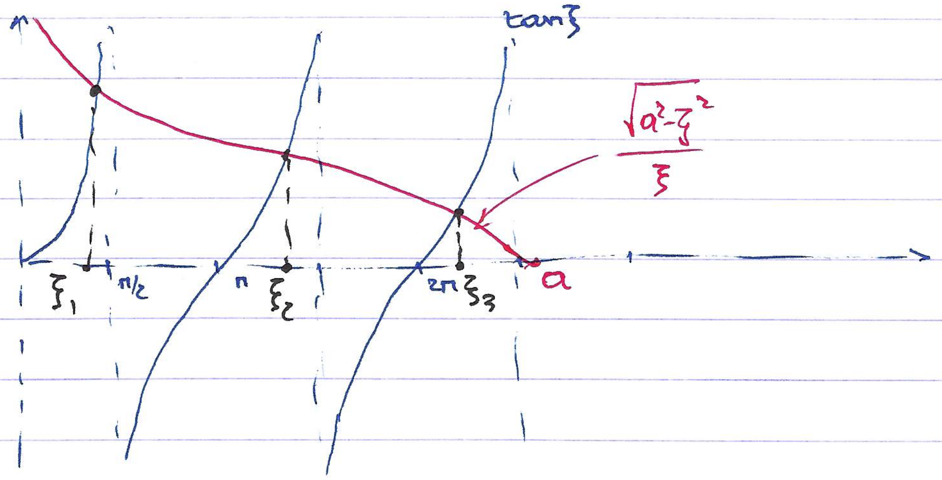
$$\tan kL = \frac{q}{k}$$

$$q = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_2 - E)} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_2 - V_1 - (E - V_1))} = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V_2 - V_1) - k^2}$$

επομένως:

$$\tan\xi = \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2}}{\xi}$$

$$\xi = kL$$
$$a^2 = \frac{2mL^2}{\hbar^2}(V_2 - V_1)$$



Εάν $n\pi < a < (n+1)\pi \Rightarrow (n+1)$ ιδιοτιμές της ενέργειας με άρτια ιδιοσυνάρτηση.

Ισχύει ότι: $k\pi < \xi_{k+1} < \frac{2k+1}{2}\pi \quad , \quad k = 0, \dots, n$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2 \pi^2 k^2}{2mL^2} + V_1 < E_{k+1} < \frac{\hbar^2 \pi^2 (2k+1)^2}{2m(2L)^2} + V_1$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2 \pi^2 (2k)^2}{2m(2L)^2} + V_1 < E_{k+1} < \frac{\hbar^2 \pi^2 (2k+1)^2}{2m(2L)^2} + V_1$$

$$\qquad \parallel \qquad\qquad\qquad\qquad \parallel$$

$E_{2k} \rightarrow$ απειρόβαθου πηγαδιού $\leftarrow E_{(2k+1)}$
εύρους $2L$

β). Περιττές ιδιοσυναρτήσεις.

I : $x<-L$: $\psi_I = -Ae^{+qx}$,

II : $-L<x<L$: $\psi_{II} = B\sin kx$,

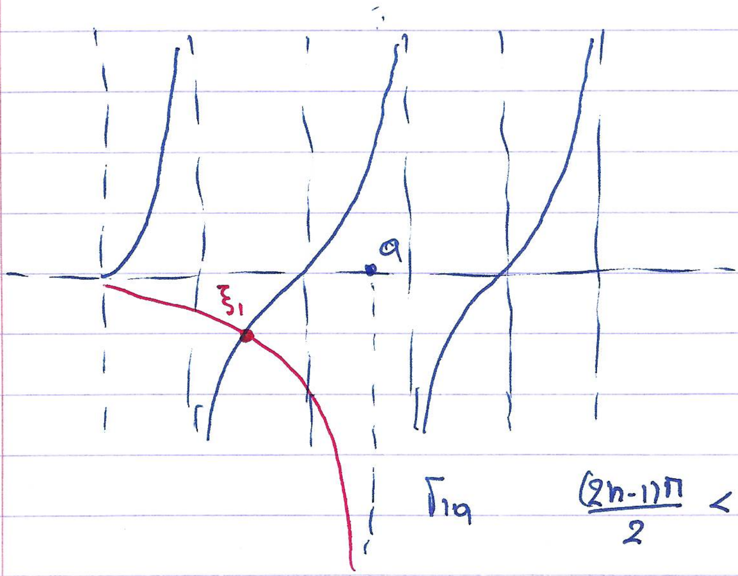
III : $x>L$: $\psi_{III} = Ae^{-qx}$.

Στο σημείο $x=-L$.

$$\left.\begin{aligned} B\sin kL &= +Ae^{-qL} \\ kB\cos kL &= -qAe^{-qL} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \tan kL = -\frac{k}{q}$$

οπότε αντίστοιχα θέτοντας $kL=\xi$:

$$\tan\xi = -\frac{\xi}{\sqrt{a^2-\xi^2}}$$



Για $\frac{(2n-1)\pi}{2} < a < \frac{(2n+1)\pi}{2}$, $n=1,2,..$

υπάρχουν n περιττές ιδιοσυναρτήσεις με ενέργειες:

$$\frac{2k-1}{2}\pi < \xi_k < 2k\pi \Rightarrow \frac{\hbar^2\pi^2(2k-1)^2}{2m(2L)^2} + V_1 < E_k < \frac{\hbar^2\pi^2(2k)^2}{2m(2L)^2} + V_1$$

$(k=1,\dots,n)$

$E_{2k-1} \to$ απειρόβαθου πηγαδιού εύρους $2L$. $\quad E_{2k}$

$$a = \sqrt{\frac{2mL^2}{\hbar^2}(V_2 - V_1)}$$

καθορίζει τον αριθμό των δέσμιων καταστάσεων.

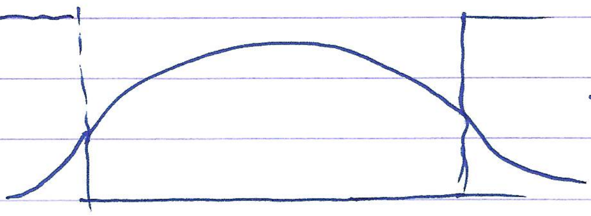
$\exists$ πάντα τουλάχιστον μία κατάσταση.

$a < \frac{\pi}{2}$, E_1 , ψ_1 άρτια 1 κατάσταση

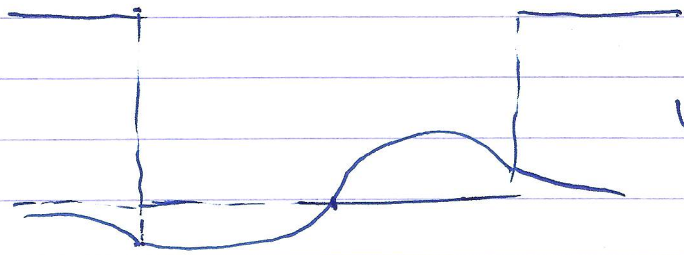
$\frac{\pi}{2} < a < \pi$, E_1 , ψ_1 άρτια 2 καταστάσεις
$\hat{E}_2$ ψ_2 περιττή

$\pi < a < \frac{3\pi}{2}$, E_1 , ψ_1 άρτια (0, ρίζες) 3 καταστάσεις
$\hat{E}_2$, ψ_2 περιττή (1, ρίζα)
$\hat{E}_3$, ψ_3 άρτια (2, ρίζες)

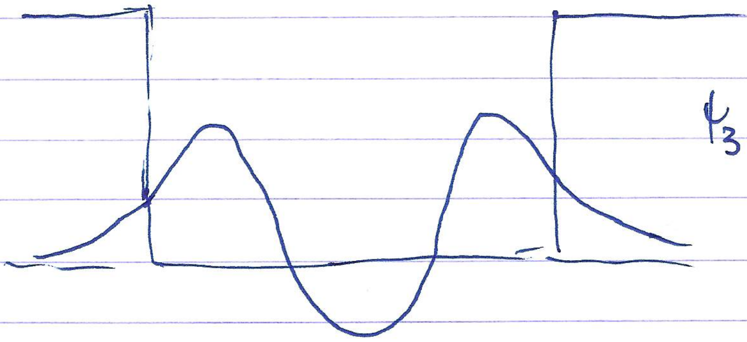
$\vdots$



ψ_1



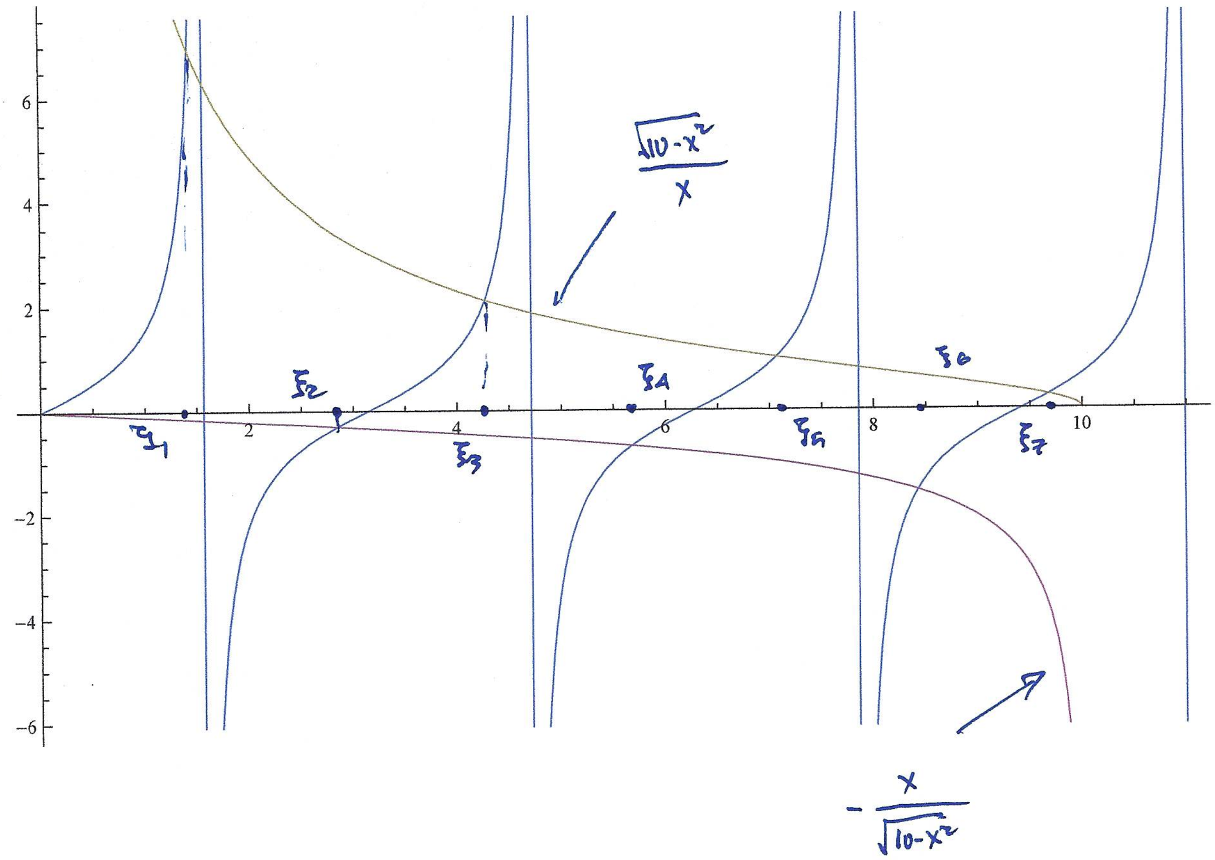
ψ_2



ψ_3

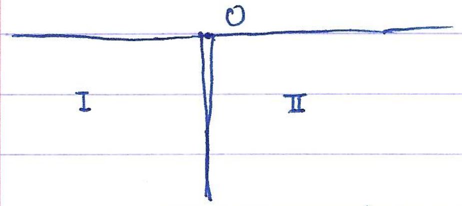
(7')

Out[8]=



2. Να βρεθούν οι δέσμιες καταστάσεις του δυναμικού

$$V(x) = -\lambda \delta(x) , \quad \lambda > 0.$$



$V_{min} = 0 \Rightarrow E < 0.$

$x<0$: $\quad \psi_I = A e^{kx} \quad , \quad k = \sqrt{\frac{2m|E|}{\hbar^2}}$

$x>0$: $\quad \psi_{II} = B e^{-kx} .$

Συνέχεια της κυματικής συνάρτησης στο σημείο $x=0$:

$$\psi_I(0) = \psi_{II}(0) \Rightarrow A = B.$$

Όσον αφορά εις την παράγωγο:

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \psi''(x) - \lambda \delta(x) \psi(x) = E \psi(x) \Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi''(x) dx - \lambda \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \delta(x) \psi(x) dx = E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi(x) dx \Rightarrow$$

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \left[\psi'(\epsilon) - \psi'(-\epsilon) \right] - \lambda \psi(0) = E \int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi(x) dx$$

Για $\epsilon \to 0$ έχουμε: $\quad \left(\int_{-\epsilon}^{\epsilon} \psi(x) dx \to 0 \right)$

$$\boxed{\psi'(0_+) - \psi'(0_-) = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2} \psi(0)}$$

Η πρώτη παράγωγος παρουσιάζει ασυνέχεια ανάλογη της τιμής της κυματικής συνάρτησης στο σημείο $x=0$ (όρισμα της συνάρτησης δ).

Άρα για $x=0$:

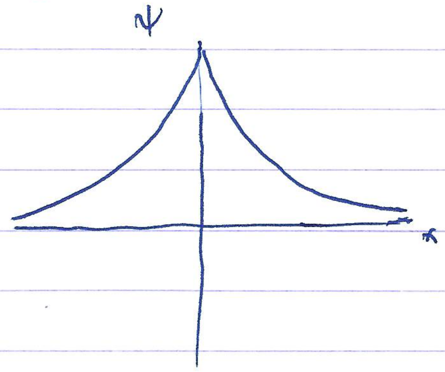
$$\psi_{II}'(0)-\psi_{I}'(0)=-\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi(0)\Rightarrow$$

$$-kB-kA=-\frac{2m\lambda}{\hbar^2}A\Rightarrow\quad (A=B)$$

$$\boxed{k=\frac{m\lambda}{\hbar^2}}$$

$$\Rightarrow\quad \frac{2m}{\hbar^2}|E|=\frac{m^2\lambda^2}{\hbar^4}\Rightarrow$$

$$\boxed{E=-\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}}$$



$$\psi(x)=Ae^{-k|x|}$$

Συνθήκης κανονικοποίησης:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\psi^*(x)\psi(x)dx=2|A|^2\int_0^{\infty}e^{-2kx}dx=|A|^2\frac{1}{k}=1$$

$$\Rightarrow\quad A=\sqrt{k}\,e^{i\theta}$$

$$\psi(x)=\frac{1}{\sqrt{k}}e^{-k|x|}$$

(*) $$\psi'' = \frac{2m}{\hbar^2}(V-E)\psi$$

Εάν V σταθερό:

α). $V-E>0 \Rightarrow \psi'' = k^2\psi \,, \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}(V-E)}$

$$\Rightarrow \psi(x) = Ae^{kx} + Be^{-kx}$$

$$\text{ή} \quad \psi(x) = A'\cosh kx + B'\sinh kx.$$

Εάν η περιοχή της αντιστοίχου λύσης εκτείνεται στο $+\infty$
$\rightarrow A=0$

Εάν η περιοχή της λύσης εκτείνεται στο $-\infty$
$\rightarrow B=0$

ώστε να έχουμε τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση.

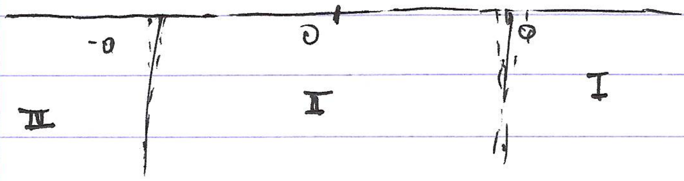
Εάν το x μεταβάλλεται σε πεπερασμένο διάστημα λαμβάνονται υπ' όψιν και οι δύο ανεξάρτητες λύσεις.

β). $V-E<0 \Rightarrow \psi'' = -k^2\psi \,, \quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar}(E-V)}$

$$\Rightarrow \psi(x) = Ae^{ikx} + Be^{-ikx}$$
$$= A'\cos kx + B'\sin kx$$
$$\left(= \Gamma\cos(kx+\delta) \right.$$
$$\left. = \Delta\sin(kx+\delta) \right)$$

3. Να βρεθούν οι δέσμιες καταστάσεις του δυναμικού

$$V(x) = -\lambda\left(\delta(x-a) + \delta(x+a)\right), \quad \lambda > 0.$$



$(E<0)$.

(i). Άρτιες καταστάσεις.

$$\psi_I(x) = A e^{-kx}, \qquad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|},$$

$$\psi_{II}(x) = B\cosh kx,$$

$$\psi_{III}(x) = A e^{kx}.$$

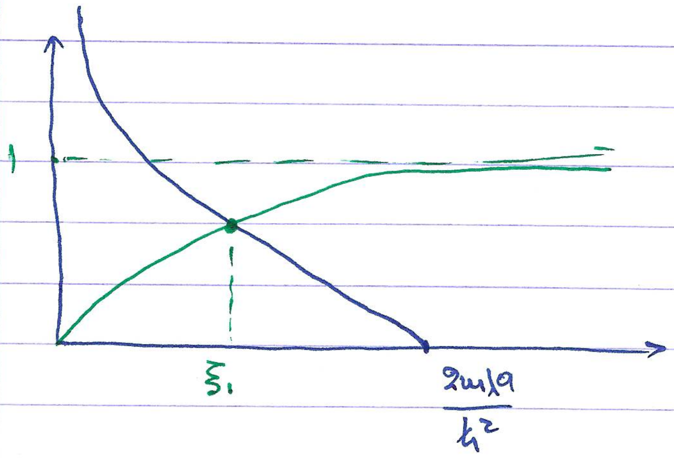
Στο σημείο $x = a$:

$$\left.\begin{aligned} &\psi_I(a) = \psi_{II}(a) \\ \text{και} \quad &\psi_I'(a) - \psi_{II}'(a) = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\psi_I(a) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &A e^{-ka} = B\cosh ka \\ &-kAe^{-ka} - kB\sinh ka = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2} A e^{-ka} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{\begin{aligned} &kB\sinh ka = \left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2} - k\right) A e^{-ka} \\ &B\cosh ka = A e^{-ka} \end{aligned}\right.$$

$$\Rightarrow \quad \tanh ka = \frac{2m\lambda}{\hbar^2 k} - 1$$

ή $$\boxed{\tanh\xi = \frac{2m\lambda a}{\hbar^2}\frac{1}{\xi} - 1.} \qquad (\xi = ka)$$



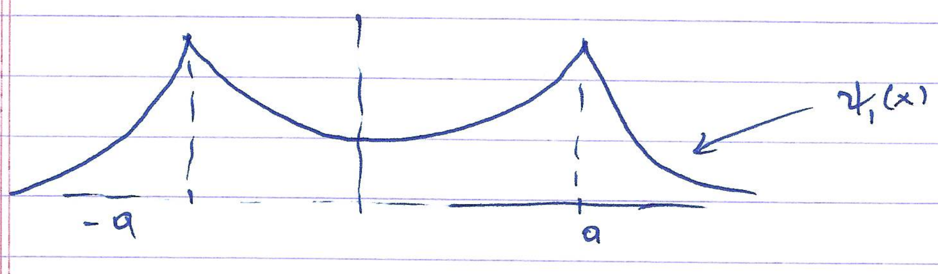
Η γραφική επίλυση δίνει πάντοτε μία ενεργειακή στάθμη ξ_1 με:

$$\tanh \xi_1 = \frac{2m\lambda a}{\hbar^2}\frac{1}{\xi_1} - 1 < 1 \Rightarrow$$

$$\frac{m\lambda a}{\hbar^2} < \xi_1 \Rightarrow \frac{m^2\lambda^2}{\hbar^4} < \frac{2m}{\hbar^2}|E|$$

$$\Rightarrow |E_1| > \frac{m\lambda^2}{2\hbar^2} \Rightarrow E_1 < -\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}$$

Βασική στάθμη με κυματική συνάρτηση:



και ενέργεια μικρότερη αυτής του ενός δέλτα κέντρου.

(ii). Περιττές καταστάσεις.

$$\psi_I(x) = Ae^{-kx},$$

$$\psi_{II}(x) = B\sinh kx,$$

$$\psi_{III}(x) = -Ae^{kx}.$$

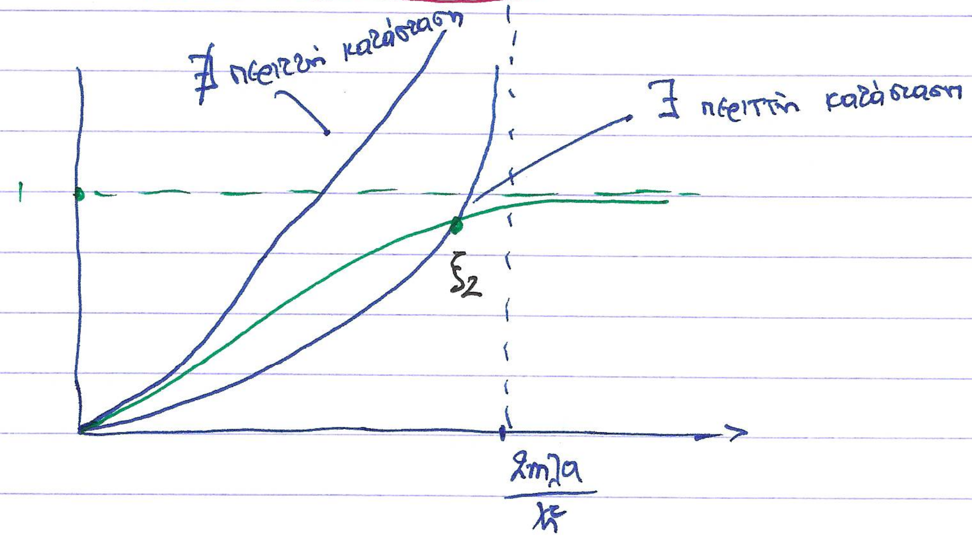
Στο σημείο $x = a$:

$$\left.\begin{aligned} Ae^{-ka} &= B\sinh ka \\ -kAe^{-ka} - kB\cosh ka &= -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}Ae^{-ka} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} Ae^{-ka} &= B\sinh ka \\ \left(\frac{2m\lambda}{\hbar^2} - k\right)Ae^{-ka} &= kB\cosh ka \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\tanh ka = \frac{k}{\frac{2m\lambda}{\hbar^2} - k} \Rightarrow \quad (ka = \xi)$$

$$\boxed{\tanh\xi = \frac{\xi}{\frac{2m\lambda a}{\hbar^2} - \xi}.}$$



Για να υπάρχει περιττή ιδιοκατάσταση (πρώτη διηγερμένη) πρέπει:

$$\frac{d}{d\xi}\tanh\xi\Big|_{\xi=0} > \frac{d}{d\xi}\,\frac{\xi}{\frac{2m\lambda a}{\hbar^2}-\xi}\Bigg|_{\xi=0} \Rightarrow$$

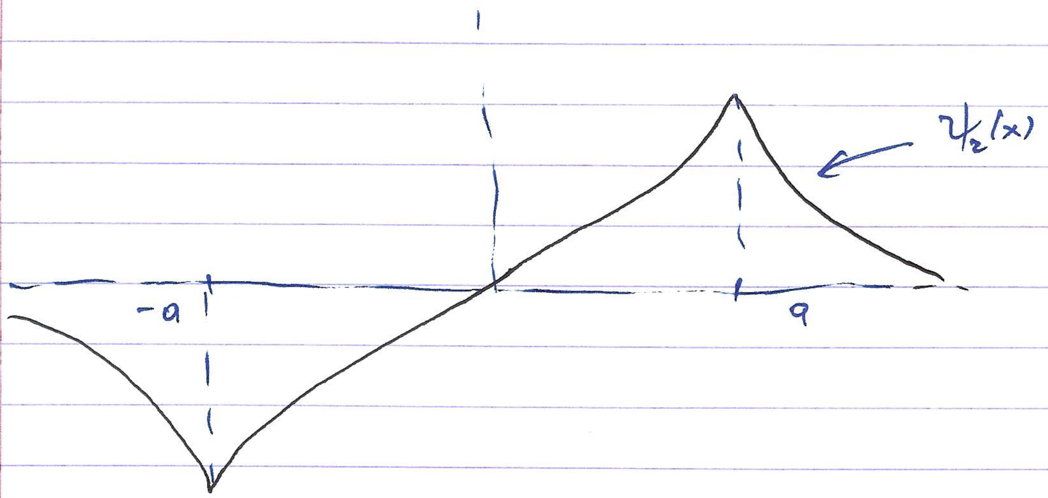
$$1 > \frac{\hbar^2}{2m\lambda a} \Rightarrow \boxed{\frac{2m\lambda a}{\hbar^2} > 1}\,.$$

Προφανώς:

$$\tanh\xi_2 = \frac{\xi_2}{\frac{2m\lambda a}{\hbar^2}-\xi_2} < 1$$

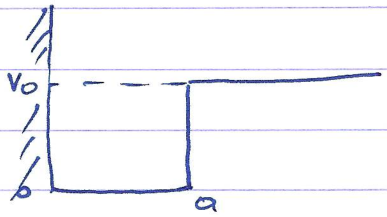
$$\Rightarrow \xi_2 < \frac{2m\lambda a}{\hbar^2} \Rightarrow E_2 > -\frac{m\lambda^2}{2\hbar^2}$$

με ιδιοσυνάρτηση της μορφής:

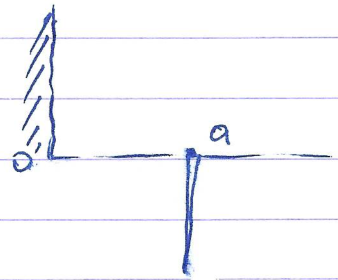


1. Να ευρεθούν οι δέσμιες καταστάσεις στα ακόλουθα δυναμικά:

(i) $V(x) = \begin{cases} +\infty, & x<0 \\ 0, & 0<x<a \\ +V_0, & x>a \end{cases}$



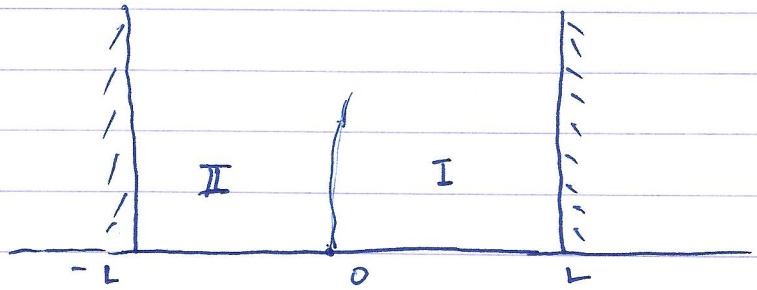
(ii). $V(x) = \begin{cases} +\infty, & x<0 \\ -\lambda\delta(x-a), & x>0, \ \lambda>0 \end{cases}$



Να δειχθεί ότι αυτές ταυτίζονται με τις περιττές ιδιοκαταστάσεις των προβλημάτων (1) και (3) αντίστοιχα.

5. Να ευρεθούν οι ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας για το δυναμικό

$$V(x) = \begin{cases} \infty , & |x| > L \\ \lambda \delta(x), & |x| < L . \end{cases}$$



Προφανώς υπάρχουν μόνο δέσμιες καταστάσεις με $\psi(x) = 0$ εάν $|x| \geq L$.

(i). Περιττές ιδιοκαταστάσεις.

$\psi_I(x) = A\cos kx + B\sin kx$ $\quad (E \overset{?}{>} 0)$, $\quad k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$

$\psi_{II}(x) = -A\cos kx + B\sin kx$

Στο σημείο $x = L$: $A\cos kL + B\sin kL = 0 \Rightarrow A = -B\tan kL$

Στο σημείο $x = 0$: $\psi_I(0) = \psi_{II}(0) = 0 \Rightarrow A = 0$

$\Rightarrow \sin kL = 0 \Rightarrow kL = n\pi$, $\quad n = 1, 2, \dots$

$$\Rightarrow L^2 \frac{2mE}{\hbar^2} = n^2\pi^2 \Rightarrow E = \frac{n^2\pi^2\hbar^2}{2mL^2}$$

$$\Rightarrow E_{2n} = \frac{(2n)^2\pi^2\hbar^2}{2m(2L)^2}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Δηλαδή έχουμε αντίστοιχο το φάσμα των περιττών ιδιοσυναρτήσεων του απειρόβαθου πηγαδιού (άρτιο n).

α). Εφ' όσον για $n=1$: $\psi_2 = B\sin\frac{\pi}{L}x$ μηδενίζεται (εκτός των άκρων) μόνο στο σημείο $x=0$ (ένας δεσμός) δεν υπάρχουν άλλες περιττές ιδιοκαταστάσεις (με $E \leq 0$).

β). Οι άρτιες θα ενσφηνώνονται ανά μία μεταξύ των περιττών:

$$E_1 < E_2 < E_3 < E_4 < \dots$$

E_1 | ψ_1 , E_3 | ψ_3

↳ βασική στάθμη.

γ). Η συνάρτηση δ δεν επηρεάζει τις περιττές ιδιοκαταστάσεις:

$$\psi_I'(0) - \psi_{II}'(0) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}\underbrace{\psi(0)}_{0} \Rightarrow \text{συνέχεια και}$$

της πρώτης παραγώγου.

(ii). Άρτιες ιδιοκαταστάσεις.

$$\psi_I(x) = A\cos kx + B\sin kx \qquad (E \overset{?}{>} 0)$$

$$k = \sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}E}$$

$$\psi_{II}(x) = A\cos kx - B\sin kx$$

Στο σημείο $x=L$: $\quad A = -B\tan kL$

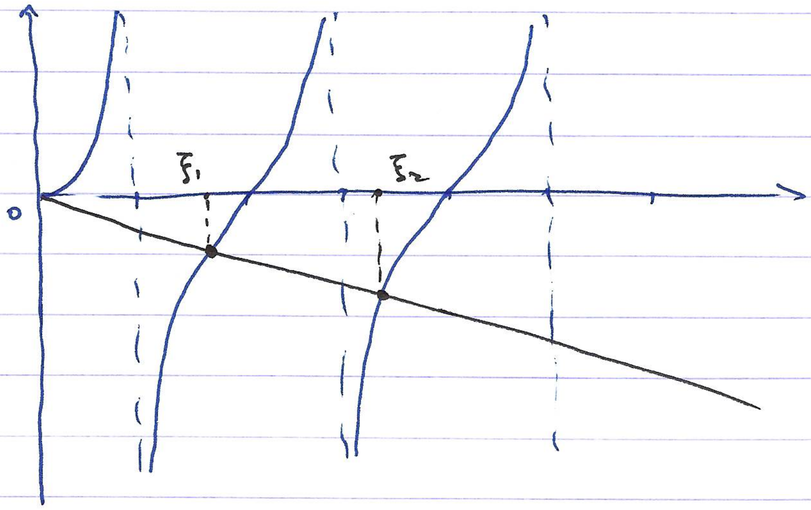
Στο σημείο $x=0$: $\quad kB - (-kB) = \frac{2m\lambda}{\hbar^2}A$ (ασυνέχεια της πρώτης παραγώγου)

$$\Rightarrow \quad 2k\cancel{B} = -\frac{2m\lambda}{\hbar^2}\cancel{B}\tan kL \Rightarrow$$

$$\tan\xi = -\left(\frac{\hbar^2}{m\lambda L}\right)\xi$$

(17)

1. $\lambda > 0$.

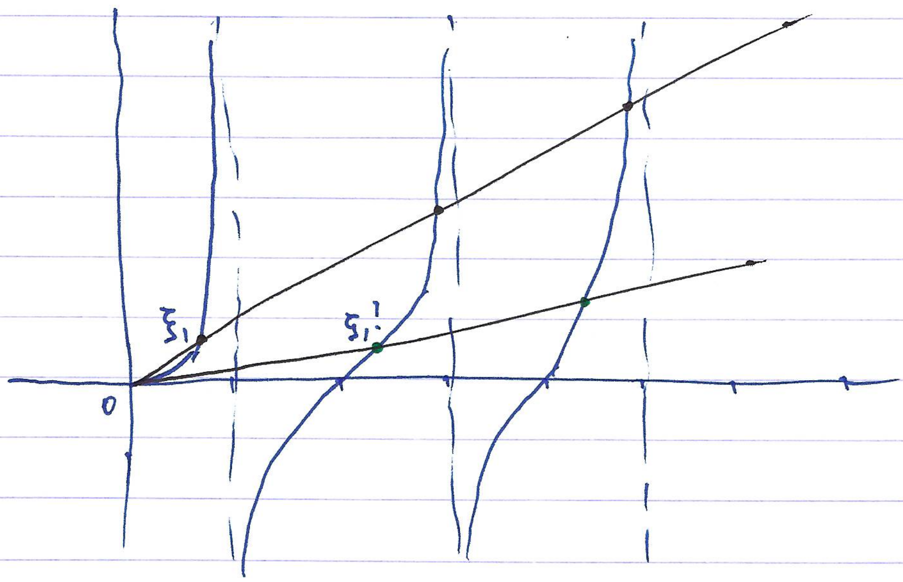


$$\frac{\pi}{2} < \xi_1 < \pi \Rightarrow \frac{\pi}{2L} < k_1 < \frac{\pi}{L} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \dfrac{\hbar^2 \pi^2}{2m(2L)^2} < E_1 < \dfrac{\hbar^2 \pi^2 (2)^2}{2m(2L)^2} \\ E_2 \end{array}\right\} \Rightarrow E_1 \text{ είναι η βασική στάθμη.}$$

(Η E_1 είναι μεγαλύτερη από την βασική στάθμη του απειρόβαθου πηγαδιού ($\lambda > 0$) αλλά μικρότερη από την E_2).
(Ομοίως $E_{2n-1} < E_{2n}$).

2. $\lambda < 0$.



$$\tan\xi = \frac{\hbar^2}{m\lambda L}\,\xi$$

Εάν $\quad \frac{d}{d\xi}\tan\xi\Big|_{\xi=0} = 1 < \frac{\hbar^2}{m|\lambda|L}$

υπάρχει στάθμη $\quad$ με $\xi_1 < \frac{\pi}{2} < \pi \Rightarrow E_1 < E_2$.

Δηλαδή έχουμε την βασική στάθμη όπως παίρνουμε όλο το ενεργειακό φάσμα με θετικές ενέργειες.

$$\longrightarrow \boxed{\frac{m|\lambda|L}{\hbar^2} < 1 \,, \qquad E_n > 0 \,.}$$

$\Rightarrow$ Εάν $\quad \frac{m|\lambda|L}{\hbar^2} > 1$

η πρώτη τομή είναι για $\xi > \pi \Rightarrow E > E_2$. Άρα η βασική στάθμη έχει ενέργεια ≤ 0.

α). $\quad E<0$.

$$\psi_I(x) = A\cosh kx + B\sinh kx \qquad k=\sqrt{\frac{2m}{\hbar^2}|E|}$$

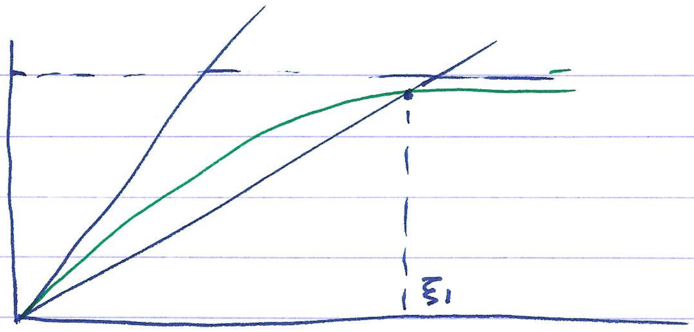
$$\psi_{II}(x) = +A\cosh kx - B\sinh kx$$

Στο σημείο $x=L$: $\quad A = -B\tanh kL$

Στο σημείο $x=0$: $\quad kB - k(-kB) = -\frac{2m|\lambda|}{\hbar^2}A$

$$\Rightarrow k = \frac{m|\lambda|}{\hbar^2}\tanh kL$$

$$\Rightarrow \frac{\hbar^2}{m|\lambda|L}\xi = \tanh\xi$$



$\frac{\hbar^2}{m|\lambda|L} < 1$ υπάρχει λύση με ενέργεια:

$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2mL^2}\xi_1^2$$

Δηλαδή εάν $\frac{m|\lambda|L}{\hbar^2} > 1$ η βασική στάθμη έχει αρνητική ενέργεια.

β). $\frac{m|\lambda|L}{\hbar^2} = 1$ η βασική στάθμη έχει μηδενική ενέργεια.

Πράγματι: $E = 0 \Rightarrow$

$\psi_I(x) = Ax + B$

$\psi_{II}(x) = -Ax + B$

Στο σημείο $x = L$: $AL + B = 0 \Rightarrow A = -\frac{1}{L}B.$

Στο σημείο $x = 0$: $A - (-A) = -\frac{2m|\lambda|}{\hbar^2}B$

$$\Rightarrow 2A = -\frac{2m|\lambda|}{\hbar^2}(-L)A \Rightarrow$$

$$\frac{m|\lambda|L}{\hbar^2} = 1.$$