

**Πανεπιστήμιο Αθηνών**  
**Τμήμα Φυσικής**

Κβαντομηχανική I

Χειμερινό Εξάμηνο 2004

**Ασκήσεις III: Πηγάδια, Fourier, Αβεβαιότητα.**

1. Θεωρείστε 1000 απειρόβαθα πηγάδια πλάτους  $L=10^{-5}$  cm. Τη στιγμή  $t=t_1$ , μετράμε την ενέργεια στο κάθε πηγάδι και βρίσκουμε 100 με ενέργεια  $4E_1$  και 900 με ενέργεια  $225E_1$ .
  - 1.1. Γράψτε μια κυματοσυνάρτηση για ένα σωματίδιο σε ένα από τα πηγάδια αυτά.
  - 1.2. Ποια η πιθανότητα σε ένα τυχαίο πηγάδι το σωματίδιο να βρίσκεται στο δεξί μισό του πηγαδιού? Στο αριστερότερο τέταρτο?
  - 1.3. Θεωρείστε τα πηγάδια όπου η ενέργεια βρίσκεται να είναι  $225E_1$ . Ποια η πιθανότητα το σωματίδιο να βρίσκεται στο δεξί μισό του πηγαδιού? Στο πρώτο αριστερό τέταρτο?

2. Χίλια νετρόνια βρίσκονται σε ένα απειρόβαθο πηγάδι πλάτους  $L$ . Την χρονική στιγμή  $t=0$ , η κυματοσυνάρτηση είναι  $\psi(x,0) = Ax(L-x)$ 
  - 2.1. Βρείτε τη σταθερά  $A$ .
  - 2.2. Πόσα σωματίδια βρίσκονται στο αριστερό μισό του πηγαδιού τη στιγμή  $t=0$ ?
  - 2.3. Πόσα σωματίδια έχουν ενέργεια  $E_5$  τη στιγμή  $t=0$ ?
  - 2.4. Ποια η πιθανότητα και τα 1000 νετρόνια να έχουν ενέργεια  $E_9$ ?
  - 2.5. Υπολογίστε την μέση ενέργεια για  $t=0$ .
  - 2.6. Βρείτε την κυματοσυνάρτηση για τυχαίο χρόνο  $t$
  - 2.7. Βρείτε την μέση ενέργεια για τυχαίο χρόνο  $t$ . Αποδείξτε ότι  $\langle E(t) \rangle = \langle E(0) \rangle$ .

3. Υπολογίστε τον μετασχηματισμό Fourier, δηλ. την συνάρτηση

$$g(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-ikx} dx$$

των εξής συναρτήσεων:

- 3.1. Της συνάρτησης δέλτα:  $f(x) = \delta(x-x_0)$
- 3.2. Της  $f(x) = \cos(2\pi k_0 x)$
- 3.3. Ενός «παλμού» δηλαδή της συνάρτησης  $f(x)=1/L$  για  $|x-x_0| < L/2$  και  $f(x)=0$  για  $|x-x_0| \geq L/2$ . Στο όριο  $L \rightarrow 0$  το αποτέλεσμά σας πρέπει να συμφωνεί με αυτό της άσκησης (3.1). Είναι όντως έτσι?

- 3.4. Της «τριγωνικής» συνάρτησης

$$f(x) = \begin{cases} 1 + \frac{x}{a} & (-a \leq x \leq 0) \\ 1 - \frac{x}{a} & (0 \leq x \leq a) \\ 0 & (|x| > a) \end{cases}$$

- 3.5. Της κατανομής Gauss:  $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$ . Πάρτε το όριο  $\sigma \rightarrow 0$ . Τι βλέπετε?

4. Δείξτε ότι αν ένας τελεστής  $\hat{O}$  έχει έστω και μία ιδιοτιμή που δεν είναι πραγματικός αριθμός, τότε δεν είναι Ερμιτιανός.

5. Έστω ο τελεστής  $\hat{C}$  που ορίζεται ως εξής:  $\hat{C}\phi = \phi^*$
- 5.1. Είναι Ερμιτιανός?
  - 5.2. Ποιες είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του  $\hat{C}$ ?
  - 5.3. Ποιες είναι οι ιδιοτιμές του?
6. Θεωρούμε το πείραμα των δύο οπών με δέσμη ηλεκτρονίων. Θεωρείστε ότι τα ηλεκτρόνια έχουν ορμή  $p$  και οι δύο οπές απέχουν απόσταση  $d$ . Ποια είναι η απόσταση ανάμεσα σε δύο διαδοχικές φωτεινές περιοχές αν η «οθόνη» βρίσκεται σε απόσταση  $D$  από τις δύο οπές;
- 6.1. Στο πείραμα του Johnson τα ηλεκτρόνια απιταχύνονται σε δυναμικό 50 kV, οι δύο οπές βρίσκονται σε απόσταση  $2 \times 10^{-4}$  cm ενώ η οθόνη βρίσκεται σε απόσταση 35 cm. Υπολογίστε το μήκος κύματος των ηλεκτρονίων όπως επίσης και την απόσταση δύο φωτεινών περιοχών. Με ποια συσκευή μπορούμε να μετρήσουμε μία τέτοια απόσταση?
  - 6.2. Έστω ότι αλλάζουμε την δέσμη ηλεκτρονίων σε δέσμη ακτίνων X. Αν φανταστούμε ότι αλλάζουμε όλες τις διαστάσεις με τον ίδιο παράγοντα (π.χ. διαπλασιάζουμε τα  $d$ ,  $D$ ) υπολογίστε τις νέα παραμέτρους του πειράματος.
7. Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά της θέσης  $x$  ενός σωματιδίου που περιορίζεται σε ένα απειρόβαθο πηγάδι πλάτους  $L$ . Υπολογίστε την μέση τιμή και την διασπορά της ορμής αν βρίσκεται σε κατάσταση ενέργειας  $E_1$ . Τέλος, υπολογίστε το γινόμενο  $\Delta x \Delta p$ . Ακολουθώντας πάρτε το όριο  $L \rightarrow \infty$ . Ποιες οι τιμές των  $\Delta x$ ,  $\Delta p$  και του γινομένου τους? Ερμηνεύστε το αποτέλεσμα σας.
8. Ένα σωματίδιο έχει κυματοσυνάρτηση που δίδεται από μία Gaussian, δηλαδή έχει την μορφή
- $$\psi(x) = \left( \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} \right)^{1/2} \exp\left( -\frac{(x-\mu)^2}{4\sigma^2} \right).$$
- Ποια είναι η πιο πιθανή τιμή της θέσης του σωματιδίου? Της ορμής του? Ποια η μέση θέση του? Η μέση ορμή του? Υπολογίστε τα  $\Delta x$ ,  $\Delta p$  και το γινόμενό τους.
9. Θεωρήστε το εξής πείραμα: ένα ηλεκτρόνιο παρατηρείται μέσω ακτίνων X, όπως κάναμε στο μάθημα, μέσα από ένα φακό ανοίγματος  $\omega$  ως προς το ηλεκτρόνιο. Συγχρόνως με την παρατήρηση της ακτίνας X, ενεργοποιούμε έναν ανιχνευτή ηλεκτρονίων που βρίσκεται ακριβώς στην ευθεία της πηγής των ακτίνων X και του ηλεκτρονίου. Έτσι μετράμε και την ορμή του ηλεκτρονίου. Έχουμε όντως ανακαλύψει ένα αντιπαράδειγμα της Αρχής της Αβεβαιότητας (AA)? Εξηγήστε προσεκτικά την απάντησή σας.
10. Υπολογίστε την αβεβαιότητα στην ορμή του ηλεκτρονίου στο άτομο του υδρογόνου. (Βρείτε την ακτίνα του ατόμου από την βιβλιογραφία/internet/ρωτώντας).
11. Στο παρελθόν έχουν γίνει πολλές προσπάθειες «απόδειξης» της κβαντικής θεωρίας αρχίζοντας από την AA. Εξηγήστε γιατί κάτι τέτοιο δεν θα μπορούσε να γίνει κατορθωτό.
12. Τελικά, τι έχετε καταλάβει, όντως «παίζει ζάρια ο Θεός» όπως αρνιόταν να πιστέψει ο Einstein, ή απλώς δεν μπορούμε να μετρήσουμε την θέση και ορμή όλων των σωματιδίων σε ένα σύστημα και γι' αυτό μας φαίνεται πως η φύση συμπεριφέρεται πιθανολογικά? Γράψτε μερικές καθαρές σκέψεις πάνω σε αυτό το θέμα.