

**Πανεπιστήμιο Αθηνών
Τμήμα Φυσικής**

Σημειώσεις VI: Αρχή της Αβεβαιότητας (ΑΑ)

“Οι προβλέψεις είναι δύσκολες, ιδιαίτερα αν αφορούν το μέλλον” Niels Bohr.

1. Αρχική «απόδειξη» Heisenberg

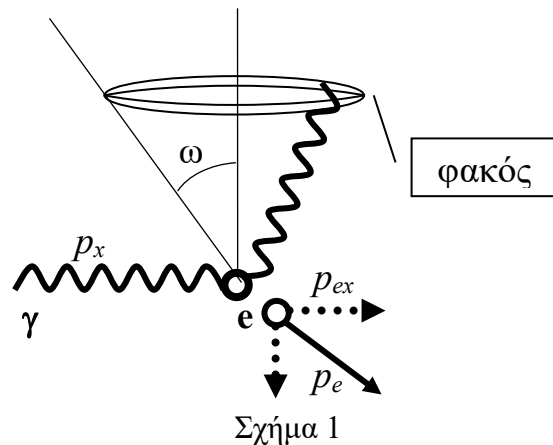
Είναι εξαιρετικά δύσκολο να ακολουθήσει κανείς το αρχικό σκεπτικό του Heisenberg στην δημοσίευση του 1927 – στην οποία και πρωτοπαρουσιάστηκε η σχέση της αβεβαιότητας ανάμεσα στην θέση και την ορμή ενός σώματος. Τα μαθηματικά βήματα παρουσιάζουν λογικά άλματα, και στο τέλος εκείνο που μένει στον αναγνώστη είναι το πείραμα της μέτρησης της θέσης ενός ηλεκτρονίου. Όπως εξηγήσαμε και στο μάθημα, η μέτρηση αυτή προϋποθέτει την σκέδαση ενός φωτονίου από το ηλεκτρόνιο που θέλουμε να μετρήσουμε.

Το φωτόνιο αυτό θα πρέπει να έχει μήκος κύματος μικρότερο της ακρίβειας με την οποία θέλουμε να μετρήσουμε την θέση του ηλεκτρονίου, έστω Δx . Συγκεκριμένα, αν ο φακός (που βρίσκεται σε απόσταση L από το ηλεκτρόνιο) έχει γωνία ανοίγματος ω , μέτρηση της θέσης του ηλεκτρονίου με ακρίβεια Δx απαιτεί το μήκος κύματος του φωτονίου να είναι

$$\lambda \leq \Delta x \tag{6.1}$$

Από την άλλη, το φωτόνιο, σκεδαζόμενο από το ηλεκτρόνιο, αποκτά μία ορμή p_x (ενώ η αρχική του ορμή ήταν p_{ex}). Έστω p_e η τελική ορμή του ηλεκτρονίου. Προφανώς, η συνολική ορμή (ως προς τον άξονα των x) διατηρείται.

Οι δύο ακραίες περιπτώσεις όπου η ακτίνα X μόλις εισέρχεται στον φακό (στην αριστερή ή δεξιά του άκρη, όπως φαίνεται στο σχήμα 1) αντιστοιχούν στις εξισώσεις



Συμπεραίνουμε ότι η ορμή του ηλεκτρονίου μετά την σκέδαση της ακτίνας X μπορεί να έχει όλες τις τιμές ανάμεσα στις δύο αυτές ακραίες τιμές, δηλ. την p_e και την p_{ex} . Επομένως η ορμή του ηλεκτρονίου δεν είναι ακριβώς ορισμένη: έχει μία αβεβαιότητα μεγέθους Δp_x . Αντικαθιστώντας το μήκος κύματος της ακτίνας X, $\lambda = h/p_x$, παίρνουμε $\Delta p_x \approx h/\Delta x$. Τέλος, με την προσέγγιση $\Delta p_x \approx h/\Delta x$ (μη ξεχνάτε την προσέγγιση στην εξ. (6.1)) έχουμε:

$$\Delta x \Delta p_x \geq h \tag{6.2}$$

Στην πιο πάνω εξίσωση δεν κρατήσαμε καν τον παράγοντα 2 – για να δείξουμε ότι ο υπολογισμός έχει ακρίβεια τάξης μεγέθους: πιστεύουμε τους αριθμούς μας μόνο μέχρι κάποιου παράγοντα ~10.

Η εξίσωση (6.2) έχει συνταρακτικές επιπτώσεις. Εν ολίγοις μας λέει ότι η μέτρηση της θέσης του ηλεκτρονίου με ακρίβεια Δx έχει ως αποτέλεσμα την εισαγωγή μίας αβεβαιότητας στην ορμή του ηλεκτρονίου, Δp , τέτοια ώστε το γινόμενο των δύο να είναι περίπου ίσο με την σταθερά του Planck, το h . Καλύτερα να το δούμε με τις λέξεις του ιδίου του Heisenberg:

“Τη χρονική στιγμή που μετράται η θέση, δηλαδή, τη χρονική στιγμή που το φωτόνιο σκεδάζεται από το ηλεκτρόνιο, το ηλεκτρόνιο υποβάλλεται σε μία ασυνεχή αλλαγή στην ορμή του. Η αλλαγή αυτή είναι μεγαλύτερη όσο μικρότερο είναι το μήκος κύματος του φωτός που χρησιμοποιείται, δηλ. όσο πιο ακριβής είναι η μέτρηση της θέσης. Την χρονική στιγμή που η θέση του ηλεκτρονίου γίνεται γνωστή, η ορμή του, επομένως, μπορεί να είναι γνωστή μόνο μέχρι τα μεγέθη που αντιστοιχούν σε αυτή την ασυνεχή αλλαγή. Επομένως, με όση πιο μεγάλη ακρίβεια μετράται η θέση με τόση μικρότερη ακρίβεια η ορμή του είναι γνωστή, και το αντίθετο.”

Η αρχή της αβεβαιότητας δηλώνει ότι αυτή η σχέση ισχύει γενικά. Δηλαδή, ότι αυτή η συνδυασμένη αβεβαιότητα θέσης-ορμής είναι γενική, και ισχύει παντού και πάντα. Δεν είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε συγχρόνως, με απόλυτη ακρίβεια, το «που είναι» και το «που πάει» ένα σωματίο. Θα υπάρχει πάντα μία αβεβαιότητα στη θέση και στην ορμή, τέτοια ώστε,

2. Σχέσεις αβεβαιότητας

Έστω δύο φυσικά μεγέθη, A και B . Κβαντομηχανικά, αντιπροσωπεύονται από ερμιτιανούς τελεστές, τους οποίους και συμβολίζουμε ως \hat{A} και \hat{B} αντίστοιχα. Οι αβεβαιότητες (διασπορές) στα δύο αυτά μεγέθη ορίζονται ως

Εφόσον οι \hat{A} και \hat{B} είναι ερμιτιανοί, μπορούμε να γράψουμε τα ολοκληρώματα ως εξής:

Και επομένως το γινόμενο των δύο διασπορών είναι

Εφαρμόζοντας την ανισότητα Schwartz (βλέπε απόδειξη στην ενότητα 7.1 πιο κάτω) έχουμε:

(6.3)

Όπου και πάλι χρησιμοποιήσαμε την ερμιτιανότητα των τελεστών (εδώ, του \hat{A}). Το ολοκλήρωμα είναι απλώς η αναμενόμενη τιμή του τελεστή

(6.4)

Επομένως η (6.3) γράφεται

(6.5)

με την ισότητα να ισχύει όταν

(6.6)

Η (6.4) μπορεί τώρα να γραφεί πιο συμμετρικά ως προς τους \hat{p}_x και \hat{p}_y :

(6.7)

Στο τελευταίο βήμα, ορίσαμε δύο νέους τελεστές, \hat{a}_x και \hat{a}_y οι οποίοι είναι ερμιτιανοί (γι' αυτό και βάλαμε το $\frac{1}{\sqrt{2}}$ στον ορισμό του \hat{a}_x). Η απόδειξη της ερμιτιανότητας των \hat{a}_x και \hat{a}_y είναι μία απλή άσκηση την οποία ενθαρρύνεστε να κάνετε.

Το επόμενο βήμα είναι να αντικαταστήσουμε την (6.7) στην (6.5):

Στο τελευταίο βήμα, χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι εφόσον οι \hat{a}_x και \hat{a}_y είναι ερμιτιανοί, οι μέσες τους τιμές είναι πραγματικοί αριθμοί, και επομένως το (τετράγωνο του) μέτρου του μιγαδικού αριθμού $\langle \hat{a}_x^2 + \hat{a}_y^2 \rangle$ είναι απλώς το άθροισμα των τετραγώνων.

Το τελευταίο βήμα έγκειται στην αναγνώριση ότι $\langle \hat{a}_x^2 + \hat{a}_y^2 \rangle = 2\langle \hat{a}_x^2 \rangle$ και επομένως

(6.8)

Όπου

Εν ολίγοις, έχουμε αποδείξει ότι για δύο φυσικά μεγέθη \hat{A} και \hat{B} , το γινόμενο της διασποράς τους για την ίδια κυματοσυνάρτηση, έχει μία ελάχιστη τιμή που δίδεται από την μέση τιμή του μεταθέτη τους:

(6.9)

Αυτή είναι και η γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας. Είναι σημαντικό να τονίσουμε ότι η απόδειξη της (6.9) χρησιμοποιεί την ίδια κυματοσυνάρτηση, ψ . Αυτό υποδηλώνει “ταυτόχρονη μέτρηση” των ποσοτήτων \hat{A} και \hat{B} . Αντίθετα, αν πρώτα μετρήσουμε την ποσότητα \hat{A} , η κυματοσυνάρτηση αμέσως μετά την μέτρηση αυτή θα είναι, σύμφωνα με τις αρχές της κβαντομηχανικής, μία από τις ιδιοσυναρτήσεις της \hat{A} . Ακόλουθες μετρήσεις της \hat{B} (σε πολλά τέτοια συστήματα) θα δώσουν διασπορά η οποία δεν έχει να κάνει με την αρχική διασπορά του \hat{B} . Είναι η σύγχρονη γνώση των \hat{A} και \hat{B} που δεν μπορεί να είναι απόλυτη – αν οι αντίστοιχοι τελεστές δεν μετατίθενται.

3. Σχέση αβεβαιότητας θέσης-ορμής

Γυρνάμε τώρα στην ειδική περίπτωση όπου τα μεγέθη \hat{x} και \hat{p}_x είναι η θέση και η ορμή ενός σωματιδίου. Για να δούμε αν μπορούμε να προσδιορίσουμε και τα δύο φυσικά μεγέθη ταυτόχρονα (το ξέρουμε, από την ΑΑ του Heisenberg ότι δεν μπορούμε) υπολογίζουμε τον μεταθέτη των δύο τελεστών. Στην περίπτωση των τελεστών θέσης και ορμής, γνωρίζουμε ήδη ότι

Τέλος, αντικαθιστούμε την ποσότητα αυτή στην γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας (6.9):

Δηλαδή “ανακαλύπτουμε” την σχέση αβεβαιότητας του Heisenberg. Μόνο που τώρα την αποδίδουμε στο γεγονός ότι οι τελεστές θέσης και ορμής δεν μετατίθενται, δηλαδή στο ότι $[x, p] = i\hbar$. Αυτό είναι καθαρά κβαντομηχανικό φαινόμενο: στην κλασική φυσική οι ποσότητες δεν αντιπροσωπεύονται από τελεστές, και ως εκ τούτου, ισχύει $[x, p] = 0$. Ο βαθμός στον οποίο οι δύο ποσότητες δεν είναι εναλλάξιμες (δηλ. ο μεταθέτης) είναι η ποσότητα \hbar δηλαδή σε τάξη μεγέθους δίδεται από την περίφημη σταθερά της κβαντομηχανικής, την σταθερά του Planck. Είναι δε προφανές ότι στο κλασικό όριο, δηλαδή στο όριο $\hbar \rightarrow 0$, οι δύο ποσότητες, x και p είναι εναλλάξιμες, και δεν τίθεται θέμα μη ικανότητας ταυτόχρονης μέτρησής τους.

4. Σύνδεση σχέσης αβεβαιότητας και κβαντικής μέτρησης

Πως συνάδει η σχέση (6.9) με την εικόνα της «μέτρησης» στην Κβαντική Μηχανική; Υπενθυμίζουμε ότι μέτρηση μιας φυσικής ποσότητας A αλλάζει την κυματοσυνάρτηση του συστήματος σε ιδιοσυνάρτηση του A . Σε αυτή την εικόνα, πως εξηγείται η αδυναμία γνώσης με βεβαιότητα του αποτελέσματος μιας μέτρησης της ποσότητας A ; Σύμφωνα με τα της Κβαντικής μέτρησης, θα πρέπει η ιδιοσυνάρτηση του A να μην είναι και ιδιοσυνάρτηση του x , όταν $A = p$. Όντως, υπάρχει το εξής θεώρημα: αν δυο τελεστές A και B έχουν κοινές ιδιοσυναρτήσεις, έστω τις ψ , τότε $[A, B] = 0$. Η απόδειξη είναι εύκολη: έστω ότι

$$A\psi = a\psi, \quad B\psi = b\psi \quad (6.10)$$

$$[A, B]\psi = 0 \quad (6.11)$$

Οι συναρτήσεις ψ έχουν δυο δείκτες για να δείξουμε ότι οι ιδιοτιμές των A και B δεν είναι αναγκαστικά οι ίδιες. Δρώντας στην (6.10) με B και στην (6.11) με A , και αφαιρώντας τις δυο εξισώσεις, παίρνουμε

$$\text{Όμως, κάθε συνάρτηση, } \psi, \text{ μπορεί να γραφθεί ως γραμμικός συνδυασμός των } \psi_n : \quad (6.12)$$

$$\text{Δρώντας με τον μεταθέτη } [A, B] \text{ στην (6.12), έχουμε:} \quad (6.13)$$

και εφόσον η (6.13) ισχύει για κάθε ψ_n , $[A, B] = 0$.

Το αντίστροφο ισχύει, μόνο με λίγο διαφορετική διατύπωση: αν δυο ερμιτιανοί τελεστές \hat{A}, \hat{B} , μετατίθενται, $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$, τότε μπορούμε να βρούμε ένα κοινό σύνολο ιδιοσυναρτήσεων. Η απόδειξη, για αριθμήσιμες ιδιοσυναρτήσεις, έχει ως εξής:

Έστω φ_i οι ιδιοσυναρτήσεις του \hat{A} , και a_i οι ιδιοτιμές του:

$$\hat{A}\varphi_i = a_i\varphi_i$$

Δρώντας με τον \hat{B} και χρησιμοποιώντας την μετάθεση των \hat{A}, \hat{B} :

$$\hat{B}\hat{A}\varphi_i = a_i\hat{B}\varphi_i \Rightarrow \hat{A}(\hat{B}\varphi_i) = a_i(\hat{B}\varphi_i) \quad (6.14)$$

Εν ολίγοις, η συνάρτηση $\hat{B}\varphi_i$ είναι ιδιοσυνάρτηση του \hat{A} με ιδιοτιμή a_i . Αν υπάρχει μόνο μια ιδιοσυνάρτηση για την κάθε ιδιοτιμή (αν οι ιδιοσυναρτήσεις του \hat{A} δεν είναι «εκφυλισμένες»), τότε

$$\hat{B}\varphi_i \propto \varphi_i \Rightarrow \exists b_i \text{ τέτοιο ώστε } \hat{B}\varphi_i = b_i\varphi_i$$

και άρα οι \hat{A}, \hat{B} έχουν κοινές ιδιοσυναρτήσεις.

Το θεώρημα ισχύει και στην περίπτωση που ο \hat{A} έχει περισσότερες από μια ιδιοσυνάρτηση με την ίδια ιδιοτιμή. Η απόδειξη, για να μην χάνουμε τον ειρμό της σκέψης μας, βρίσκεται στο μαθηματικό συμπλήρωμα.

4.1 Κυματοσυνάρτηση ελάχιστης αβεβαιότητας

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε την $\psi(x)$ που αντιστοιχεί στην ελάχιστη αβεβαιότητα θέσης-ορμής, δηλ. στην περίπτωση $\Delta x \Delta p = \hbar/2$. Για να ισχύσει η ισότητα, θα πρέπει:

$$\lambda(\hat{A} - \langle A \rangle)\psi(x) = (\hat{B} - \langle B \rangle)\psi(x) \quad (6.15)$$

$$|\langle F \rangle| = 0 \quad (6.16)$$

Από τις (6.15) και (6.16) έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} \int \psi^* (\hat{A} - \langle A \rangle) (\hat{B} - \langle B \rangle) \psi dx &= \lambda (\Delta A)^2 \\ \int \psi^* (\hat{B} - \langle B \rangle) (\hat{A} - \langle A \rangle) \psi dx &= \frac{1}{\lambda} (\Delta B)^2 \end{aligned} \right\} \Rightarrow |\langle F \rangle| = \frac{1}{\lambda} (\Delta B)^2 + \lambda (\Delta A)^2 = 0 \Rightarrow \frac{1}{\lambda} (\Delta B)^2 = -\lambda (\Delta A)^2$$

Με τον ίδιο συλλογισμό, παίρνοντας τη διαφορά, βρίσκουμε:

$$i\langle C \rangle = \lambda (\Delta A)^2 - \frac{1}{\lambda} (\Delta B)^2 = 2\lambda (\Delta A)^2 \Rightarrow \lambda = \frac{i\langle C \rangle}{2(\Delta A)^2} \quad (6.17)$$

Ας εφαρμόσουμε το αποτέλεσμα στην περίπτωση $\hat{A} = \hat{x}$, $\hat{B} = \hat{p}_x$. Η (6.15) γράφεται

$$\left(-i\hbar \frac{\partial}{\partial x} - \langle p_x \rangle \right) \psi(x) = \frac{i\hbar}{2(\Delta x)^2} (x - \langle x \rangle) \psi(x)$$

$$\Rightarrow \frac{d\psi}{dx} = \frac{i}{\hbar} \left[\langle p_x \rangle + \frac{i\hbar}{2(\Delta x)^2} (x - \langle x \rangle) \right] \psi(x) \quad (6.18)$$

Η λύση της (6.18) μπορεί να γραφεί αμέσως:

$$\psi(x) = N \cdot \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \langle p_x \rangle x - \frac{(x - \langle x \rangle)^2}{4(\Delta x)^2} \right\}$$

όπου N σταθερά κανονικοποίησης.

Παίρνοντας το μέτρο στο τετράγωνο, η πυκνότητα πιθανότητας στο χώρο των θέσεων γράφεται

$$|\psi(x)|^2 = |N|^2 \cdot e^{-\frac{(x - \langle x \rangle)^2}{2(\Delta x)^2}}$$

Δηλ. η θέση έχει μέση τιμή $\langle x \rangle$ και διασπορά (Δx) . Και ξέρουμε ότι ο μετασχηματισμός Fourier μιας Gaussian είναι επίσης Gaussian. Επομένως και στο χώρο των ορμών έχουμε την ίδια κατανομή, μόνο που εκεί η μέση τιμή είναι $\langle p_x \rangle$ και η διασπορά $(\Delta p) = \hbar/2\Delta x$. Αυτό φαίνεται από την (6.17):

$$\lambda = \frac{i\hbar}{2(\Delta x)^2}$$

$$(\Delta B)^2 = -\lambda^2 (\Delta A)^2 \Rightarrow (\Delta p_x)^2 = -\frac{\hbar^2}{4} \left(\frac{1}{\Delta x} \right)^4 \cdot (\Delta x)^2 \Rightarrow \Delta p_x = \frac{\hbar}{2\Delta x}$$

5. Χρήση της ΑΑ για υπολογισμούς με ακρίβεια τάξης μεγέθους

Η σχέση αβεβαιότητας είναι εξαιρετικά χρήσιμη στον υπολογισμό, με ακρίβεια τάξης μεγέθους, ουσιαστικά όλων των κβαντικών ποσοτήτων μέσω «ημι-κλαστικών» εικόνων. Τα ακόλουθα παραδείγματα μας δίνουν μία μικρή γεύση:

5.1. Απειρόβαθο πηγάδι

Είναι προφανές πως το σωματίδιο είναι παγιδευμένο σε περιοχή εύρους $\sim L$. Άρα η ορμή του θα έχει μία αβεβαιότητα \hbar/L . Επειδή είναι σε δέσμια κατάσταση, $(\Delta p)^2 = \langle p^2 \rangle - \langle p \rangle^2 = \langle p^2 \rangle \Rightarrow \Delta p = \sqrt{\langle p^2 \rangle}$. Άρα η ενέργειά του θα είναι

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} \sim \frac{\hbar^2}{2mL^2}$$

το οποίο είναι εκπληκτικά κοντά στην πραγματική ενέργεια της θεμελιώδους κατάστασης (λείπει μόνο ο παράγοντας π^2).

5.2. Άτομο Υδρογόνου

Η κλασική εικόνα είναι ένα ηλεκτρόνιο που περιστρέφεται σε κυκλική τροχιά γύρω από το πρωτόνιο. Η ολική ενέργεια του ατόμου είναι επομένως

$$E = K + V = \frac{p^2}{2m} - \frac{e^2}{a_0}$$

όπου a_0 η ακτίνα του ατόμου (δηλ. η ακτίνα του Bohr, όπως θα βρούμε πάραυτα). Η κλασσική εικόνα συμπληρώνεται από την εξίσωση της ηλεκτρομαγνητικής έλξης με την επιτάχυνση του ηλεκτρονίου, δηλαδή:

$$\frac{mv^2}{a_0} = \frac{e^2}{a_0^2} \Rightarrow \frac{p^2}{m} = \frac{e^2}{a_0} \Rightarrow E = -\frac{e^2}{2a_0}$$

Υπάρχει, δηλαδή, μόνο μία ελεύθερη μεταβλητή, η ακτίνα της τροχιάς. Η “ημικλασσική” ανάλυση, έγκειται στην εισαγωγή της ΑΑ για να υπολογισθεί, με ακρίβεια τάξης μεγέθους, η ακτίνα αυτή. Συγκεκριμένα, αν όντως το ηλεκτρόνιο είναι περιορισμένο σε κάποια περιοχή εύρους $\Delta x \sim r$, τότε η ορμή του είναι αβέβαιη κατά \hbar / r . Μια και δεν ξέρουμε τίποτε για την ορμή του, θεωρούμε ότι η τιμή της δίδεται από την αβεβαιότητα αυτή: $p \sim \Delta p$ (μπορούμε επίσης να πάρουμε $\Delta p^2 = \langle p^2 \rangle$) όπως πριν. Η ιδέα είναι η ίδια). Αντικαθιστώντας στην πιο πάνω εξίσωση βρίσκουμε

$$\frac{\hbar^2}{mr^2} = \frac{e^2}{r_0} \Rightarrow r = \frac{\hbar^2}{me^2} = a_0$$

Αναγνωρίζουμε στην τιμή του r την ακτίνα του Bohr. Αντικαθιστώντας στην ενέργεια, βρίσκουμε:

$$E = -\frac{me^4}{2\hbar^2}$$

Προφανώς, η απόλυτη ισότητα του αποτελέσματος αυτού και της πραγματικής ενέργειας (δηλ. με απόλυτη ακρίβεια) είναι τυχαία. Δεν πρέπει, γενικά, να περιμένουμε ακρίβεια καλύτερη από μία τάξη μεγέθους. (Επιπλέον, δεν χρησιμοποιήσαμε το $\frac{1}{2}$ στην ΑΑ).

5.3. Απλός Αρμονικός Ταλαντωτής

Η ενέργεια δίδεται ως

$$E = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

$$\langle E \rangle = \frac{\langle p^2 \rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \langle x^2 \rangle = \frac{\Delta p^2}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2 \Delta x^2$$

Χρησιμοποιώντας $\Delta x \Delta p \geq \frac{\hbar}{2} \Rightarrow \Delta p \geq \frac{\hbar}{2\Delta x}$

$$\langle E \rangle \geq \frac{\hbar^2}{8m(\Delta x)^2} + \frac{1}{2}m\omega^2 (\Delta x)^2$$

Η ελάχιστη ενέργεια δίδεται για

$$\frac{d\langle E \rangle}{d(\Delta x)} = 0 \Rightarrow -\frac{\hbar^2}{4m(\Delta x)^2} + m\omega^2 (\Delta x)^2 = 0 \Rightarrow (\Delta x)^4 = \frac{\hbar^2}{4m^2\omega^2} \Rightarrow (\Delta x)^2 = \frac{\hbar}{2m\omega}$$

Αντικαθιστώντας στη σχέση αβεβαιότητας βρίσκουμε

$$\Delta p^2 = \frac{\hbar^2}{4\Delta x^2} = \frac{\hbar^2 2m\omega}{4\hbar} = \frac{1}{2}m\hbar\omega$$

και άρα η ελάχιστη τιμή της μέσης ενέργειας είναι

$$\langle E \rangle_{\min} = \frac{1}{2m} \cdot \frac{1}{2} m \hbar \omega + \frac{1}{2} m \omega^2 \cdot \frac{\hbar}{2m\omega} = \frac{1}{2} \hbar \omega$$

Βλέπουμε ότι η ελάχιστη δυνατή ενέργεια δεν είναι μηδέν, όπως στο κλασσικό σύστημα.

5.4. Σωματίδιο που «ακουμπά» σε τραπέζι

Θεωρήστε ένα σωματίδιο μάζας m , το οποίο αιωρείται πάνω από αδιάτρητο τραπέζι. Βρείτε το μέσο ύψος στο οποίο αιωρείται, αν η μόνη δύναμη στο σωματίδιο είναι η βαρύτητα

$$E = \frac{p_z^2}{2m} + mgz$$

Παίρνοντας $p_z \sim \Delta p_z$ $z \sim \Delta z$, $\langle E \rangle \sim \frac{\hbar^2}{2m\Delta z^2} + mg\Delta z$

Βρίσκουμε το ελάχιστο:

$$\frac{dE}{dz} = -\frac{\hbar^2}{m\Delta z^3} + mg = 0 \Rightarrow \Delta z = \left(\frac{\hbar^2}{m^2 g} \right)^{1/3}$$

Ας το δούμε αριθμητικά για ένα σωματίδιο μάζας 1g

$$\Delta z \sim \left(\frac{1.2 \times 10^{-54} \text{ erg}^2 \text{ s}^2}{10^2 \cdot 10^3 \text{ g}^2 \text{ cm}} \right)^{1/3} \sim 10^{-19} \text{ cm}$$

και γι' αυτό το λόγο δεν αντιλαμβανόμαστε την «αιώρηση» αυτή. Παίρνοντας, ωστόσο, ένα ηλεκτρόνιο, $m = 10^{-27} \text{ g}$, το μέσο z είναι πολύ διαφορετικό:

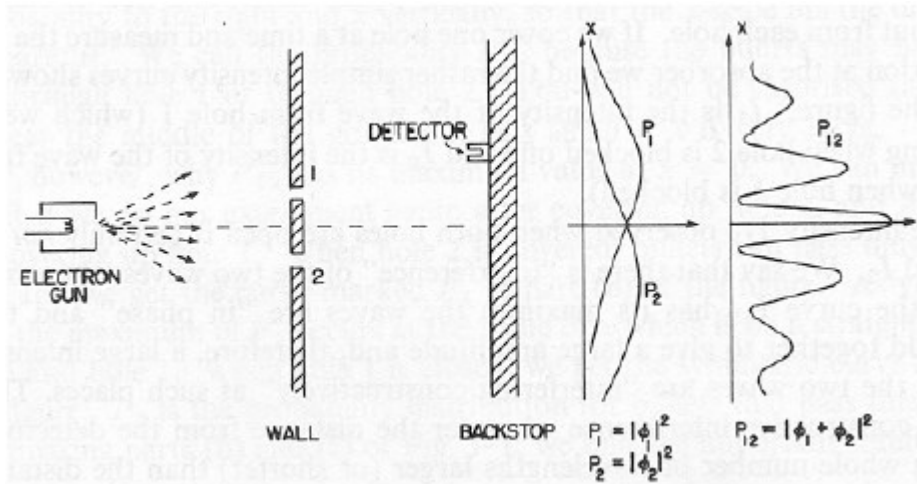
$$z \sim \Delta z \sim \left(\frac{1.2 \times 10^{-54}}{10^{-54} \cdot 10^3} \right)^{1/3} \text{ cm} = 10^{-1} \text{ cm} = 1 \text{ mm}$$

6. Πείραμα δύο οπών και αβεβαιότητα

Επανερχόμαστε τώρα στο γνωστό πείραμα των δύο οπών. Περιγράφουμε τα τεκταινόμενα, δηλαδή την παρουσία των κροσσών, με τον υπολογισμό της πιθανότητας να βρεθεί το ηλεκτρόνιο, μετά από τον μακρύ του δρόμο από την πηγή προς το πέτασμα, στην κάθε θέση, y , πάνω στο πέτασμα.

Ο τρόπος που υπολογίζουμε την πιθανότητα αυτή μας έρχεται από την πρώτη αρχή της κβαντομηχανικής, η οποία παραδέχεται την ύπαρξη μιας μιγαδικής συνάρτησης ψ , του πλάτους πιθανότητας ή «κυματοσυνάρτησης», η οποία και περιγράφει πλήρως το σύστημα και της οποίας το απόλυτο τετράγωνο είναι η πυκνότητα πιθανότητας. Στο συγκεκριμένο παράδειγμα, η ψ είναι συνάρτηση της συντεταγμένης y , δηλαδή του σημείου στο πέτασμα, δηλ. $\psi(y)$, και $|\psi(y)|^2$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας να βρεθεί το σωματίδιο στη θέση y :

$$|\psi(y)|^2 = \frac{dP}{dy} \Rightarrow P(a \leq y \leq b) = \int_a^b |\psi(y)|^2 dy$$



Σχήμα 2: το πείραμα των δύο οπών

Αν τώρα είναι ανοικτή μόνο μία οπή, η 1, η κυματοσυνάρτηση είναι ψ_1 – και προφανώς δεν παρατηρούμε κανένα φαινόμενο συμβολής στο πέτασμα. Αντίστοιχα, με μόνο την οπή 2 ανοικτή, η κυματοσυνάρτηση είναι κάποια άλλη – έστω ψ_2 . Τέλος, αν και οι δύο οπές είναι ανοικτές, η ολική κυματοσυνάρτηση είναι το άθροισμα των δύο, και η πιθανότητα να χτυπήσει το σωματίο στο πέτασμα στη γειτονιά του σημείου y είναι

$$|\psi_1(y) + \psi_2(y)|^2 dy = [|\psi_1|^2 + |\psi_2|^2 + 2|\psi_1||\psi_2|\cos\phi] dy \quad (6.19)$$

($\phi = \theta_2 - \theta_1$ είναι η διαφορά φάσης των πλατών $\psi_1 = |\psi_1|e^{i\theta_1}$ και $\psi_2 = |\psi_2|e^{i\theta_2}$)

Το συνταρακτικό της υπόθεσης, βεβαίως, είναι ότι η εξίσωση (6.19) υπονοεί ότι το φαινόμενο “το σωματίο παρατηρείται στο σημείο y ” υπολογίζεται στατιστικά, αθροίζοντας τα πλάτη πιθανότητας για κάθε ξεχωριστή δυνατότητα του σωματίου. Αυτό μοιάζει -από τεχνικής πλευράς- μ' αυτό που θα κάναμε αν το πείραμα αφορούσε σε κλασικά κύματα όπου θεωρούμε ότι στο πέτασμα φθάνουν κυμάνσεις προερχόμενες και από τις δύο οπές. Επομένως για να βρούμε τη συνολική ένταση στο πέτασμα πρέπει να αθροίσουμε τα πλάτη των επιμέρους κυμάνσεων και να πάρουμε το απόλυτο τετράγωνο του αποτελέσματος.

Όπως έχουμε συζητήσει ήδη όταν πρωτοείδαμε το πείραμα των δύο οπών, η στατιστική συμπεριφορά μίας δέσμης σωματίων (δηλ. **αδιαίρετων οντοτήτων**) καθορίζεται από την (6.19) και παρουσιάζεται φορμαλιστικά ανάλογη με τη συμβολή κλασικών κυμάτων: αν βάλουμε μία πολύ ασθενική πηγή σωματίων, έτσι ώστε ανά πάσα στιγμή μόνο ένα σωματίο βρίσκεται ανάμεσα στην πηγή και το πέτασμα, και πάλι παρατηρούμε κροσσούς στον αριθμό των σωματίων που καταλήγουν στο πέτασμα. Η ένταση του φωτός σε ένα σημείο, όπως έχουμε ήδη πει, αντιστοιχεί στον αριθμό των σωματίων που πέφτουν στο σημείο αυτό. Εκείνο που είναι λοιπόν απίστευτο, είναι ότι αν αφήσουμε ένα και μόνο ένα φωτόνιο (ή ηλεκτρόνιο!) από μία πηγή, σε ένα πείραμα δύο οπών, και παρατηρήσουμε το που θα χτυπήσει στο πέτασμα, αυτό το ένα και μοναδικό σωματίο, που προφανώς, περνάει από μία οπή μόνο (και προφανώς όχι και από τις δύο!) δεν θα καταλήξει ποτέ, όσες φορές και αν επαναλάβουμε το πείραμα, σε ένα “σκοτεινό” σημείο, δηλ. σε ένα σημείο στο οποίο το μέτρο του αθροίσματος $|\psi_1 + \psi_2|$ είναι μηδέν και θα είναι πιο πιθανό να βρεθεί σε κάποιες περιοχές από ότι σε άλλες.

Εν ολίγοις, το φαινόμενο συμβολής που παρατηρούμε στο πέτασμα, δηλ. οι κροσσοί στον αριθμό των σωματίων, δεν οφείλεται στην συμβολή ανεξαρτήτων σωματίων, αυτών που περνούν από την οπή 1 και αυτών που περνούν από την οπή 2. Αυτό έχει επαληθευθεί πειραματικά, δηλαδή έτσι όντως συμπεριφέρεται η φύση: το φαινόμενο της συμβολής (με την έννοια που συζητήσαμε παραπάνω) παρατηρείται ακόμα κι όταν ο χρόνος ανάμεσα σε δύο σωματία (ηλεκτρόνια ή φωτόνια) που βρίσκονται καθοδόν προς το πέτασμα είναι τόσο μεγάλος που δεν υπάρχει περίπτωση να συμβληθούν μεταξύ τους.

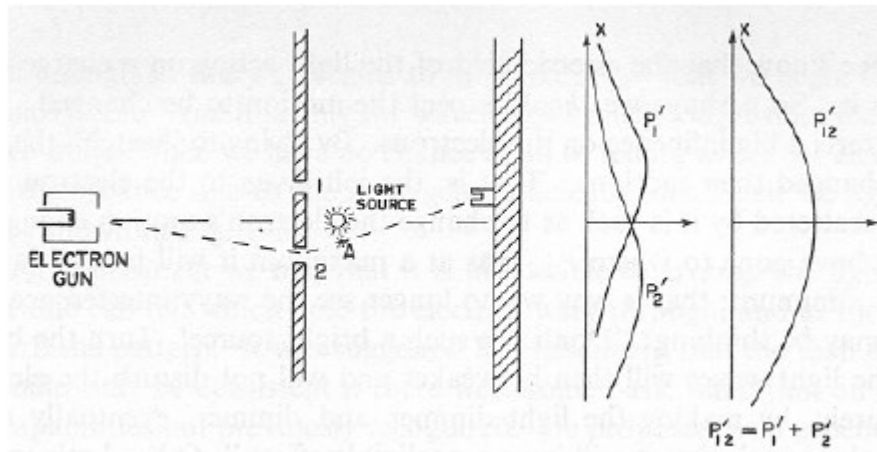
Προφανώς, το σωματίο ως αδιαίρετη οντότητα δεν αυτοσυμβάλλεται! Για να περιγράψουμε τη συμπεριφορά του όμως πρέπει να λάβουμε υπόψη τη δυνατότητα να περάσει από την πρώτη οπή και τη δυνατότητα να περάσει από τη δεύτερη. Και αυτό πρέπει να το κάνουμε με έναν πολύ συγκεκριμένο τρόπο: Αθροίζοντας τα ξεχωριστά πλάτη πιθανότητας και όχι τις αντίστοιχες πιθανότητες. Αυτή είναι τελικά η ερμηνεία της (6.19) αν το σύστημά μας περιέχει ένα και μόνο ένα σωματίο!

Είναι δύσκολο να δώσουμε κλασικές εικόνες για την περιγραφή αυτή. Θα μπορούσαμε, για παράδειγμα, να σκεφτούμε ότι το σωματίο συμπεριφέρεται σαν να περνάει ταυτόχρονα και από τις δύο οπές έστω κι αν στην πραγματικότητα περνάει μόνο από τη μία; Το κρίσιμο σημείο εδώ είναι ότι η φράση "το σωματίο περνάει από την μια ή την άλλη οπή" περιλαμβάνει αναγκαστικά μια μέτρηση που θα μας πει *ποια από τις εναλλακτικές δυνατότητες πραγματώθηκε*. Και εδώ είναι που παρεμβάλλεται πάλι ο Heisenberg: "Είναι αδύνατον να σχεδιάσουμε μια πειραματική διάταξη με την οποία να προσδιορίσουμε από ποια από τις οπές περνάει το ηλεκτρόνιο και ταυτόχρονα να μην το διαταράξουμε τόσο ώστε να καταστραφούν τα φαινόμενα συμβολής."

Στην πραγματικότητα υπάρχουν τρία πειράματα που μπορούν να γίνουν:

- (α) Πιστοποιούμε ότι το ηλεκτρόνιο περνάει από την οπή 1 και ακολούθως παρατηρούμε το σημείο πρόσπτωσης του στο πέτασμα.
- (β) Πιστοποιούμε ότι το ηλεκτρόνιο περνάει από την οπή 2 και ακολούθως παρατηρούμε το σημείο πρόσπτωσης του στο πέτασμα.
- (γ) Το ηλεκτρόνιο περνάει από κάποια από τις οπές, χωρίς να ξέρουμε από ποια πέρασε, ακολούθως παρατηρούμε το σημείο πρόσπτωσης του στο πέτασμα.

Για να μην πολυλογούμε, στα δύο πρώτα πειράματα οι κροσσοί εξαφανίζονται. Δεν παρατηρούμε φαινόμενο συμβολής. Συγκεκριμένα, αν παρεμβάλουμε έναν παρατηρητή (πολύ μικρό...) ανάμεσα στις δύο οπές και του ζητήσουμε να καταγράψει από ποια από τις δύο οπές περνάει το κάθε ηλεκτρόνιο, το φαινόμενο συμβολής εξαφανίζεται. Αν αντιθέτως ο παρατηρητής απομακρυνθεί, οι κροσσοί επανέρχονται.



Σχήμα 3: πείραμα δύο οπών με προσδιορισμό της οπής από την οποία περνάει το ηλεκτρόνιο. Οι κροσσοί δεν εμφανίζονται πλέον.

Δεν πρόκειται περί μαγείας, με την έννοια ότι δεν είναι η παρουσία του παρατηρητή που εξαφανίζει τους κροσσούς, αλλά το γεγονός της παρατήρησης. Ο παρατηρητής, για να μπορέσει να διακρίνει από ποια οπή πέρασε ένα ηλεκτρόνιο, πρέπει να μετρήσει την θέση του ηλεκτρονίου – αμέσως μετά το πέρασμά του – με τέτοια ακρίβεια ούτως ώστε να μπορέσει να ξεχωρίσει τις δύο δυνατότητες (πέρασμα από την μία ή την άλλη οπή). Δεν μπορεί όμως να περιορίσει τη θέση αυτή χωρίς να αλλάξει την ορμή του ηλεκτρονίου. Αν λοιπόν μετρήσει την θέση του με ακρίβεια Δy , τότε αμέσως μετά η ορμή του (ως προς τον άξονα των y) θα είναι $\Delta p_y \sim \hbar/\Delta y$. Ως αποτέλεσμα, η θέση στην οποία θα προσκρούσει στο πέτασμα έχει τώρα μία αβεβαιότητα ΔY που δίδεται από την σχέση (D είναι η οριζόντια απόσταση από τις δύο οπές και το πέτασμα):

$$\Delta Y = D \frac{\Delta p_y}{p_x} \sim \frac{\hbar D}{p_x \Delta y}$$

Η απόσταση δύο κροσσών (η δύο σκοτεινών περιοχών) είναι $A = D \sin \Theta = D\lambda/a = Dh/ra$ (όπου a η απόσταση των δύο οπών. Αποδείξτε τον τύπο για το A – είναι εύκολο). Επομένως αν όντως το ηλεκτρόνιο μετρήθηκε με ακρίβεια τέτοια ώστε να ξεχωρίζει το από πού πέρασε, $\Delta y \ll a$, και άρα

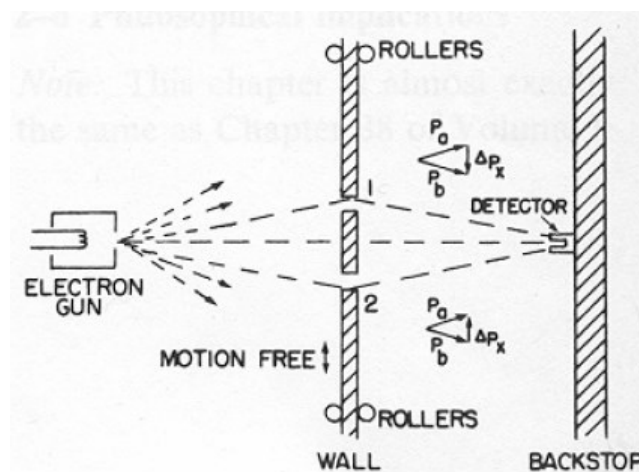
$$\Delta Y = D \frac{\Delta p_y}{p_x} \sim \frac{\hbar D}{p_x \Delta y} \gg \frac{\hbar D}{p_x a} \sim A$$

Το αποτέλεσμα είναι η θέση στην οποία προσπίπτει στο πέτασμα τώρα να είναι αβέβαιη κατά ΔY που είναι πολύ μεγαλύτερο από την απόσταση ανάμεσα στους κροσσούς. Οι τελευταίοι, επομένως, δεν επιβιώνουν και η συμβολή εξαφανίζεται.

Στο τρίτο πείραμα, απαραίτητη προϋπόθεση είναι όχι η μη ύπαρξη παρατηρητή, αλλά η μη ύπαρξη παρατήρησης. Πρέπει να είναι ξεκάθαρο, ότι αν υπάρχει μία πηγή φωτονίων με αρκετά μικρό μήκος κύματος (ώστε τα φωτόνια αυτά να μπορούν να διακρίνουν από ποια οπή πέρασε το κάθε ηλεκτρόνιο) και δεν υπάρχει κανένας παρατηρητής να καταγράψει τον αριθμό της οπής, οι κροσσοί και πάλι δεν θα εμφανισθούν. Δεν είναι ο παρατηρητής που αλλάζει τα πράγματα – είναι η δυνατότητα γνώσης, η οποία προέρχεται μόνο από αλληλεπίδραση με το σύστημα. Στην προκειμένη περίπτωση, τα φωτόνια αυτά θα προσκρούσουν στο ηλεκτρόνιο, και επειδή έχουν μεγάλη ορμή (μικρό μήκος κύματος) θα μεταδώσουν αντίστοιχα μεγάλη ορμή στο ηλεκτρόνιο – με όλα τα αποτελέσματα που αναφέραμε πιο πάνω.

Εν ολίγοις, για να παρατηρήσουμε τους κροσσούς, πρέπει τα ηλεκτρόνια που πλησιάζουν στις δύο οπές να έχουν τέτοια αβεβαιότητα θέσης ώστε να μην μπορούμε να προσδιορίσουμε από ποια οπή θα περάσουν.

Σας αφήνουμε με μία καλή άσκηση από τον Feynman. Φανταστείτε ότι ο τοίχος με τις δύο οπές μπορεί να κυλιστεί ελεύθερα στην κατεύθυνση του y – όπως φαίνεται στο σχήμα 4. Μπορούμε να μετρήσουμε την ορμή του τοίχου μετά το πέρασμα του ηλεκτρονίου από (μία από) τις δύο οπές. Αυτό θα οδηγούσε στην σύγχρονη μέτρηση της θέσης και της ορμής του ηλεκτρονίου με ακρίβεια που υπερβαίνει τα της ΑΑ. Υπολογίστε την ορμή του τοίχου στις δύο περιπτώσεις (πέρασμα από την οπή 1, πέρασμα από την οπή 2), και σκεφθείτε με τι ακρίβεια πρέπει να είναι γνωστή η αρχική ορμή του τοίχου – για να μπορεί κανείς από την διαφορά των δύο ορμών να συμπεράνει από ποια οπή πέρασε το ηλεκτρόνιο. Τι σημαίνει αυτό για την θέση του τοίχου; Συγκρίνετε αυτό με την απόσταση των κροσσών.



Σχήμα 4: Παραλλαγή του πειράματος των δύο οπών. Ο ενδιάμεσος τοίχος μπορεί να κινηθεί ελεύθερα στον κάθετο άξονα. Η κίνηση αυτή προσδιορίζει (έμμεσα) την οπή από την οποία διήλθε το ηλεκτρόνιο. Οι κροσσοί εξαφανίζονται...

7. Σχέση αβεβαιότητας ενέργειας-γρόνου

7.1. Φορμαλιστική «απόδειξη» της σχέσης αβεβαιότητας ενέργειας-γρόνου

Ξεκινάμε από τη γενικευμένη σχέση αβεβαιότητας

$$\Delta A \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{A}, \hat{B}] \rangle \right|$$

και παίρνουμε $\hat{A} = \hat{H}$. Ερμηνεύουμε τη διασπορά στη μέση τιμή της $\langle \hat{H} \rangle$ ως την αβεβαιότητα στην ενέργεια, ΔE :

$$\Delta E \Delta B \geq \frac{1}{2} \left| \langle [\hat{H}, \hat{B}] \rangle \right| \quad (6.20)$$

Ωστόσο, για οποιοδήποτε φυσικό μέγεθος, έχουμε:

$$\frac{d \langle B \rangle}{dt} = \frac{i}{\hbar} \langle [\hat{H}, \hat{B}] \rangle \quad (6.21)$$

Από τις (6.20) και (6.21) έχουμε:

$$\Delta E \Delta B \geq \frac{\hbar}{2} \left| \frac{d\langle B \rangle}{dt} \right|$$

Ερμηνεύουμε το κλάσμα

$$\frac{\Delta B}{|d\langle B \rangle/dt|} = \delta t \quad (6.22)$$

Αφού η (6.22) μας λέει ότι

$$\Delta B = \left| \frac{d\langle B \rangle}{dt} \right| \delta t \quad (6.23)$$

με το ρυθμό $|d\langle B \rangle/dt|$, σε χρόνο δt η ποσότητα B αποκτά αβεβαιότητα ΔB . Επειδή το δt δεν είναι η αβεβαιότητα στο χρόνο, χρησιμοποιούμε το σύμβολο δt (αντί του Δt). Σημειώνουμε ότι αν ο ρυθμός μεταβολής της $\langle B \rangle$ είναι σταθερός, τότε η (6.23) ισχύει ακριβώς. Εν ολίγοις,

$$\Delta E \delta t \geq \frac{\hbar}{2}$$

Έχουμε αποδείξει τη σχέση αυτή θεωρώντας μία τυχαία φυσική ποσότητα B , με αποτέλεσμα το χρονικό διάστημα Δt να εξαρτάται από τη συγκεκριμένη φυσική ποσότητα. Ωστόσο, η σχέση αβεβαιότητας ενέργειας-χρόνου εμπεριέχει αυτό το χρονικό διάστημα και την αβεβαιότητα στην ενέργεια, ΔE . Αυτό είναι τουλάχιστον περίεργο, μια και ουσιαστικά σημαίνει ότι μπορούμε να έχουμε πιο ακριβή μέτρηση της ενέργειας με την επιλογή άλλης φυσικής ποσότητας που αλλάζει με πολύ αργό ρυθμό (και επομένως κάνοντας το Δt πολύ μεγάλο). Είναι σημαντικό να κατανοήσουμε ότι η σχέση αβεβαιότητας δεν εκφράζει αυτό, αλλά κάτι πιο γενικό: για να έχουμε μία ακριβή μέτρηση της ενέργειας, πρέπει όλες οι άλλες φυσικές ποσότητες να αλλάζουν με αργό ρυθμό. Ωστόσο αυτό γεννάει ένα νέο ερώτημα: πως είναι δυνατόν να συμβαίνει αυτό, όταν μερικές φυσικές ποσότητες δεν μετατίθενται και επομένως δεν μπορούν να μετρηθούν συγχρόνως; Η απάντηση έγκειται στο ότι αναφερόμαστε στην αλλαγή της μέσης τιμής της κάθε φυσικής ποσότητας, και αυτή μπορεί να είναι εξαιρετικά καλά ορισμένη, ακόμα και αν η φυσική ποσότητα έχει μεγάλη αβεβαιότητα. Μάλιστα, όπως έχουμε ήδη δει, σε ένα σύστημα με ορισμένη ενέργεια η παράγωγος $d\langle Q \rangle/dt = 0$ για όλες τις φυσικές ποσότητες Q ! Συμπεραίνουμε ότι όντως για να μετρήσουμε ακριβώς την ενέργεια ενός συστήματος πρέπει όλες οι φυσικές ποσότητες να έχουν πολύ μικρό ρυθμό αλλαγής (μηδέν). Για να έχουμε δε αβεβαιότητα στην ενέργεια, χρειαζόμαστε υπέρθεση τουλάχιστον δύο στάσιμων καταστάσεων με διαφορετικές ενέργειες. Μέτρηση της ενέργειας σε ένα τέτοιο σύστημα δίνει τη μία από τις δύο τιμές, ωστόσο δεν μπορούμε εκ των προτέρων να πούμε ποια από τις δύο. Σε αυτή την περίπτωση, οι μέσες τιμές των φυσικών ποσοτήτων θα μεταβάλλονται με το χρόνο.

7.2. Μετασχηματισμός Fourier της $\psi(t)$

Μπορούμε να αναπτύξουμε την κυματοσυνάρτηση $\psi(t)$ (δεν θα κοιτάμε την εξάρτηση από τη θέση, οπότε παραλείπουμε το x στο $\psi(x,t)$) σε άθροισμα διαφορετικών συχνοτήτων στο χρόνο. Για συνεχείς συχνότητες, έχουμε το μετασχηματισμό Fourier:

$$\psi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{\psi}(\omega) e^{-i\omega t} d\omega \quad (6.24)$$

και τον αντίστροφο του:

$$\tilde{\psi}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) e^{+i\omega t} d\omega \quad (6.25)$$

Σύμφωνα με όσα έχουμε πει για κάθε συνάρτηση ψ και το μετασχηματισμό Fourier της, $\tilde{\psi}$, θα πρέπει να ισχύει:

$$\delta t \delta \omega \sim 1 \Rightarrow \delta t \delta E \sim \hbar$$

Το πιο απλό παράδειγμα που μπορούμε να πάρουμε για να δούμε ότι το πεπερασμένο εύρος της $\psi(t)$ στο χρόνο απαιτεί και κάποιο εύρος στις συχνότητες είναι να θεωρήσουμε ένα πομπό που εκπέμπει σταθερά για χρονικό διάστημα Δt , και καθόλου πριν ή μετά το Δt . Το «πακέτο» της εκπομπής θα έχει μήκος στο χώρο $\Delta x = c\Delta t$ και επομένως στο χώρο των ορμών χρειαζόμαστε πολλές τιμές για να περιγράψουμε το πακέτο. Το εύρος των ορμών Δk , θα είναι τέτοιο ώστε $\Delta x \Delta k \sim 1$. Άρα

$$c\Delta t \cdot \Delta k \sim 1 \Rightarrow c\Delta t \cdot \frac{\Delta \omega}{c} \sim 1 \Rightarrow \Delta t \Delta \omega \sim 1$$

Η αβεβαιότητα ενέργειας-χρόνου γίνεται εμφανής σε συστήματα στα οποία έχουμε πεπερασμένο (και μικρό) χρόνο παρατήρησης. Το κλασσικό παράδειγμα είναι ασταθή στοιχεία ή σωμάτια. Η διάσπασή τους σε κάποιο χρονικό διάστημα, που συνήθως χαρακτηρίζεται από τη μέση ζωή τους, δίνει το μέγιστο χρόνο που έχουμε στη διάθεσή μας για να μετρήσουμε την ενέργειά του.

Ραδιενεργό στοιχείο $\Delta N \propto N\Delta t$ $\Delta N = -\gamma N\Delta t$

$$\Rightarrow \frac{\Delta N}{N} = -\gamma\Delta t \Rightarrow [N]_{N_0}^N = -\gamma t \Big|_0^t \Rightarrow N/N_0 = -\gamma t \Rightarrow N = N_0 e^{-\gamma t}$$

$$|\psi(t)|^2 = A e^{-\gamma t} \quad \int_0^{\infty} P(t) dt = 1 \Rightarrow A \left(-\frac{1}{\gamma} \right) e^{-\gamma t} \Big|_0^{\infty} = \frac{A}{\gamma} = 1 \Rightarrow A = \gamma$$

Ο μέσος χρόνος ζωής δίδεται ως:

$$\langle t \rangle = \int_0^{\infty} t \gamma e^{-\gamma t} dt = \gamma \int_0^{\infty} t e^{-\gamma t} dt = -\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \int_0^{\infty} e^{-\gamma t} dt = -\gamma \frac{\partial}{\partial \gamma} \left(\frac{1}{\gamma} \right) = \frac{1}{\gamma}$$

Συνήθως συμβολίζουμε $\langle t \rangle = \tau$. Βλέπουμε ότι $\tau \sim \frac{1}{\gamma}$ και τελικά, $|\psi(t)|^2 = \frac{1}{\tau} e^{-t/\tau}$. Αναμένουμε,

λοιπόν, μια αβεβαιότητα στην ενέργεια, ίση με $\Delta E \sim \frac{\hbar}{\tau} \sim \hbar \gamma$.

Ατομικά φαινόμενα: $\delta t \sim 0.1 \mu\text{s} = 10^{-7} \text{s}$

$$\Delta E \sim \frac{\hbar}{10^{-7}} = \frac{10^{-27} \text{ erg} \cdot \text{s}}{10^{-7}} = 10^{-20} \text{ erg} \sim 10^{-8} \text{ eV} \text{ πραγματικά ελάχιστο.}$$

Για να δούμε τις διαφορετικές ενέργειες που μπορεί να έχει το σωματίο, γράφουμε την κυματοσυνάρτηση:

$$|\psi(t)|^2 = \gamma e^{-\gamma t} \Rightarrow \psi(t) \sim e^{-\gamma t/2} \Rightarrow \psi(t) \sim e^{-\gamma t/2} e^{-iE_0 t/\hbar}$$

Δεδομένης της $\psi(t)$, η $\tilde{\psi}(\omega)$, ή αντίστοιχα η $\tilde{\psi}(E)$, δίδεται από τον μετασχηματισμό Fourier:

$$\tilde{\psi}(E) \sim \int_0^\infty \psi(t) e^{iEt/\hbar} dt = \int_0^\infty e^{\left\{ \frac{i(E-E_0)}{\hbar} - \frac{\gamma}{2} \right\} t} dt = \frac{1}{i \left(\frac{E-E_0}{\hbar} \right) - \frac{\gamma}{2}} e^{\left\{ \frac{\gamma}{2} - \frac{i(E-E_0)}{\hbar} \right\} t} \Bigg|_0^\infty = \frac{-1}{i \left(\frac{E-E_0}{\hbar} \right) - \frac{\gamma}{2}}$$

Επομένως η πυκνότητα πιθανότητας εμφάνισης τιμής E , $p(E)$, είναι:

$$p(E) = |\tilde{\psi}(E)|^2 = \frac{A}{\frac{(E-E_0)^2}{\hbar^2} + \frac{\gamma^2}{4}} = \frac{A\hbar^2}{(E-E_0)^2 + \left(\frac{\gamma\hbar}{2} \right)^2}$$

Η σταθερά A βρίσκεται με κανονικοποίηση:

$$\int p(E) dE = \int |\tilde{\psi}(E)|^2 dE = 1 \Rightarrow A\hbar^2 \int_0^\infty \frac{dE}{(E-E_0)^2 + \left(\frac{\gamma\hbar}{2} \right)^2} = 1$$

Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται εύκολα με αλλαγή μεταβλητής: $u = \frac{E-E_0}{\gamma\hbar/2}$.

Παίρνουμε:

$$\frac{2A\hbar^2}{\gamma\hbar} \int_0^\infty \frac{du}{u^2+1} = \frac{2A\hbar}{\gamma} \tan^{-1}(u) \Big|_0^\infty = \frac{\pi A\hbar}{\gamma}$$

Και επομένως

$$p(E) = \frac{\gamma\hbar}{\pi} \cdot \frac{1}{(E-E_0)^2 + \left(\frac{\gamma\hbar}{2} \right)^2}$$

Το μέγιστο της $p(E)$ δίδεται για $E = E_0$ και είναι $\frac{A\hbar^2}{(\gamma\hbar/2)^2} = \frac{4}{\gamma\pi}$.

Η $p(E)$ πέφτει στο μισό της μέγιστης όταν $\Delta E\tau = \hbar$:

$$(E-E_0)^2 = \left(\frac{\gamma\hbar}{2} \right)^2 \Rightarrow \frac{A\hbar^2}{2 \left(\frac{\gamma\hbar}{2} \right)^2} \quad \text{όταν} \quad E-E_0 = \frac{\gamma\hbar}{2}$$

7.3. Το περίφημο “gedanken” πείραμα του Einstein (και η λύση του Bohr)

Όπως και με την αρχή της αβεβαιότητας θέσης-ορμής, έχουν υπάρξει πολλές προσπάθειες κατάρριψης της σχέσης αβεβαιότητας ενέργειας-χρόνου. Η πιο αξιοσημείωτη τέτοια προσπάθεια ανάγεται στον Einstein, ο οποίος συνέλαβε το εξής πείραμα σκέψης (gedanken experiment):

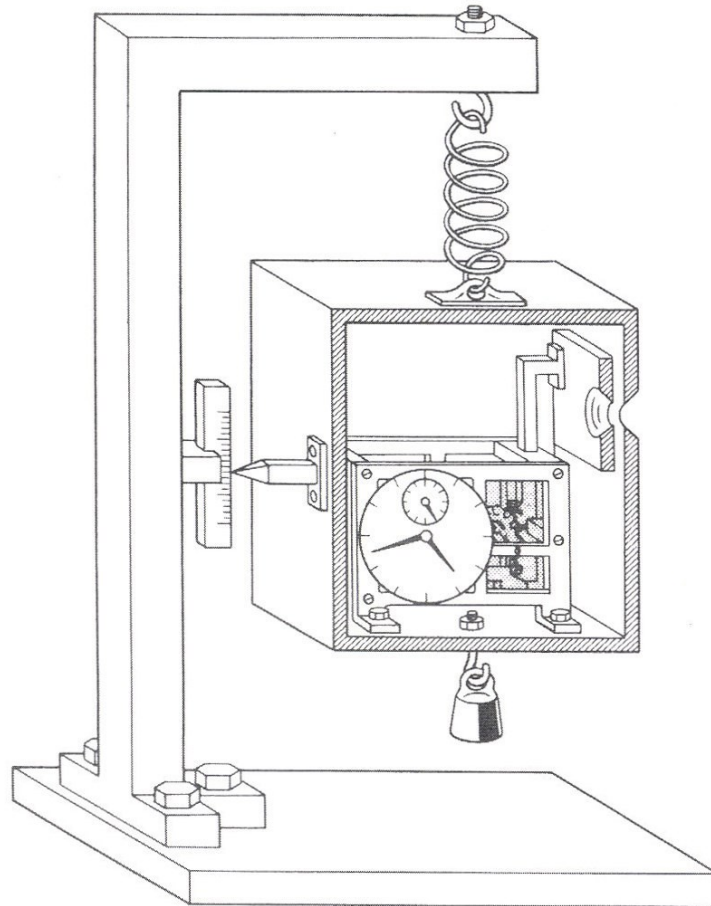


Fig. 2-4. Quasi-realistic drawing of Einstein experiment designed to show violation of $\Delta E \Delta t > \hbar$ relation. Reprinted from Niels Bohr, *Atomic Physics and Human Knowledge*, John Wiley (1958), by permission of North Holland Publishing Company, Amsterdam.

Ο Einstein θεώρησε ένα κουτί που περιέχει ακτινοβολία, με μια οπή που ανοιγοκλείνει μέσω ενός μηχανισμού ο οποίος είναι συνδεδεμένος με ένα ρολόι που βρίσκεται μέσα στο κουτί. Το σύστημα προετοιμάζεται έτσι ώστε η οπή να ανοίγει για ένα εξαιρετικά μικρό χρονικό διάστημα Δt . Η ενέργεια του φωτονίου που διαφεύγει μπορεί να μετρηθεί με μεγάλη ακρίβεια με μια απλή ζύγιση του κουτιού πριν και μετά το άνοιγμα της οπής. Η ανταπάντηση του Bohr αποτελεί μνημείο επίδειξης ότι ακόμα και τα νοερά πειράματα πρέπει να πληρούν τους νόμους της φύσης.

Η ζύγιση σημαίνει ανάγνωση της κλίμακας του ύψους με κάποια ακρίβεια Δy που με τη σειρά της σημαίνει μια αβεβαιότητα στην ορμή του κουτιού $\Delta p \sim \hbar/\Delta y$. Για να ζυγιστεί το κουτί, πρέπει να κινηθεί. Η ορμή που θα αποκτήσει πρέπει να διαρκέσει κάποιο χρόνο, ώστε η ώθηση, που για αλλαγή μάζας Δm είναι ΔmgT , να δώσει ορμή $\gg \Delta p$. Άρα, πρέπει

$$\Delta mgT \gg \frac{\hbar}{\Delta y} \quad (6.26)$$

Η αρχή της αντιστοιχίας, μας λέει ότι η αλλαγή ύψους Δy σε βαρυτικό πεδίο συνεπάγεται αλλαγή στο ρυθμό των ρολογιών κατά

$$\frac{\Delta T}{T} = \frac{g\Delta y}{c^2} \quad (6.27)$$

Εφόσον εδώ έχουμε ύψος αβέβαιο κατά Δy , έχουμε μια αντίστοιχη αβεβαιότητα στο χρόνο, ΔT . Συνδυάζοντας τις (6.26) και (6.27):

$$\Delta mgT \gg \frac{\hbar Tg}{\Delta T c^2} \Rightarrow \Delta mc^2 \Delta T \gg \hbar$$

Ή, πιο απλά

$$\Delta E \Delta t \gg \hbar$$

και η αρχή αβεβαιότητας ενέργειας-χρόνου καλά κρατεί!

Ένα φωτόνιο ενέργειας E έχει βαρυτική μάζα E/c^2 . Για να αποδείξουμε την ως άνω πρόταση, πρέπει να δείξουμε ότι ένα φωτόνιο ενέργειας E σε ύψος y έχει βαρυτική ενέργεια ίση με $(E/c^2)gy$. Θεωρούμε ένα άτομο σε διεγερμένη κατάσταση, με συνολική μάζα M^* , που βρίσκεται σε ύψος y . Αν αποδιεγερθεί σε αυτό το ύψος, με την εκπομπή ενός φωτονίου ενέργειας E , και το νέο αποδιεγερμένο άτομο έχει μάζα M , τότε η διατήρηση της ενέργειας απαιτεί

$$M^*c^2 = Mc^2 + E \Rightarrow E = (M^* - M)c^2$$

Τώρα συγκρίνουμε δυο πτώσεις:

α) Το διεγερμένο άτομο μάζας M^* πέφτει από το ύψος y . Η αλλαγή στην ενέργειά του είναι M^*gy .

β) Το σύνολο του αποδιεγερμένου ατόμου και του φωτονίου πέφτει από το ύψος y . Η αλλαγή στην ενέργειά του είναι Mgy και E_g αντίστοιχα.

Για να είναι οι (α) και (β) ισοδύναμες περιγραφές, θα πρέπει να ισχύει

$$M^*gy = Mgy + E_g$$

κι επομένως η βαρυτική ενέργεια του φωτονίου όταν είναι σε ύψος y είναι

$$E_g = (M^* - M)gy = \frac{E}{c^2}gy$$

Θεωρούμε τώρα ένα φωτόνιο σε ύψος y , σε βαρυτικό πεδίο με ενέργεια E , το οποίο πέφτει στο ύψος 0. Η ενέργεια του 0 θα είναι E' :

$$E' = E + E_g = E \left(1 + \frac{gy}{c^2} \right)$$

Δεδομένων των $E = h\nu$ και $E' = h\nu'$,

$$\nu' = \nu \left(1 + \frac{gy}{c^2} \right)$$

κα άρα η συχνότητα του φωτονίου αλλάζει κατά

$$\frac{\Delta \nu}{\nu} = \frac{\nu' - \nu}{\nu} = \frac{gy}{c^2}$$

Άρα ο χρόνος ταλάντωσης αλλάζει κατά

$$\frac{\Delta T}{T} = -\frac{gy}{c^2}$$

δηλ. γίνεται πιο αργός.

8. Μαθηματικό συμπλήρωμα

8.1. Ανισότητα Schwartz

Έστω δύο συναρτήσεις, $f(x)$ και $g(x)$, που είναι ολοκληρώσιμες στο διάστημα $[a, b]$. Η ανισότητα του Schwartz λέει ότι

$$\left| \int_a^b f^*(x) g(x) dx \right|^2 \leq \int_a^b |f(x)|^2 dx \int_a^b |g(x)|^2 dx \quad (6.28)$$

με την ισότητα να ισχύει όταν (και μόνο όταν) $f(x) = ag(x)$ με a σταθερά. Η απόδειξη της ανισότητας έχει ως εξής: εισάγουμε τη μιγαδική συνάρτηση $\psi(x) = f(x) + \lambda g(x)$ όπου λ μία μιγαδική σταθερά. Είναι προφανές ότι

$$\int_a^b |\psi(x)|^2 dx \geq 0 \quad (6.29)$$

Αντικαθιστώντας την $\psi(x)$ στην (6.29), έχουμε:

$$\int \psi^* \psi dx = \int f^* f dx + \lambda \int f^* g dx + \lambda^* \int g^* f dx + \lambda \lambda^* \int g^* g dx \geq 0 \quad (6.30)$$

για συντομία έχουμε παραλείψει τα όρια στα ολοκληρώματα. Η ισότητα στην (6.30) ισχύει όταν $\psi(x) = 0$. Εισάγοντας τη γνωστή συντομογραφία:

$$(f, g) = \int f^*(x) g(x) dx$$

η (6.30) μπορεί να γραφεί

$$(f, f) + \lambda (f, g) + \lambda^* (g, f) + \lambda \lambda^* (g, g) \geq 0 \quad (6.31)$$

Προφανώς οι (6.30) και (6.31) είναι πανομοιότυπες. Η εξίσωση (6.31) ισχύει για οποιαδήποτε τιμή του λ . Επιλέγουμε λοιπόν την «βολική» τιμή

$$\lambda = -\frac{(g, f)}{(g, g)} \Rightarrow \lambda^* = -\frac{(g, f)^*}{(g, g)^*} = -\frac{(f, g)}{(g, g)} \quad (6.32)$$

Αντικαθιστώντας τις τιμές του λ από την (6.32) βρίσκουμε

$$(f, f) - \frac{(g, f)}{(g, g)}(f, g) - \frac{(f, g)}{(g, g)}(g, f) + \frac{(g, f)(f, g)}{(g, g)(g, g)}(g, g) \geq 0$$

Ο τρίτος και τέταρτος όρος είναι ίσοι, και επομένως, πολλαπλασιάζοντας με (g, g) παίρνουμε:

$$(f, f)(g, g) - (g, f)(f, g) \geq 0 \quad (6.33)$$

Είναι όμως $(g, f) = (f, g)^* \Rightarrow (g, f)(f, g) = |(f, g)|^2$. Και επομένως, η (6.32) γράφεται ως

$$|(f, g)|^2 \leq (f, f)(g, g) \quad (6.34)$$

Δηλαδή η ίδια με την εξίσωση (6.28). Οεδ.

8.2. Απόδειξη ύπαρξης κοινών ιδιοσυναρτήσεων δυο τελεστών που μετατίθενται.

Έστω ότι $[\hat{A}, \hat{B}] = 0$ και η $\hat{A}\varphi_i = a_i\varphi_i$ έχει πολλαπλές λύσεις, έστω m, φ_{ij} , όπου $j = 1, \dots, m$, που έχουν την ίδια ιδιοτιμή a_i . Ακολουθώντας τα βήματα που οδήγησαν στην (6.14), συμπεραίνουμε, ότι η $\hat{B}\varphi_{ij}$ είναι επίσης ιδιοσυνάρτηση του \hat{A} , με ιδιοτιμή a_i . Επομένως, μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός όλων των $\varphi_{ij}, j = 1, \dots, m$:

$$\hat{B}\varphi_j^{(i)} = \sum_k c_{jk}^{(i)} \varphi_k^{(i)} \quad (6.35)$$

όπου για να ευκολύνουμε το συμβολισμό, «ανεβάσαμε» το δείκτη i . Προφανώς, $\varphi_j^{(i)}$ είναι το σύμβολο για την φ_{ij} .

Η (6.35) δείχνει ότι οι $\varphi_j^{(i)}$ δεν είναι ιδιοσυναρτήσεις του \hat{B} . Ωστόσο, μπορούμε να βρούμε ένα γραμμικό συνδυασμό των $\varphi_j^{(i)}$, έστω τις $\bar{\varphi}_j^{(i)}$, που να είναι. Γράφουμε

$$\bar{\varphi}_j^{(i)} = \sum_\ell d_{j\ell}^{(i)} \varphi_\ell^{(i)} \quad (6.36)$$

Απαιτώντας $\hat{B}\bar{\varphi}_j^{(i)} = b_j\bar{\varphi}_j^{(i)}$, και αντικαθιστώντας τις (6.35) και (6.36), παίρνουμε:

$$\begin{aligned} \hat{B} \sum_\ell d_{j\ell}^{(i)} \varphi_\ell^{(i)} &= b_j \sum_\ell d_{j\ell}^{(i)} \varphi_\ell^{(i)} \\ \Rightarrow \sum_\ell d_{j\ell} \sum_k c_{\ell k}^{(i)} \varphi_k^{(i)} &= b_j \sum_k \sum_\ell d_{j\ell}^{(i)} \delta_{k\ell} \varphi_k^{(i)} \Rightarrow \sum_\ell \sum_k (d_{j\ell}^{(i)} c_{\ell k}^{(i)} - b_j d_{jk}^{(i)} \delta_{k\ell}) \varphi_k^{(i)} = 0 \\ \sum_k \sum_\ell (c_{\ell k}^{(i)} - b_j \delta_{k\ell}) d_{j\ell}^{(i)} \varphi_k^{(i)} &= 0 \Rightarrow \sum_\ell (c_{\ell k}^{(i)} - b_j \delta_{\ell k}) d_{j\ell}^{(i)} = 0 \end{aligned} \quad (6.37)$$

δηλαδή

$$\det |c_{\ell k}^{(i)} - b_j \delta_{\ell k}| = 0 \quad (6.38)$$

Οι ρίζες της δίνουν τις τιμές b_j , ενώ η (6.37) μας δίνει το $c_{\ell k}^{(i)}$. Οι νέες συναρτήσεις, $\bar{\varphi}_j^{(i)}$ είναι ιδιοσυναρτήσεις και των δυο τελεστών.

Παράδειγμα: έστω ότι $m = 2$ και υπάρχουν δυο ιδιοσυναρτήσεις του \hat{A} με την ιδιοτιμή a , οι $\varphi_1^{(a)}$ και $\varphi_2^{(a)}$. Οι νέες συναρτήσεις $\bar{\varphi}_1^{(a)}$ και $\bar{\varphi}_2^{(a)}$ θα δίνονται ως,

$$\begin{aligned} \bar{\varphi}_1^{(a)} &= d_{11} \varphi_1^{(a)} + d_{12} \varphi_2^{(a)} \\ \bar{\varphi}_2^{(a)} &= d_{21} \varphi_1^{(a)} + d_{22} \varphi_2^{(a)} \end{aligned} \quad (6.39)$$

ή στη γλώσσα των πινάκων,

$$\begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1^{(a)} \\ \bar{\varphi}_2^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}^{(a)} & d_{12}^{(a)} \\ d_{21}^{(a)} & d_{22}^{(a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_1^{(a)} \\ \varphi_2^{(a)} \end{pmatrix} \quad (6.40)$$

Έστω επίσης ότι

$$\begin{aligned} \hat{B}\varphi_1^{(a)} &= c_{11}^{(a)} \varphi_1^{(a)} + c_{12}^{(a)} \varphi_2^{(a)} \\ \hat{B}\varphi_2^{(a)} &= c_{21}^{(a)} \varphi_1^{(a)} + c_{22}^{(a)} \varphi_2^{(a)} \end{aligned} \quad (6.41)$$

Από τις (6.40) και (6.41):

$$\hat{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \bar{\varphi}_1^{(a)} \\ \bar{\varphi}_2^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \bar{\varphi}_1^{(a)} \\ b_2 \bar{\varphi}_2^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}^{(a)} & d_{12}^{(a)} \\ d_{21}^{(a)} & d_{22}^{(a)} \end{pmatrix} \hat{\mathbf{B}} \begin{pmatrix} \varphi_1^{(a)} \\ \varphi_2^{(a)} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_{11}^{(a)} & d_{12}^{(a)} \\ d_{21}^{(a)} & d_{22}^{(a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_{11}^{(a)} & c_{12}^{(a)} \\ c_{21}^{(a)} & c_{22}^{(a)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{a1} \\ \varphi_{a2} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} c_{11}^{(a)} - b_1 & c_{12}^{(a)} \\ c_{21}^{(a)} & c_{22}^{(a)} - b_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi_{a1} \\ \varphi_{a2} \end{pmatrix} = 0 \quad (6.42)$$

$$\Rightarrow \begin{vmatrix} c_{11}^{(a)} - b_1 & c_{12}^{(a)} \\ c_{21}^{(a)} & c_{22}^{(a)} - b_2 \end{vmatrix} = 0 \quad (6.43)$$

Λύνοντας την (6.43), βρίσκουμε τις ιδιοτιμές του $\hat{\mathbf{B}}$, ενώ από την (6.42) βρίσκουμε τα $c_{ij}^{(a)}$ και άρα τις $\bar{\varphi}_i^{(a)}$.

Έστω ότι ο $\hat{\mathbf{B}}'$ έχει n γραμμικές ανεξάρτητες ιδιοσυναρτήσεις με την ίδια ιδιοτιμή b' :

$$\hat{\mathbf{B}}' \psi_{B',i} = b' \psi_{B',i}$$

$$\hat{\mathbf{A}} \hat{\mathbf{B}} \psi_{B',i} = \hat{\mathbf{A}} b' \psi_{B',i} = \hat{\mathbf{A}} b' \psi_{B',i} = b' (\hat{\mathbf{A}} \psi_{B',i}) \Rightarrow \text{η } \hat{\mathbf{A}} \psi_{B',i} \text{ επίσης ιδιοσυνάρτηση}$$

$$\Rightarrow A \psi_{B',i} = \sum_{k=1}^n c_{ik} \psi_{B',k} \quad (\text{αναπτύσσεται ως γραμμικός συνδυασμός των } \psi_{B',k})$$

Μπορούμε να βρούμε γραμμικό συνδυασμό των $\psi_{B',i}$ που να είναι ιδιοσυναρτήσεις του $\hat{\mathbf{A}}$:

$$\bar{\psi}_{B',j} = \sum_{\ell=1}^n d_{j\ell} \sum_k c_{\ell k} \psi_{B',k} = a'_j \bar{\psi}_{B',j} = a'_j \sum_{\ell} \sum_k d_{j\ell} \psi_{B',k} \delta_{\ell k}$$

$$\Rightarrow \sum_{\ell=1}^n (c_{\ell k} - \delta_{\ell k} a'_j) d_{j\ell} = 0 \quad \text{για κάθε } j$$

Για λύση: $d_{ct} |c_{\ell k} - A'_j \delta_{\ell k}| = 0 \Rightarrow$ λύνω τις εξισώσεις, βρίσκω το $d_{j\ell}$.

8.3. Η εκθετική κατανομή περιγράφει πραγματικά τυχαία γεγονότα

Η απόδειξη χρησιμοποιεί τις “Αλυσίδες Markov”. Μία αλυσίδα Markov είναι μία αλληλουχία συμβάντων (γεγονότων) που λαμβάνουν χώρα στα χρονικά διαστήματα $t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n$. Συμβολίζουμε το γεγονός που λαμβάνει χώρα την χρονική στιγμή t_m με $x(t_m)$.

Αν η διαδικασία δεν διαθέτει την παραμικρή «μνήμη», τότε η πιθανότητα εμφάνισης συμβάντος $x(t_n)$ δεδομένων των συμβάντων $x(t_{n-1}), \dots, x(t_1)$ εξαρτάται μόνο από το συμβάν $x(t_{n-1})$.

Επομένως:

$$P(x(t_n) | x(t_{n-1}); x(t_{n-2}); \dots x(t_1)) = P(x(t_n) | x(t_{n-1})) \quad (6.44)$$

Η (6.44) μπορεί να γραφτεί πιο απλά:

$$P(\tau_i > s+t | \tau_i > s) = h(t) \quad (6.45)$$

Από την άλλη από τον ορισμό της πιθανότητας $P(\tau_i > s+t | \tau_i > s)$, έχουμε:

$$P(\tau_i > s+t | \tau_i > s) = \frac{P(\tau_i > s+t \cap \tau_i > s)}{P(\tau_i > s)} = \frac{P(\tau_i > s+t)}{P(\tau_i > s)} \quad (6.46)$$

Συνδυάζοντας τις (6.45) και (6.46) έχουμε:

$$\left. \begin{aligned} P(\tau_i > s+t) &= h(t)P(\tau_i > s) \\ s=0 \Rightarrow P(\tau_i > t) &= h(t) \end{aligned} \right\} \Rightarrow P(\tau_i > s+t) = P(\tau_i > s)P(\tau_i > t)$$

Επομένως,

παραγωγίζοντας ως προς t :

$$\begin{aligned} P(\tau_i > t) &= 1 - P(\tau_i \leq t) \\ \frac{dP(\tau_i > t)}{dt} &= -\frac{dP(\tau_i \leq t)}{dt} \end{aligned} \quad (6.47)$$

παραγωγίζοντας ως προς s :

$$\frac{dP(\tau_i > s+t)}{ds} = \frac{dP(\tau_i > s)}{ds} \cdot P(\tau_i > t) \quad (6.48)$$

Από τις (6.47) και (6.48):

$$\frac{dP(\tau_i > s+t)}{ds} = -f_{\tau_i}(s) \cdot P(\tau_i > t)$$

όπου $f(s)$ είναι η πυκνότητα πιθανότητας για $\tau_i \leq s$.

και επομένως, για $s = 0$:

$$\frac{dP(\tau_i > t)}{P(\tau_i > t)} = -f_{\tau_i}(0) ds$$

Ολοκληρώνω s από 0 έως t

$$\log P(\tau_i > t) = -f_{\tau_i}(0)t \Rightarrow P(\tau_i > t) = e^{-f_{\tau_i}(0)t}$$

Τέλος, παραγωγίζοντας ως προς t παίρνουμε:

$$-\frac{dP}{dt} = +f_{\tau_i}(0)e^{-f_{\tau_i}(0)t} = p(t)$$

Αποδείξαμε ότι όταν μια στοχαστική διαδικασία δεν έχει «μνήμη», η πυκνότητα πιθανότητας της έχει εκθετική κατανομή.