Ασκήσεις II

1. Κβαντικό σύστημα περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή

$$\hat{H} = \frac{1}{2m_1}\hat{\vec{p}}_1^{\,2} + \frac{1}{2m_2}\hat{\vec{p}}_2^{\,2} + V\left(\hat{\vec{r}}_1 - \hat{\vec{r}}_2\right).$$

Να δειχθεί ότι με τον μετασχηματισμό σε συντεταγμένες κέντρου μάζας και σχετικής κίνησης

$$\hat{\vec{R}} = \frac{m_1}{M}\hat{\vec{r}}_1 + \frac{m_2}{M}\hat{\vec{r}}_2, \quad \hat{\vec{r}} = \hat{\vec{r}}_1 - \hat{\vec{r}}_2 \quad \text{με} \quad M = m_1 + m_2,$$

η Χαμιλτονιανή παίρνει την μορφή

$$\hat{H} = \frac{1}{2M}\hat{\vec{P}}^{\,2} + \frac{1}{2\mu}\hat{\vec{p}}^{\,2} + V\left(\hat{\vec{r}}\right),$$

όπου

$$\mu = \frac{m_1 m_2}{M}$$

η ανηγμένη μάζα και

$$\hat{\vec{P}} = \hat{\vec{p}}_1 + \hat{\vec{p}}_2$$

ο τελεστής της ολικής ορμής για τον οποίο ισχύει

$$\left[\hat{H}, \hat{\vec{P}}\right] = \left[\hat{H}, \hat{\vec{p}}_1 + \hat{\vec{p}}_2\right] = 0.$$

Στην αναπαράσταση θέσης:

$$\hat{\vec{P}} = -i\hbar\vec{\nabla}_{\vec{R}}, \quad \hat{\vec{p}} = -i\hbar\vec{\nabla}_{\vec{r}}.$$

2. Δύο σωματίδια μάζας m κινούνται στο ακόλουθο δυναμικό σε τρεις διαστάσεις:

$$V(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \begin{cases} 0 & \text{για} \quad |x_1 - x_2| < L \quad \text{και} \quad |y_1 - y_2| < L, \\ \\ \infty & \text{για} \quad |x_1 - x_2| \geq L \quad \text{η} \quad |y_1 - y_2| \geq L. \end{cases}$$

Να ευρεθεί το ενεργειακό φάσμα και οι αντίστοιχες ιδισυναρτήσεις της ενέργειας. Ποίος ο εκφυλισμός του φάσματος;

3. Να μελετηθεί το ενεργειακό φάσμα και οι αντίστοιχες ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας για το σύστημα δύο συζευγμένων αρμονικών ταλαντωτών ίσης μάζας m το οποίο περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή:

$$\hat{H} \,=\, \frac{1}{2m}\hat{p}_1^2 \,+\, \frac{1}{2m}\hat{p}_2^2 \,+\, \frac{1}{2}m\,\omega^2\left(\hat{x}_1^2 \,+\, \hat{x}_2^2\right) \,+\, \lambda m\omega^2\,\hat{x}_1\hat{x}_2$$

Υποδείξεις: Να γίνει κατάλληλος μετασχηματισμός ο οποίος να απλοποιεί τη Χαμιλτονιανή. Στη συνέχεια, να βρεθεί το διάστημα στο οποίο επιτρέπεται να λάβει τιμές το λ έτσι ώστε η δυναμική ενέργεια να έχει κάτω φράγμα. Για αυτές τις τιμές του λ, να λυθεί το πρόβλημα με βάση τη γνωστή λύση του απλού αρμονικού ταλαντωτή και να βρεθούν οι ιδιοσυναρτήσεις και οι ιδιοτιμές της ενέργειας.

4. Να δειχθεί ότι:

$$\begin{aligned}
[\hat{L}_j,\,\hat{x}_k] &= i\hbar\textstyle\sum_l \epsilon_{jkl}\,\hat{x}_l,\\
[\hat{L}_j,\,\hat{p}_k] &= i\hbar\textstyle\sum_l \epsilon_{jkl}\,\hat{p}_l,\\
[\hat{L}_j,\,\textstyle\sum_k \hat{x}_k\hat{p}_k] &= 0.
\end{aligned}$$

Οι δείκτες jkl διατρέχουν τις κατευθύνσεις $1, 2, 3$ των τριών χωρικών διαστάσεων.

5. Να δειχθεί ότι σε ιδιοκαταστάσεις της προβολής της στροφορμής στον άξονα z, οι μέσες τιμές των προβολών της στροφορμής στους άξονες x και y μηδενίζονται.

6. Να δειχθεί ότι:

$$\begin{aligned}
e^{i\frac{\varphi}{\hbar}\hat{L}_z}\,\hat{L}_x\,e^{-i\frac{\varphi}{\hbar}\hat{L}_z} &= \hat{L}_x\cos\varphi - \hat{L}_y\sin\varphi\\
e^{i\frac{\varphi}{\hbar}\hat{L}_z}\,\hat{x}\,e^{-i\frac{\varphi}{\hbar}\hat{L}_z} &= \hat{x}\cos\varphi - \hat{y}\sin\varphi
\end{aligned}$$

Εδώ, τα σύμβολα $\hat{x}$ και $\hat{y}$ αναφέρονται στους τελεστές θέσης στις αντίστοιχες κατευθύνσεις.
Υπόδειξη: Θεωρήστε δεδομένη την ταυτότητα τελεστών

$$e^{\hat{A}}\hat{B}e^{-\hat{A}} \equiv \hat{B} + [\hat{A},\hat{B}] + \frac{1}{2!}[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]] + \frac{1}{3!}[\hat{A},[\hat{A},[\hat{A},\hat{B}]]] + \ldots$$

και χρησιμοποιήστε τα αναπτύγματα Taylor του ημιτόνου και του συνημιτόνου.

7. Εάν $\psi_m^{(0)}$ είναι οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή $\hat{L}_z$ να δείξετε ότι οι ιδιοσυναρτήσεις του τελεστή

$$\hat{L}_{\vec{e}} \,=\, \vec{e}\cdot\hat{\vec{L}} \,=\cos\varphi_0\sin\theta_0\,\hat{L}_x \,+\, \sin\varphi_0\sin\theta_0\,\hat{L}_y \,+\cos\theta_0\hat{L}_y$$

δηλαδή της προβολής του τελεστή της στροφορμής σε τυχαία κατεύθυνση

$$\vec{e} = (\cos\varphi_0 \sin\theta_0,\, \sin\varphi_0 \sin\theta_0, \cos\theta_0)$$

είναι οι:

$$\psi_m = e^{-i\frac{\varphi_0}{\hbar}\hat{L}_z}\, e^{-i\frac{\theta_0}{\hbar}\hat{L}_y}\, \psi_m^{(0)}$$

με τις ίδιες ιδιοτιμές:

$$\hat{L}_{\vec{e}}\,\psi_m = m\,\hbar\,\psi_m .$$

Υπόδειξη: θεωρήστε τη δράση του τελεστή $e^{-i\frac{\varphi_0}{\hbar}\hat{L}_z}$ ως στροφή γύρω από τον άξονα z και τη δράση του $e^{-i\frac{\theta_0}{\hbar}\hat{L}_y}$ ως στροφή γύρω από τον άξονα y.

8. Δίδεται η κυματική συνάρτηση:

$$\psi(x,\, y,\, z) = c\left[\sqrt{\frac{3}{8\pi}}a\ (x+y) + \frac{3}{\sqrt{16\pi}}a^2\ \left(x^2+y^2\right)\right] e^{-ar}$$

Να ευρεθούν οι πιθανότητες $P(l,m)$ ώστε σε μέτρηση του μέτρου της στροφορμής $|\vec{L}|$ και της τρίτης συνιστώσας L_z να ευρεθούν οι τιμές $\sqrt{l(l+1)}\,\hbar$ και $m\hbar$ αντίστοιχα.

9. Να δειχθεί ότι σε δέσμιες ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας για κίνηση σε δυναμικό ισχύει το θεώρημα virial, δηλαδή:

$$\left\langle \frac{\hat{\vec{p}}^2}{m} \right\rangle = \left\langle \vec{r}\cdot\vec{\nabla}V \right\rangle .$$

10. Χρησιμοποιώντας το θεώρημα virial να υπολογισθούν οι εξής ποσότητες *για τις ιδιοκαταστάσεις της ενέργειας*:
α. $\langle r^2 \rangle$, για το δυναμικό του τριδιάστατου γραμμικού αρμονικού ταλαντωτού: $V(r) = \frac{1}{2}m\omega^2 r^2$,
β. $\left\langle \frac{1}{r} \right\rangle$, για το δυναμικό του ατόμου του υδρογόνου: $V(r) = -\frac{e^2}{r}$.

11. Ο τελεστής της ακτινικής ορμής δίνεται από την σχέση:

$$\hat{p}_r = \frac{1}{2}\left(\frac{\hat{\vec{r}}}{r}\cdot\hat{\vec{p}} + \hat{\vec{p}}\cdot\frac{\hat{\vec{r}}}{r}\right)$$

και δρα σε συναρτήσεις της απόστασης r από το κέντρο των αξόνων ως:

$$\hat{p}_r \psi(r) \;=\; -i\hbar \left(\frac{d}{dr} \;+\; \frac{1}{r} \right) \psi(r).$$

Να δειχθεί ότι για να είναι ο τελεστής αυτός ερμιτιανός, δηλαδή για να ισχύει ότι:

$$\int_0^\infty \phi^*(r) \left[\hat{p}_r \psi(r)\right] r^2\, dr \;=\; \int_0^\infty \left[\hat{p}_r \phi(r)\right]^* \psi(r)\, r^2\, dr$$

θα πρέπει η $\psi(r)$ να ικανοποιεί την:

$$r\psi(r) \;\rightarrow\; 0 \quad \text{εάν} \quad r \;\rightarrow\; 0.$$

12. Επιλύοντας το πρόβλημα του τριδιάστατου γραμμικού αρμονικού ταλαντωτού σε καρτεσιανές συντεταγμένες, $V(x,y,z) = \frac{1}{2}\mu\omega^2(x^2+y^2+z^2)$, όπου μ η μάζα, να ευρεθούν οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας και να δειχθεί ότι οι ιδιοτιμές της ενέργειας είναι $E_n \;=\; \hbar\omega(n+3/2)$, όπου $n = n_1 + n_2 + n_3$, $n_i = 0, 1, 2, 3, \ldots$. Θεωρώντας το πρόβλημα ως πρόβλημα κεντρικού δυναμικού σε σφαιρικές συντεταγμένες να δειχθεί ότι $n = 2j + l$ όπου l ο κύριος κβαντικός αριθμός της στροφορμής και j μη αρνητικός ακέραιος. Ποίος είναι ο εκφυλισμός των ενεργειακών σταθμών;
Υπόδειξη: Να θεωρηθεί δεδομένη η λύση του αρμονικού ταλαντωτή σε μία διάσταση.

13. Να ευρεθεί σχέση μεταξύ των μέσων τιμών $\left\langle r^k \right\rangle_n$, $\left\langle r^{k+1} \right\rangle_n$ και $\left\langle r^{k+2} \right\rangle_n$, η οποία επιτρέπει τον υπολογισμό της μέσης τιμής $\left\langle r^k \right\rangle_n$ στις ενεργειακές στάθμες του ατόμου του υδρογόνου.

14. Σωμάτιο μάζας m ευρίσκεται σε ιδιοκατάσταση της ενέργειας περιγραφόμενο από την κυματική συνάρτηση:

$$\psi(\vec{r}) \;=\; Nxye^{-\frac{\beta^2}{2}\left(x^2+y^2+z^2\right)}$$

α. Να υπολογιστεί ο συντελεστής κανονικοποίησης.
β. Να υπολογιστεί το δυναμικό στο οποίο κινείται το σωμάτιο και η ενέργειά του.
γ. Να υπολογιστεί η πιθανότητα $P(l,m)$ ώστε σε μέτρηση της στροφορμής να ευρεθούν οι τιμές $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ και $m\hbar$ για το μέτρο και την z-συνιστώσα αντίστοιχα.

15. Σωμάτιο μάζας m ευρίσκεται σε ιδιοκατάσταση της ενέργειας περιγραφόμενο απο την κυματική συνάρτηση:

$$\psi(\vec{r}) \;=\; Nze^{-\frac{a}{2}\sqrt{x^2+y^2+z^2}}, \quad a > 0.$$

α. Να ευρεθεί ο συντελεστής κανονικοποίησης.

β. Να ευρεθεί το δυναμικό στο οποίο κινείται το σωμάτιο και η ενέργειά του.

γ. Να ευρεθεί η πιθανότητα $P(l, m)$ ώστε σε μέτρηση της στροφορμής να ευρεθούν οι τιμές $\sqrt{l(l+1)}\hbar$ και $m\hbar$ για το μέτρο και την z-συνιστώσα αντίστοιχα.

16. Να διατυπωθούν και να επιλυθούν, με τον πιο απλό τρόπο, τα μονοδιάστατα προβλήματα τα οποία προκύπτουν από

α. τον τριδιάστατο ισότροπο αρμονικό ταλαντωτή,

β. το άτομο του υδρογόνου.

Και στις δύο περιπτώσεις περιοριστείτε στην περίπτωση μηδενικής στροφορμής $(l = 0)$.

17. Ηλεκτρόνιο σε άτομο του υδρογόνου ευρίσκεται στην κατάσταση

$$\psi(\vec{r}) \;=\; \frac{1}{\sqrt{3}}\varphi_{211}(\vec{r}) \;+\; \frac{1+i}{\sqrt{6}}\varphi_{21-1}(\vec{r}) \;+\; \frac{1-i}{\sqrt{6}}\varphi_{321}(\vec{r}).$$

α. Τι θα βρείτε εάν μετρήσετε το μέτρο της στροφορμής και με ποια πιθανότητα; Τι θα βρείτε εάν μετρήσετε την προβολή της στροφορμής στον άξονα z και με ποια πιθανότητα;

β. Μετράτε πρώτα την προβολή της στροφορμής στον άξονα z και στην συνέχεια την προβολή της στροφορμής στον άξονα x. Ποία η μέση τιμή αυτών των μετρήσεων;

γ. Μετράτε την ομοτιμία του σωματίου. Τι θα βρείτε και με ποια πιθανότητα; Έστω ότι βρήκατε -1. Εάν μετρήσετε στην συνέχεια την προβολή της στροφορμής στον άξονα z τι θα βρείτε και με ποια πιθανότητα; Υπόδειξη: Οι σφαιρικές αρμονικές Y_{lm} έχουν ομοτιμία $(-1)^l$.

18. **α.** Για ηλεκτρόνιο σε άτομο υδρογόνου σε μέτρηση του μέτρου της στροφορμής βρίσκουμε μόνο τα αποτελέσματα $0\hbar$ και $\sqrt{2}$. Να γραφεί η γενική μορφή της κυματοσυνάρτησης που περιγράφει το άτομο.

β. Σε μέτρηση της ενέργειας σε πλήθος 10^6 τέτοιων ατόμων βρίσκεται η E_1 με πιθανότητα 25% και η E_9 με πιθανότητα 75%. Να γραφεί η γενική μορφή της κυματοσυνάρτησης που είναι συμβατή με αυτό το αποτέλεσμα.

γ. Πως περιορίζεται η ανωτέρω μορφή εάν η μέση τιμή της ομοτιμίας είναι $1/4$ και η μέση τιμή της προβολής της στροφορμής στον άξονα z είναι $0\hbar$;