Ασκήσεις I

1. Δίδεται η κυματική συνάρτηση

$$\psi(\vec{r},\, t) \,=\, A e^{-\frac{i}{\hbar}(E_1 t - \vec{p}_1\cdot\vec{r})} \,+\, B e^{-\frac{i}{\hbar}(E_2 t - \vec{p}_2\cdot\vec{r})}$$

όπου

$$E_1 \,=\, \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m}, \quad E_2 \,=\, \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m}.$$

α. Να δειχθεί ότι ικανοποιεί την εξίσωση Schrödinger για ελεύθερο σωμάτιο μάζας m.
β. Να υπολογισθεί το ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας.

2. Εάν η κυματική συνάρτηση $\psi(\vec{r},\, t)$ είναι λύση της εξίσωσης Schrödinger

$$i\hbar\frac{\partial}{\partial t}\psi(\vec{r},\, t) \,=\, -\frac{\hbar^2}{2m}\vec{\nabla}^{\,2}\,\psi(\vec{r},\, t) \,+\, V(\vec{r})\,\psi(\vec{r},\, t), \quad \text{όπου} \quad V(\vec{r}) \,\in\, \Re,$$

να δειχθεί ότι

$$\int_{\Re^3} \psi(\vec{r},\, t)^*\,\psi(\vec{r},\, t)\,dv \,=\, \text{σταθερά}.$$

3. Στην κυματική συνάρτηση $\psi(x,t)$ οι μέσες τιμές και οι διασπορές της θέσης και της ορμής είναι γνωστές, x_0, Δx_0, p_0, Δp_0, αντίστοιχα. Να υπολογιστούν τα ανωτέρω μεγέθη για την κυματική συνάρτηση $\phi(x,t) = \psi(x-a,t)e^{ikx}$ $(a, k \in \mathbb{R})$.

4. Κάθε κυματική συνάρτηση είναι δυνατόν να γραφεί ως:

$$\psi(x,\, t) \,=\, A(x,\, t)\, e^{i\varphi(x,\, t)}$$

όπου $A(x,\, t)$ και $\varphi(x,\, t)$ πραγματικές συναρτήσεις (η $A(x,\, t)$ είναι δυνατόν να θεωρηθεί και μη αρνητική).
α. Να δειχθεί ότι η μέση τιμή και η διασπορά της θέσης δεν εξαρτώνται από την συνάρτηση $\varphi(x,\, t)$.
β. Εάν η συνάρτηση $\varphi(x,\, t)$ είναι χωρικά σταθερή να δειχθεί ότι η μεση τιμή της ορμής και το ρεύμα πυκνότητας πιθανότητας μηδενίζονται.

5. Κβαντικό σύστημα περιγράφεται από την Χαμιλτονιανή:

$$\hat{H} \,=\, \frac{\hat{p}^{\,2}}{2m} \,+\, V(\hat{x}) \,+\, i\Gamma(\hat{x}), \quad \text{όπου } V(x) \text{ και } \Gamma(x) \text{ πραγματικές συναρτήσεις.}$$

Να εξαχθεί το αντίστοιχο της εξίσωσης συνέχειας. Ποια η χρονική εξέλιξη της ολικής πιθανότητας εάν Γ είναι αρνητική σταθερά;

6. Κβαντικό σύστημα έχει δύο ενεργειακές στάθμες:

$$\hat{H}\varphi_1 \,=\, E_1\varphi_1, \;\; \hat{H}\varphi_2 \,=\, E_2\varphi_2.$$

Θεωρούμε φυσικό μέγεθος $\hat{A}$ με δύο μη εκφυλισμένες ιδιοκαταστάσεις:

$$\hat{A}\psi_1 \,=\, \alpha_1\psi_1, \;\; \hat{A}\psi_2 \,=\, \alpha_2\psi_2,$$

με

$$\begin{array}{rclcrcl} \psi_1 & = & \gamma\,\varphi_1 + \delta\,\varphi_2 & \text{και} & \varphi_1 & = & \gamma^*\,\psi_1 - \delta\,\psi_2, \\ \psi_2 & = & -\delta^*\,\varphi_1 + \gamma^*\,\varphi_2 & \text{και} & \varphi_2 & = & \delta^*\,\psi_1 + \gamma\,\psi_2, \end{array} \quad \text{με} \quad |\gamma|^2 + |\delta|^2 = 1.$$

Την χρονική στιγμή $t = 0$ το σύστημα ευρίσκεται στην κατάσταση φ_1.

α. (i) Να υπολογιστεί ως συνάρτηση του χρόνου $t > 0$ η πιθανότητα ώστε σε μέτρηση της ενέργειας να ευρεθούν οι τιμές $(E_1,\, E_2)$. (ii) Να υπολογιστεί ως συνάρτηση του χρόνου η πιθανότητα ώστε σε μέτρηση του A να ευρεθούν οι τιμές $(\alpha_1,\, \alpha_2)$. (iii) Για τις περιπτώσεις (i) και (ii) να υπολογιστούν η μέση τιμή και η διασπορά των μεγεθών αυτών.

β. Την χρονική στιγμή $t = t_0 > 0$ γίνεται μέτρηση του μεγέθους $\hat{A}$ και ευρίσκεται η τιμή α_1. Να απαντηθούν τα προηγούμενα ερωτήματα για $t > t_0$.

7. Για ελεύθερο σωμάτιο μάζας m το οποίο περιγράφεται από τετραγωνικά ολοκληρώσιμη συνάρτηση $\psi(x,\, t)$ να δείξετε ότι η μέση τιμή του τελεστή

$$m\hat{x} - t\hat{p}$$

παραμένει χρονικά σταθερή.

8. Σωματίδιο μάζας μ κινείται σε απειρόβαθο πηγάδι εύρους L ευρισκόμενο στην n-οστή ιδιοκατάσταση της ενέργειας.

α. Να υπολογισθεί η πιθανότητα να ευρεθεί το σωμάτιο στο διάστημα $[a,\, b]$ με $a < b$ τυχαία σημεία εντός του πηγαδιού.

β. Να υπολογισθούν οι μέσες τιμές και οι διασπορές της θέσης και της ορμής.

9. Θεωρήστε τις ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας σωματιδίου σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού.

α. Είναι αυτές ιδιοσυναρτήσεις του $\hat{p}^2$, του $\hat{p}$, ή και των δύο;

β. Να υπολογιστεί η πυκνότητα πιθανότητας εύρεσης σε θέση x στο χώρο.

γ. Να υπολογιστεί η πυκνότητα πιθανότητας εύρεσης σε τιμή της ορμής p.

δ. Να ευρεθεί η μέση τιμή της θέσης με απ΄ ευθείας υπολογισμό στο χώρο των ορμών (να θεωρηθεί ως δεδομένο το ολοκλήρωμα που εκφράζει την κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης).

10. Σωματίδιο μάζας μ το οποίο κινείται σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού στο διάστημα $[0, L]$ περιγράφεται από την κυματική συνάρτηση

$$\psi(x) \;=\; N \begin{cases} x\,(L - x) & \text{για} \quad 0 \le x \le L, \\ \\ 0 & \text{για} \quad x \ge L \quad \text{και} \quad x \le 0. \end{cases}$$

α. Να υπολογισθεί η σταθερά κανονικοποίησης N.

β. Να υπολογισθεί το πλάτος πιθανότητας και η πιθανότητα ώστε σε μέτρηση της ενέργειας να ευρεθεί η τιμή E_n.

γ. Να γραφεί η κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης ως άθροισμα σειράς, χρησιμοποιώντας τις πιθανότητες του προηγουμένου ερωτήματος.

11. Σωματίδιο μάζας μ το οποίο κινείται σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού στο διάστημα $[0, L]$ περιγράφεται από την κυματική συνάρτηση

$$\psi(x) \;=\; N \begin{cases} x & \text{για} \quad 0 \le x \le \frac{L}{2}, \\ \\ (L - x) & \text{για} \quad \frac{L}{2} \le x \le L, \\ \\ 0 & \text{για} \quad x \ge L \quad \text{και} \quad x \le 0. \end{cases}$$

α. Να υπολογισθεί η σταθερά κανονικοποίησης N.
β. Να υπολογισθεί το πλάτος πιθανότητας και η αντίστοιχη πιθανότητα ώστε σε μέτρηση της ενέργειας να ευρεθεί η τιμή E_n και να γραφεί ως σειρά η συνθήκη κανονικοποίησης της κυματοσυνάρτησης.
γ. Να υπολογισθεί το πλάτος πιθανότητας και η αντίστοιχη πιθανότητα ώστε σε μέτρηση της ορμής να ευρεθεί η τιμή p.
δ. Να ευρεθεί η μέση τιμή της θέσης με απ΄ ευθείας υπολογισμό στο χώρο των ορμών (να θεωρηθεί ως δεδομένο το ολοκλήρωμα που εκφράζει την κανονικοποίηση της κυματοσυνάρτησης).

12. **α.** Να δειχθεί ότι η εξ. Schrödinger στο χώρο των ορμών γράφεται

$$i\hbar\frac{\partial\tilde{\psi}(p,t)}{\partial t} = \frac{p^2}{2m}\tilde{\psi}(p,t) + \int_{-\infty}^{\infty} K(p-p')\tilde{\psi}(p,t)dp'$$

όπου

$$\tilde{\psi}(p,t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\hbar}}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ipx/\hbar}\psi(x,t)dx$$

και

$$K(p-p') = \frac{1}{2\pi\hbar}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-i(p-p')x/\hbar}V(x)dx.$$

β. Να δειχθεί ότι, εάν το δυναμικό είναι πραγματικό, ο ολοκληρωτικός τελεστής σε αναπαράσταση ορμής που ορίστηκε στο **α.** ο οποίος δρα ως

$$\hat{K}\psi(p,t) = \int_{-\infty}^{\infty} K(p-p')\tilde{\psi}(p',t)dp'$$

είναι ερμιτιανός.
γ. Να δειχθεί ότι, εάν η $\psi(x,t)$ είναι τετραγωνικά ολκληρώσιμη, το ίδιο ισχύει και για την $\tilde{\psi}(p,t)$. Εάν επί πλέον η συνάρτηση του δυναμικού είναι πραγματική, τότε το

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}(p,t)|^2 dp$$

είναι ανεξάρτητο του χρόνου. [Υπόδειξη: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{ikx}dx = 2\pi\delta(k)$.]

13. Να γραφεί η εξ. Schrödinger σε αναπαράσταση ορμής για τη Χαμιλτονιανή του αρμονικού ταλαντωτή:

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2.$$

Με δεδομένες τις λύσεις στο χώρο των θέσεων, και με βάση τη μορφή που λαμβάνει η Χαμιλτονιανή σε αναπαράσταση ορμής, να βρεθούν οι λύσεις στο χώρο των ορμών.

14. Σωματίδιο μάζας μ ευρίσκεται στην βασική στάθμη απειρόβαθου πηγαδιού εύρους L. Την χρονική στιγμή $t = 0$ το εύρος του πηγαδιού διπλασιάζεται ακαριαία. Να ευρεθεί η πιθανότητα ώστε σε μέτρηση να παραμείνει η ενέργεια ίδια και η πιθανότητα να ελαττωθεί.

15. Σωματίδιο μάζας μ το οποίο κινείται σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού περιγράφεται την χρονική στιγμή $t = 0$ από την κυματική συνάρτηση

$$\psi(x,\,0) \,=\, c_m\phi_m \,+\, c_n\phi_n, \quad \text{με} \quad |c_m|^2 \,+\, |c_n|^2 \,=\, 1.$$

α. Να υπολογισθούν οι μέσες τιμές της ενέργειας, της θέσης και της ορμής ως συναρτήσεις του χρόνου. Να επιβεβαιωθεί το θεώρημα του Ehrenfest.
β. Να υπολογισθούν οι διασπορές της θέσης και της ορμής. Να επιβεβαιωθεί η σχέση αβεβαιότητας θέσης-ορμής.

16. Θεωρήστε σωματίδιο μάζας μ με ιδιοσυναρτήσεις διακριτού φάσματος της ενέργειας φ_m, φ_n.
α. Εάν

$$x_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \, \hat{x} \varphi_n \, dx, \quad \text{και} \quad p_{mn} = \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi_m^* \, \hat{p} \varphi_n \, dx,$$

να δειχθεί ότι

$$p_{mn} = -i\mu \frac{E_m - E_n}{\hbar} x_{mn}.$$

β. Εάν

$$\psi(x, 0) = c_m \varphi_m + c_n \varphi_n, \quad \text{με} \quad |c_m|^2 + |c_n|^2 = 1,$$

να επιβεβαιωθεί το θεώρημα του Ehrenfest με βάση το **α.**

17. Να δειχθεί ότι ο τελεστής της ομοτιμίας $\hat{\mathcal{P}}$ ο οποίος δρα ως:

$$\phi(x) = \hat{\mathcal{P}} \psi(x) = \psi(-x)$$

είναι ερμιτιανός, μοναδιαίος, έχει ως μόνες ιδιοτιμές τις ± 1 και ότι:

$$\hat{\mathcal{P}}^2 = 1, \quad \hat{\mathcal{P}} \hat{x} \hat{\mathcal{P}} = -\hat{x}, \quad \hat{\mathcal{P}} \hat{p} \hat{\mathcal{P}} = -\hat{p}, \quad \left[\hat{\mathcal{P}}, \, \hat{x}\hat{p}\right] = 0.$$

18. Σωματίδιο μάζας μ ευρίσκεται δεσμευμένο στην περιοχή $\left[-\frac{1}{2}L, \, \frac{1}{2}L\right]$, κινούμενο σε απειρόβαθο πηγάδι δυναμικού. Μέτρηση της ενέργειας έδωσε μόνο τις τιμές E_1 και E_2 με διασπορά $\Delta E = \frac{\sqrt{2}}{3}(E_2 - E_1)$ (E_1 είναι η θεμελιώδης στάθμη και E_2 η πρώτη διεγερμένη).
α. Να ευρεθεί η γενική μορφή της κατάστασης η οποία είναι συμβατή με αυτό το αποτέλεσμα και η οποία έχει θετική μέση τιμή της ομοτιμίας.
β. Να προσδιορίσετε την ακριβή μορφή της προηγούμενης κατάστασης την χρονική στιγμή $t = 0$, εάν ξέρετε ότι η μέση τιμή της θέσης είναι μηδέν και η μέση τιμή της ορμής είναι θετική.
γ. Έστω ότι την χρονική στιγμή $t = 0$ το σωμάτιο ευρίσκεται στην κατάσταση που προσδιορίσατε στο προηγούμενο ερώτημα. Μετά από χρόνο t_0 τα όρια στα οποία είναι δεσμευμένο διπλασιάζονται ακαριαία και συμμετρικά. Ποία είναι η πιθανότητα να βρεθεί με την ελάχιστη δυνατή ενέργεια και ποία με την πρώτη διηγερμένη ενέργεια που του επιτρέπεται;

19. Να βρεθούν οι ιδιοκαταστάσεις και ιδιοτιμές της ενέργειας για το δυναμικό

$$V(x) = \begin{cases} \infty, & \text{για } |x| > L, \\ \lambda \delta(x), & \text{για } |x| \leq L. \end{cases}$$

Να διακριθούν οι περιπτώσεις $\lambda > 0$ και $\lambda < 0$. Υπό ποια συνθήκη έχουμε αρνητική ιδιοτιμή της ενέργειας;

20. Να μελετηθεί το διακριτό ενεργειακό φάσμα του πεπερασμένου ασύμμετρου πηγαδιού:

$$V(x) = \begin{cases} V_1, & \text{για } x < 0, \\ 0, & \text{για } 0 \leq x \leq L, \\ V_2, & \text{για } x > L, \end{cases}$$

όπου $V_1, V_2 > 0$.

21. Στο πρόβλημα του συμμετρικού πεπερασμένου πηγαδιού

$$V(x) = \begin{cases} V_1, & \text{για } |x| \le L, \\ V_2, & \text{για } |x| > L, \text{ με } V_2 > V_1, \end{cases}$$

να μελετηθούν τα όρια
α. $V_2 \to \infty$,
β. $L \to 0$, με $V_1 = -\lambda/(2L)$ και $\lambda > 0$.

22. Δίδεται η κυματική συνάρτηση

$$\phi(x) = N\, e^{-\gamma|x|}, \quad \gamma > 0.$$

α. Να υπολογιστεί η σταθερά κανονικοποίησης N.
β. Να ευρεθεί το δυναμικό, για το οποίο η ϕ είναι ιδιοσυνάρτηση της ενέργειας και να βρεθεί η αντίστοιχη ιδιοτιμή, εάν $V(\infty) = 0$.
γ. Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές και διασπορές της θέσης και της ορμής. Ικανοποιείται η αντίστοιχη σχέση αβεβαιότητας;
Υπόδειξη: $\theta'(x) = \delta(x)$, όπου $\theta(x)$ η συνάρτηση μοναδιαίου βήματος.

23. Να βρεθούν οι δέσμιες ιδιοκαταστάσεις στα ακόλουθα δυναμικά:

$$V(x) = \begin{cases} & \infty, & x < 0 \\ i. & 0, & 0 \le x \le L \quad \text{και} \quad V_0,\ x > L\ (V_0 > 0) \\ ii. & -\lambda\delta(x-a), & x \ge 0 \quad (\lambda > 0) \\ iii. & \frac{1}{2}m\omega^2 x^2, & x \ge 0. \end{cases}$$

Υπόδειξη: Να εξεταστεί η επέκταση των δυναμικών στην περιοχή $x < 0$ με $V(-x) = V(x)$.

24. Σωματίδιο μάζας m κινούμενο σε δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή με

$$\hat{H} = \frac{1}{2m}\hat{p}^2 + \frac{1}{2}m\omega^2\hat{x}^2$$

περιγράφεται τη χρονική στιγμή $t = 0$ από την κυματική συνάρτηση

$$\psi(x, 0) = \frac{1}{\sqrt{2}}\Phi_n(x) + \frac{i}{\sqrt{2}}\Phi_{n+1}(x)$$

όπου Φ_n οι ιδιοκαταστάσεις ενέργειας του ταλαντωτή.
α. Να γραφεί η $\psi(x, t)$.
β. Να υπολογιστούν οι μέσες τιμές της θέσης και της ορμής και να επιβεβαιωθεί το θεώρημα του Ehrenfest.
γ. Να υπολογιστούν οι διασπορές στη θέση και στην ορμή και να επιβεβαιωθεί η αντίστοιχη σχέση αβεβαιότητας.

25. Σωματίδιο μάζας m ευρίσκεται στη θεμελιώδη στάθμη του αρμονικού ταλαντωτή. Να υπολογισθεί η πιθανότητα ώστε αυτό να ευρίσκεται στην κλασικά απαγορευμένη περιοχή. Είναι δυνατόν να εντοπισθεί σε αυτήν; Θεωρήστε γνωστή τη συνάρτηση σφάλματος (*error function*) $\text{erf}(x) = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\int_0^x e^{-y^2}dy$.

26. Σωματίδιο μάζας m και φορτίου q ευρίσκεται στη θεμελιώδη στάθμη του αρμονικού ταλαντωτή. Τη χρονική στιγμή $t = 0$ εφαρμόζεται ομογενές ηλεκτρικό πεδίο έντασης D.
α. Να ευρεθεί το ενεργειακό φάσμα και οι ιδιοσυναρτήσεις της ενέργειας για το πρόβλημα με τη συνύπαρξη του ηλεκτρικού πεδίου με το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή.
β. Για το ανωτέρω σωματίδιο, ποια είναι η πιθανότητα σε μέτρηση της ενέργειας σε χρόνο $t > 0$ να ευρεθεί η βασική στάθμη της νέας Χαμιλτονιανής;
γ. Για το ανωτέρω σωματίδιο, να βρεθεί η μέση τιμή της θέσης και της ορμής σε χρόνο $t > 0$.

27. Δέσμες σωματιδίων μάζας m και ενέργειας E προσπίπτουν από τα δεξιά και από τα αριστερά σε δυναμικό $V(x) = \lambda\delta(x)$ με πλάτη A_+ και A_- αντίστοιχα. Να υπολογιστούν τα πλάτη των ανακλώμενων δεσμών προς τα δεξιά B_+ και προς τα αριστερά B_-. Να δειχθεί ότι ο 2×2 πίνακας $\mathcal{S}$ που συνδέει τα ανακλώμενα με τα προσπίπτοντα πλάτη

$$\begin{pmatrix} B_+ \\ B_- \end{pmatrix} = \mathcal{S} \begin{pmatrix} A_+ \\ A_- \end{pmatrix}$$

είναι μοναδιαίος και ως εκ τούτου

$$|B_+|^2 + |B_-|^2 = |A_+|^2 + |A_-|^2.$$

28. Δέσμη σωματιδίων μάζας m και ενέργειας E προσπίπτει εκ δεξιών στο δυναμικό

$$V(x) = \begin{cases} 0, & \text{για } x > 0, \\ V_0 > 0, & \text{για } -L \leq x \leq 0, \\ \infty, & \text{για } x < -L. \end{cases}$$

Να υπολογιστούν οι συντελεστές διέλευσης και ανάκλασης και το ρεύμα πιθανότητας σε όλες τις περιοχές. Ποια είναι η εξάρτηση του ρεύματος από τη θέση και γιατί;