Αν $\vec{A} = 2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}$ και $\vec{B} = 2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}$ να δείξετε ότι: 1) τα $\vec{A}$ και $\vec{B}$ είναι κάθετα μεταξύ τους 2) βρείτε τα μοναδιαία $\hat{i}'$ και $\hat{j}'$ στις διευθύνσεις των $\vec{A}$ και $\vec{B}$ και βρείτε ένα τρίτο $\hat{k}'$ ώστε τα $\hat{i}'$, $\hat{j}'$ και $\hat{k}'$ να αποτελούν δεξιόστροφο τριάδα ορθογωνίων διανυσμάτων 3) εκφράστε τα $\vec{A}$, $\vec{B}$ στο σύστημα $\hat{i}', \hat{j}', \hat{k}'$.

Λύση

1) $\vec{A} \cdot \vec{B} = 4 - 2 - 2 = 0$

2) $$\hat{i}' = \frac{\vec{A}}{|\vec{A}|} = \frac{2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}}{3}$$

$$\hat{j}' = \frac{\vec{B}}{|\vec{B}|} = \frac{2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{3}$$

$$\hat{k}' = \hat{i}' \times \hat{j}' = \left(\frac{2\hat{i} - \hat{j} + 2\hat{k}}{3}\right) \times \left(\frac{2\hat{i} + 2\hat{j} - \hat{k}}{3}\right) \Rightarrow$$

$$\hat{k}' = \frac{-\hat{i} + 2\hat{j} + 2\hat{k}}{3}$$

3) $\vec{A} \cdot \hat{i}' = A'_x$, $\vec{A} \cdot \hat{j}' = A'_y$, $\vec{A} \cdot \hat{k}' = A'_z$

$$\vec{A} = A'_x \hat{i}' + A'_y \cdot \hat{j}' + A'_z \hat{k}'$$

Όμοια

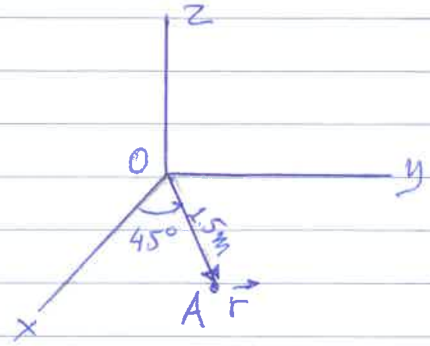
$$\vec{B} = B'_x \hat{i}' + B'_y \hat{j}' + B'_z \hat{k}'$$

Θεωρείστε τρεις δυνάμεις με κοινό σημείο εφαρμογής το A όπου $r = 1.5$ m και

$$\vec{F}_1 = 6\hat{u}_x + 3\hat{u}_y$$

$$\vec{F}_2 = -2\hat{u}_x + 7\hat{u}_y$$

$$\vec{F}_3 = 5\hat{u}_x - 8\hat{u}_y$$



Να βρεθεί η συνισταμένη ροπή αυτών των δυνάμεων ως προς το σημείο O.

Λύση

Χρησιμοποιούμε τη σχέση $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{R}$ όπου $\vec{R} = \Sigma \vec{F}_i$

$$\vec{R} = \hat{u}_x(6-2+5) + \hat{u}_y(3+7-8) = \hat{u}_x \cdot (9) + \hat{u}_y \cdot (2) \ N$$

$$\vec{r} = \hat{u}_x \cdot (1.06) + \hat{u}_y(1.06) \ m$$

Η συνισταμένη ροπή $\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{R} = \hat{u}_z(xR_y - yR_x) =$

$$= \hat{u}_z(2.12 - 9.54) =$$

$$= \hat{u}_z \cdot (-7.42) \ Nm$$

2ος τρόπος

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3$$

$$\vec{\tau}_1 = \vec{r} \times \vec{F}_1 = \hat{u}_z(-3.18) \ Nm$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r} \times \vec{F}_2 = \hat{u}_z(9.54) \ N \cdot m$$

$$\vec{\tau}_3 = \vec{r} \times \vec{F}_3 = \hat{u}_z(-13.78) \ Nm$$

Ένα όχημα κινείται ευθύγραμμα. Τη χρονική στιγμή $t=0$, όταν το όχημα κινείται με ταχύτητα 10 m/s προς τη δεξιά κατεύθυνση, προσπερνά μια πινακίδα στη θέση $x=50\,m$. Η επιτάχυνση του οχήματος ως συνάρτηση του χρόνου δίνεται από τη σχέση

$$a_x = 2 - 0.1\,t \quad m/s^2$$

Βρείτε 1) την ταχύτητα v_x και τη θέση x του οχήματος σαν συνάρτηση του χρόνου 2) πότε η ταχύτητα γίνεται μέγιστη; 3) ποια είναι η μέγιστη ταχύτητα 4) πού βρίσκεται το όχημα όταν αποκτά τη μέγιστη ταχύτητα;

Λύση

1) $dv_x = a_x\,dt \Rightarrow \int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int_0^t a_x\,dt$ η επιτάχυνση δεν είναι σταθερή στο χρόνο

$$v_x = v_{0x} + \int_0^t (2 - 0.1\,t)\,dt$$

$$v_x = v_{0x} + 2t - \frac{0.1}{2}t^2 = 10 + 2t - \frac{0.1}{2}t^2 \quad m/s$$

$$dx = v_x\,dt \Rightarrow \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t \left(10 + 2t - \frac{0.1}{2}t^2\right)dt$$

$$x = x_0 + 10t + \frac{2t^2}{2} - \frac{0.1}{2\cdot 3}t^3 \Rightarrow$$

$$x = 50 + 10t + t^2 - \frac{1}{6}0.1\,t^3 \quad m$$

2) Η ταχύτητα γίνεται μέγιστη όταν $\frac{dv_x}{dt} = 0$

δηλαδή όταν $a_x = 0 \Rightarrow 2 - 0.1t = 0 \Rightarrow t = 20\,s$

3) Η μέγιστη ταχύτητα είναι

$$v_{x\,max} = 10 + 2 \cdot 20 - \frac{1}{2} 0.1 \cdot 20^2 = 30 \text{ m/s}$$

4) x για $t = 20s$

$$x = 50 + 10 \cdot 20 + 20^2 - \frac{1}{6} 0.1 \cdot 20^3 = 517 \text{ m}$$

Σώμα κινείται ευθύγραμμα με επιτάχυνση $a = 2\sqrt{\upsilon}$. Αν για $t = 2s$, $x = \frac{64}{3}$ m και $\upsilon = 16$ m/s. Να βρεθούν οι κινηματικές εξισώσεις του διαστήματος, της ταχύτητας και της επιτάχυνσης συναρτήσει του χρόνου

$$a = 2\sqrt{\upsilon} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{dt} = 2\sqrt{\upsilon} \Rightarrow \frac{d\upsilon}{\sqrt{\upsilon}} = 2dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{d\upsilon}{\sqrt{\upsilon}} = \int 2dt \Rightarrow 2\sqrt{\upsilon} = 2t + C$$

Για $t = 2s$ $\upsilon = 16$ m/s άρα $2 \cdot 4 = 2 \cdot 2 + C \Rightarrow C = 4$

$$\sqrt{\upsilon} = t + 2 \Rightarrow \upsilon = (t+2)^2 \qquad (1)$$

$$a = \frac{d\upsilon}{dt} = 2(t+2) \qquad (2)$$

$$\upsilon = \frac{dx}{dt} \Rightarrow (t+2)^2 = \frac{dx}{dt} \Rightarrow dx = (t+2)^2 \cdot dt$$

$$\int dx = \int (t+2)^2 dt \Rightarrow x = \frac{(t+2)^3}{3} + C$$

Για $t = 2s$ $x = \frac{64}{3}$ m άρα $\frac{64}{3} = \frac{64}{3} + C \Rightarrow C = 0$

$$x = \frac{1}{3}(t+2)^3 \qquad (3)$$

Οι εξισώσεις συντεταγμένων θέσης - χρόνου ενός υλικού σημείου είναι $x = t^2$ και $y = t^4 - 2t^2 - 3$. Να βρεθεί α) η εξίσωση της τροχιάς $y(x)$ β) η ταχύτητα και η επιτάχυνση για $t = 1.5\,s$.

Λύση

α) $\left.\begin{array}{l} x = t^2 \\ y = t^4 - 2t^2 - 3 \end{array}\right\} \Rightarrow y = x^2 - 2x - 3$ παραβολή

β) $\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = t^2\hat{i} + (t^4 - 2t^2 - 3)\hat{j}$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = 2t\hat{i} + (4t^3 - 4t)\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} = 2\hat{i} + (12t^2 - 4)\hat{j}$$

$$\vec{v}(1.5) = 3\hat{i} + 7.5\hat{j}$$

$$\vec{a}(1.5) = 2\hat{i} + 23\hat{j}$$

Ένα σωμάτιο βρίσκεται στην αρχή των αξόνων και έχει επιτάχυνση $\vec{a} = 3\hat{j}\ m/s^2$ και αρχική ταχύτητα $\vec{v}_0 = 5\hat{i}\ m/s$. Βρείτε α) το διάνυσμα θέσης και την ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου.

Λύση

$$\left\{\begin{array}{l} \int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = \int a_x\, dt \\ \int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = \int a_y\, dt \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} \int_{v_{0x}}^{v_x} dv_x = 0 \\ \int_{v_{0y}}^{v_y} dv_y = \int_0^t a_y\, dt \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} v_x = v_{0x} = v_0 \\ v_y = v_{0y} + a_y \cdot t \end{array}$$

$$\left.\begin{array}{l} v_x = v_0 \\ v_y = 3t \end{array}\right\} \quad \vec{v}(t) = v_0\hat{i} + 3t\hat{j} = 5\hat{i} + 3t\hat{j}\ m/s$$

$$\left\{\begin{array}{l} dx = v_x\, dt \\ dy = v_y\, dt \end{array}\right\} \quad \left\{\begin{array}{l} \int_{x_0}^{x} dx = \int_0^t v_0 dt \\ \int_{y_0}^{y} dy = \int_0^t 3t \cdot dt \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} x = x_0 + v_0 t \\ y = y_0 + \frac{3t^2}{2} \end{array}$$

$$\vec{r} = x\hat{i} + y\hat{j} = (\cancel{x_0}^{\,0} + 5t)\hat{i} + \left(\cancel{y_0}^{\,0} + \frac{3t^2}{2}\right)\hat{j} = 5t\hat{i} + \frac{3}{2}t^2\hat{j}\ m$$

Οι συντεταγμένες x, y ενός οχήματος μεταβάλλονται με το χρόνο όπως δίνονται από τις παρακάτω σχέσεις: (1)

$$x = 2 - 0.25\,t^2$$
$$y = 1 \cdot t + 0.025\,t^3$$

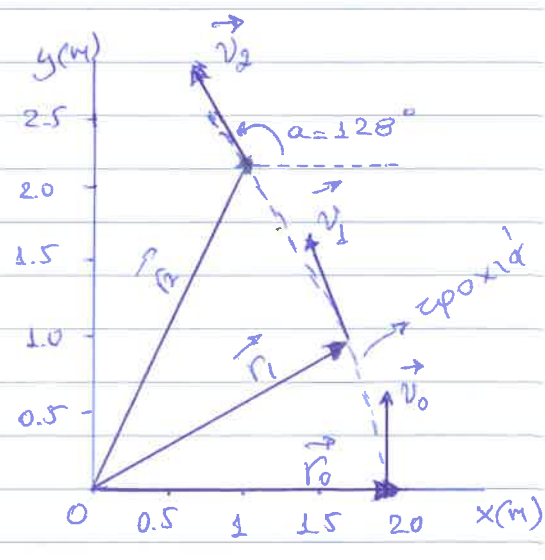
1) Βρείτε τις συντεταγμένες του οχήματος και την απόσταση του από την αρχή τη χρονική στιγμή $t = 2s$
2) Βρείτε τα διανύσματα της μετατόπισης και της μέσης ταχύτητας του οχήματος για το διάστημα από $t = 0s$ έως $t = 2s$
3) Να διατυπώσετε μια έκφραση της στιγμιαίας ταχύτητας του οχήματος $\vec{v}$. Να εκφράσετε τη $\vec{v}$ τη χρονική στιγμή $t = 2s$ υπό τη μορφή συνιστωσών και υπό τη μορφή μέτρου και κατεύθυνσης

Λύση

1) $x = 2 - 0.25\,(2)^2 = 1\,m$ (για $t = 2s$)
$y = 1\,(2) + 0.025\,(2)^3 = 2.2\,m$

$r_2 = \sqrt{x^2 + y^2} = 2.4\,m$ η απόσταση για $t = 2s$ από την αρχή O

2) $$\vec{v}_\mu = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_0}{\Delta t} = \frac{(1\hat{i} + 2.2\hat{j}) - (2\hat{i} + 0\hat{j})}{2 - 0} = -0.5\hat{i} + 1.1\hat{j}$$

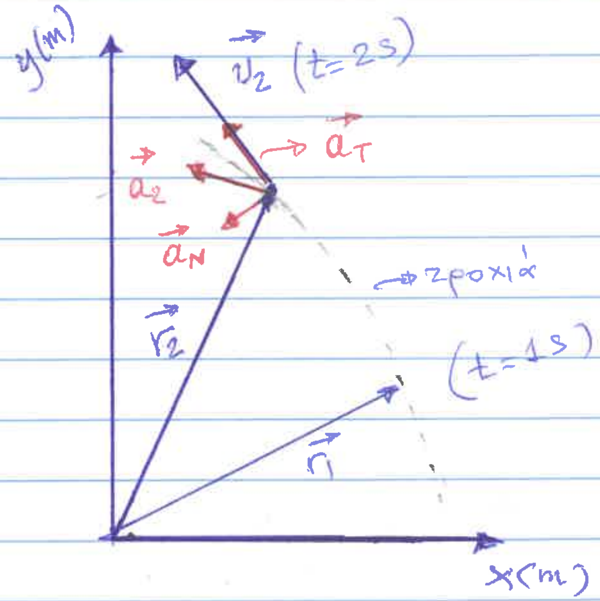


3) $$\vec{v} = v_x\hat{i} + v_y\hat{j} = \frac{dx}{dt}\hat{i} + \frac{dy}{dt}\hat{j} = -0.5t\,\hat{i} + (1 + 0.075\,t^2)\hat{j}$$

Για $t = 2s$, $v_x = -1\,m/s$, $v_y = 1.3\,m/s$
$v(2) = \sqrt{v_x^2 + v_y^2} = 1.6\,m/s$ Μέτρο στιγμιαίας ταχύτητας για $t = 2s$
$a = 180° + \arctan(v_y/v_x) = 180° + (-52°) = 128°$

Στη συνέχεια θα βρούμε την παράλληλη και την κάθετη συνιστώσα της επιτάχυνσης ως προς την ταχύτητα τη χρονική στιγμή $t=2s$

Δηλαδή θα εκφράσουμε την επιτάχυνση σαν το άθροισμα των συνιστωσών $\vec{a}_T$ και $\vec{a}_N$



$$\vec{a} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

όπου $\vec{a}_T$ η συνιστώσα παράλληλη στη $\vec{v}$ και $\vec{a}_N$ η κάθετη συνιστώσα στη $\vec{v}$

Από τα προηγούμενα γνωρίζουμε ότι για $t=2s$

$$\vec{a}_2 = -0.5\hat{i} + 0.30\hat{j} \qquad (a)$$

$|\vec{a}_2| = 0.58\ m/s^2$ και η γωνία μεταξύ των $\vec{a}_2$ και $\vec{v}_2$ είναι $21°$

Επομένως $a_{T(2)} = 0.58 \cdot \cos 21° = 0.54\ m/s^2$

$$a_{N(2)} = 0.58 \cdot \sin 21 = 0.21\ m/s^2$$

$$\vec{a}_2 = 0.54\, \hat{u}_T + 0.21\, \hat{u}_N \qquad (b)$$

③

Για την προηγούμενη άσκηση βρείτε
1) τις συνιστώσες της μέσης επιτάχυνσης για το διάστημα από $t = 0s$ έως $t = 2s$
2) Βρείτε τη στιγμιαία επιτάχυνση για $t = 2s$

1) Για την προηγούμενη άσκηση $\vec{v}(t) = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} =$
$= -0.5t\,\hat{i} + (1 + 0.075t^2)\,\hat{j}$

για $t = 0s$ $\quad v_x = 0\ m/s$
$\qquad\qquad v_y = 1\ m/s$

για $t = 2s$ $\quad v_{x_2} = -1\ m/s$
$\qquad\qquad v_{y_2} = 1.3\ m/s$

Άρα, για το διάστημα $\Delta t = 2 - 0\ (s)$

$$a_{\mu x} = \frac{\Delta v_x}{\Delta t} = -0.5\ m/s^2$$

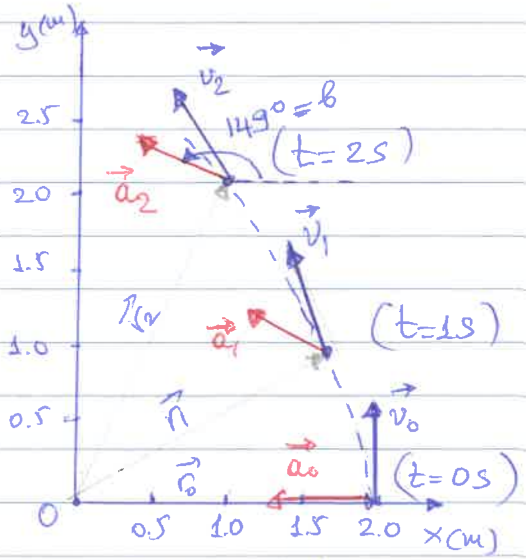
$$a_{\mu y} = \frac{\Delta v_y}{\Delta t} = 0.15\ m/s^2$$

2) Η στιγμιαία επιτάχυνση $\vec{a}(t)$

$$\vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = -0.5\,\hat{i} + 0.15t\,\hat{j}$$

Τη χρονική στιγμή $t = 2s$:

$$\vec{a}_2 = -0.5\,\hat{i} + 0.30\,\hat{j}$$



με μέτρο $|\vec{a}_2| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} = 0.58\ m/s^2$

και γωνία κατεύθυνσης θ του $\vec{a}$ ως προς το θετικό άξονα

$\theta = 180^\circ + (-31^\circ) = 149^\circ \qquad \arctan\dfrac{a_y}{a_x} = -31^\circ$

Υλικό σημείο κινείται στο επίπεδο xy. Η επιτάχυνση του $\vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j}$ ορίζεται από τις σχέσεις $a_x = -4\sin t$ m/s^2 και $a_y = 3\cos t$ m/s^2. Ξέρουμε ότι για $t = 0$ s, $x = 0$ m, $y = 3$ m, $v_x = 4$ m/s και $v_y = 0$ m/s. Βρείτε την εξίσωση της τροχιάς του υλικού σημείου και υπολογίστε το μέτρο της ταχύτητας του τη χρονική στιγμή $t = \frac{\pi}{4}$ s.

$$\left.\begin{aligned} \frac{dv_x}{dt} &= a_x = -4\sin t \\ \frac{dv_y}{dt} &= a_y = 3\cos t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \int_4^{v_x} dv_x &= -4\int_0^t \sin t\, dt \\ \int_0^{v_y} dv_y &= 3\int_0^t \cos t\, dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$v_x - 4 = 4(\cos t - 1) \Rightarrow v_x = 4\cos t \ \text{m/s}$$

$$v_y = 3\sin t \ \text{m/s}$$

$$\left.\begin{aligned} v_x &= \frac{dx}{dt} = 4\cos t \\ v_y &= \frac{dy}{dt} = 3\sin t \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left.\begin{aligned} \int_0^{x} dx &= \int_0^t 4\cos t\, dt \\ \int_3^{y} dy &= \int_0^t 3\sin t\, dt \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$x = 4\sin t \ \text{m}$$

$$y - 3 = -3\cos t + 3 \Rightarrow y = -3\cos t + 6 \ \text{m}$$

$$x^2 = 16\sin^2 t \qquad (y-6)^2 = 9\cos^2 t$$

Αν $\vec{r} = kt\hat{i} + nt^2\hat{j}$ να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς, η ταχύτητα και η επιτάχυνση σαν συνάρτηση του χρόνου

Λύση

$$\vec{r} = kt\hat{i} + nt^2\hat{j}$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d(kt)}{dt}\hat{i} + \frac{d(nt^2)}{dt}\hat{j} = k\hat{i} + 2nt\hat{j}$$

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{dv_x}{dt}\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\hat{j} = 2n\hat{j}$$ (σταθερή με το χρόνο

$$\left.\begin{aligned} x &= kt \\ y &= nt^2 \end{aligned}\right\} \quad t = \frac{x}{k}$$

$$y = n\frac{x^2}{k^2} \Rightarrow y = \frac{n}{k^2}x^2$$ εξ. τροχιάς

Σημείο κινείται σε κύκλο σύμφωνα με το νόμο $s = t^3 + 2t^2$ όπου s το μήκος της διαδρομής πάνω στην περιφέρεια κύκλου. Εάν το μέτρο της ολικής επιτάχυνσης του σημείου για $t=2$ είναι $|\vec{a}_{ολ}| = 16\sqrt{2}\ m/s^2$, να υπολογίσετε την ακτίνα του κύκλου.

$$s = t^3 + 2t^2$$

$$\frac{ds}{dt} = v = 3t^2 + 4t \quad , \quad \vec{v} = \frac{ds}{dt}\hat{u}_T = \hat{u}_T \cdot v$$

$$a_T = \frac{dv}{dt} = 6t + 4$$

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$

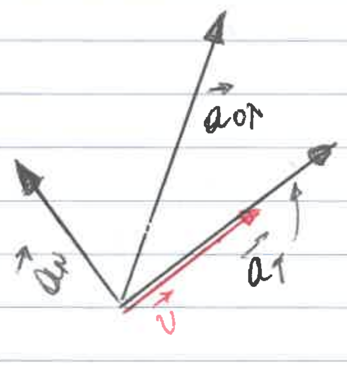
$$\vec{a}_{ολ} = \vec{a}_T + \vec{a}_N = \frac{dv}{dt}\hat{u}_T + \frac{v^2}{R}\hat{u}_N$$

a_T: η εφαπτομενική συνιστώσα

a_N: η κάθετη στην ταχύτητα συνιστώσα

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{(16\sqrt{2})^2 - (6\cdot 2 + 4)^2} = 16\ m/s^2$$

$$a_N = \frac{v^2}{R} \Rightarrow R = \frac{v^2}{a_N}$$

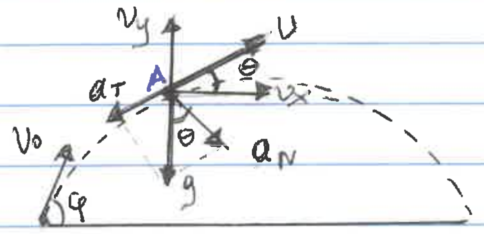


Για $t = 2s$

$$v = 3\cdot 2^2 + 4\cdot 2 = 20\ m/s$$

Άρα $R = \frac{20^2}{16} = 25\,m$

Σώμα εκτελεί βολή στο πεδίο βαρύτητας με αρχική ταχύτητα v_0 υπό γωνία φ ως προς το οριζόντιο επίπεδο. Υπολογίστε την ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς του σαν συνάρτηση του χρόνου. Αγνοείστε την αντίσταση του αέρα.



Έστω την τυχαία χρονική στιγμή t το σώμα βρίσκεται στο σημείο A και έχει ταχύτητα $\vec{v}$ η οποία σχηματίζει γωνία θ με τον οριζόντιο άξονα.

Το ρόλο της κεντρομόλου επιτάχυνσης παίζει η συνιστώσα a_N της βαρύτητας η οποία είναι κάθετη στην ταχύτητα και για την οποία ισχύει

$$a_N = \frac{v^2}{R}$$ όπου R η ακτίνα καμπυλότητας της τροχιάς στο σημείο A

$$\left.\begin{array}{l} a_N = g\cos\theta \\ \cos\theta = \dfrac{v_x}{v} \end{array}\right\} \Rightarrow a_N = \frac{g v_x}{v}$$ οπότε

$$R = \frac{v^2}{a_N} = \frac{v^3}{g v_x} = \frac{(v_x^2 + v_y^2)^{3/2}}{g v_x}$$

Για τη βολή γνωρίζουμε: $v_x = v_0 \cos\varphi$ και $v_y = v_0 \sin\varphi - gt$

Άρα τελικά $$R = \frac{(v_0^2 - 2v_0 g t \sin\varphi + g^2 t^2)^{3/2}}{v_0 g \cos\varphi}$$

Σωματίδιο περιστρέφεται γύρω από ακίνητο άξονα έτσι ώστε για τη γωνιακή του ταχύτητα να ισχύει $\omega = \omega_0 - \kappa\varphi$ όπου φ η γωνία που έχει διαγράψει, ω_0 και κ γνωστές θετικές σταθερές. Για $t=0$ έχουμε $\varphi=0$. Να υπολογιστούν η γωνία περιστροφής και η γωνιακή ταχύτητα σαν συνάρτηση του χρόνου.

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} \Rightarrow d\varphi = \omega t \Rightarrow d\varphi = (\omega_0 - \kappa\varphi)\,dt \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int \frac{d\varphi}{\omega_0 - \kappa\varphi} = \int dt \Rightarrow \int_0^{\varphi} -\frac{1}{\kappa}\,\frac{d(\omega_0-\kappa\varphi)}{\omega_0-\kappa\varphi} = \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{\kappa}\left[\ln(\omega_0-\kappa\varphi) - \ln\omega_0\right] = t \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \ln\frac{\omega_0-\kappa\varphi}{\omega_0} = -\kappa t \Rightarrow \omega_0 - \kappa\varphi = \omega_0 e^{-\kappa t} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \varphi = \frac{\omega_0}{\kappa}\left(1 - e^{-\kappa t}\right) \qquad (1)$$

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{d\left(\frac{\omega_0}{\kappa}\left(1-e^{-\kappa t}\right)\right)}{dt} = -\frac{\omega_0}{\kappa}\,e^{-\kappa t}(-\kappa) = \omega_0 e^{-\kappa t} \qquad (2)$$