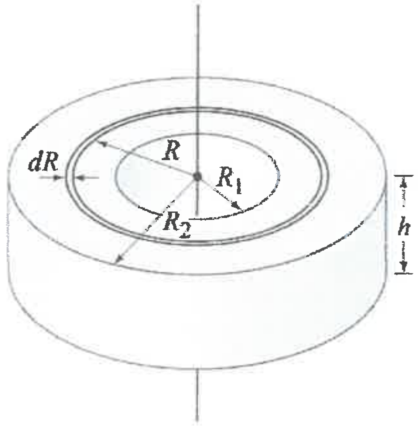
Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας κυλινδρικού κέλυφους με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2. Με βάση αυτή υπολογίστε την ροπή αδράνειας συμπαγούς κυλίνδρου ακτίνας R.



$I_{δακτυλίου\ λεπτού} = MR^2$

Διαιρούμε σε λεπτούς δακτυλίους ακτίνας R, πάχους dR και ύψος h. Ο όγκος του δακτυλίου είναι:

$dV = 2\pi R \cdot h \cdot dR$

Η μάζα του: $dm = \rho dV = \rho 2\pi R h dR$

$I = \int_{R_1}^{R_2} R^2 \cdot dm = \int_{R_1}^{R_2} R^2 \rho 2\pi R h dR = 2\pi\rho h \int_{R_1}^{R_2} R^3 dR =$

$2\pi\rho h \frac{R^4}{4}\Big|_{R_1}^{R_2} = 2\pi\rho h \frac{R_2^4 - R_1^4}{4} = \frac{\pi\rho h}{2}(R_2^4 - R_1^4) =$

$= \frac{\pi\rho h}{2}(R_2^2 + R_1^2)(R_2^2 - R_1^2)$ (1).

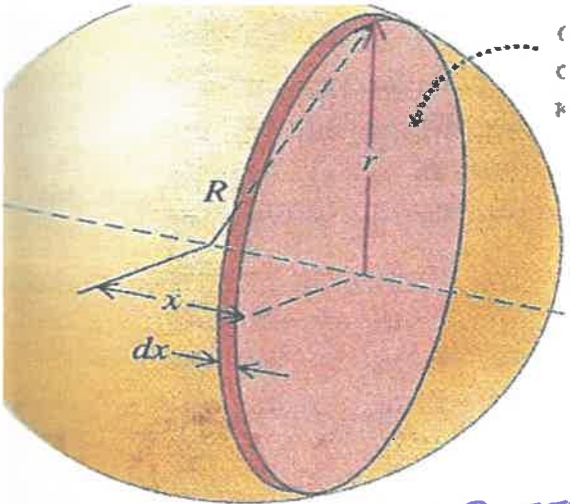
Ο όγκος του κυλίνδρου είναι: $V = \pi h (R_2^2 - R_1^2)$ (2)

$(1), (2) \Rightarrow I = \frac{M}{2}(R_1^2 + R_2^2)$

Όταν $R_2 = R$ και $R_1 = 0$ ο κύλινδρος είναι συμπαγής

και $I = \frac{M}{2}R^2$

Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας συμπαγούς σφαίρας ακτίνας R.



Δίνεται:
$I_{δίσκου} = \frac{1}{2} m r^2$

Διαιρούμε τη σφαίρα σε λεπτούς συμπαγείς δίσκους πάχους dx και σε απόσταση x από το κέντρο της σφαίρας

Η ακτίνα του δίσκου είναι: $r = \sqrt{R^2 - x^2}$

Ο όγκος του δίσκου είναι: $dV = \pi r^2 dx = \pi (R^2 - x^2) dx$

Η μάζα του δίσκου είναι: $dm = \rho \cdot dV = \pi\rho (R^2 - x^2) dx$

Η ροπή αδράνειας του στοιχειώδους δίσκου είναι:

$$dI = \frac{1}{2} r^2 dm = \frac{1}{2} (R^2 - x^2) [\pi\rho (R^2 - x^2) dx = \frac{\pi\rho}{2} (R^2 - x^2)^2 dx$$

Ολοκληρώνουμε από $-R$ μέχρι R για όλη τη σφαίρα ή από Ο μέχρι R για το ένα ημισφαίριο και πολλαπλασιάζουμε ×2.

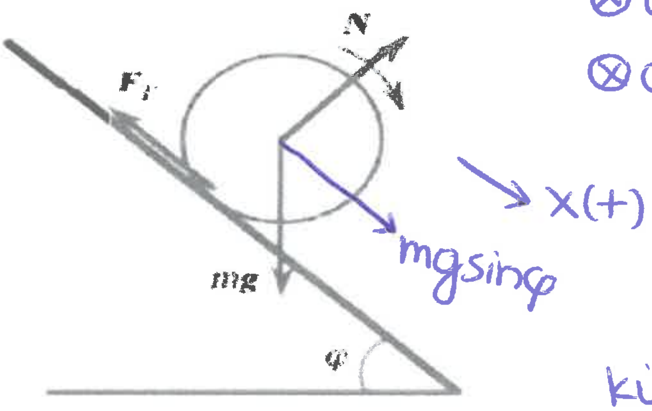
$$I = \frac{\pi\rho}{2} \int_{-R}^{R} (R^2 - x^2)^2 dx = \frac{\pi\rho}{2} \left[\int_{-R}^{R} R^4 dx - \int_{-R}^{R} 2R^2 x^2 dx + \int_{-R}^{R} x^4 dx \right] =$$

$$= \left(R^4 \cdot 2R - 2R^2 \frac{2R^3}{3} + \frac{2R^5}{5}\right) \frac{\pi\rho}{2} = \frac{8}{12} \rho \pi R^5 =$$

$$= \frac{2}{5} \left(\frac{4}{3} \pi\rho R^3\right) R^2 = \frac{2}{5} M R^2$$

όπου $V_{σφαίρας} = \frac{4}{3} \pi R^3$ και $M = \rho \cdot V$

Να υπολογιστεί η ταχύτητα ενός κυλίνδρου που κατέρχεται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο



$\otimes \omega$

$\otimes a_\Gamma$

$I_{κυλίνδρου} = \frac{1}{2} MR^2$

κύλιση χωρίς ολίσθηση: $\upsilon = \omega R$

Κάθοδος με επιτάχυνση

Μεταφορική κίνηση

$$M \cdot g \cdot \sin\varphi - F_T = Ma \Rightarrow F_T = Mg\sin\varphi - Ma \Rightarrow$$

$$F_T = M \cdot g\sin\varphi - M\frac{d\upsilon}{dt} \quad (1)$$

Περιστροφική κίνηση

$$-F_T \cdot R = -I a_r \Rightarrow F_T \cdot R = I\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow F_T \cdot R = \frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$$

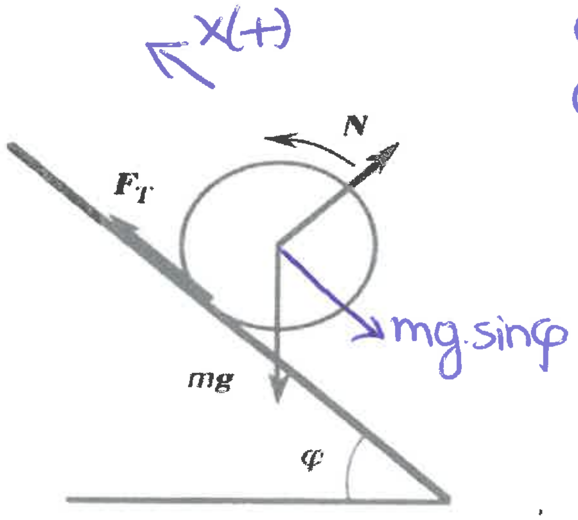
$$F_T = \frac{1}{2}MR\frac{d\upsilon}{dt}\frac{1}{R} \xRightarrow{(1)} M \cdot g\sin\varphi - M\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{1}{2}M\frac{d\upsilon}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{2}{3}g\sin\varphi \Rightarrow \int_{\upsilon_0}^{\upsilon} d\upsilon = \frac{2}{3}g\sin\varphi \int_0^t dt \Rightarrow$$

$$\upsilon = \upsilon_0 + \frac{2}{3}g\sin\varphi \cdot t$$

$$(1) \Rightarrow F_T = Mg\sin\varphi - \frac{2}{3}Mg\sin\varphi = \frac{1}{3}Mg\sin\varphi$$

Να υπολογιστεί η ταχύτητα ενός κυλίνδρου που ανέρχεται σε ένα κεκλιμένο επίπεδο.



$\odot\ \omega$

$\otimes\ a_z$

$I_{κυλίνδρου} = \frac{1}{2}MR^2$

κύλιση χωρίς ολίσθηση

$u = \omega R$

Άνοδος με επιβράδυνση

Μεταφορική κίνηση

$-Mg.\sin\varphi + F_T = Ma \Rightarrow F_T = Mg\sin\varphi + Ma \Rightarrow$

$F_T = M.g\sin\varphi + M\frac{du}{dt} \quad (1)$

Περιστροφική κίνηση

$F_T.R = -I a_r \Rightarrow F_T.R = -I\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow F_T.R = -\frac{1}{2}MR^2\frac{d\omega}{dt} \Rightarrow$

$F_T.R = -\frac{1}{2}MR^2\frac{du}{dt}\frac{1}{R} \overset{(1)}{\Rightarrow} (M.g\sin\varphi + M\frac{du}{dt})R =$

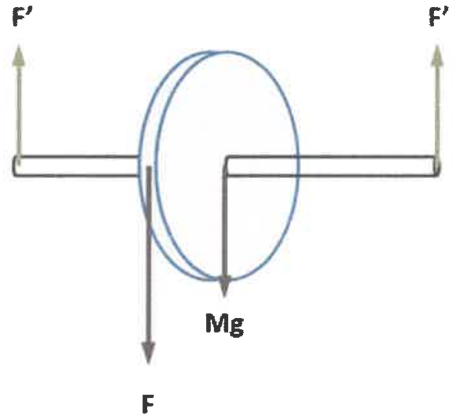
$= -\frac{1}{2}MR\frac{du}{dt} \Rightarrow \frac{du}{dt} = -\frac{2}{3}g\sin\varphi \Rightarrow$

$\int_{u_0}^{u} du = -\frac{2}{3}g\sin\varphi \int_0^t \Rightarrow u = u_0 - \frac{2}{3}g\sin\varphi t$

$(1) \Rightarrow F_T = M.g\sin\varphi - \frac{2}{3}M.g\sin\varphi = \frac{1}{3}Mg\sin\varphi$

Δίσκος ακτίνας R=0.5 m και μάζας m=20 kg μπορεί να περιστρέφεται ελεύθερα και χωρίς τριβές γύρω από σταθερό οριζόντιο άξονα που περνάει από το κέντρο του δίσκου. Τραβώντας ένα σπάγγο, που είναι τυλιγμένος γύρω από την περιφέρεια του δίσκου, εφαρμόζουμε μία δύναμη F=9.8 N. Να βρεθεί η γωνιακή επιτάχυνση του δίσκου και η γωνιακή ταχύτητα μετά από 2s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του δίσκου: $I = \frac{1}{2} mR^2$



Η ροπή του βάρους είναι 0. Η μόνη δύναμη που έχει ροπή είναι η F. Η συνισταμένη ροπή των F' είναι 0.

$$\left.\begin{aligned} \tau &= F \cdot R \\ \tau &= I \frac{d\omega}{dt} \end{aligned}\right\} \Rightarrow FR = \left(\frac{1}{2} MR^2\right) a_\gamma \Rightarrow a_\gamma = \frac{2F}{MR} = 1{,}96 \frac{rad}{sec^2}$$

Γωνιακή ταχύτητα μετά από 2sec αν ο δίσκος ξεκινάει από ηρεμία

$\omega = at = 3{,}92$ rad/s

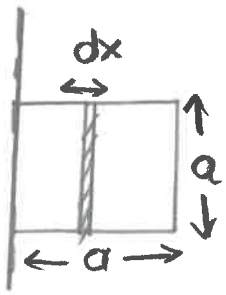
Αφού δεν υπάρχει μεταφορική κίνηση:

$\Sigma F = 0 \Rightarrow 2F' - Mg - F = 0 \Rightarrow F' = 102{,}9\,N$

Λεπτή τετράγωνη πλάκα πλευράς α και μάζας Μ περιστρέφεται γύρω από τη μια πλευρά της. α) Να υπολογιστεί η ροπή αδράνειας της πλάκας

β) Αν από την πλάκα αποκοπεί ένα τετράγωνο κομμάτι πλευράς b (b<a) με κέντρο το κέντρο της πλάκας πόσο θα μεταβληθεί η ροπή αδράνειας της πλάκας?

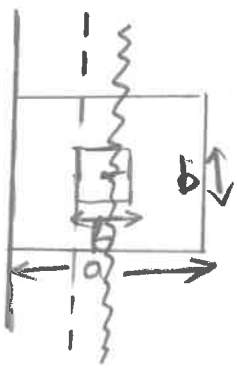
γ) Από ποιο σημείο της πλάκας θα έπρεπε να αποκοπεί το τετράγωνο αυτό κομμάτι για να μεταβληθεί όσο το δυνατό περισσότερο η ροπή αδράνειας της πλάκας? Υπάρχει μόνο μια επιλογή για το σημείο αυτό?



α) Για τη στοιχειώδη μάζα dm

$$dm = \rho \cdot dV \Rightarrow dm = \frac{M}{a^2}\, a \cdot dx = \frac{M}{a} dx \quad (1)$$

$$I = \int_0^a dm\, x^2 \overset{(1)}{\Rightarrow} I = \frac{M}{a}\int_0^a x^2 dx = \frac{Ma^2}{3} \quad (2)$$



β) Με βάση τη σχέση (2) βρίσκουμε τη ροπή αδράνειας του αφαιρεμένου κομματιού

$$I_1 = m_1 \frac{b^2}{3}$$

γύρω από τον διακεκομμένο άξονα που περνά από τη μια πλευρά του. Επομένως γύρω από τον άξονα ξ που περνά από το κέντρο του η ροπή αδράνειας θα είναι I_{10} και σύμφωνα με το Steiner:

$$I_{10} + m_1\left(\frac{b}{2}\right)^2 = m_1\frac{b^2}{3} \Rightarrow I_{10} = m_1\frac{b^2}{12}$$

Επομένως γύρω από τον αρχικό άξονα περιστροφής:

$$I = I_{10} + m_1\left(\frac{a}{2}\right)^2 = m_1\left(\frac{b^2}{12} + \frac{a^2}{4}\right) \quad (3)$$

Συνολικά: $$I_{ολ} \overset{(2),(3)}{=} \frac{Ma^2}{3} - m_1\left(\frac{b^2}{12} + \frac{a^2}{4}\right) \quad (4)$$

Αλλά ισχύει: $$\frac{m_1}{b^2} = \frac{M}{a^2} \quad (\rho = σταθ)$$

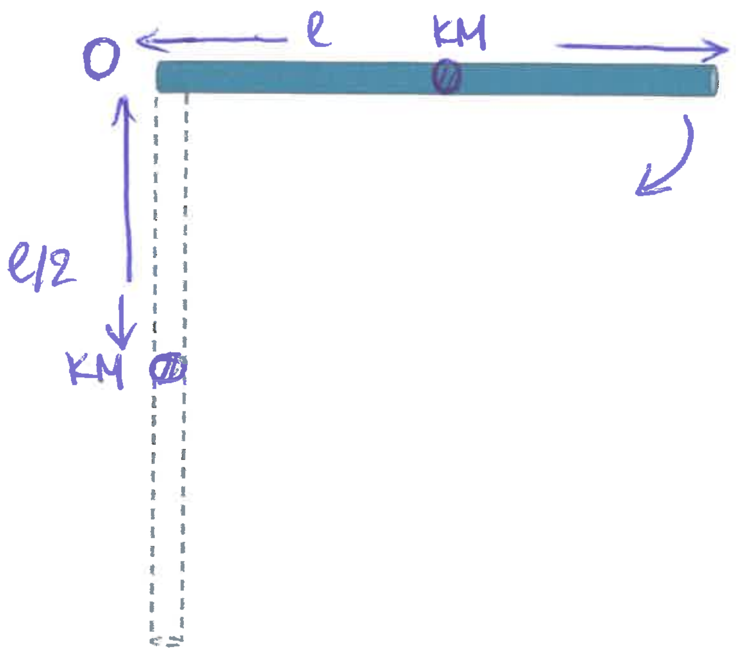
Οπότε: $$m_1 = \frac{Mb^2}{a^2} \quad (5)$$

$$(4),(5) \Rightarrow I_{o\eta} = \frac{Ma^2}{3} - M\frac{b^2}{a^2}\left(\frac{b^2}{12} + \frac{a^2}{4}\right) =$$

$$= Ma^2\left[\frac{1}{3} - \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^4}{a^4}\frac{1}{12}\right]$$

γ) Για να έχουμε τη μέγιστη μεταβολή του I πρέπει να αποκοπεί κομμάτι όσο το δυνατό μακρύτερα από τον άξονα περιστροφής, δηλαδή από την μία πλευρά της πλάκας. Υπάρχουν πολλές ισοδύναμες επιλογές:

Μια ράβδος μάζας Μ περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από το ένα άκρο της. Η ράβδος συγκρατείται αρχικά οριζόντια σε κατάσταση ηρεμίας και στη συνέχεια αφήνεται ελεύθερη. Προσδιορίστε την γωνιακή ταχύτητα της ράβδου όταν φτάνει σε κάθετη θέση και την ταχύτητα του άκρου της ράβδου την ίδια χρονική στιγμή.



$I_{ράβδου} = \frac{1}{12} M\ell^2$

Αρχικά: $K_1 = 0$ $\quad U_1 = Mg\frac{\ell}{2}$

Τελικά: $K_2 = \frac{1}{2} I\omega^2$ $\quad U_2 = 0$

$E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow K_1 + U_1 = K_2 + U_2 \Rightarrow Mg\frac{\ell}{2} = \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow$

$\omega^2 = \frac{Mg\ell}{I}$ (1)

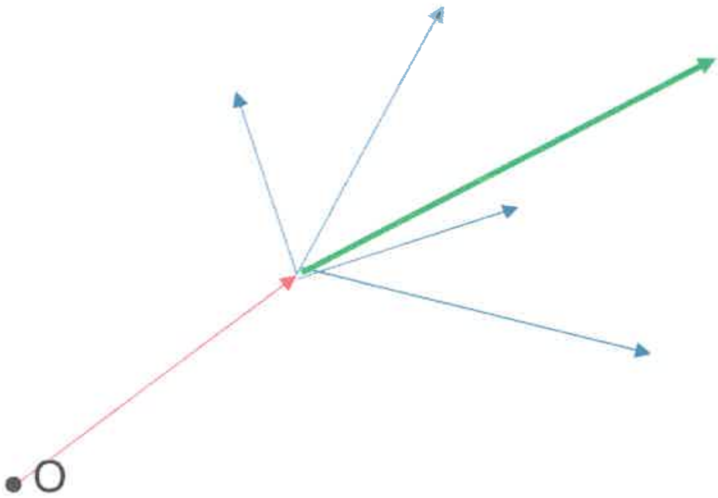
$I = I_{KM} + M\left(\frac{\ell}{2}\right)^2 \Rightarrow I = \frac{1}{12} M\ell^2 + m\frac{\ell^2}{4} \Rightarrow I = \frac{M\ell^2}{3}$ (2)

[Steiner]

$(1),(2) \Rightarrow \omega^2 = \frac{3g}{\ell} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{3g}{\ell}}$

Γραμμική ταχύτητα στο άκρο της ράβδου: $\upsilon = \ell . \omega$

Στο σημείο του χώρου $\vec{r}$=(1,1,1) επενεργούν 4 δυνάμεις $\overrightarrow{F_1}$=(1,0,1), $\overrightarrow{F_2}$=(2,-1,0), $\overrightarrow{F_3}$=(-2,-1,0), $\overrightarrow{F_4}$=(0,1,1). Να βρεθεί η συνισταμένη ροπή του συστήματος ως προς την αρχή των αξόνων και να εξεταστεί αν αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από τη συνισταμένη δύναμη με τον ίδιο μοχλοβραχίονα



$$\vec{\tau}_1 = \vec{r}\times\vec{F_1} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}\vec{i} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}\vec{j} + \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}\vec{k} =$$

$$= \vec{i} - \vec{k}$$

$$\vec{\tau}_2 = \vec{r}\times\vec{F_2} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$$

$$\vec{\tau}_3 = \vec{r}\times\vec{F_3} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = \vec{i} - 2\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{\tau}_4 = \vec{r}\times\vec{F_4} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -\vec{j} + \vec{k}$$

$$\vec{\tau}_{ol} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \vec{\tau}_4 = (1+1+1+0)\vec{i} + (0+2-2-1)\vec{j} +$$

$$+(-1-3+1+1)\vec{k} = 3\vec{i} - \vec{j} - 2\vec{k}$$

Διαφορετικά:

$$\vec{F}_{ολ}=\vec{F}_1+\vec{F}_2+\vec{F}_3+\vec{F}_4=(1+2-2+0)\vec{i}+(0-1-1+1)\vec{j}+$$
$$+(1+0+0+1)\vec{k}=\vec{i}-\vec{j}+2\vec{k}$$

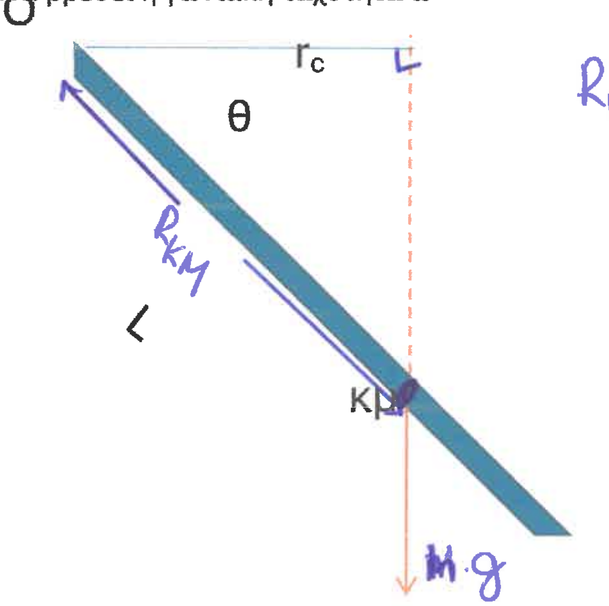
$$\vec{r}\times\vec{F}_{ολ}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & -1 & 2\end{vmatrix}=3\vec{i}-\vec{j}-2\vec{k}$$

Σε αυτή την περίπτωση μπορούμε να βρούμε τη συνισταμένη δύναμη και μετά τη ροπή της. Αυτό ισχύει γιατί οι δυνάμεις έχουν το ίδιο διάνυσμα θέσης

Ομογενής ράβδος μήκους L που περιστρέφεται στο σημείο O με το βάρος της που εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας σε απόσταση $R_{CM}=5/9\ L$

Δινεται $I = \frac{7}{18} M . L^2$

Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα ω



R_{KM} = απόσταση του κέντρου μάζας (κμ) από τον άξονα περιστροφής O

$$\left.\begin{aligned} \tau &= I a_r \Rightarrow \tau = I \frac{d\omega}{dt} \\ \tau &= M \cdot g\, r_c = M \cdot g\, R_{KM} \cos\theta \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = M \cdot g \frac{5}{9} L \cos\theta \Rightarrow \frac{7}{18} M L^2 \frac{d\omega}{dt} = M \cdot g \frac{5}{9} L \cos\theta \Rightarrow$$

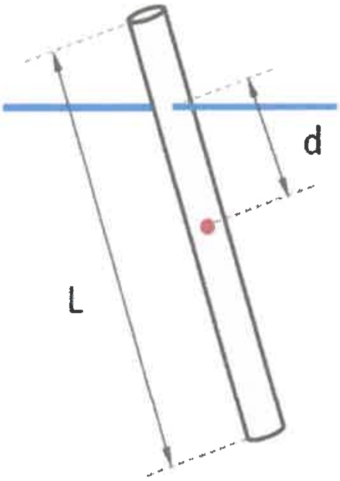
$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{10}{7} \frac{g}{L} \cos\theta \Rightarrow \frac{d\omega}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{10}{7} \frac{g}{L} \cos\theta \Rightarrow$$

$$\omega\, d\omega = \frac{10}{7} \frac{g}{L} \cos\theta \cdot d\theta \Rightarrow \int_0^{\omega} \omega\, d\omega = \int_0^{\theta} \frac{10}{7} \frac{g}{L} \cos\theta \Rightarrow$$

$$\frac{\omega^2}{2} = \frac{10}{7} \frac{g}{L} \sin\theta \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{20}{7} \frac{g}{L} \sin\theta}$$

Ενας λεπτός χάρακας μήκους L χρησιμοποιείται σαν φυσικό εκκρεμές αναρτώμενος με μια πινέζα στον τοίχο. Ο χάρακας δύναται να περιστραφεί κατακόρυφα χωρίς τριβές γύρω από οριζόντιο άξονα διερχόμενο από το σημείο ανάρτησης της πινέζας. Σε ποιο σημείο του χάρακα θα πρέπει να τοποθετηθεί η πινέζα ώστε αυτός να έχει τη διπλάσια περίοδο με απλό μαθηματικό εκκρεμές, του οποίου το μήκος d είναι το ίδιο με την απόσταση του σημείου περιστροφής από το κέντρο μάζας του χάρακα;

Δίνεται η ροπή αδράνειας ράβδου ως προς άξονα περιστροφής που περνά από το κέντρο μάζας: $I_C = \frac{1}{12}mL^2$



Φυσικό εκκρεμές

$$I a_r = -mgd\theta \Rightarrow I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\theta \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0 \quad (1)$$

όπου $\sin\theta \simeq \theta$

$$I = \frac{1}{12}mL^2 + md^2 \quad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{12gd}{L^2+12d^2}\theta = 0$$

άρα $\omega^2 = \frac{12gd}{L^2+12d^2} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{12gd}{L^2+12d^2}}$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{L^2+12d^2}{12gd}}$$

Περιοδος απλού εκκρεμούς $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{d}{g}}$

Επειδή $T = 2T_0 \Rightarrow 2\pi\sqrt{\frac{L^2+12d^2}{12gd}} = 4\pi\sqrt{\frac{d}{g}} \Rightarrow d = \frac{L}{6}$

Σε ένα μεγάλο οριζόντιο δακτύλιο του λούνα παρκ που περιστρέφεται γύρω από έναν κατακόρυφο άξονα με ακτίνα R=33.1 m. Για το χρονικό διάστημα από t=0 μέχρι t=2.30 s η γωνιακη θέση θ(t) δίνεται απο τη σχέση

$$\theta = ct^3$$

Όπου c=6,39x10^{-2} rad/s^{3}. Μετά τη στιγμή t=2.3 s η γωνιακή ταχύτητα διατηρείται σταθερή. Για τη στιγμή t=2.2 s να προσδιοριστεί η γωνιακή ταχύτητα ω, η γραμμική ταχύτητα, η γωνιακή επιτάχυνση, η εφαπτομενική επιτάχυνση, και το διάνυσμα της επιτάχυνσης

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} \Rightarrow \omega = \frac{d}{dt}(ct^3) = 3ct^2$$

[για $t=2.2sec \rightarrow \omega = 0,928$ rad/s]

$$\upsilon = \omega \cdot R \Rightarrow \upsilon = 0,928 \times 33,1 = 30,7 \text{ m/s}$$ [για t=2.2sec]

$$a_r = \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow a_r = \frac{d}{dt}(3ct^2) = 6ct$$

[για $t=2.2sec \rightarrow a_r = 0,843$ rad/s^2]

εφαπτομενική επιτάχυνση $a_{tan} = a_r \cdot R = 6ctR$

[για $t= 2.2sec \rightarrow a_{tan} = 27,9$ m/s^2]

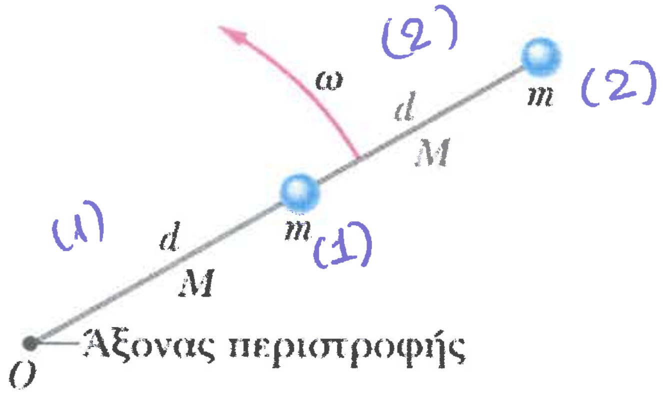
ακτινική επιτάχυνση $a_{rad} = \omega^2 R$

[για $t=2.2sec \rightarrow a_{rad} = 28,5$ rad/s^2]

$$a = \sqrt{a_{tan}^2 + a_{rad}^2}$$

$$\theta = \tan^{-1}\left(\frac{a_{tan}}{a_{rad}}\right)$$

Δύο σωματίδια, το καθένα μάζας m = 0.85 kg, είναι συνδεδεμένα μεταξύ τους και μπορούν να περιστρέφονται γύρω από άξονα περιστροφής που διέρχεται από το σημείο O, με τη βοήθεια δύο λεπτών ράβδων, που η κάθε μία έχει μήκος d = 5.6 cm και μάζα M = 1.2 kg. Ολόκληρη αυτή η διάταξη των σωμάτων περιστρέφεται γύρω από τον άξονα που βρίσκεται στο O με γωνιακή ταχύτητα ω = 0.30 rad/s.
(α) Πόση είναι η ροπή αδράνειας του συστήματος, μετρημένη ως προς το O και (β) ποια η συνολική κινητική ενέργεια της διάταξης;



$$I_{ράβδου} = \frac{1}{12} M L^2$$

$$I = I_{ράβδου(1)} + I_{m_1} + I_{ράβδου(2)} + I_{m_2} =$$

$$= \underbrace{\left[\frac{1}{12} M d^2 + M\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]}_{\text{θεώρημα Steiner για την πρώτη ράβδο}} + \underbrace{m d^2}_{\text{πρώτη μάζα}} + \underbrace{\left[\frac{1}{12} M d^2 + M\left(\frac{d}{2}+d\right)^2\right]}_{\text{θεώρημα Steiner για την δεύτερη ράβδο}}$$

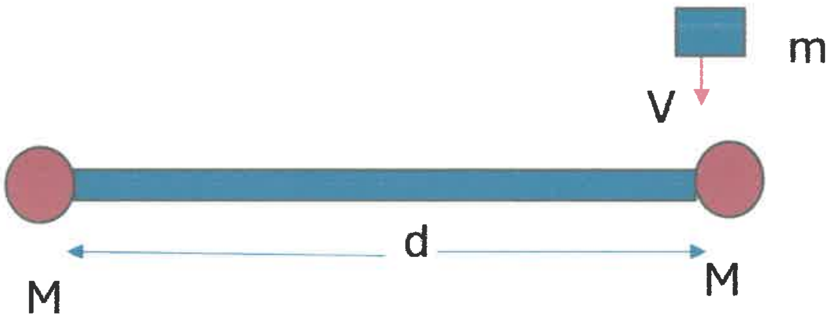
$$+ \underbrace{m(2d)^2}_{\text{δεύτερη μάζα}} = \frac{8}{3} M d^2 + 5 m d^2 =$$

$$= \frac{8}{3} \times 1{,}2 \times (0.056)^2 + 5 \times 0.85 \times (0.056)^2 =$$

$$= 0.023 \ kg\,m^2$$

Μια μάζα m κινούμενη με ταχύτητα V προσκολλάται σε μία από τις μπάλες ενός αλτήρα, ο οποίος περιστρέφεται χωρίς τριβές κατακόρυφα γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσο της αβαρούς ράβδου που συνδέει τις δύο μπάλες. Εάν η μάζα της κάθε μπάλας είναι M και το μήκος της ράβδου d, να υπολογιστούν α) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας αμέσως μετά την προσκόλληση της μάζας m στη μπάλα β) τον λόγο των κινητικών ενεργειών πριν και μετά την πρόσκρουση.

γ) Τη συνολική γωνία περιστροφής του αλτήρα μετά την πρόσκρουση.



Θεωρούμε ως σύστημα τις δύο μάζες M και τη μάζα m.

α) Αρχικά: $L_{αρχ} = mV\cdot\frac{d}{2}$

Τελικά: $L_{τελ} = \left[m\left(\frac{d}{2}\right)^2 + 2M\left(\frac{d}{2}\right)^2\right]\omega$ (1)

όπου $I = (2M+m)\left(\frac{d}{2}\right)^2$ (2)

Αφού δεν επιδρά εξωτερική ροπή, ισχύει η αρχή διατήρησης στροφορμής: $L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow mV\frac{d}{2} = \left[m\frac{d^2}{4} + 2M\frac{d^2}{4}\right]\omega \Rightarrow \omega = \frac{2mV}{(2M+m)d}$

β) Λόγος των κινητικών ενεργειών πριν και μετά την πρόσκρουση

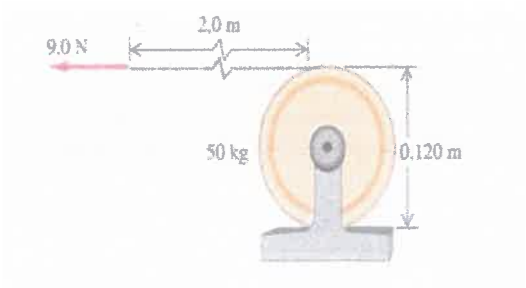
$$\frac{K_{τελ}}{K_{αρχ}} = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}mV^2} = \frac{I}{m}\left(\frac{\omega}{V}\right)^2 \quad (3)$$

$$(1),(2),(3) \Rightarrow \frac{K_{τελ}}{K_{αρχ}} = \left(\frac{2M}{m}+1\right)\left(\frac{m}{2M+m}\right) = \frac{m}{2M+m}.$$

Τυλίγουμε ένα ελαφρύ, μη εκτατό συρματόσχοινο γύρω από έναν συμπαγή κύλινδρο μάζας 50 kg και διαμέτρου 0,120 m ο οποίος περιστρέφεται χωρίς τριβές γύρω από έναν σταθερό οριζόντιο άξονα στερεωμένος με ρουλεμάν. Έλκουμε το ελεύθερο άκρο του συρματόσχοινου με σταθερή δύναμη F=9,0 N για απόσταση 2 m. Το συρματόσχοινο ξετυλίγεται χωρίς ολίσθηση, στρέφοντας ταυτόχρονα τον κύλινδρο. Ο κύλινδρος αρχικά είναι σε ηρεμία. Υπολογίστε τα μέτρα της τελικής γωνιακής ταχύτητας του κυλίνδρου και της τελικής ταχύτητας του συρματόσχοινου

$I_{κυλίνδρου} = \frac{1}{2} M R^2 = 0{,}090\, kg \cdot m^2$

$R = \frac{0{,}120}{2} = 0{,}06\, m$



Υποθέσεις:

α) Το συρματόσχοινο δεν έχει μάζα, άρα δεν έχει κινητική ενέργεια

β) Δεν υπάρχουν μεταβολές στην δυναμική ενέργεια

γ) Δεν υπάρχει ολίσθηση του συρματόσχοινου και άρα δεν υπάρχει απώλεια μηχανικής ενέργειας

δ) Επειδή το συρματόσχοινο είναι αβαρές, η δύναμη που ασκεί στην περιφέρεια του κυλίνδρου είναι F=9N

Αρχικά ο κύλινδρος ηρεμεί: $K_1 = 0$

Μετά τη μετακίνηση του συρματόσχοινου κατά 2m, ο κύλινδρος έχει $K_2 = \frac{1}{2} I \omega^2$

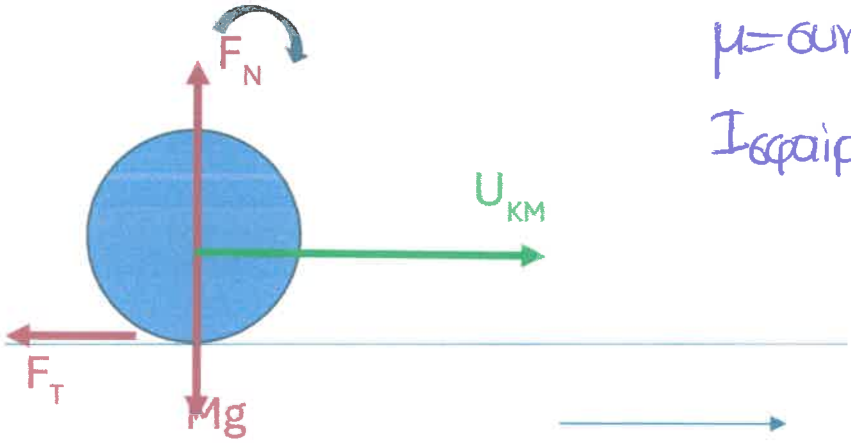
Αρχή διατήρησης ενέργειας: $\cancel{K_1}^{0} + \cancel{U_1}^{0} + \underbrace{W}_{\text{έργο που παράγεται από την } F} = K_2 + \cancel{U_2}^{0} \Rightarrow$

$W = K_2 \Rightarrow F \cdot S = \frac{1}{2} I \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{2 \times 9 \times 2}{0{,}090}} = 20\, rad/s$

Το μέτρο της ταχύτητας του συρματόσχοινου θα είναι ίσο με το μέτρο της εφαπτομενικής ταχύτητας υ του κυλίνδρου στο σημείο αυτό: $\upsilon = \omega R = 20 \times 0{,}06 = 1{,}2\, m/s$

Αν η μάζα του συρματόσχοινου ήταν σημαντική, τότε μέρος του έργου W θα μετατρεπόταν σε κινητική ενέργεια του συρματόσχοινου. Επομένως η K_2 και η ω θα είχαν μικρότερες τιμές

Μια μπάλα του bowling μάζας M και ακτίνας r εκτοξεύεται κατά μήκος μιας επίπεδης επιφάνειας έτσι ώστε αρχικά (t=0) να ολισθαίνει με γραμμική ταχύτητα u_0 χωρις να περιστρέφεται. Στη συνέχεια κάποια στιγμή ενώ ολισθαίνει αρχίζει και στροβιλίζεται και τελικά κυλά χωρίς να ολισθαίνει.Πόσο είναι το χρονικό διάστημα που παρέρχεται μέχρι να ξεκινήσει να κυλά χωρίς να ολισθαίνει?



μ= συντελεστής ολίσθησης

$I_{σφαίρας} = \frac{2}{5}MR^2$

α) Μεταφορική κίνηση με ολίσθηση (χωρίς περιστροφή)

$Ma = -F_T \Rightarrow M\cdot a = -\mu F_N \Rightarrow Ma = -\mu M g \Rightarrow$

$a = -\frac{\mu \cancel{M} g}{\cancel{M}} = -\mu g$ Άρα η επιτάχυνση είναι σταθερή και αρνητική (επιβράδυνση)

Η γραμμική ταχύτητα του κέντρου μάζας:

$u_{KM} = u_0 + at \Rightarrow u_{KM} = u_0 - \mu g t$ (1)

β) Περιστροφική κίνηση

$-F_T\cdot R = I a_r \Rightarrow -F_T\cdot R = \frac{2}{5}MR^2 a_r \Rightarrow (-\mu M g)R =$

$= \frac{2}{5}MR^2 a_r \Rightarrow a_r = \frac{5\mu g}{2R}$ = σταθερή (2)

Η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής: $\omega = \cancel{\omega_0}^{\,0} + a_r\cdot t \overset{(2)}{\Rightarrow}$

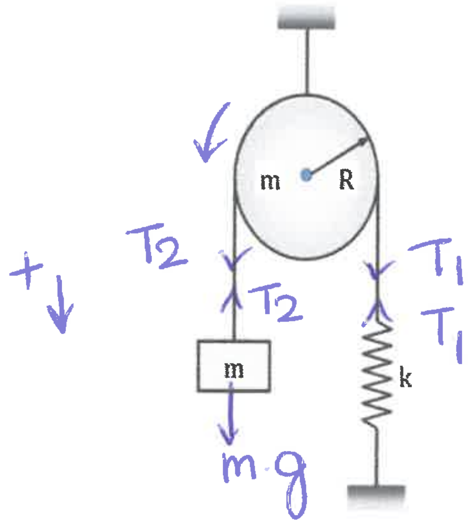
$\omega = \frac{5\mu g}{2R} t$

Τη χρονική στιγμή t_1 ισχύει κύλιση χωρίς ολίσθηση:

$u_{KM} = \omega\cdot R$ (3)

$(1),(2),(3) \Rightarrow u_0 - \frac{\mu g}{t_1} = \frac{5\mu g}{2R} t_1\cdot R \Rightarrow t_1 = \frac{2u_0}{7\mu g}$

Αβαρές και μη εκτατό νήμα που περνά από την κυλινδρική τροχαλία μάζας m και ακτίνας R, στο ένα άκρο είναι συνδεδεμένο με μάζα m ενώ στο άλλο με αβαρές ελατήριο σταθεράς k το οποίο είναι στερεωμένο. Αρχικά το σύστημα ισορροπεί. Τραβάμε λίγο προς τα κάτω τη μάζα m, εκτρέποντάς την από τη θέση ισορροπίας. Να υπολογιστεί η περίοδος των μικρών ταλαντώσεων. Θεωρούμε ότι το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία. Δίνεται η ροπή αδράνειας της τροχαλίας $I = \frac{1}{2}mR^2$



$I_{τροχαλίας} = \frac{1}{2} M R^2$

Αρμονική ταλάντωση

Κατά την ισορροπία του συστήματος, το ελατήριο θα εκταθεί κατά x_0 οπότε: $m \cdot g = K x_0 \Rightarrow x_0 = \frac{mg}{K}$ (1).

Όταν το σύστημα κινείται:

Για το σώμα: $m \frac{d^2x}{dt^2} = m \cdot g - T_2$ (2)

Για την τροχαλία: $(T_2 - T_1) R = I a = I \frac{d^2\theta}{dt^2}$ (3)

Για το ελατήριο: $T_1 = K(x + x_0) \overset{(1)}{=} K\left(x + \frac{mg}{K}\right)$ (4)

Επειδή το νήμα είναι κολλημένο στην τροχαλία:

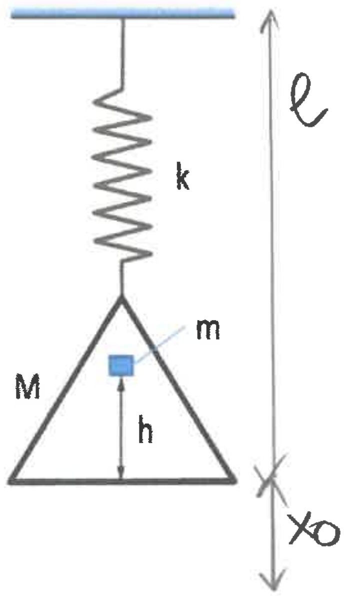
$x = R\theta \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} = R \frac{d^2\theta}{dt^2}$ (5)

(2),(3),(4),(5) $\Rightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{2K}{3M}\theta = 0$

Σύμφωνα με τη διαφορική εξίσωση αρμονικής ταλάντωσης:

$\omega^2 = \frac{2k}{3M} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{3M}{2K}}$

Σε ισορροπούσα πλατφόρμα μάζας M που είναι κρεμασμένη στο άκρο ελατηρίου σταθεράς k πέφτει σώμα μάζας m από ύψος h και κολλά πάνω της. Υπολογίστε το πλάτος των ταλαντώσεων του συστήματος.



Το σύστημα θα ταλαντώνεται γύρω από μια καινούργια θέση που απέχει απόσταση x_0 από τη θέση στην οποία βρίσκεται η πλατφόρμα πριν κολλήσει η μάζα m.

Στη θέση ισορροπίας:

πριν $M \cdot g = k \cdot \ell$ (1)

μετά $(M+m)g = k(x_0+\ell) \Rightarrow$

$Mg + mg = kx_0 + k\ell \overset{(1)}{\Rightarrow}$

$x_0 = \dfrac{mg}{k}$ (2)

Για την ταλάντωση γύρω από τη νέα θέση ισορροπίας ισχύει: $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$ όπου $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m+M}}$

$x = A\cos(\omega t+\varphi) \Rightarrow x^2\omega^2 = A^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi)$

$u = -A\sin(\omega t+\varphi) \Rightarrow u^2 = A^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi)$

$\Rightarrow$ (πρόσθεση κατά μέλη)

$x^2\omega^2 + u^2 = A^2\omega^2\cos^2(\omega t+\varphi) + A^2\omega^2\sin^2(\omega t+\varphi) \Rightarrow$

$A^2 = \dfrac{x^2\omega^2 + u^2}{\omega^2}$ (3)

Πριν την κρούση: $\frac{1}{2}mu^2 = mgh \Rightarrow u = \sqrt{2gh}$ (4)

Διατήρηση ορμής πριν και μετά την κρούση: $mu = (M+m)u_0 \Rightarrow$

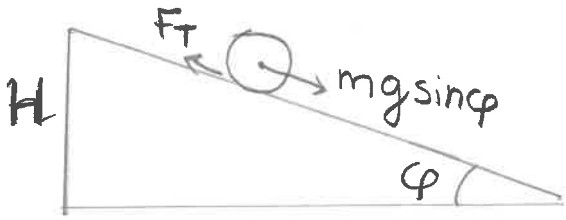
$u_0 = \dfrac{mu}{m+M} \overset{(4)}{\Rightarrow} u_0 = m\sqrt{\dfrac{2gh}{M+m}}$ (5) u_0 = ταχύτητα πλατφόρμας μαζί με την μάζα m

Αντικαθιστώντας την (2) και (5) στην (3):

$$A = \frac{mg}{k}\sqrt{1 + \frac{2kh}{(M+m)g}}$$

Ποια θα είναι η ταχύτητα συμπαγούς σφαίρας μάζας M και ακτίνας R όταν φτάσει στη βάση κεκλιμένου επιπέδου αν ξεκινά από ηρεμία σε ύψος H και κυλά χωρίς να ολισθαίνει?

- Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό ενός σώματος που ολισθαίνει προς τα κάτω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο.
- Ποιο από τα παρακάτω στερεά (με την ίδια μάζα και ακτίνα) θα φτάσει πιο γρήγορα στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου: σφαίρα, κύλινδρος, στεφάνη. I σφαίρας $= \frac{2}{5}MR^2$, I κυλίνδρου $= \frac{1}{2}MR^2$, I στεφάνη $= MR^2$



↑y

Κύλιση χωρίς ολίσθηση: $υ = ωR$

Στην κορυφή του κεκλιμένου επιπέδου:

$E_{αρχ} = \cancel{K}^{0} + U = M \cdot gH$ (1)

Στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου:

$E_{τελ} = K + \cancel{U}^{0} = \frac{1}{2}Mυ^2 + \frac{1}{2}Iω^2$ (2)

(1),(2) $\Rightarrow E_{αρχ} = E_{τελ} \Rightarrow MgH = \frac{1}{2}Mυ^2 + \frac{1}{2}Iω^2 \Rightarrow$

$MgH = \frac{1}{2}Mυ^2 + \frac{1}{2}\frac{I}{R^2}υ^2 \Rightarrow υ^2 = \frac{2MgH}{M + \frac{I}{R^2}}$ (1)

Αν σώμα ολισθαίνει το κεκλιμένο επίπεδο χωρίς τριβή και χωρίς να περιστρέφεται: $E_{αρχ} = \cancel{M}gH = \frac{1}{2}\cancel{M}υ^2 \Rightarrow υ^2 = 2gH$

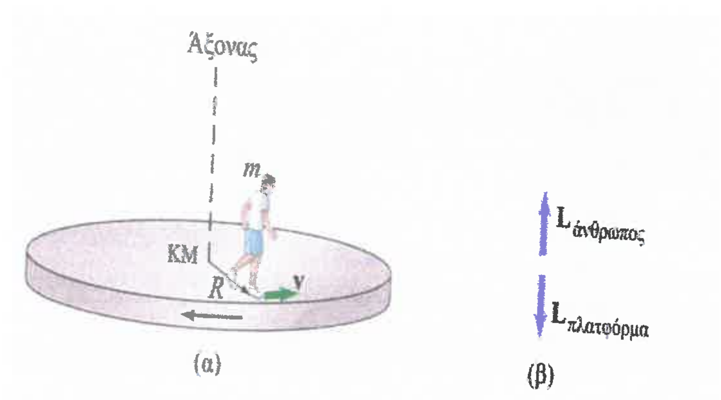
Για τη σφαίρα: $I = \frac{2}{5}MR^2 \xRightarrow{(1)} υ^2 = \frac{10}{7}gH$

Για τον κύλινδρο: $I = \frac{1}{2}MR^2 \xRightarrow{(1)} υ^2 = \frac{4}{3}gH$

Για τη στεφάνη: $I = MR^2 \xRightarrow{(1)} υ^2 = gH$

Άρα θα φτάσει πιο γρήγορα η σφαίρα.

‘Ενας άνθρωπος 60 Kg παραμένει ακίνητος στην περιφέρεια μιας κυκλικής πλατφόρμας διαμέτρου 6 m η οποία προσαρμόζεται σε ένα λείο έδρανο με ροπή αδράνειας 1800 $kg.m^2$ Η πλατφόρμα αρχικά ηρεμεί αλλά όταν ο άνθρωπος ξεκινά να τρέχει με ταχύτητα 4,2 m/s κυκλικά στην περιφέρειά της η πλατφόρμα ξεκινά να περιστρέφεται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Υπολογίστε την γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας



Ισχύει η αρχή διατήρησης στροφορμής

Αρχικά: $L_{αρχ} = 0$ (ο άνθρωπος και η πλατφόρμα ηρεμούν)

Τελικά: $L_{τελ} = L_{άνθρωπος} + L_{πλατφόρμας} =$

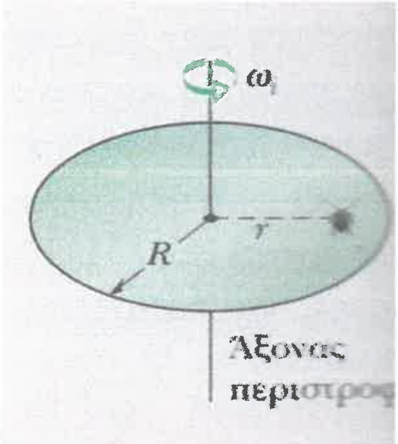
$= m\upsilon R - I\omega$

θετική για τον άνθρωπο

αρνητική για την πλατφόρμα αφού κινείται αριστερόστροφα

Άρα: $m\upsilon R - I\omega = 0 \Rightarrow \omega = \frac{m\upsilon R}{I} = 0,42$ rad/s

Μια μάζα m βρίσκεται πάνω σε δίσκο μάζας M=6 m και ακτίνας R. Ο δίσκος περιστρέφεται γύρω από τον κεντρικό του άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω=1.5 rad/s Η μάζα βρίσκεται αρχικά σε απόσταση r=0,8 R από το κέντρο του δίσκου και μετά κινείται και φτάνει στην περιφέρεια του δίσκου. Θεωρείστε την μάζα ως σωματίδιο. Πόσο είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας?



$I_{δίσκου} = \frac{1}{2} M R^2$

Η κίνηση της μάζας μεταβάλλει την κατανομή μάζας του συστήματος μάζας m–δίσκος και επομένως και τη ροπή αδράνειας. Η στροφορμή του συστήματος παραμένει σταθερή

Η ροπή αδράνειας αρχικά: $I_{αρχ} = I_{δίσκου} + I_m = \frac{1}{2} M R^2 + m r^2 = \frac{1}{2}(6m)R^2 + m r^2 = 3mR^2 + m(0{,}8R)^2 = 3mR^2 + 0{,}64 mR^2 = 3{,}64 mR^2$

Η στροφορμή αρχικά: $L_{αρχ} = I_{αρχ} \cdot ω_{αρχ} = 3{,}64 mR^2 ω_{αρχ}$

Η ροπή αδράνειας τελικά: $I_{τελ} = I_{δίσκου} + I'_m$ (για r=R).

$= 3mR^2 + mR^2 = 4mR^2$

Η στροφορμή τελικά: $L_{τελ} = I_{τελ} ω_{τελ} = 4mR^2 ω_{τελ}$

$L_{αρχ} = L_{τελ} \Rightarrow 3{,}64 \cancel{m}\cancel{R^2} ω_{αρχ} = 4 \cancel{m}\cancel{R^2} ω_{τελ} \Rightarrow$

$ω_{τελ} = \frac{3{,}64 \times 1{,}5}{4} = 1{,}37$ rad/s