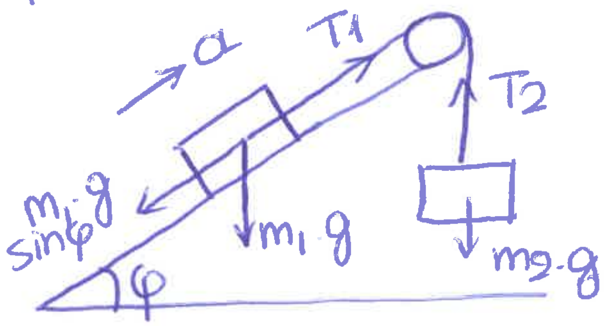
Δύο σώματα m_1, m_2 συνδέονται με νήμα αμελητέας μάζας που περνά από τροχαλία ακτίνας R. Το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία. Το σώμα στο κεκλιμένο επίπεδο κινείται προς τα πάνω χωρίς τριβές και με σταθερή επιτάχυνση α. 1) Προσδιορίστε τις τάσεις T_1 και T_2 στο νήμα 2) βρείτε τη ροπή αδράνειας της τροχαλίας



$$T_1 - m_1 \cdot g \cdot \sin\varphi = m_1 \cdot a \Rightarrow T_1 = m_1 \cdot a + m_1 \cdot g \cdot \sin\varphi$$

$$m_2 g - T_2 = m_2 \cdot a \Rightarrow T_2 = m_2 \cdot g - m_2 \cdot a$$

Ροπή δύναμης $(T_2 - T_1) \cdot R = \underset{\substack{\text{ροπή} \\ \text{αδράνειας} \\ \text{τροχαλίας}}}{I} \cdot a \Rightarrow I = \dfrac{(T_2 - T_1) R}{\frac{a}{R}} =$

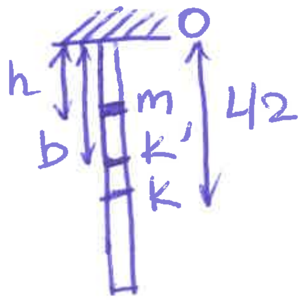
$$= \frac{(T_2 - T_1) R^2}{a}$$

Ράβδος μήκους L ταλαντώνεται κρεμασμένη από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της. Σημειακή μάζα ίση με τη μάζα της ράβδου προσαρμόζεται σε απόσταση h από τον άξονα περιστροφής πάνω στη ράβδο. Βρείτε την περίοδο ταλαντώσεων του συστήματος. (ροπή της ράβδου ως τον άξονα περιστροφής I= $\frac{1}{3}mL^2$.

Η εξίσωση της κίνησης είναι

$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -2mgb\sin\theta$$

όπου b=απόσταση του κμ του συστήματος από τον άξονα περιστροφής



K = κμ της ράβδου

K' = κμ της ράβδου μαζί με τη μάζα m

b = η απόσταση του K' από τον άξονα περιστροφής

$I=\frac{1}{3}mL^2$ (ως προς άξονα περιστροφής στην άκρη της ράβδου)

Ολική ροπή αδράνειας ράβδου και μάζας:

$$I=\frac{1}{3}mL^2+mh^2=m\left(\frac{L^2}{3}+h^2\right) \quad (1)$$

Η θέση του κμ του συστήματος ράβδου και μάζας από τον άξονα περιστροφής (σημείο K') είναι

$$b=\frac{\frac{mL}{2}+mh}{2m}=\frac{L+2h}{4} \quad (2)$$

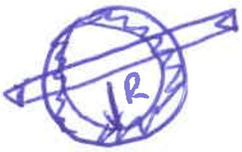
$$I\frac{d^2\theta}{dt^2}=-2mgb\sin\theta \overset{(1),(2)}{\Longrightarrow} \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2mg(L+2h)}{4m\left(\frac{L^2}{3}+h^2\right)}\cdot\sin\theta$$

$$=0 \Rightarrow [\sin\theta\simeq\theta] \quad \frac{d^2\theta}{dt^2}+\frac{2\cancel{m}g(L+2h)}{4\cancel{m}\left(\frac{L^2}{3}+h^2\right)}\cdot\theta=0$$

Άρα: $\omega^2=\frac{g(L+2h)}{2\left[\frac{L^2}{3}+h^2\right]}=\frac{3g(L+2h)}{2(L^2+3h^2)}$

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=2\pi\sqrt{\frac{2(L^2+3h^2)}{3g(L+2h)}}$$

Δακτύλιος με ακτίνα 0.10 m κρέμεται από τριγωνική ράβδο. Να υπολογιστεί η περίοδος ταλαντώσεων του δακτυλίου ως προς το κέντρο στήριξης στην περιφέρεια.



$I_{δακτυλίου} = mR^2$

Η ροπή αδράνειας ως προς άξονα που περνά από το κέντρο στήριξης είναι:

$I = I_c + mR^2 = mR^2 + mR^2 = 2mR^2$

Αν θεωρήσουμε το σύστημα φυσικό εκκρεμές τότε:

$I a_r = -mgd\theta \Rightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mg d \theta \Rightarrow$

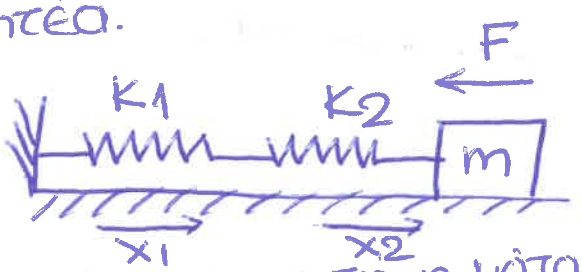
$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I}\theta = 0$

όπου d = απόσταση του κέντρου βάρους από τον άξονα περιστροφής
Στην περίπτωσή μας d = R

Άρα: $\omega^2 = \frac{mgR}{I} = \frac{\cancel{m}gR}{2\cancel{m}R^2} = \frac{g}{2R} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{2R}}$

Άρα: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{2R}{g}} \rightarrow T = 0,88 sec$

Σώμα μάζας m που βρίσκεται σε οριζόντιο επίπεδο συνδέεται με δύο ελατήρια με σταθερές k_1 και k_2, όπως φαίνεται στα παρακάτω σχήματα. Βρείτε την περίοδο ταλάντωσης και για τις 2 περιπτώσεις. Η τριβή θεωρείται αμελητέα.

α) 

Στην περίπτωση αυτή η μάζα δέχεται κοινή δύναμη F και μετατοπίζεται κατά x_1 από το πρώτο ελατήριο και x_2 από το δεύτερο

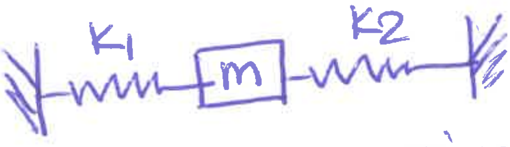
$$x_1 = -\frac{F}{k_1} \qquad x_2 = -\frac{F}{k_2}$$

$$x_{ολ} = x_1 + x_2 = -\frac{F}{k_1} - \frac{F}{k_2} = -F\left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) \qquad F = -k_{ολ} \cdot x_{ολ} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{k_{ολ}} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \Rightarrow k_{ολ} = \frac{k_1 \cdot k_2}{k_1 + k_2}$$

$$m\frac{d^2 x_{ολ}}{dt^2} = -k_{ολ} \cdot x_{ολ} \Rightarrow \frac{d^2 x_{ολ}}{dt^2} + \frac{k_{ολ}}{m} x_{ολ} = 0 \qquad \text{όπου } \omega = \sqrt{\frac{k_{ολ}}{m}}$$

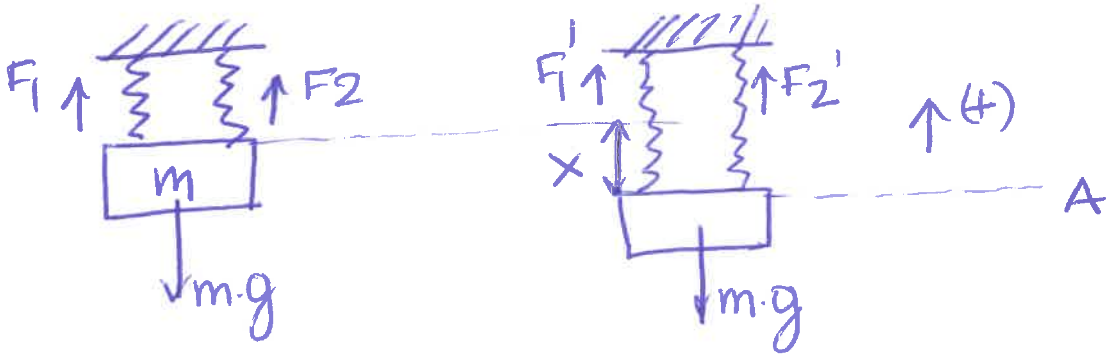
Οπότε: $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k_{ολ}}}$

β) 

Στην περίπτωση αυτή η μάζα δέχεται διαφορετικές δυνάμεις από το κάθε ελατήριο και μετακινείται κατά x

$$F_1 = -k_1 x \qquad F_2 = -k_2 x$$

Ένα σώμα μάζας m υποστηρίζεται από δύο ταυτόσημα παράλληλα κατακόρυφα ελατήρια με το καθένα από αυτά να χαρακτηρίζεται από σταθερά k. Ποια θα είναι η συχνότητα της κατακόρυφης ταλάντωσης? Ποια θα είναι η διαφορική εξίσωση της απομάκρυνσης x(t)?



Θέση ισορροπίας $\Sigma F = F_1 + F_2 - mg = 0 \Rightarrow F_1 + F_2 = mg$ (1)

Θέση A (έχει επεκταθεί κατά x):

$F_1' = F_1 - kx$ $\qquad F_2' = F_2 - kx$

$\Sigma F = F_1' + F_2' - mg = F_1 - kx + F_2 - kx - mg =$

$= (F_1 + F_2 - mg) - 2kx = -2kx$ (με βάση την (1))

Άρα: $\Sigma F = -2kx$ [αρμονική ταλάντωση]

$\Sigma F = -2kx = m \cdot a \Rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2} + 2kx = 0 \Rightarrow$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + \dfrac{2k}{m} = 0$

Άρα: $\omega^2 = \dfrac{2k}{m}$ και $\omega = \sqrt{\dfrac{2k}{m}}$

$f = \dfrac{\omega}{2\pi} = \dfrac{1}{2\pi}\sqrt{\dfrac{2k}{m}}$ (συχνότητα)

Δύο σωματίδια ταλαντώνονται με απλή αρμονική κίνηση κατά μήκος κοινού ευθύγραμμου τμήματος μήκους Α. Κάθε σωματίδιο έχει περίοδο 1.5 s αλλά διαφέρουν σε φάση κατά π/6 rad α) πόσο απέχουν μεταξύ τους (ως συνάρτηση του Α) 0,5 s αφότου το σωματίδιο που καθυστερεί εγκαταλείψει το ένα άκρο της διαδρομής β) Στη χρονική αυτή στιγμή κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση το ένα ως προς το άλλο ή απομακρύνονται το ένα από το άλλο

$$x_1 = \frac{A}{2}\cos\frac{2\pi t}{T}$$

$$x_2 = \frac{A}{2}\cos\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{6}\right)$$

Όταν $t=0$ το σωματίδιο 1 βρίσκεται στη θέση $x_1 = \frac{A}{2}$

Το σωματίδιο 2 βρίσκεται στη θέση $x_2 = \frac{A}{2}$ όταν

$$\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{6} = 0 \Rightarrow t = -\frac{T}{12}$$

Άρα το σωματίδιο 1 έχει διαφορά από το 2 $\frac{T}{12}$

Όταν $t = 0.50\,sec$ $\quad x_1 = \frac{A}{2}\cos\frac{2\pi \times 0{,}5}{1{,}5} = -0.25A$

$$x_2 = \frac{A}{2}\cos\left(\frac{2\pi \times 0{,}5}{1{,}5} + \frac{\pi}{6}\right) = -0.43A$$

$$\Delta x = x_1 - x_2 = 0.18A$$

$$u_1 = \frac{dx_1}{dt} = -\frac{\pi A}{T}\sin\frac{2\pi t}{T}$$

$$u_2 = \frac{dx_2}{dt} = -\frac{\pi A}{T}\sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \frac{\pi}{6}\right)$$

Οι τιμές είναι αρνητικές $u_1, u_2 < 0$ άρα τα δύο σωματίδια κινούνται προς την ίδια κατεύθυνση

Σωματίδιο μάζας m=2 kg κινείται πάνω στον άξονα x και έλκεται από το σημείο O από μια δύναμη -8x (σε N). Για t=0 η μετατόπιση x(0)=20 m και η ταχύτητα v(0)=0. Βρείτε α) τη διαφορική εξίσωση της κίνησης β) τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου γ) το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης

α) $m \cdot a = F \Rightarrow m\dfrac{d^2x}{dt^2} = F \Rightarrow 2\dfrac{d^2x}{dt^2} = -8x \Rightarrow$

$\dfrac{d^2x}{dt^2} + 4x = 0$

Συγκρίνοντας με τη διαφορική εξίσωση για αρμονική ταλάντωση $\dfrac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$

προκύπτει $\omega^2 = 4 \Rightarrow \omega = 2\,rad/s$ (θετική μόνο τιμή)

β) $x = A\cos(\omega t + \varphi)$ (1)

$v = -A\omega \sin(\omega t + \varphi)$ (2)

Για $t=0$ (1) $\Rightarrow A\cos\varphi = 20$ (3)

(2) $\Rightarrow -A\omega\sin\varphi = 0 \Rightarrow -2A\sin\varphi = 0 \Rightarrow$

$\varphi = 2n\pi$ (όπου n=ακέραιος)

Επομένως: (3) $\Rightarrow A\cos(2n\pi) = 20 \Rightarrow A = 20m$

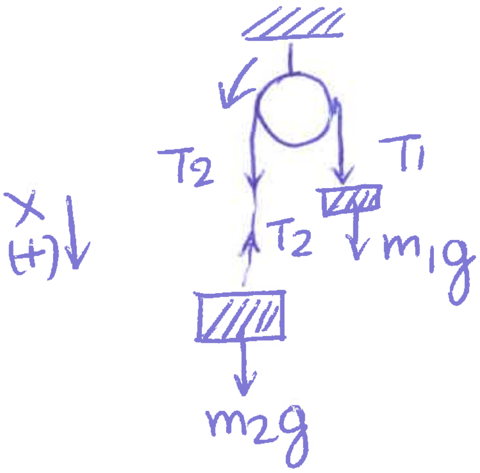
Άρα: (1) $\Rightarrow x = 20\cos(2t \pm 2n\pi)$ (m)

(2) $\Rightarrow v = -40\sin(2t \pm 2n\pi)$ (m/s)

γ) $A = 20m$

$T = \dfrac{2\pi}{\omega} = \dfrac{2\pi}{2} = \pi$ (sec)

Δύο μάζες m1 και m2 συνδέονται με αβαρές μη εκτατό νήμα που είναι περασμένο σε τροχαλία, η οποία έχει σχήμα κυλίνδρου ακτίνας R και μάζας M. Θεωρούμε ότι το νήμα δεν ολισθαίνει πάνω στην τροχαλία. Υπολογίστε την επιτάχυνση του m2 όταν το σύστημα αφεθεί ελεύθερο.



$m_2 > m_1$

$I_{κυλίνδρου} = \frac{1}{2} M R^2$

$a = a_\gamma \cdot R$

Για τη μάζα m_1: $m_1 g - T_1 = -m_1 a$ (1)

Για τη μάζα m_2: $m_2 g - T_2 = m_2 a$ (2)

Για την τροχαλία: $(T_2 - T_1)R = I a_\gamma \Rightarrow (T_2 - T_1)R =$

$= \frac{1}{2} M R^2 a_\gamma \Rightarrow T_2 - T_1 = \frac{1}{2} M \cancel{R} \frac{a}{\cancel{R}}$ (3)

$(1) \Rightarrow T_1 = m_1 g + m_1 a$ (4)

$(2) \Rightarrow T_2 = m_2 g - m_2 a$ (5)

$(3) \xRightarrow{(4)(5)} m_2 g - m_2 a - m_1 g - m_1 a = \frac{1}{2} M a \Rightarrow$

$(m_2 - m_1) g - a(m_2 + m_1 + \frac{1}{2} M) \Rightarrow$

$$a = \frac{(m_2 - m_1) g}{m_2 + m_1 + \frac{1}{2} M}$$

Σωματίδιο μάζας m=2kg κινείται στον άξονα x και έλκεται προς τη θέση ισορροπίας από μια δύναμη ίση με 4x (N). Αν στο σωματίδιο επιδρά δύναμη απόσβεσης FT=4u (όπου u=ταχύτητα) βρείτε την μετατόπιση x(t) και την ταχύτητα u(t) της ταλάντωσης

Λύση   Ταλάντωση με απόσβεση

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = \Sigma F = -F - F_T \Rightarrow 2\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 4u \Rightarrow$$

$$2\frac{d^2x}{dt^2} = -4x - 4\frac{dx}{dt} \Rightarrow 2\frac{d^2x}{dt^2} + 4\frac{dx}{dt} + 4x = 0$$

Συγκρίνοντας με τη γενική εξίσωση της ταλάντωσης με απόσβεση:

$$m\frac{d^2x}{dt^2} + b\frac{dx}{dt} + kx = 0$$

προκύπτει $b=4$ και $k=4$ $\quad \frac{b}{2m} = 1$

Γωνιακή ταχύτητα χωρίς απόσβεση: $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{2}\ s^{-1}$

Γωνιακή ταχύτητα με απόσβεση: $\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} = 1\ s^{-1}$

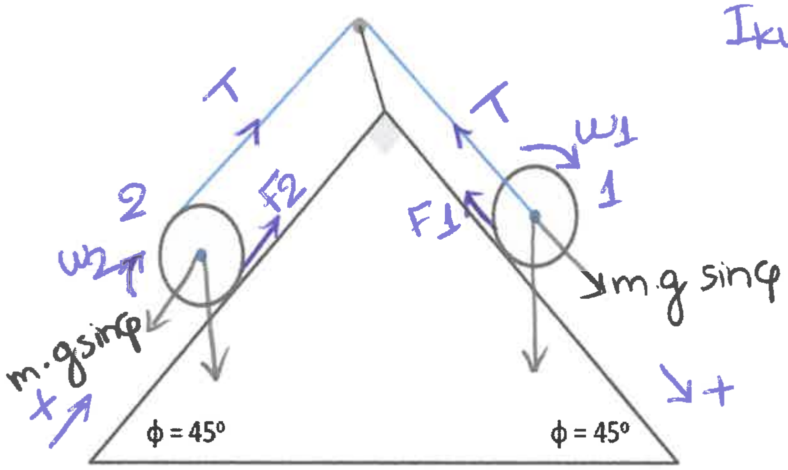
$$x(t) = A e^{\left(-\frac{b}{2m}\right)t} \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow x(t) = A e^{-t} \cos(t+\varphi)$$

$$u(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(A e^{-t} \cos(t+\varphi)\right) = -A e^{-t} \sin(t+\varphi) -$$

$$-A e^{-t} \cos(t+\varphi) = -A e^{-t}\left[\sin(t+\varphi) + \cos(t+\varphi)\right]$$

Δύο ίδιοι, ομογενείς κύλινδροι ακτίνας R και μάζας m είναι συνδεδεμένοι με αβαρές μη εκτατό νήμα, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Στον αριστερό κύλινδρο το νήμα είναι περιτυλιγμένο στην περιφέρειά του, ενώ στον δεξιό είναι σταθερά δεμένο στον άξονά του. Η γωνία κλίσης και των δύο κεκλιμένων επιπέδων είναι φ=45°.Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται σε κάθε κύλινδρο και εξετάστε με ποια φορά και ταχύτητα θα κινηθεί το όλο σύστημα. Οι κύλινδροι κυλίονται χωρίς να ολισθαίνουν και το νήμα παραμένει παράλληλο στα κεκλιμένα επίπεδα καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης.

$I_{κυλίνδρου} = \frac{1}{2} m R^2$



Έστω ότι ο κύλινδρος 1 κατεβαίνει και ο κύλινδρος 2 ανεβαίνει

κύλιση χωρίς ολίσθηση: $u = \omega R$

Μεταφορική κίνηση κάθε κυλίνδρου:

$$m \cdot g \cdot \sin 45^\circ - T - F_1 = m \frac{du_1}{dt} \quad (1)$$

$$T + F_2 - mg \sin 45^\circ = m \frac{du_2}{dt} \quad (2)$$

Περιστροφική κίνηση κάθε κυλίνδρου:

Κύλινδρος 1: Ροπή έχει μόνον η F_1 (Το βάρος και η τάση περνούν από τον άξονα περιστροφής).

$$F_1 \cdot R = I \frac{d\omega_1}{dt} = \frac{1}{2} m R \frac{du_1}{dt} \quad (3)$$

Κύλινδρος 2: Ροπή έχει η F_2 και η τάση T (που δεν περνά από τον άξονα περιστροφής)

$$(T - F_2) R = \frac{1}{2} m R^2 \frac{d\omega_2}{dt} = \frac{1}{2} m R \frac{du_2}{dt} \quad (4)$$

Όταν ο κύλινδρος ανεβαίνει κατά απόσταση s, θα ξετυλιχτεί νήμα μήκους s. Άρα ο κύλινδρος 1 θα κατέβει κατά απόσταση 2s

Άρα: $\frac{dv_1}{dt} = 2\frac{dv_2}{dt}$ (5)

$(3) \Rightarrow F_1 = \frac{m}{2}\frac{dv_1}{dt}$ (6)

$(1) \xRightarrow{(6)} T = \frac{3}{2}m\frac{dv_1}{dt} + mg\frac{\sqrt{2}}{2}$ (7)

$(4) \Rightarrow F_2 = T - \frac{m}{2}\frac{dv_2}{dt}$ (8)

$(2) \xRightarrow{(8)} T + T - \frac{m}{2}\frac{dv_2}{dt} - mg\frac{\sqrt{2}}{2} = m\frac{dv_2}{dt} \Rightarrow$

$2T = \frac{3}{2}m\frac{dv_2}{dt} + mg\frac{\sqrt{2}}{2}$ (9)

$(7),(9) \Rightarrow \frac{15}{4}\frac{dv_1}{dt} = g\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \frac{dv_1}{dt} = \frac{4}{15}g\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow$

$v_1 = \frac{4}{15}\frac{\sqrt{2}}{2}gt > 0$ ή $v_1 = \frac{2\sqrt{2}}{15}gt > 0$

Επομένως το σύστημα θα κινηθεί με την ταχύτητα που βρήκαμε και τη φορά που επιλέξαμε

Λόγω τριβής η ενέργεια ενός δορυφόρου μειώνεται κατά 2%. Υπολογίστε το ποσοστό μεταβολής ακτίνας, ταχύτητας και περιόδου. Η τροχιά στην αρχή μέχρι το τέλος διατηρείται κυκλική

$$E=\frac{1}{2}mu^2-\frac{GMm}{r} \quad (1)$$

Επειδή $\frac{mu^2}{r}=\frac{GMm}{r^2}$ (στην κυκλική τροχιά)

$$(1)\Rightarrow E=-\frac{GMm}{2r}$$

$$dE=\frac{GMm}{2r^2}dr \Rightarrow \frac{dE}{E}=\frac{\frac{GMm}{2r^2}dr}{-\frac{GMm}{2r}} \Rightarrow$$

$$\frac{dE}{E}=-\frac{dr}{r}\Rightarrow \frac{dr}{r}=-0.02$$

$$u^2=\frac{GM}{r}\Rightarrow d(u^2)=-\frac{GM}{r^2}dr \Rightarrow u\,du=-\frac{GM}{2r^2}dr\Rightarrow$$

$$\frac{u\,du}{u^2}=\frac{-\frac{GMdr}{2r^2}}{\frac{GM}{r}}\Rightarrow \frac{du}{u}=-\frac{dr}{2r}=0.01$$

$$T=2\pi\frac{r}{u}\Rightarrow \quad dT=2\pi\frac{dr}{u}-2\pi\frac{r}{u^2}du\Rightarrow$$

$$\frac{dT}{T}=\frac{dr}{r}-\frac{du}{u}=-0.03$$