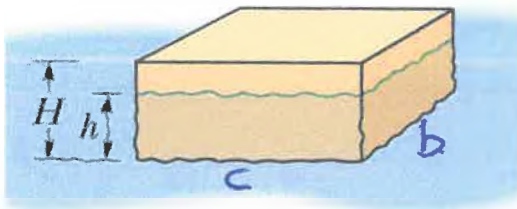


Στο παρακάτω σχήμα η πυκνότητα του σώματος είναι $\rho = 800 \text{ kg/m}^3$. Το σώμα επιπλέει με τη μεγάλη του επιφάνεια προς τα κάτω σε ένα ρευστό πυκνότητας $\rho_f = 1200 \text{ kg/m}^3$. Το σώμα έχει ύψος $H = 6 \text{ cm}$.

A) Σε πόσο βάθος έχει βυθιστεί το σώμα

B) Αν το σώμα συγκρατείται πλήρως βυθισμένο και μετά αφήνεται ποιο είναι το μέτρο της επιτάχυνσης?



$c, b = \text{διαστάσεις της βάσης}$

A) Άνωθεν $F_b = m_f \cdot g = \rho_f \cdot V_f \cdot g$
 $(V_f = \text{όγκος σώματος που είναι βυθισμένο}) = c \cdot b \cdot h.$

Άρα: $F_b = \rho_f \cdot c \cdot b \cdot h \cdot g \quad (1)$

Βάρος $F_g = m \cdot g = \rho \cdot V \cdot g = \rho (c \cdot b \cdot H) \cdot g \quad (2)$

$(V = \text{όγκος όλου του σώματος}) = c \cdot b \cdot H$

Επιπλέει όταν: $F_b = F_g \xrightarrow{(1),(2)} \rho_f \cdot c \cdot b \cdot h \cdot g = \rho \cdot c \cdot b \cdot H \cdot g \Rightarrow$

$h = \frac{\rho}{\rho_f} \cdot H = \frac{800}{1200} \times 6 = 4 \text{ cm}.$

B) Άνωθεν όταν το σώμα είναι πλήρως βυθισμένο:

$F_b = m_f \cdot g = \rho_f \cdot V \cdot g = \rho_f \frac{m}{\rho} \cdot g \quad (3) \quad \begin{matrix} \text{όπου } m = \text{μάζα} \\ \text{όλου του σώματος} \end{matrix}$
 $V = \frac{m}{\rho}$

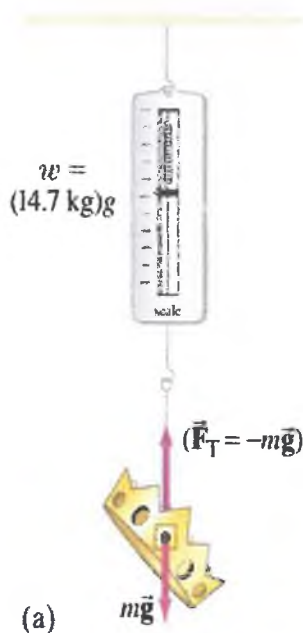
$F_g = m \cdot g \quad (4)$

Για να κινηθεί προς τα πάνω πρέπει $F_b > F_g$

$F_b - F_g = m \cdot a \xrightarrow{(3),(4)} \rho_f \cdot \frac{m}{\rho} \cdot g - m \cdot g = m \cdot a \Rightarrow$

$a = \left(\frac{\rho_f}{\rho} - 1 \right) g.$

Όταν μια κορώνα μάζας $m=14.7 \text{ kg}$ βυθιστεί στο νερό ο ζυγός ακριβείας καταγράφει 13.4 kg . Να διερευνηθεί αν η κορώνα είναι κατασκευασμένη από χρυσό



$$w' = F_T$$

$$w = F_g$$

$$F_B = \Delta w$$

$$w' = F_T = w - F_B \Rightarrow w - w' = F_B$$

$$w = m \cdot g = \rho_0 V \cdot g \quad (1)$$

$$w - w' = F_B = \rho_f V \cdot g \quad (2)$$

V = όγκος βυθισμένου σώματος

ρ_0 = πυκνότητα σώματος

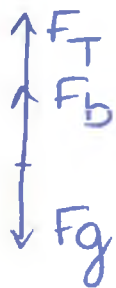
ρ_f = πυκνότητα ρευστού

$$(1), (2) \Rightarrow \frac{w}{w - w'} = \frac{\rho_0 \cdot V \cdot g}{\rho_f \cdot V \cdot g} = \frac{\rho_0}{\rho_f} = \frac{14.7}{14.7 - 13.4} = 11.3 \Rightarrow$$

$$\rho_0 = \rho_f \times 11.3 = 11300 \text{ kg/m}^3$$

Η πυκνότητα αυτή δεν αντιστοιχεί σε χρυσό αλλά σε μόλυβδο.

Χρυσό άγαλμα μάζας 15 kg ανυψώνεται από το βυθό της θάλασσας. Ποιά είναι η τάση στο συρματόσχοινο ανύψωσης (αβαρές) όταν το άγαλμα α) είναι σε ηρεμία και τελείως βυθισμένο στο νερό β) σε ηρεμία και όλο έξω από το νερό.



F_T = τάση από το συρματόσχοινο

$$\rho_{\text{χρυσού}} = 19.3 \times 10^3 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$$

α) όγκος αγάλματος $V_a = \frac{m_a}{\rho_{\text{χρυσού}}} = 7.77 \times 10^{-4} \text{ m}^3$

Ανωση: $F_b = \rho_{\text{νερού}} \cdot V_a \cdot g = 7.84 \text{ N}$ $F_g = m_a \cdot g = 147 \text{ N}$

$$F_b + F_T = F_g \Rightarrow F_T = F_g - F_b = 147 - 7.84 = 139.16 \text{ N}$$

Αυτή είναι η τιμή που θα έδειχνε ένας ζυγός στο άνω άκρο του συρματόσχοινου, δηλαδή 7.84 N μικρότερο από το πραγματικό βάρος (=φαινόμενο βάρος)

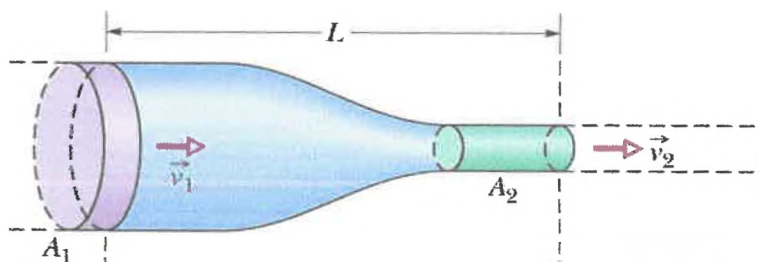
β) $F_b = \rho_{\text{air}} \cdot V_a \cdot g = 1.2 \times 7.77 \times 10^{-4} \times 9.8 = 9.1 \times 10^{-3} \text{ N}$

Στην περίπτωση αυτή η τιμή της άνωσης είναι πολύ μικρή σε σχέση με το βάρος του αγάλματος

$$F_T = F_g - F_b \approx 147 \text{ N}$$

Άρα στον αέρα η τάση είναι σχεδόν ίση με το F_g
 Όσο πυκνότερο το ρευστό, τόσο η άνωση θα αυξάνει και η τάση θα ελαττώνεται

Αιθανόλη πυκνότητας $\rho = 791 \text{ Kg/m}^3$ ρέει ομαλά μέσω ενός οριζόντιου σωλήνα που στενεύει από εμβαδόν $A_1 = 1.2 \times 10^{-3} \text{ m}^2$ σε $A_2 = A_1/2$. Η διαφορά πίεσης ανάμεσα στις 2 διατομές είναι 4120 Pa . Πόσος είναι ο ρυθμός ροής του όγκου;



Εξίσωση συνέχειας $A_1 v_1 = A_2 v_2 = \frac{\Delta V}{\Delta t} = R_V$

όπου $R_V =$ ρυθμός ροής όγκου ή παροχή

$$v_1 = \frac{R_V}{A_1} \quad (1) \quad v_2 = \frac{R_V}{A_2} = \frac{R_V}{\frac{A_1}{2}} = \frac{2R_V}{A_1} \quad (2)$$

Αρχή Bernoulli (θεωρούμε $y_1 = y_2$):

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \quad (3)$$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow p_1 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{R_V}{A_1} \right)^2 = p_2 + \frac{1}{2} \rho \left(\frac{2R_V}{A_1} \right)^2 \Rightarrow$$

$$R_V = A_1 \sqrt{\frac{2(p_1 - p_2)}{3\rho}}$$

$$\Delta P = p_1 - p_2 \quad \text{ή} \quad \Delta P = p_2 - p_1?$$

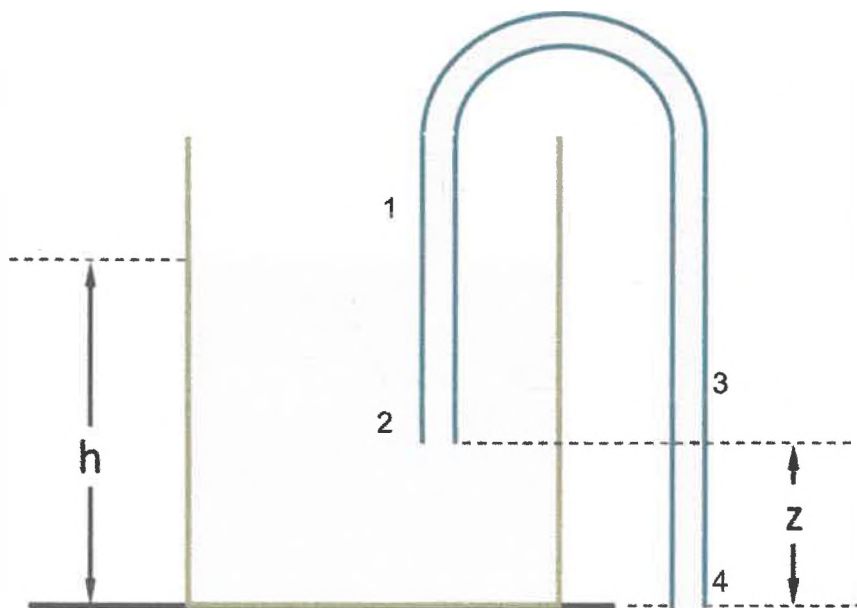
Ισχύει $\Delta P = p_1 - p_2$ γιατί $p_1 > p_2$ αφού $v_1 < v_2$

Βάθους $\Delta P = 4120 \text{ Pa}$ προκύπτει: $R_V = 2,24 \times 10^{-3} \text{ m}^3/\text{s}$

Ορθό κυλινδρικό δοχείο έχει εμβαδόν βάσης S_1 και περιέχει νερό πυκνότητας ρ . Μέσα στο δοχείο τοποθετούμε το ένα άκρο σιφωνίου σχήματος U με σταθερή διατομή S_2 , όπως φαίνεται στο Σχήμα και σε απόσταση z από τον πυθμένα. Το ελεύθερο άκρο του σιφωνίου βρίσκεται ακριβώς στο ύψος του πυθμένα του δοχείου. Υποθέτουμε ότι ισχύει $S_1 \gg S_2$, έτσι ώστε η επιφάνεια του νερού να παραμένει σε οριζόντια ηρεμία.

A) Υπολογίστε την ταχύτητα ροής V του νερού μέσα στο σιφώνι

B) Αν αδειάζει το νερό από το δοχείο, υπολογίστε τη μεταβολή του ύψους του νερού με το χρόνο $h(t)$ (Χρησιμοποιείστε την ταχύτητα ροής V).



A) Επειδή $S_1 \gg S_2 \rightarrow v_1 = 0$

Αρχή Bernoulli μεταξύ των σημείων (1) και (2):

$$p_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z \Rightarrow p_a + \rho g h = p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z \quad (1)$$

Αρχή Bernoulli μεταξύ των σημείων (2) και (3):

$$p_2 + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g z = p_3 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 + \rho g z \quad (2)$$

Αρχή Bernoulli μεταξύ των σημείων (3) και (4):

$$p_3 + \frac{1}{2} \rho v_3^2 + \rho g z = p_4 + \frac{1}{2} \rho v_4^2 + 0 \quad (3)$$

Αλλά $v_3 = v_4 = v$ γιατί το σιφώνι έχει σταθερή διατομή και $p_4 = p_a$

$$(1), (2), (3) \Rightarrow p_a + \rho g h = p_a + \frac{1}{2} \rho v^2 \Rightarrow v = \sqrt{2gh} \quad (4)$$

B) Ο όγκος $V(t)$ μειώνεται με το χρόνο λόγω της μεταβολής του ύψους του νερού h . Ισχύει:
 Τη χρονική στιγμή t έχει όγκο:

$$\frac{dV}{dt} = S_1 \frac{dh}{dt}$$

$$V = S_1 h.$$

Από την αρχή της συνέχειας: $S_1 \frac{dh}{dt} = -S_2 \cdot v$

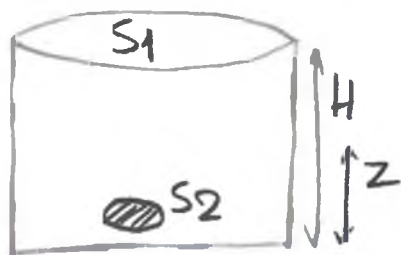
(Το $-$ σημαίνει ότι ενώ το $\frac{dh}{dt}$ μειώνεται, η ταχύτητα v είναι θετική)

$$\frac{dh}{dt} = -\frac{S_2}{S_1} \cdot v \stackrel{(4)}{\Rightarrow} -\frac{S_2}{S_1} \sqrt{2gh} = \frac{dh}{dt} \Rightarrow$$

$$\frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g} dt \Rightarrow$$

$$\int \frac{dh}{\sqrt{h}} = -\frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g} t \Rightarrow h^{1/2} = -\frac{1}{2} \frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g} t.$$

Ένα μεγάλο κυλινδρικό δοχείο έχει επιφάνεια εμβαδού S_1 και είναι γεμάτο με νερό μέχρι το ύψος H . Το πάνω μέρος είναι ανοιχτό. Στον πυθμένα ανοίγεται μια μικρή κυκλική οπή διατομής S_2 από την οποία φεύγει το νερό. Σε πόσο χρόνο θα αδειάσει πλήρως το δοχείο?



Υποθέτουμε αβυσσική ροή και εφαρμόζουμε το θεώρημα του Bernoulli μεταξύ επιφάνειας και οπής στον πυθμένα

$$P_a + \frac{1}{2} \rho v_1^2 + \rho g z = P_a + \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g \cdot 0 \Rightarrow v_1^2 = v_2^2 - 2gz \quad (1)$$

(ως προς επίπεδο αναφοράς τον πυθμένα).

z = ύψος σάυτης του νερού σε τυχαίο χρόνο t
 H = ύψος σάυτης του νερού αρχικά ($t=0$)

Εξίσωση συνέχειας: $S_1 v_1 = S_2 v_2 \Rightarrow v_1 = v_2 \frac{S_2}{S_1} \quad (2)$

$$(1), (2) \Rightarrow v_2^2 \frac{S_2^2}{S_1^2} = v_2^2 - 2gz \Rightarrow v_2 = \sqrt{\frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2gz} \quad (3)$$

Τη χρονική στιγμή t : $V = S_1 \cdot z(t)$.

Άρα: $\frac{dV}{dt} = -S_1 \frac{dz}{dt}$

(4) [Το - υποδηλώνει τη μείωση της σάυτης με το χρόνο]

$\frac{dV}{dt} = S_2 \cdot v_2$ (εξίσωση συνέχειας) (5)

$$(4), (5) \Rightarrow -S_1 \frac{dz}{dt} = S_2 \cdot v_2 \Rightarrow \frac{dz}{dt} = -\frac{S_2}{S_1} \sqrt{\frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2gz} \Rightarrow$$

$$\frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{S_2}{S_1} \sqrt{\frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2g} dt = -B \cdot dt \quad (6)$$

όπου $B = \sqrt{\frac{S_1^2}{S_1^2 - S_2^2}} \sqrt{2g}$

Ο χρόνος για να αδειάσει το δοχείο είναι T με
ορισμένες τιμές: $t=0 \rightarrow z=H$ και $t=T \rightarrow z=0$

$$\text{Άρα (6)} \Rightarrow \int_H^0 \frac{dz}{\sqrt{z}} = -B \int_0^T dt \Rightarrow -2\sqrt{H} = -BT \Rightarrow$$

$$T = \frac{2\sqrt{H}}{B} \quad \text{ή} \quad T = \frac{\sqrt{2H}}{\sqrt{g}} \sqrt{\frac{S_1^2 - S_2^2}{S_2^2}}$$

Αν θεωρήσουμε ότι $v_1=0$ επειδή $S_1 \gg S_2$ τότε:

$$(1) \Rightarrow \cancel{P_a} + \cancel{\frac{1}{2} \rho v_1^2} + \rho g z = \cancel{P_a} + \frac{1}{2} \rho v_2^2 \Rightarrow v_2 = \sqrt{2eg}$$

$$\frac{dv}{dt} = S_1 \frac{dz}{dt} = S_2 v_2 \Rightarrow \int_0^H \frac{dz}{\sqrt{z}} = -\frac{S_2}{S_1} \sqrt{2g} \int_0^T dt \Rightarrow$$

$$T = \frac{2\sqrt{H}}{\frac{S_2}{S_1}} = 2 \frac{S_1}{S_2} \sqrt{H}$$