Δυναμική της περιστροφικής κίνησης στερεού

Κύλιση ενός στερεού: Συνδυασμός μεταφορικής και περιστροφικής κίνησης

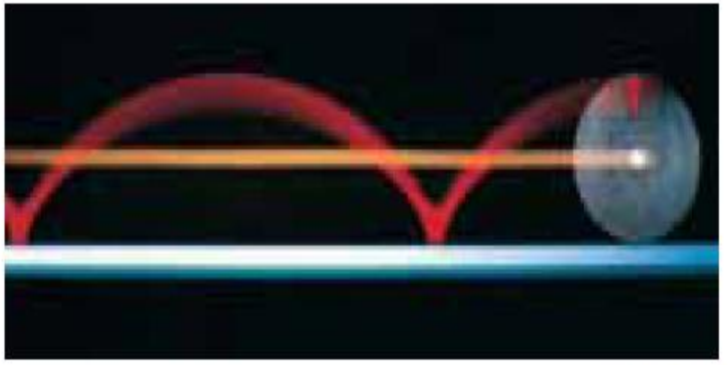


Fig. 11-2 A time-exposure photograph of a rolling disk. Small lights have been attached to the disk, one at its center and one at its edge. The latter traces out a curve called a *cycloid*. *(Richard Megna/Fundamental Photographs)*

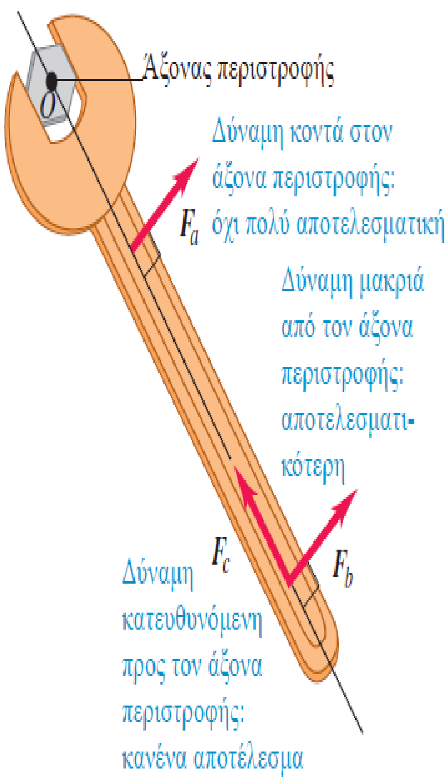
Τι προσδίνει στο σώμα γωνιακή επιτάχυνση?
Τι χρειάζεται ένα ακίνητο σώμα να αρχίσει να περιστρέφεται?
Τι χρειάζεται ένα περιστρεφόμενο σωμα να σταματήσει?
Είναι αρκετή μία δύναμη?

Ροπή δύναμης (torque)

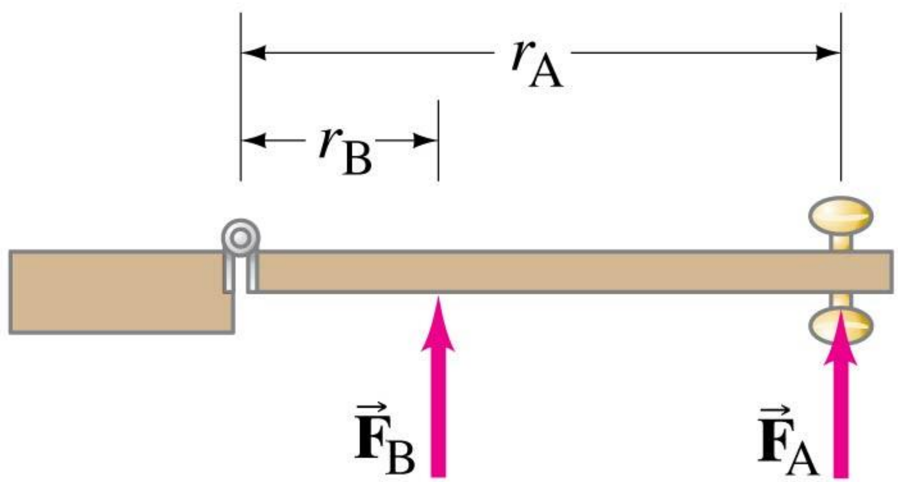
Περιγράφει την περιστροφική συνέπεια μιας δύναμης

Για την περιστροφή χρειάζεται όχι μόνο μια δύναμη (κατεύθυνση και μέτρο) αλλά παίζει ρόλο και η θέση του σημείου όπου ασκείται η δύναμη ως προς τον άξονα περιστροφής

10.1 Ποια από τις τρεις παρακάτω ίσες κατά μέτρο δυνάμεις ξεσφίγγει ευκολότερα τον σφιχτοβιδωμένο κοχλία;



Η ροπή μετριέται πάντα ως προς ένα σημείο. Οταν αλλάζει το σημείο αλλάζει και η ροπή. Για το λόγο αυτό λέμε **«ροπή δύναμης F ως προς το σημείο O»**

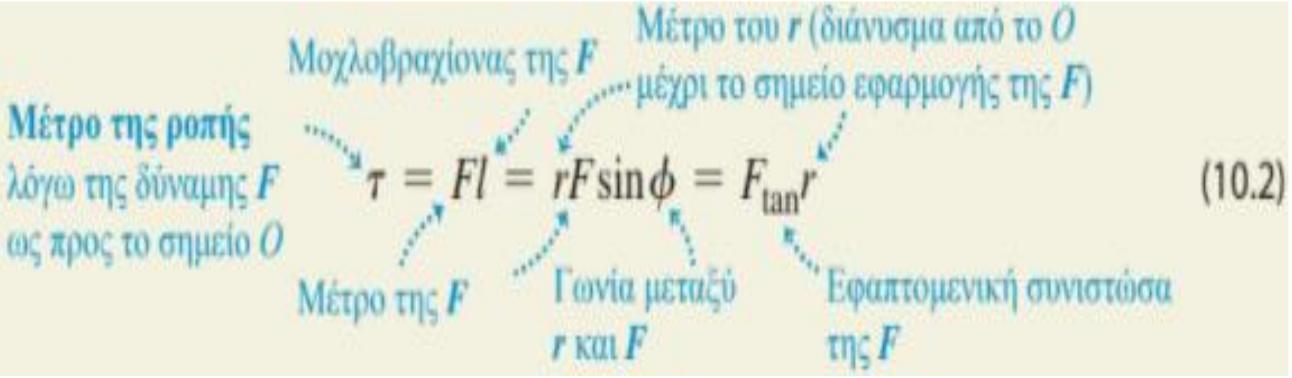


Κάτοψη πόρτας: Όσο πιο μεγάλη η δύναμη F_A τόσο πιο γρήγορα ανοίγει η πόρτα. Αν ασκήσουμε F_B πιο κοντά στην πόρτα τότε η πόρτα ανοίγει πιο αργά

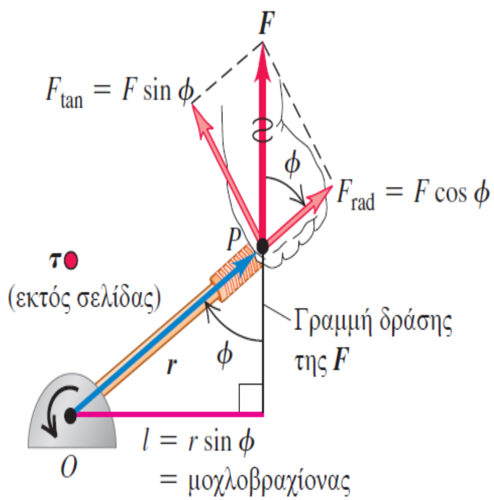
Ροπή δύναμης

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

Μονάδα SI: N.m



Τρεις τρόποι υπολογισμού της ροπής:
$\tau = Fl = rF\sin\phi = F_{tan}r$



r_c=l= rsinφ= μοχλοβραχίονας ή βραχίονας ροπής =σταθερή απόσταση της δύναμης F από το σημείο O που διέρχεται ο άξονας περιστροφής

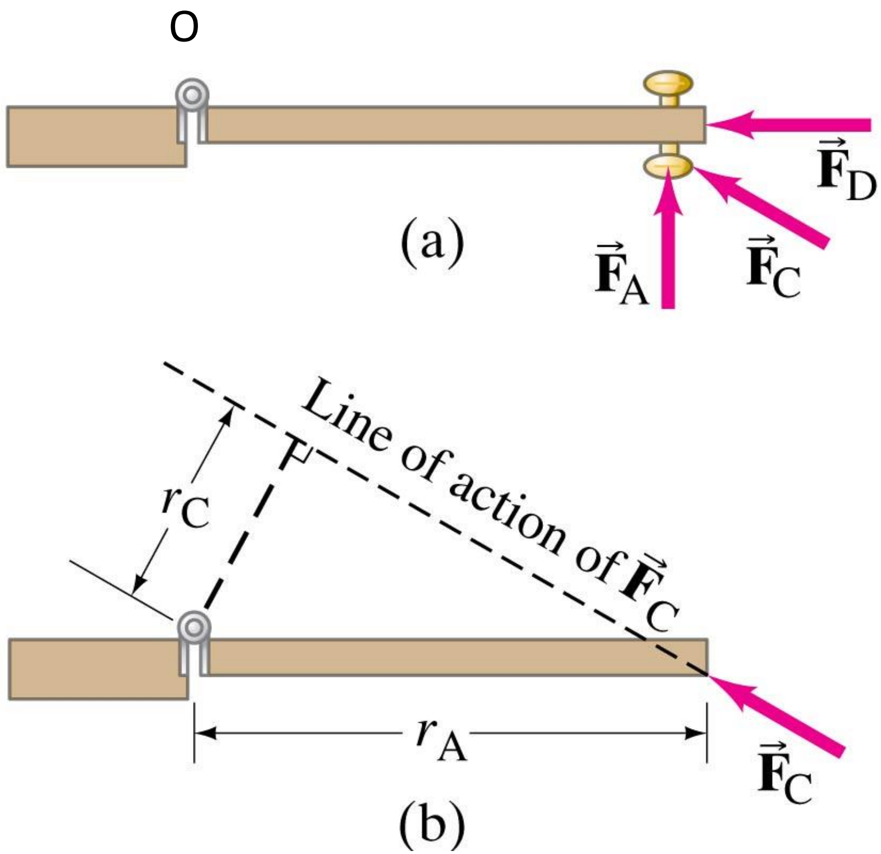
- Η ροπή δεν εξαρτάται από την απόσταση r από το σημείο O αλλά απο την κάθετη απόσταση r_c
- Είναι ανάλογη της εφαπτομενικής συνιστώσας της δύναμης. Η ακτινική δεν προκαλεί περιστροφή.

Οταν φ=90° τότε r_c=r και τ=max

Προσοχή: Το N.m εκφράζει Joule (μονάδα έργου και ενέργειας). Ομως η ροπή ΔΕΝ εκφράζεται με Joule.

Οταν φ=0°ή 180° τότε τ=0

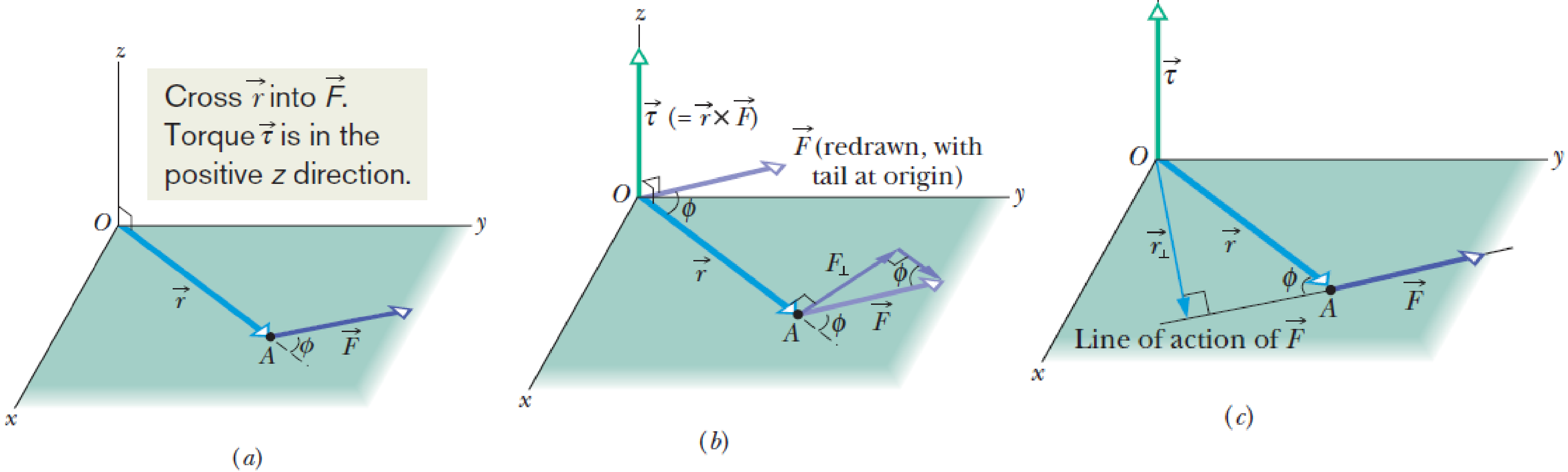
Εύρεση της ροπής δύναμης Fc που σχηματίζει γωνία με τον άξονα περιστροφής



μοχλοβραχίονας ή βραχίονας ροπής
=rc
σταθερή απόσταση της δύναμης F από το σημείο O που διέρχεται ο άξονας περιστροφής

- Φέρνουμε γραμμή στη διεύθυνση της δύναμης (γραμμή δράσης)
- Σχεδιάζουμε γραμμή κάθετη στη γραμμή δράσης η οποία διέρχεται από τον άξονα περιστροφής στο σημείο περιστροφής O

Τρόποι υπολογισμού της ροπής δύναμης



$\tau = F_{tan}.r$=F. sinϕ.r $\tau = F.r$¬=F. r. sinϕ

Μόνον η εφαπτομενική συνιστώσα της δύναμης Ftan προκαλεί ροπή. Η ακτινική είναι κατά μήκος του r

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} \quad \text{(torque defined).}$$

Προσοχή:

- Η ροπή εξαρτάται όχι μόνο από το μέτρο της δύναμης αλλά και την κατεύθυνση της.
- Η ροπή ορίζεται ως προς ένα σημείο.
- Είναι κάθετη στο επίπεδο που βρίσκεται το σημείο περιστροφής και η δύναμη

Ροπή δύναμης ως διάνυσμα

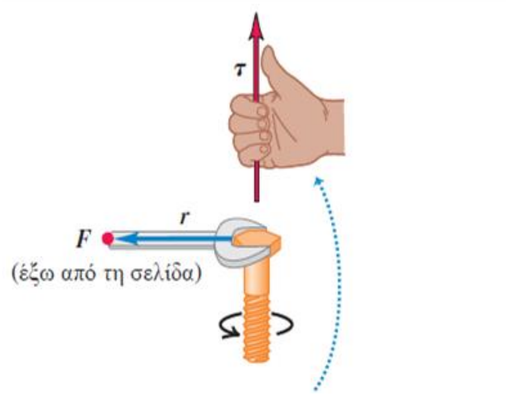
Αν δείξετε με τα δάχτυλα του δεξιού χεριού την κατεύθυνση του $\boldsymbol{r}$ και έπειτα τα κυρτώσετε προς την κατεύθυνση του $\boldsymbol{F}$, ο προτεταμένος σας αντίχειρας δείχνει προς την κατεύθυνση του τ.

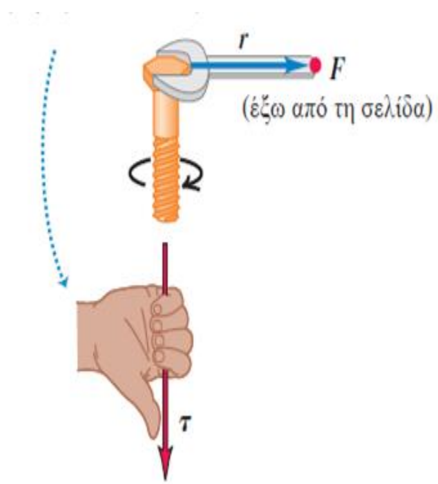
Διάνυσμα ροπής εξαιτίας της δύναμης $\boldsymbol{F}$ ως προς το σημείο O

Διάνυσμα από το O μέχρι το σημείο εφαρμογής της $\boldsymbol{F}$

$$\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{F} \qquad (10.3)$$

Δύναμη $\boldsymbol{F}$





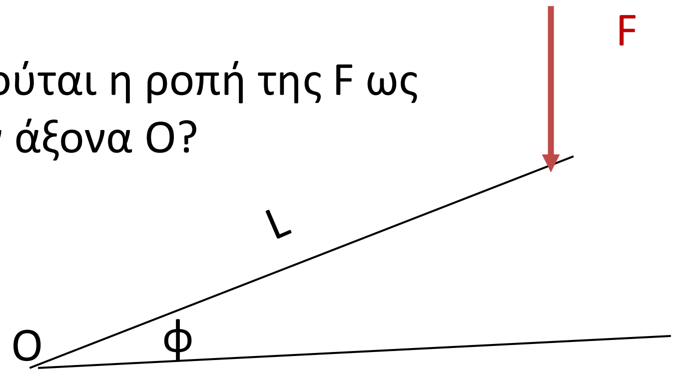
Εξωτερικό γινόμενου του διανύσματος θέσης απο το Ο και της δύναμης

έχει διεύθυνση κατά μήκος του άξονα περιστροφής, κάθετο στο ***r*** και στο ***F***. Τα δάχτυλα του δεξιού χεριού κυρτώνονται προς την κατεύθυνση της περιστροφής που τείνει να προκαλέσει η ροπή.

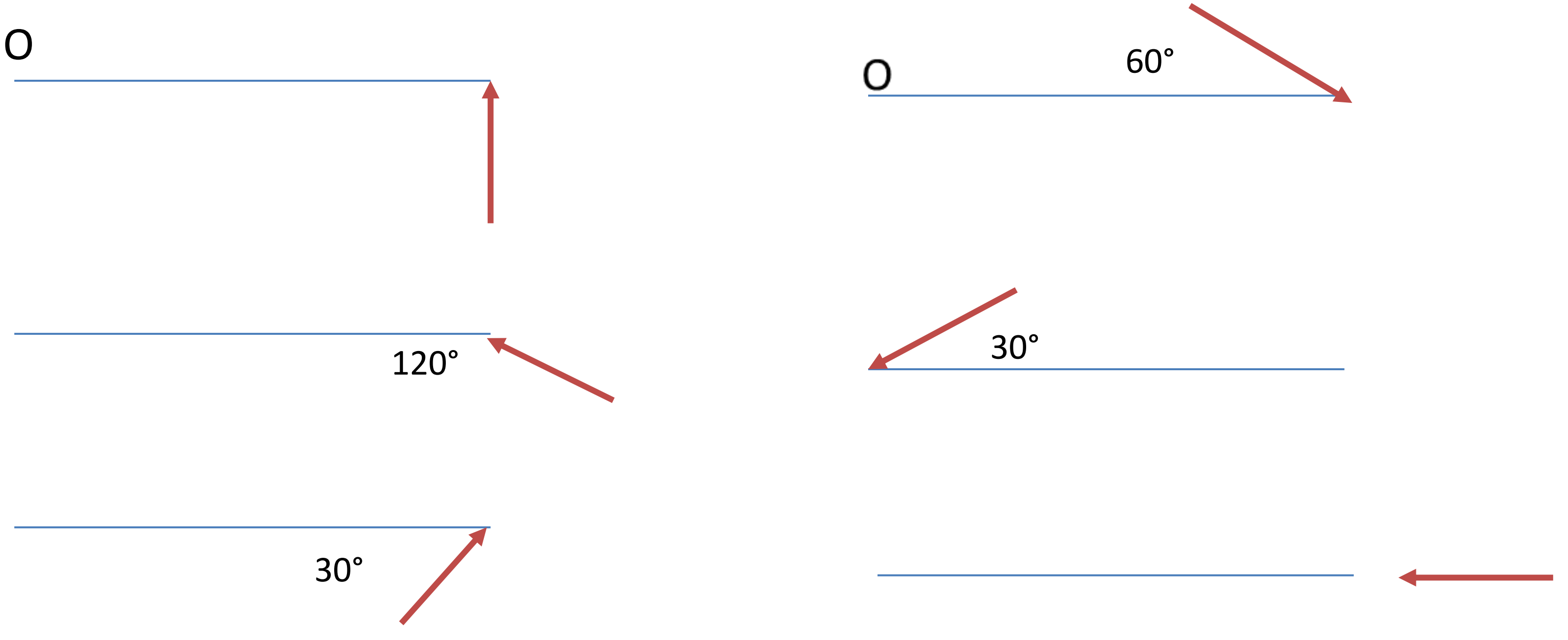
Φορά αρνητική όταν η δύναμη περιστρέφει το σώμα κατά τη φορά δεικτών του ρολογιού και θετική αντίθετα στη φορά δεικτών του ρολογιού

Ερωτήσεις

Με τι ισούται η ροπή της F ως προς τον άξονα Ο?

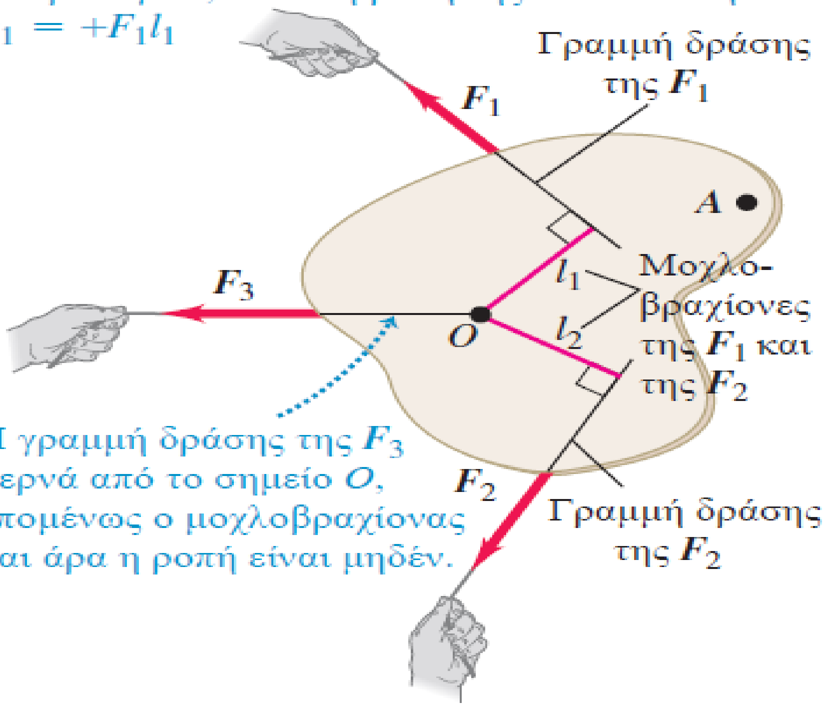


1)F.L.sinφ
2)F.L.cosφ
3) F.L.tanφ
4)F.L/sinθ
5) FL



10.2 Η ροπή δύναμης ως προς σημείο είναι το γινόμενο του μέτρου της δύναμης επί τον μοχλοβραχίονα της δύναμης.

Η F_1 τείνει να προκαλέσει περιστροφή ως προς το σημείο O αντίθετη προς τη φορά των δεικτών του ρολογιού, οπότε η ροπή της είναι θετική: $\tau_1 = +F_1 l_1$



Η F_2 τείνει να προκαλέσει περιστροφή ως προς το σημείο O, σύμφωνη με τη φορά των δεικτών του ρολογιού, οπότε η ροπή της είναι *αρνητική*: $\tau_2 = -F_2 l_2$

$T_1=+F_1.l_1$

$T_3=0$ γιατι περνά απο το σημείο O

$T_2=-F_2.l_2$

Ερωτήσεις

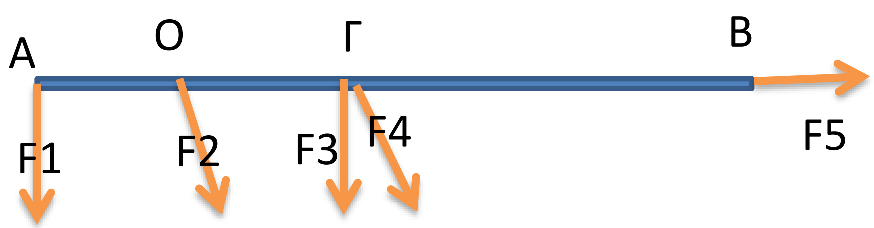
1) Το διάνυσμα θέσης ενός σωματιδίου δείχνει προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα z. Προς ποια κατεύθυνση είναι η δύναμη που προκαλεί τη ροπή, αν η ροπή στο σωματίδιο είναι:

α) 0

β) προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x και

γ) προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα y,

2) Οι δυνάμεις είναι ομοεπίπεδες και έχουν το ίδιο μέτρο. Η ράβδος περιστρέφεται γύρω απο το σημείο Ο που απέχει 20 cm απο την άκρη της ράβδου Α. Κατατάξτε τις δυνάμεις με βάση τη ροπή που προκαλουν με τη μεγαλύτερη πρώτη

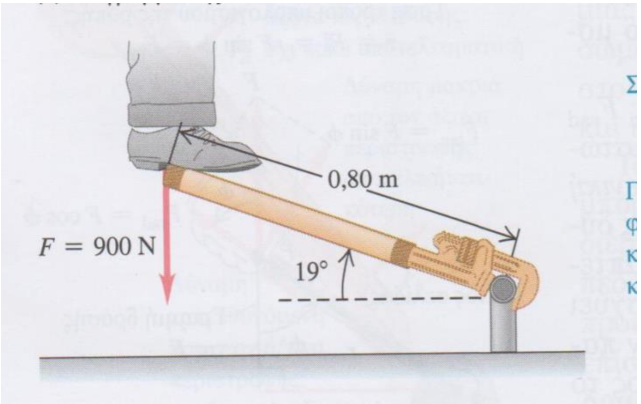


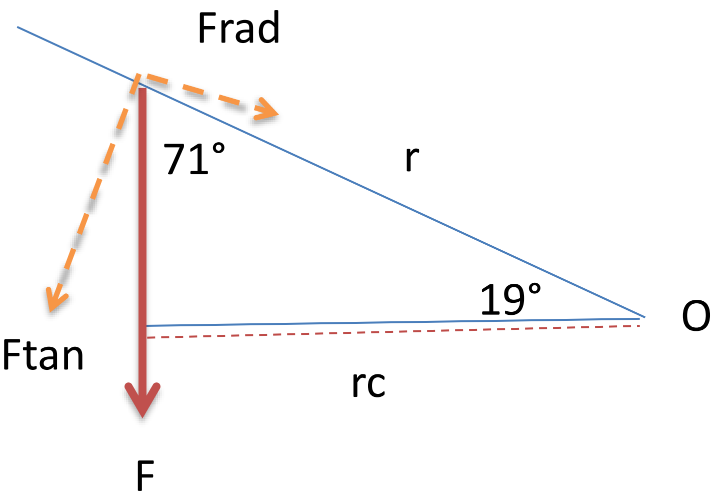
ΑΟ=20 cm

ΑΓ=40 cm

ΑΒ=100 cm

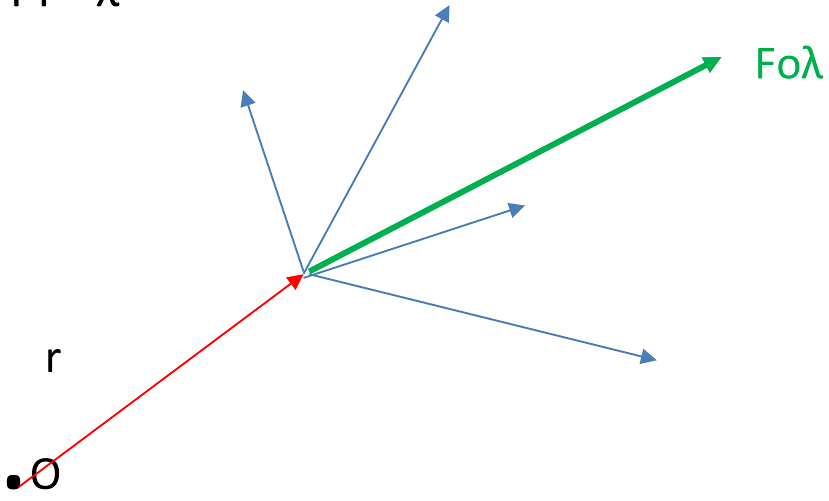
Παράδειγμα 1





Παράδειγμα 2

Στο σημείο του χώρου $\vec{r}$=(1,1,1) επενεργούν 4 δυναμεις $\overrightarrow{F_1}$=(1,0,1), $\overrightarrow{F_2}$=(2,-1,0), $\overrightarrow{F_3}$=(-2,-1,0), $\overrightarrow{F_4}$=(0,1,1). Να βρεθεί η συνισταμένη ροπή του συστήματος ως προς την αρχή των αξόνων και να εξεταστει αν αυτή μπορεί να αντικατασταθεί από τη συνισταμένη δύναμη με τον ίδιο μοχλοβραχίονα



Συμπέρασμα:
Συνολική Ροπή συντρεχουσών δυνάμεων=ροπή της συνισταμένης δύναμης

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ NEWTON

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για την εφαπτομενική συνιστώσα έχει τη μορφή

$$F_{1,\tan} = m_1 a_{1,\tan}$$

Μπορούμε να εκφράσουμε την εφαπτομενική επιτάχυνση του πρώτου σωματίου ως συνάρτηση της γωνιακής επιτάχυνσης του σώματος a_z

$$a_{1,\tan} = r_1 \alpha_z$$

$$F_{1,\tan} r_1 = m_1 r_1^2 \alpha_z \qquad \tau_{1z} = I_1 \alpha_z = m_1 r_1^2 \alpha_z$$

Γράφουμε μια τέτοια εξίσωση για κάθε σωμάτιο που ανήκει στο στερεό σώμα και μετά προσθέτουμε όλες αυτές τις εξισώσεις:

$$\sum \tau_{iz} = \left(\sum m_i r_i^2 \right) \alpha_z$$

Περιστροφικό ανάλογο του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα για ελεύθερο σώμα:

Συνισταμένη ροπή σε στερεό σώμα περί τον άξονα z

$$\sum \tau_z = I \alpha_z \qquad (10.7)$$

Ροπή αδράνειας του στερεού σώματος περί τον άξονα z

Γωνιακή επιτάχυνση στερεού σώματος περί τον άξονα z

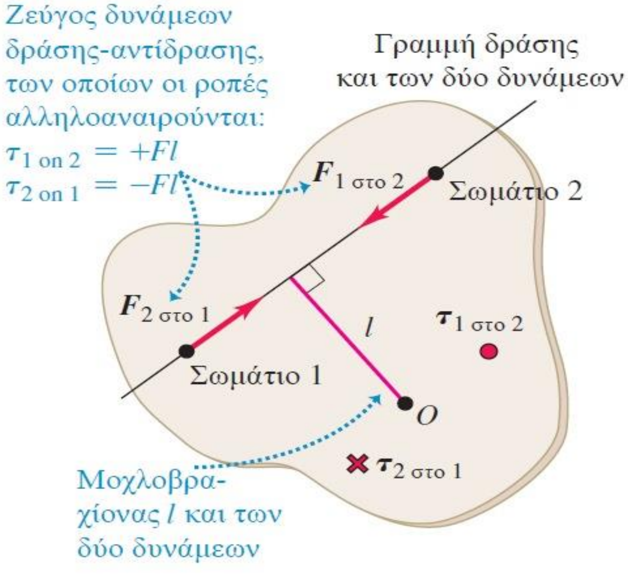
Συμπέρασμα: η συνισταμένη ροπή σε στερεό σώμα περί άξονα προκαλεί ***γωνιακή επιτάχυνση*** περί αυτόν τον άξονα

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ NEWTON

Προϋποθέσεις:

- α_z είναι ίδια για όλα τα σωμάτια που απαρτίζουν το σώμα
- Ισχύει μόνο για στερεά σώματα Συνεπώς, η εξίσωση αυτή δεν ισχύει για την περίπτωση μιας περιστρεφόμενης δεξαμενής νερού ή για έναν ανεμοστρόβιλο, διαφορετικά μέρη των οποίων έχουν διαφορετικές γωνιακές επιταχύνσεις.
- αφού για την απόδειξη αυτής της εξίσωσης χρησιμοποιήθηκε η Εξ. $a_{tan} = r\alpha_z$, το α_z πρέπει να μετριέται σε rad/s^2.
- Μόνον οι ροπές των εξωτερικών δυνάμεων επηρεάζουν την περιστροφή ενός στερεού σώματος

Γιατί όλες οι εσωτερικές ροπές αλληλοαναιρούνται

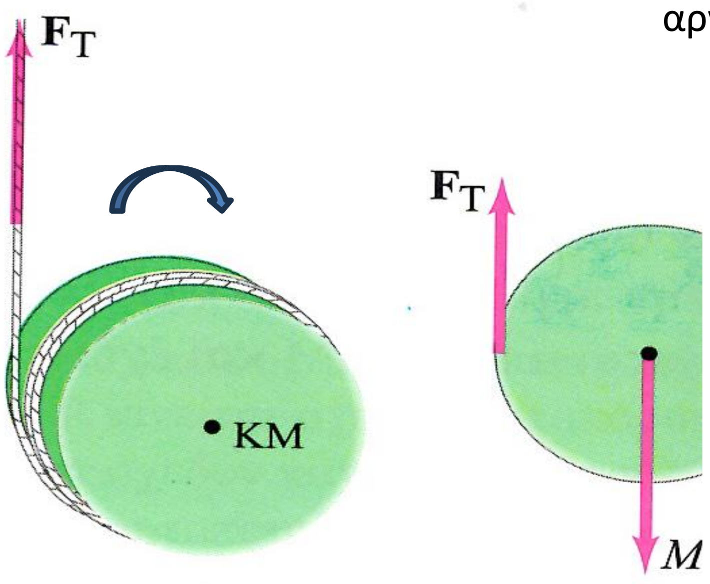


Όταν τ=0 τότε α_z=0 και ω=σταθερό

Εφαρμογή

Γύρω από έναν ομοιόμορφο συμπαγή κύλινδρο μάζας Μ και ακτίνας R τυλίγεται νήμα . Ο κύλινδρος εκτελεί πτώση εκκινώντας από ηρεμία. Σε τυχαία θέση στην πτώση του κυλίνδρου βρείτε α) την επιτάχυνσή του β) την τάση του νήματος

Δεξιόστροφη περιστροφή- αρνητική ροπή



εφαπτομενική επιτάχυνση της τροχαλίας στην άκρη της= a

Υπολογισμός επιτάχυνσης του κυλίνδρου

Περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου

$$\boxed{\tau_{NET} = I a_z}$$

για κύλινδρο

$$I = \frac{1}{2} MR^2$$

$$-RF_T = \frac{1}{2} MR^2(-a_z) \Rightarrow F_T = \frac{1}{2} MRa_z$$

$a=a_t=a_zR$

$$F_T = \frac{1}{2} Ma$$

Μεταφορική κίνηση του κμ του κυλίνδρου

$$\boxed{Mg - F_T = Ma}$$

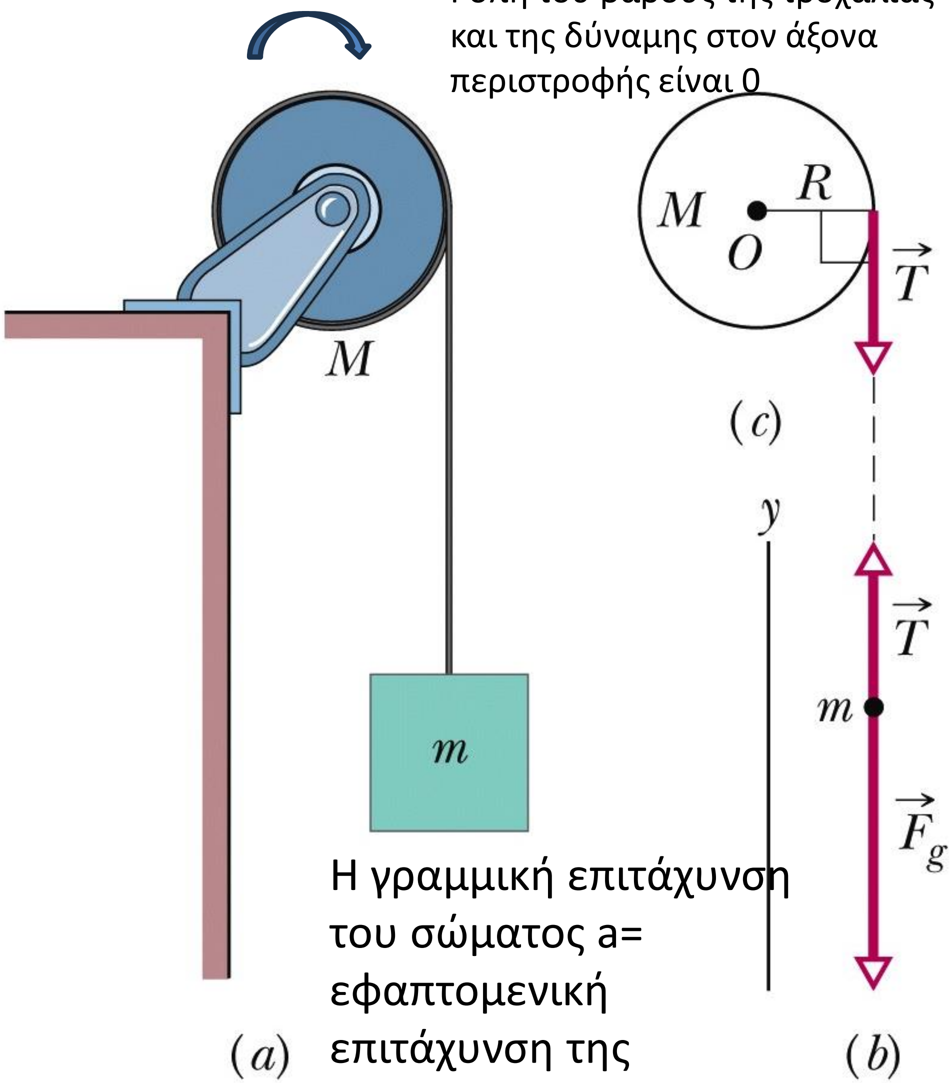
$$a = g\frac{2}{3}$$

$$F_T = \frac{1}{2} Ma = \frac{1}{2} Mg\frac{2}{3} = \frac{1}{3} Mg$$

Η επιτάχυνση a είναι μικρότερη από ότι θα ήταν αν ο κύλινδρος έπεφτε ελεύθερα

Εφαρμογή

Ροπή του βάρους της τροχαλίας και της δύναμης στον άξονα περιστροφής είναι 0



Η γραμμική επιτάχυνση του σώματος a= εφαπτομενική επιτάχυνση της τροχαλίας στην άκρη της a_t

Υπολογισμός επιτάχυνσης στο σύστημα βάρους-τροχαλίας

Δεξιόστροφη περιστροφή -αρνητική ροπή

$$\boxed{\tau_{NET} = I a_z}$$

για δίσκο

$$I = \frac{1}{2}MR^2$$

$$-RT = \frac{1}{2}MR^2(-a_z) \Rightarrow T = \frac{1}{2}MRa_z$$

$a=a_t=a_zR$

$$T = \frac{1}{2}Ma$$

Μεταφορική κίνηση στον άξονα y

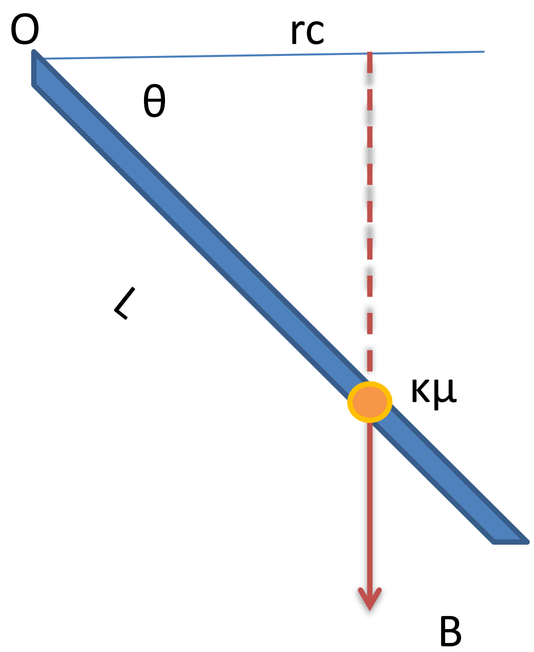
$$T - mg = -ma$$

οπότε

$$\boxed{a = g\frac{2m}{M+2m}}$$

Η επιτάχυνση a και η τάση T εξαρτώνται απο τη μάζα του δίσκου αλλά όχι απο την ακτίνα του

Παράδειγμα 3



Ομογενής ράβδος μήκους L που περιστρέφεται στο σημείο O με το βάρος της που εφαρμόζεται στο κέντρο μάζας σε απόσταση R_{CM}=5/9 L

Δινεται $\mathrm{I} = \frac{7}{18}\mathrm{M}.L^2$

Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα ω

ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ - ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

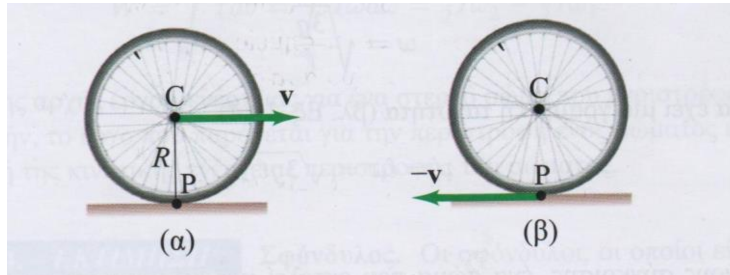
Some Corresponding Relations for Translational and Rotational Motion

Pure Translation (Fixed Direction)		Pure Rotation (Fixed Axis)	
Position	x	Angular position	θ
Velocity	$v = dx/dt$	Angular velocity	$\omega = d\theta/dt$
Acceleration	$a = dv/dt$	Angular acceleration	$\alpha = d\omega/dt$
Mass	m	Rotational inertia	I
Newton's second law	$F_{net} = ma$	Newton's second law	$\tau_{net} = I\alpha$
Work	$W = \int F\,dx$	Work	$W = \int \tau\,d\theta$
Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}mv^2$	Kinetic energy	$K = \frac{1}{2}I\omega^2$
Power (constant force)	$P = Fv$	Power (constant torque)	$P = \tau\omega$
Work–kinetic energy theorem	$W = \Delta K$	Work–kinetic energy theorem	$W = \Delta K$

ΚΥΛΙΣΗ: ΜΕΤΑΦΟΡΑ & ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

Κύλιση χωρίς ολίσθηση

Εξαρτάται από τη στατική τριβή μεταξύ σώματος και εδάφους.



Η τριβή είναι στατική γιατί το σημείο επαφής του κυλιόμενου σώματος με το έδαφος είναι σε κάθε χρονική στιγμή ακίνητο.

Σχέση που συνδέει τη γραμμική ταχύτητα με την γωνιακή ταχύτητα περιστροφής

Συνθήκη κύλισης χωρίς ολίσθηση:

Μέτρο της ταχύτητας κέντρου μάζας κυλιόμενου τροχού: v_{cm}

Ακτίνα τροχού: R

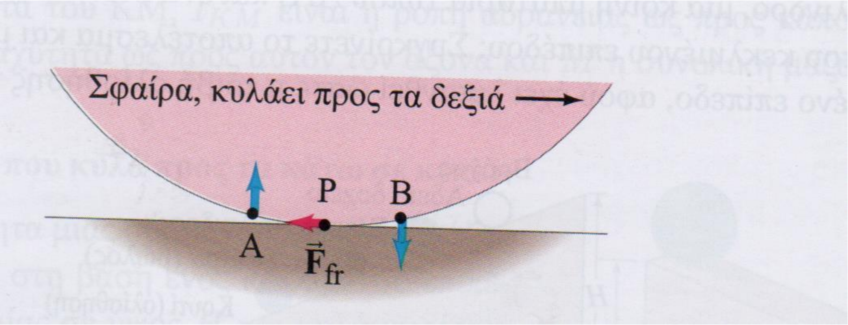
Μέτρο γωνιακής ταχύτητας τροχού: ω

$$v_{cm} = R\omega \qquad (10.11)$$

ΠΡΟΣΟΧΗ Η σχέση *αυτή* ισχύει μόνο για κύλιση χωρίς ολίσθηση.

ΚΥΛΙΣΗ: ΜΕΤΑΦΟΡΑ & ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

Για να μπορέσει να κυλήσει ένα σώμα είναι απαραίτητη η ύπαρξη στατικής τριβής.



Το σημείο P είναι ακίνητο. Το σημείο B κινείται στιγμιαία προς τα κάτω και το σημείο A προς τα πάνω

Η δύναμη της τριβής προκαλεί ταυτόχρονα:

- Επιβράδυνση της μεταφορικής κίνησης του κμ
- Περιστροφή του σώματος και επιτάχυνση

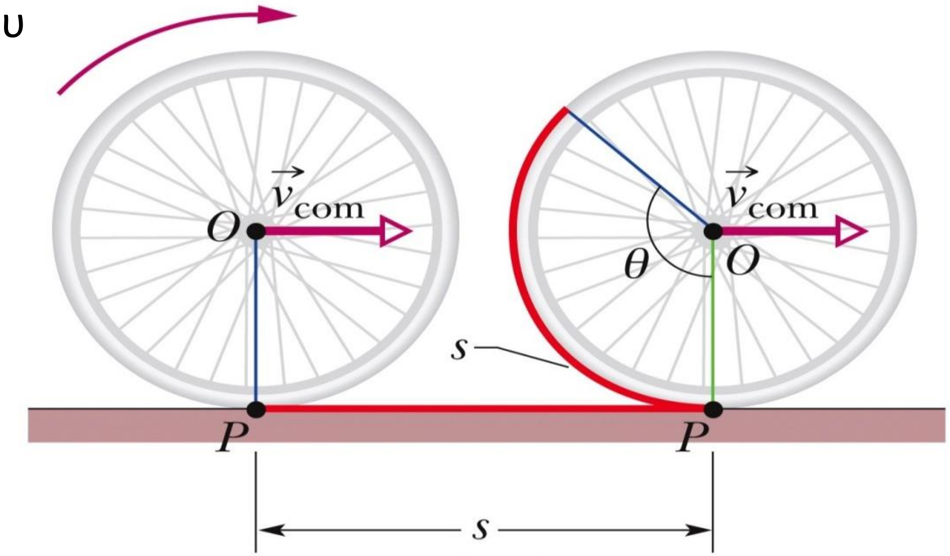
Προσοχή!

Η στατική τριβή ΔΕΝ παράγει έργο γιατί δύναμη και μετατόπιση είναι κάθετες μεταξύ τους στο σημείο επαφής με το έδαφος.

Η στατική τριβή δεν είναι ίση με την τριβή ολίσθησης δηλαδή δεν ισχύει $F_T=\mu F_N$ αλλά ισχύει $F_T<\mu F$ (χωρίς ολίσθηση)

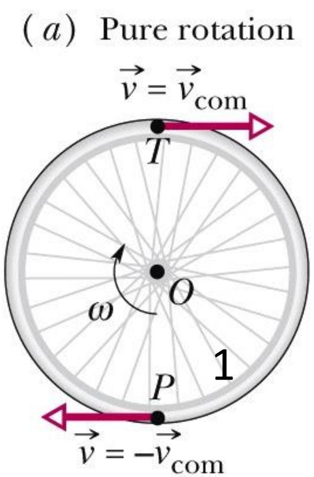
ΚΥΛΙΣΗ: ΜΕΤΑΦΟΡΑ & ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΗ

Το σημείο επαφής του τροχού με την επιφάνεια πρέπει να βρίσκεται στιγμιαία σε *ηρεμία* εφόσον ο τροχός δεν ολισθαίνει.



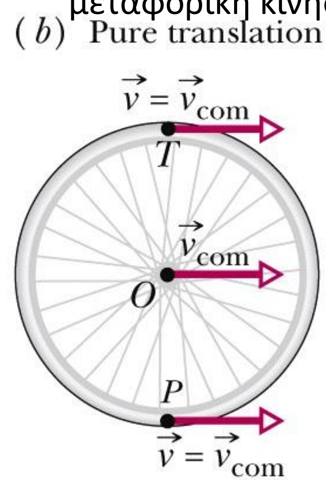
Ο τροχός είναι συμμετρικός και το κέντρο μάζας ταυτίζεται με το γεωμετρικό κέντρο

Περιστροφική κίνηση



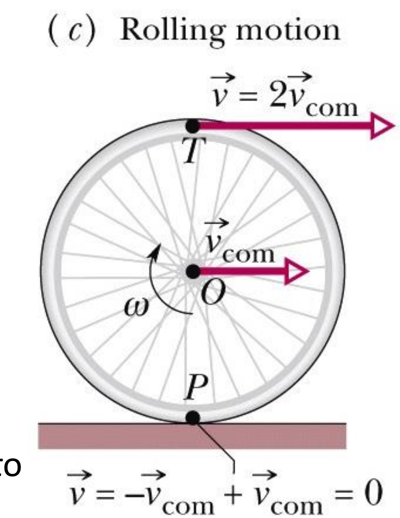
+

μεταφορική κίνηση



=

Συνδυαστική κίνηση



Ο τροχός ηρεμεί στιγμιαία στο σημειο που εφαπτεται στο εδαφος

Ένας παρατηρητής στο κέντρο μάζας βλέπει την περιφέρεια να εκτελεί τον ίδιο αριθμό περιστροφών ανά δευτερόλεπτο, όπως και ένας παρατηρητής στην περιφέρεια, στο σημείο 1, που παρατηρεί το κέντρο μάζας να περιστρέφεται γύρω από εκείνον.

Συνδυασμός Μεταφοράς και Περιστροφής: Δυναμική

Συνισταμένη εξωτερική δύναμη στο σώμα

Συνολική μάζα του σώματος

Επιτάχυνση του κέντρου μάζας

$$\sum \vec{F}_{\text{ext}} = M\vec{a}_{\text{cm}} \tag{10.12}$$

Μεταφορική κίνηση

Η περιστροφική κίνηση περί το κέντρο μάζας περιγράφεται από το περιστροφικό ανάλογο του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα:

Συνισταμένη ροπή σε στερεό σώμα περί τον άξονα z, που διέρχεται από το κέντρο μάζας

Ροπή αδράνειας στερεού σώματος περί τον άξονα z

Γωνιακή επιτάχυνση στερεού σώματος περί τον άξονα z

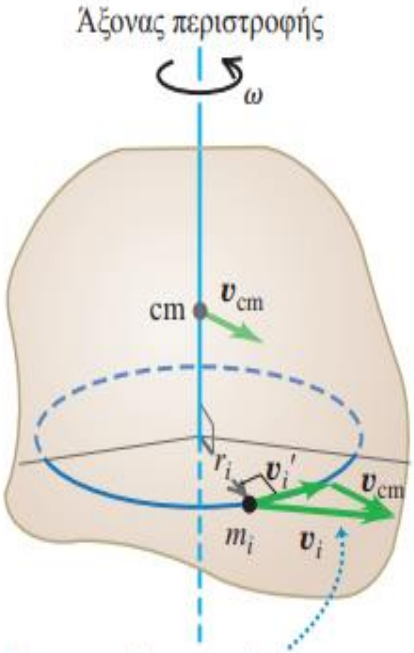
$$\sum \tau_z = I_{\text{cm}}\alpha_z \tag{10.13}$$

Περιστροφική κίνηση

Η Εξ. (10.13) ισχύει ακόμα και όταν ο άξονας περιστροφής κινείται, αρκεί να πληρούνται οι εξής δύο προϋποθέσεις:

1. Ο άξονας που διέρχεται από το κέντρο μάζας πρέπει να είναι άξονας συμμετρίας του σώματος.
2. Ο άξονας δεν πρέπει να αλλάζει κατεύθυνση.

ΚΙΝΗΤΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΚΥΛΙΣΗΣ



Ταχύτητα v_i ενός σωματίου του περιστρεφόμενου και μετατοπιζόμενου στερεού σώματος = (ταχύτητα v_{cm} του κέντρου μάζας) συν (ταχύτητα του σωματίου v_i' ως προς το κέντρο μάζας)

Κινητική ενέργεια κυλιόμενου τροχού:

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

$$I_P = I_{CM} + MR^2$$

$$K = \frac{1}{2}(I_{CM} + MR^2)\omega^2$$

$$\boxed{K = \frac{1}{2} I_{CM}\omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2}$$

Περιστροφική και μεταφορική κινητική ενέργεια

Κινητική ενέργεια στερεού σώματος με ταυτόχρονη μεταφορική και περιστροφική κίνηση

$$K = \underbrace{\tfrac{1}{2} M v_{cm}^2}_{\text{Κινητική ενέργεια μεταφορικής κίνησης του κέντρου μάζας (κ.μ.)}} + \underbrace{\tfrac{1}{2} I_{cm}\omega^2}_{\text{Κινητική ενέργεια περιστροφικής κίνησης περί άξονα διερχόμενο διά κ.μ.}} \qquad (10.8)$$

Μάζα του σώματος

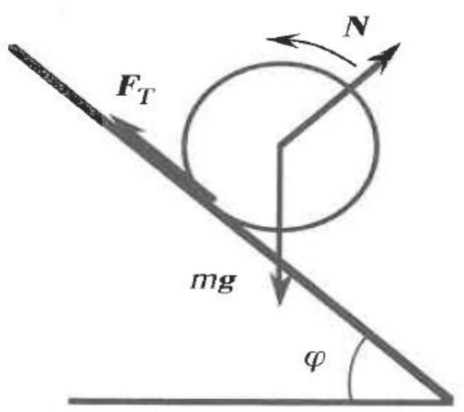
Ταχύτητα του κ.μ.

Ροπή αδράνειας του σώματος ως προς άξονα διά του κ.μ.

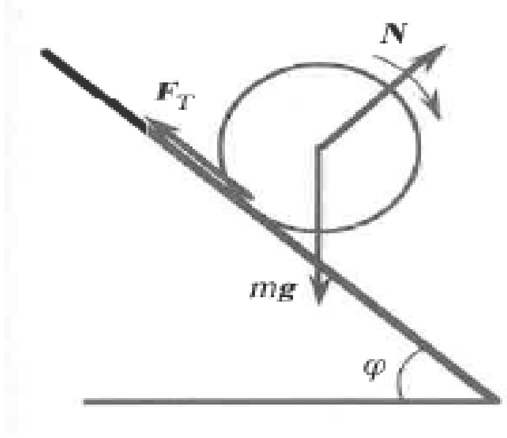
Γωνιακή ταχύτητα του σώματος

Σύγκριση ανόδου και καθόδου περιστρεφόμενου κυλίνδρου σε κεκλιμένο επίπεδο

άνοδος



κάθοδος



Επιβραδυνόμενη μεταφορική κίνηση

Επιταχυνόμενη μεταφορική κίνηση

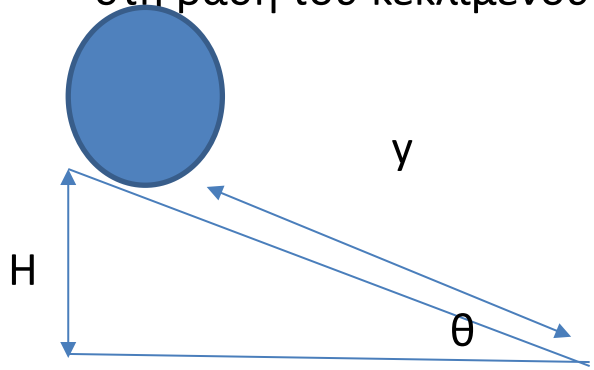
Η δύναμη τριβής F_T ίδια και στις δυο περιπτώσεις

Παράδειγμα 4

Κύλιση χωρίς ολίσθηση σε κεκλιμένο επίπεδο: προσέγγιση μέσω αρχής διατήρησης της ενέργειας

Ποια θα είναι η ταχύτητα συμπαγούς σφαίρας μάζας M και ακτίνας R όταν φτάσει στη βάση κεκλιμένου επιπέδου αν ξεκινά από ηρεμία σε ύψος H και κυλά χωρίς να ολισθαίνει?

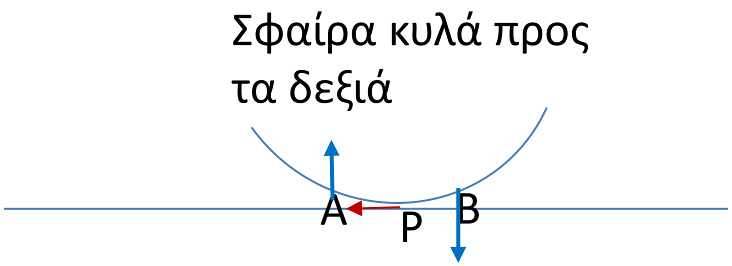
- Συγκρίνετε το αποτέλεσμα με αυτό ενός σώματος που ολισθαίνει προς τα κάτω σε λείο κεκλιμένο επίπεδο.
- Ποιο από τα παρακάτω στερεά (με την ίδια μάζα και ακτίνα) θα φτάσει πιο γρήγορα στη βάση του κεκλιμένου επιπέδου: σφαίρα, κύλινδρος, στεφάνη.



$$\mathrm{I}_{\,\sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = \frac{2}{5}\mathrm{M}R^2$$

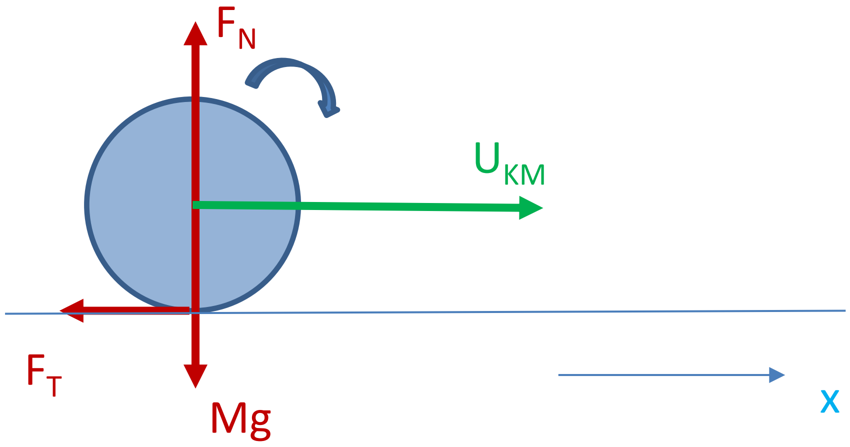
$$\mathrm{I}_{\,\kappa\upsilon\lambda\acute{\iota}\nu\delta\rho o\upsilon} = \frac{1}{2}\mathrm{M}R^2$$

$$\mathrm{I}_{\,\sigma\tau\varepsilon\varphi\acute{\alpha}\nu\eta} = \mathrm{M}R^2$$



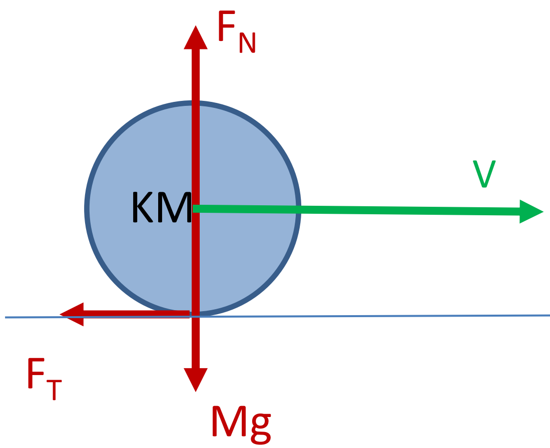
Παράδειγμα 5

Μια μπάλα του bowling μάζας M και ακτίνας r εκτοξεύεται κατά μήκος μιας επίπεδης επιφάνειας έτσι ώστε αρχικά (t=0) να ολισθαίνει με γραμμική ταχύτητα u_0 χωρις να περιστρέφεται. Στη συνέχεια κάποια στιγμή ενώ ολισθαίνει αρχίζει και στροβιλίζεται και τελικά κυλά χωρίς να ολισθαίνει.Πόσο είναι το χρονικό διάστημα που παρέρχεται μέχρι να ξεκινήσει να κυλά χωρίς να ολισθαίνει?

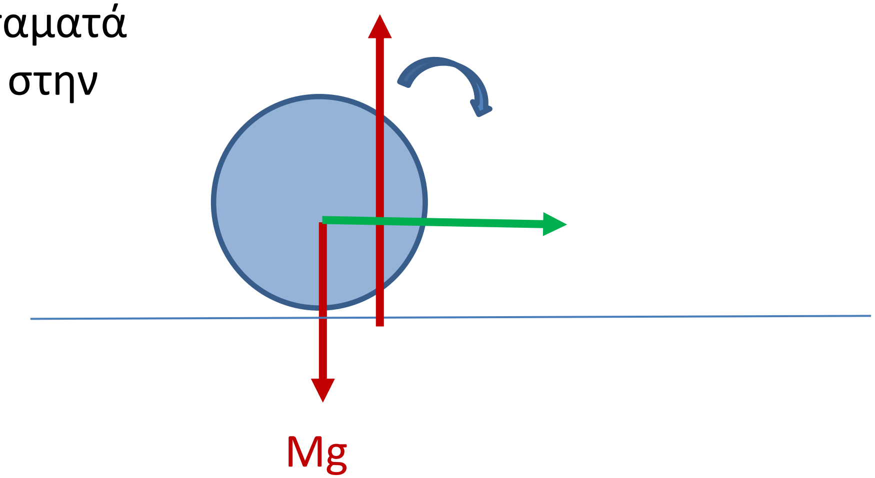


Γιατί μια κυλιόμενη σφαίρα επιβραδύνεται?

Ο ρόλος της τριβής: επιβραδυντικός για τη μεταφορική κίνηση, επιταχυντικός στην περιστροφική κίνηση   Παράδοξο???



Μια κυλιόμενη σφαίρα που σταματά ΔΕΝ οφείλεται στην τριβή



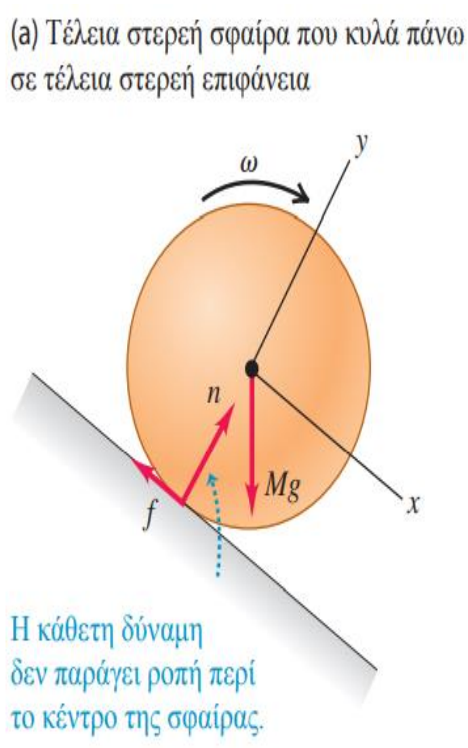
Απάντηση:

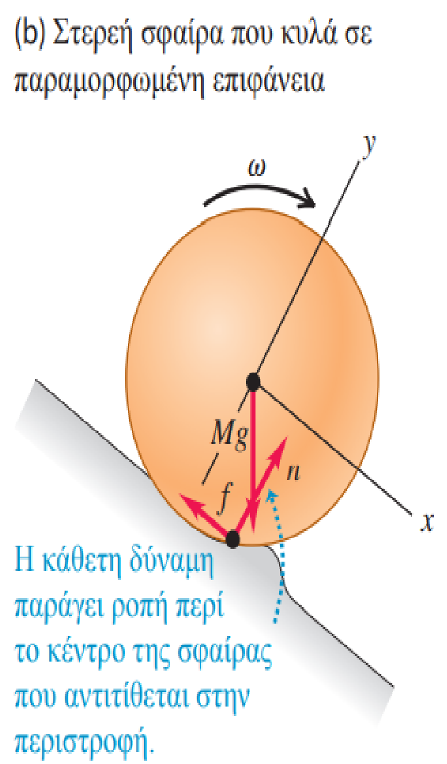
Λόγω της μη ομοιομορφίας της σφαίρας που δημιουργεί επιφάνεια επαφής και όχι σημείο επαφής

Η F_N ασκείται από την επιφάνεια προς τη σφαίρα και εφαρμόζεται μπροστά από το ΚΜ. Η ροπή της είναι αντίθετη από αυτή που δημιουργεί η τριβή και τελικά επιβραδύνει τη σφαίρα

Τριβή Κυλίσεως

Κύλιση σε (a) τέλεια στερεή κατωφέρεια, και (b) παραμορφωμένη επιφάνεια. Στο (b) η παραμόρφωση εμφανίζεται υπερβολικά μεγαλοποιημένη, και η δύναμη *n* είναι η συνιστώσα της δύναμης επαφής, η οποία είναι κάθετη στο επίπεδο της επιφάνειας προτού αυτή παραμορφωθεί.





ΜΕΤΑΦΟΡΙΚΗ - ΠΕΡΙΣΤΡΟΦΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Αντιστοίχηση Δυναμικών Μεγεθών Μεταφορικής και Περιστροφικής Κίνησης

Translational		Rotational	
Force	$\vec{F}$	Torque	$\vec{\tau}\ (= \vec{r} \times \vec{F})$
Linear momentum	$\vec{p}$	Angular momentum	$\vec{\ell}\ (= \vec{r} \times \vec{p})$
Linear momentum[b]	$\vec{P}\ (= \Sigma \vec{p}_i)$	Angular momentum[b]	$\vec{L}\ (= \Sigma \vec{\ell}_i)$
Linear momentum[b]	$\vec{P} = M\vec{v}_{\mathrm{com}}$	Angular momentum[c]	$L = I\omega$
Newton's second law[b]	$\vec{F}_{\mathrm{net}} = \dfrac{d\vec{P}}{dt}$	Newton's second law[b]	$\vec{\tau}_{\mathrm{net}} = \dfrac{d\vec{L}}{dt}$
Conservation law[d]	$\vec{P} =$ a constant	Conservation law[d]	$\vec{L} =$ a constant

ΔΥΝΑΜΗ **F** ⟷ ΡΟΠΗ **τ**

ΟΡΜΗ **p** ⟷ ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ **L**

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ

Στροφορμή σωματίου ως προς την αρχή των αξόνων *O* αδρανειακού συστήματος αναφοράς

Διάνυσμα θέσης σωματίου ως προς το *O*

$$\boldsymbol{L} = \boldsymbol{r} \times \boldsymbol{p} = \boldsymbol{r} \times m\boldsymbol{v} \qquad (10.24)$$

Γραμμική ορμή του σωματίου = μάζα επί ταχύτητα

$$\mathrm{L} = \mathrm{r\,mU\,sin\varphi} = (\mathrm{r sin\varphi})\,mU = rm(U\sin\phi)$$

Η τιμή του ***L*** εξαρτάται από την επιλογή της αρχής *O*, αφού περιλαμβάνει το διάνυσμα θέσης του σωματίου ως προς το *O*.

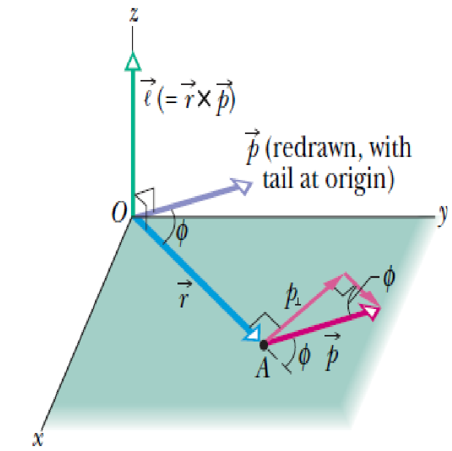
Μέτρο

$$\mathrm{L} = \mathrm{r\,mU\,sin\varphi} = (\mathrm{r sin\varphi})\,mU$$

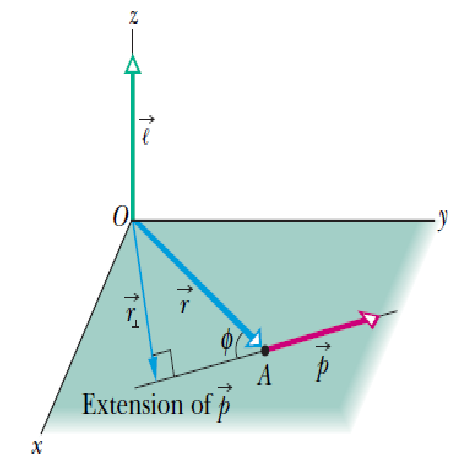
Μοχλοβραχίονας=κάθετη απόσταση ανάμεσα στο 0 και τον φορέα της v (ή της P)

Μονάδα μέτρησης SI

Kg.m^2/s ή J.s



(a)



(b)

Προσοχή: το L ειναι πάντα κάθετο στο επιπεδο των r και v (ή p)

Κατεύθυνση

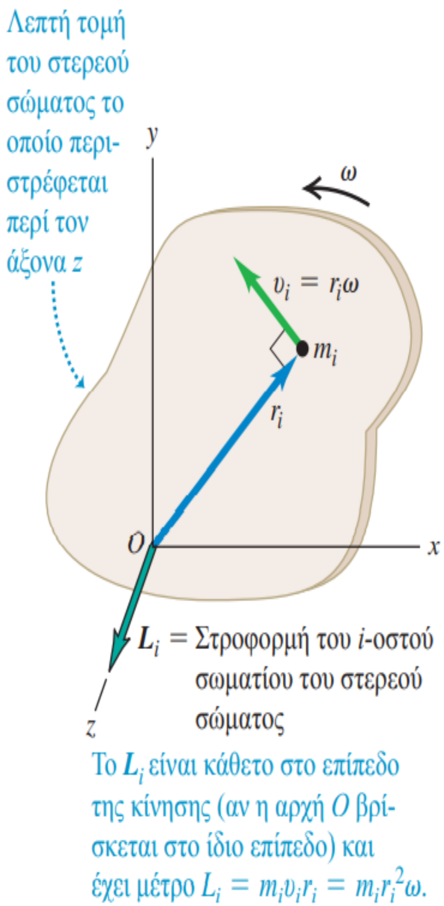
Με βάση τον κανόνα του εξωτερικού γινομένου (απο r προς v με τη μικρότερη γωνία) αφού έχουμε μετακινήσει τα διανύσματα με κοινή αρχή το Ο

Αν ο άξονας περιστροφής είναι και άξονας συμμετρίας του σώματος, η στροφορμή L έχει την ίδια κατεύθυνση με τη γωνιακή ταχύτητα ω

ΣΤΡΟΦΟΡΜΗ στερεού σωματος

$$L = \sum mi.ri\ vi = \sum (mi.ri)(\omega.ri)$$

$$L = \sum L_i = \left(\sum m_i r_i^2\right)\omega = I\omega$$



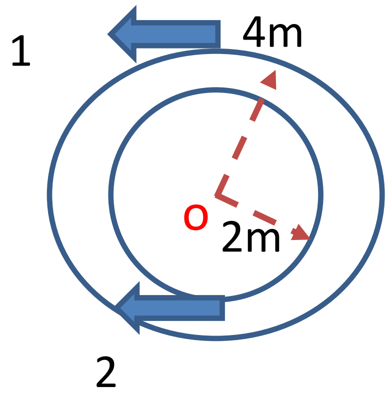
Στροφορμή στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από άξονα συμμετρίας

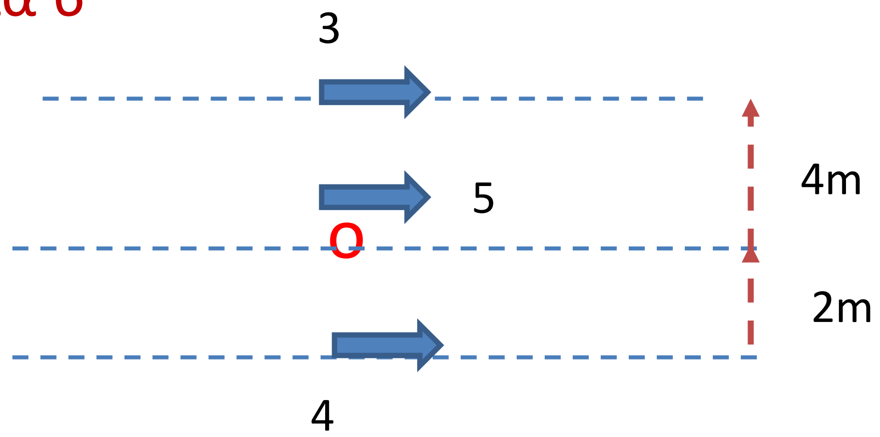
$$L = I\omega \qquad (10.28)$$

Ροπή αδράνειας στερεού σώματος ως προς άξονα συμμετρίας

Διάνυσμα γωνιακής ταχύτητας σώματος

Παράδειγμα 6





Να κατατάξετε τα σωματίδια 1-5 με βάση την στροφορμή κατά φθίνουσα σειρά. Η ταχύτητα και η μάζα είναι η ίδια και στα 5 σωματίδια.

Ποια σωματίδια έχουν αρνητική στροφορμή?

Ερωτήσεις

1. Ένα σωματίδιο κινείται σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με ένα σημείο P. Ποια από τις παρακάτω δηλώσεις είναι αληθής, αν η στροφορμή του σωματιδίου είναι μηδέν kg·m/s^2;

α) Το σωματίδιο δεν μπορεί να κινείται με σταθερή ταχύτητα.
β) Το σωματίδιο έχει περάσει από το σημείο P.
γ) Το σωματίδιο δεν μπορεί να περάσει από το σημείο P.
δ) Η πορεία του σωματιδίου πρέπει να περνάει από το σημείο P.

2. Μια συμπαγής σφαίρα ακτίνας R περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα που είναι εφαπτόμενος στη σφαίρα με γωνιακή ταχύτητα ω. Αν η ακτίνα της σφαίρας αυξάνεται σε 2R, ποια είναι η τελική γωνιακή ταχύτητα της σφαίρας; ($I=\frac{2}{5}MR^2$)

a) ω/4
b) ω/2
c) ω
d) 2ω
e) 4ω

Ρυθμός μεταβολής της στροφορμής

$$\boxed{\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}}$$

Όταν μια συνισταμένη δύναμη ***F*** δρα σε σωμάτιο, η ταχύτητα και η ορμή του μεταβάλλονται, οπότε μπορεί να μεταβληθεί και η στροφορμή του.

Απόδειξη

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\vec{r}\times m\vec{v}\right) = m\left(\frac{d\vec{r}}{dt}\times\vec{v}\right) + m\left(\vec{r}\times\frac{d\vec{v}}{dt}\right)$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m\left(\cancelto{0}{\vec{v}\times\vec{v}}\right) + m\left(\vec{r}\times\vec{a}\right) = 0 + \left(\vec{r}\times m\vec{a}\right) = \vec{r}\times\vec{F}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau}$$

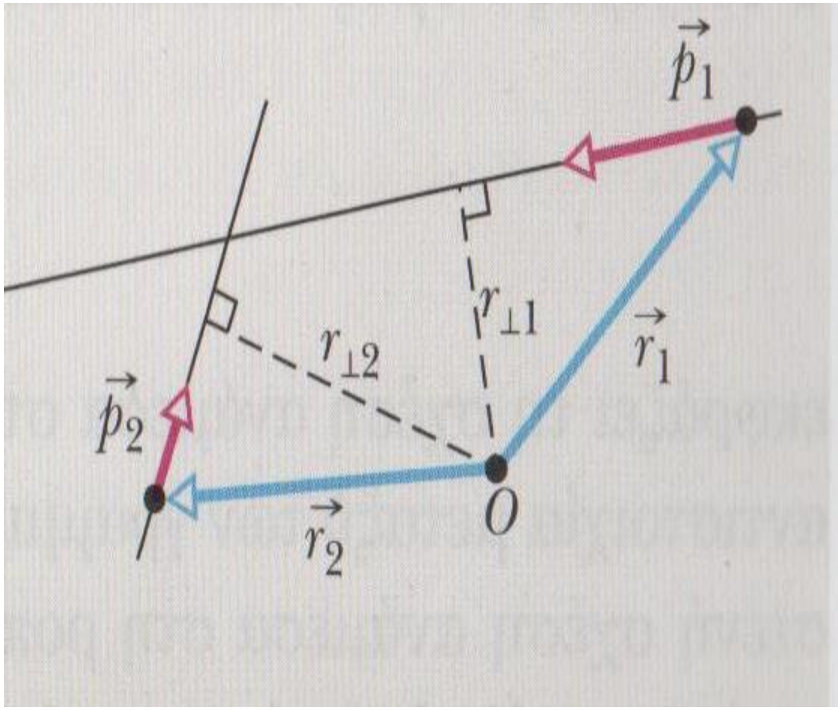
Συμπέρασμα: Ο ρυθμός μεταβολής της στροφορμής ενός σωμάτιου ισούται με τη ροπή της συνισταμένης δύναμης που δρα σε αυτό

Παράδειγμα 7

Δύο σωματίδια κινούνται με σταθερή ορμή p_1 και p_2 σε οριζόντια τροχιά. Ποιο είναι το μέτρο και η κατεύθυνση της συνολικής στροφορμής του συστήματος των δύο σωματιδίων ως προς το σημείο Ο

μοχλοβραχίονες
$r_c2=4$ m
$r_c1=2$ m

$P_1=5$kg.m/s
$P_2=2$ kg.m/s



Αρχή διατήρησης της στροφορμής

Για ένα σύστημα σωματίων:

$$\underbrace{\sum \boldsymbol{\tau}}_{\text{Άθροισμα των εξωτερικών ροπών στο σύστημα}} = \underbrace{\frac{d\boldsymbol{L}}{dt}}_{\text{Ρυθμός μεταβολής της ολικής στροφορμής } \boldsymbol{L} \text{ του συστήματος}} \qquad (10.29)$$

Αν ισχύει $\sum \boldsymbol{\tau} = 0$, τότε $d\boldsymbol{L}/dt = 0$ και το $\boldsymbol{L}$ είναι σταθερό.

Συμπέρασμα: Όταν η συνισταμένη εξωτερική ροπή που επενεργεί στο σύστημα είναι μηδέν, τότε η ολική στροφορμή του συστήματος είναι σταθερή (διατηρείται).

Αρχή διατήρησης της στροφορμής

Προσοχή!!!!

Για να ισχύει η αρχή διατήρησης της στροφορμής απαιτείται η συνισταμένη των ροπών να είναι μηδέν, όχι απαραίτητα η συνισταμένη των δυνάμεων
$\Sigma\tau=0$ όχι όμως απαραίτητα $\Sigma F=0$

Η αρχή αυτή, όπως συμβαίνει και με τη διατήρηση της ενέργειας ή της (γραμμικής) ορμής, είναι ένας παγκόσμιος νόμος διατήρησης που ισχύει σε συστήματα κάθε κλίμακας μεγέθους, από τα ατομικά και πυρηνικά συστήματα έως τις κινήσεις των γαλαξιών.

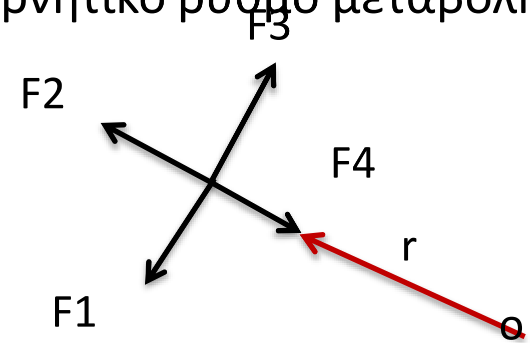
Όταν ένα σύστημα αποτελείται από διάφορα τμήματα, οι εσωτερικές δυνάμεις που ασκούν τα τμήματα μεταξύ τους προκαλούν μεταβολές στις στροφορμές των τμημάτων, αλλά η *ολική* στροφορμή δεν μεταβάλλεται εξαιτίας των εσωτερικών δυνάμεων.

Παράδειγμα 8

1. Ενας δίσκος, μια στεφάνη και μια συμπαγης σφαίρα περιστρεφονται γύρω απο τον κεντρικό άξονά τους με τη βοήθεια νημάτων που δημιουργούν την ίδια σταθερή εφαπτομενική δύναμη. Τα τρία αντικείμενα έχουν την ίδια μάζα και ακτίνα και είναι αρχικά ακίνητα. α) Να τα κατατάξετε σε φθίνουσα σειρά ανάλογα με τη στροφορμή τους ως προς τον κεντρικό άξονα και β) το μέτρο της γωνιακής τους ταχύτητας όταν τα νήματα έχουν τραβηχθεί για κάποιο διάστημα.

$$\mathrm{I}_{\ \sigma\varphi\alpha\acute{\iota}\rho\alpha\varsigma} = \frac{2}{5}\mathrm{M}R^2 \qquad \mathrm{I}_{\ \kappa\upsilon\lambda\acute{\iota}\nu\delta\rho o\upsilon} = \frac{1}{2}\mathrm{M}R^2 \qquad \mathrm{I}_{\ \sigma\tau\epsilon\varphi\acute{\alpha}\nu\eta} = \mathrm{M}R^2$$

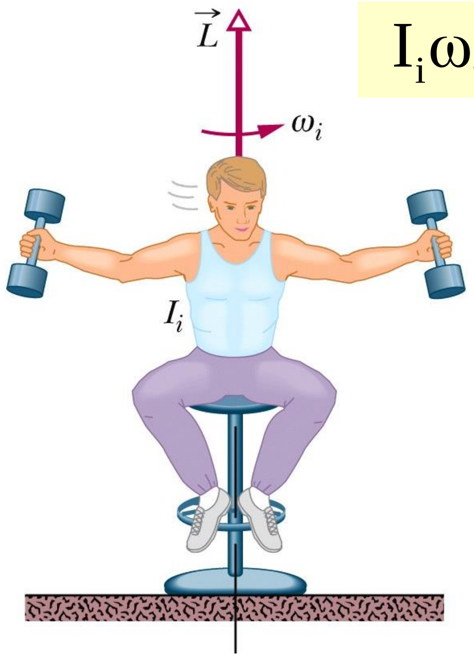
2. Οι δυναμεις F1, F2, F3 και F4 βρίσκονται στο επιπεδο xy και έχουν το ίδιο μέτρο. Να κατατάξετε κατά φθίνουσα σειρά τις δυνάμεις με βάση τη μεταβολή της στροφορμής με το χρόνο dL/dt. Ποια περίπτωση οδηγεί σε αρνητικό ρυθμό μεταβολής της στροφορμής?



Αρχή διατήρησης της στροφορμής

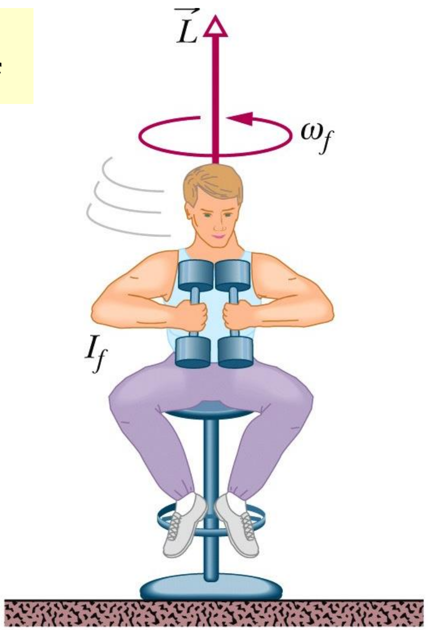
$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\tau} = 0 \;\Rightarrow\; L = const$$

R=μεγάλο, I= μεγάλο,
ω=μικρό



$$I_i \omega_\iota = I_f \omega_f$$

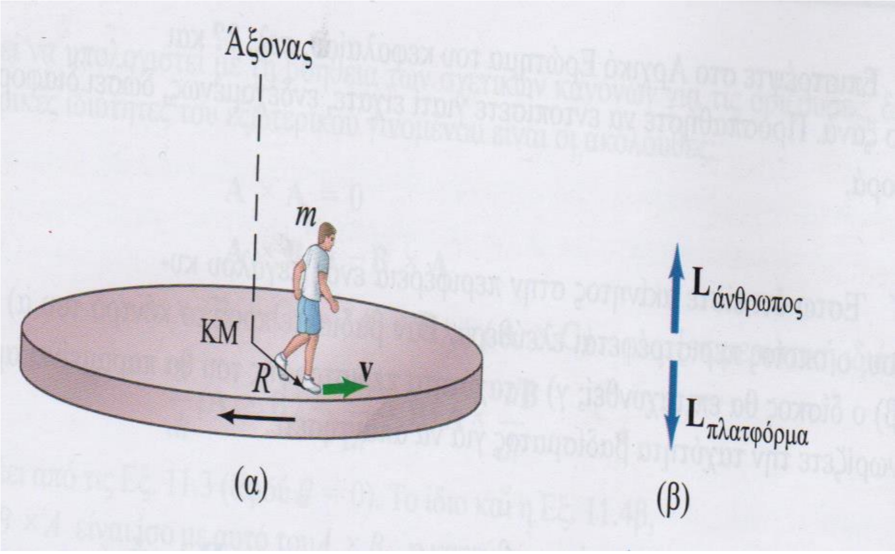
R=μικρό, I= μικρό
ω=μεγάλο



Πότε περιστρέφεται πιο γρήγορα
και γιατί???

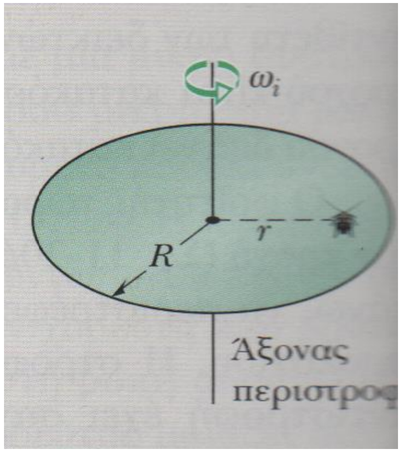
Παράδειγμα 9

Ενας άνθρωπος 60 Kg παραμένει ακίνητος στην περιφέρεια μιας κυκλικής πλατφόρμας διαμέτρου 6 m η οποία προσαρμόζεται σε ένα λείο έδρανο με ροπή αδράνειας 1800 kg.m^2. Η πλατφόρμα αρχικά ηρεμεί αλλά όταν ο άνθρωπος ξεκινά να τρέχει με ταχύτητα 4,2 m/s κυκλικά στην περιφέρειά της η πλατφόρμα ξεκινά να περιστρέφεται προς την αντίθετη κατεύθυνση. Υπολογίστε την γωνιακή ταχύτητα της πλατφόρμας



Παράδειγμα 10

Μια μάζα m βρίσκεται πάνω σε δίσκο μάζας M=6 m και ακτίνας R. O δίσκος περιστρέφεται γύρω από τον κεντρικό του άξονα με γωνιακή ταχύτητα ω=1.5 rad/s Η μάζα βρίσκεται αρχικά σε απόσταση r=0,8 R από το κέντρο του δίσκου και μετά κινείται και φτάνει στην περιφέρεια του δίσκου. Θεωρείστε την μάζα ως σωματίδιο. Πόσο είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας?

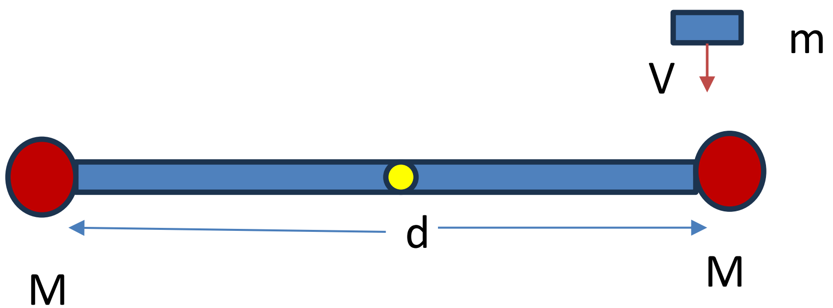


Παράδειγμα 11

Μια μάζα m κινούμενη με ταχύτητα V προσκολλάται σε μία από τις μπάλες ενός αλτήρα, ο οποίος περιστρέφεται χωρίς τριβές κατακόρυφα γύρω από οριζόντιο άξονα που διέρχεται από το μέσο της αβαρούς ράβδου που συνδέει τις δύο μπάλες. Εάν η μάζα της κάθε μπάλας είναι M και το μήκος της ράβδου d, να υπολογιστούν α) το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας αμέσως μετά την προσκόλληση της μάζας m στη μπάλα

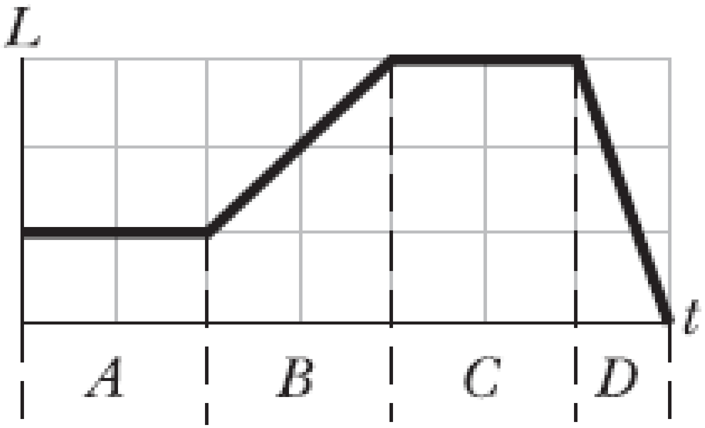
β) τον λόγο των κινητικών ενεργειών πριν και μετά την πρόσκρουση.

γ) Τη συνολική γωνία περιστροφής του αλτήρα μετά την πρόσκρουση.



Παράδειγμα 12

Το Σχήμα απεικονίζει το μέτρο της στροφορμής L ενός τροχού σε συνάρτηση με το χρόνο t. Να κατατάξετε τα τέσσερα χρονικά διαστήματα, που σημειώνονται με τα αντίστοιχα γράμματα, σύμφωνα με το μέτρο της ασκούμενης ροπής στον τροχό, ξεκινώντας από το διάστημα που δρα η μεγαλύτερη ροπή.



Παράδειγμα 13

Ένας δίσκος, με ροπή αδράνειας ίση με 7.00 kg · m2, περιστρέφεται όπως ένα καρουζέλ ενώ υπόκειται σε ροπή εξαρτώμενη από τον χρόνο που δίνεται από την σχέση τ=(5.0+2.00t) N · m. Αν τη χρονική στιγμή t = 1.00 s, η στροφορμή του δίσκου είναι 5.00 kg · m2/s, πόση είναι η στροφορμή του τη στιγμή t = 3.00 s;