

Αρμονική Ταλάντωση στερεού σώματος

Ταλάντωση

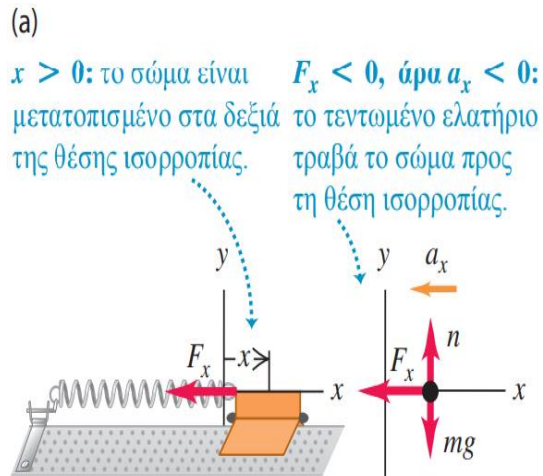
Ένα σώμα εκτελεί ταλάντωση ή περιοδική κίνηση όταν κινείται περιοδικά γύρω από ένα σημείο ισορροπίας

Το φαινόμενο παρατηρείται και σε μεγάλη κλίμακα (πχ γέφυρες, κτίρια) και μικρή κλίμακα (ατομικές ταλαντώσεις)

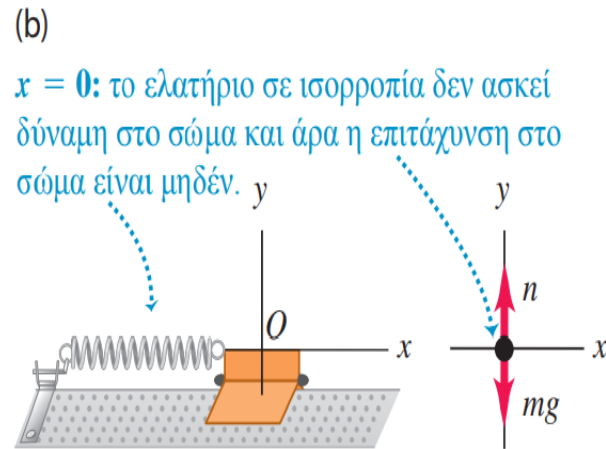
Η αρμονική ταλάντωση είναι η απλούστερη ταλάντωση που μπορεί να περιγραφεί μαθηματικά αλλά και συνιστά καλή περιγραφή πολλών ταλαντώσεων στη φύση

Περιγραφή της ταλάντωσης

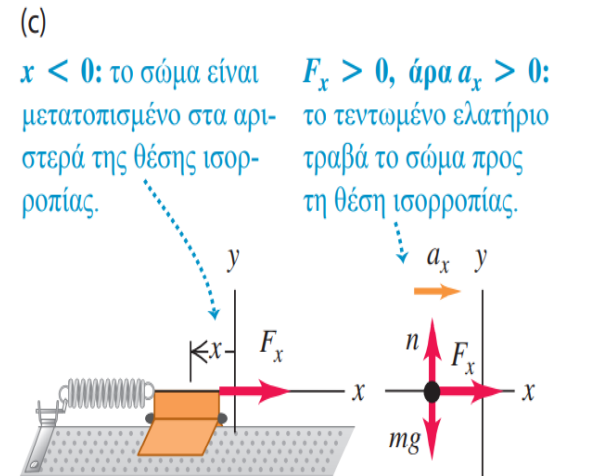
Η μάζα του ελατηρίου είναι αμελητέα



επιμήκυνση



Σημείο ισορροπίας



συμπίεση

Όταν το σώμα μετατοπιστεί από τη θέση ισορροπίας όπου $x = 0$, το ελατήριο ασκεί **δύναμη**

επαναφοράς προς τη θέση ισορροπίας

$$F = -kx \quad \text{Νόμος του Hooke}$$

$k = \text{σταθερά του ελατηρίου}$

Πάντοτε προκύπτει ταλάντωση εάν υπάρχει **δύναμη επαναφοράς**, η οποία τείνει να επαναφέρει το σύστημα στην ισορροπία. Η F είναι αντίθετη προς τη μετατόπιση x

Περιγραφή της ταλάντωσης

Η δύναμη F δεν είναι σταθερή αλλά μεταβάλλεται με τη θέση. \longrightarrow

Η επιτάχυνση a δεν είναι σταθερή \longrightarrow δεν μπορούν να χρησιμοποιηθούν οι εξισώσεις της σταθερά μεταβαλλόμενης κίνησης

Αν δεν υπάρχει τριβή ή άλλη δύναμη για να αφαιρέσει μηχανική ενέργεια από το σύστημα, η ταλάντωση συνεχίζεται για πάντα

Θέση ισορροπίας: η θέση όπου δεν ασκείται καμμία δύναμη στη μάζα m

x =μετατόπιση

A =μέγιστη μετατόπιση=πλάτος της ταλάντωσης

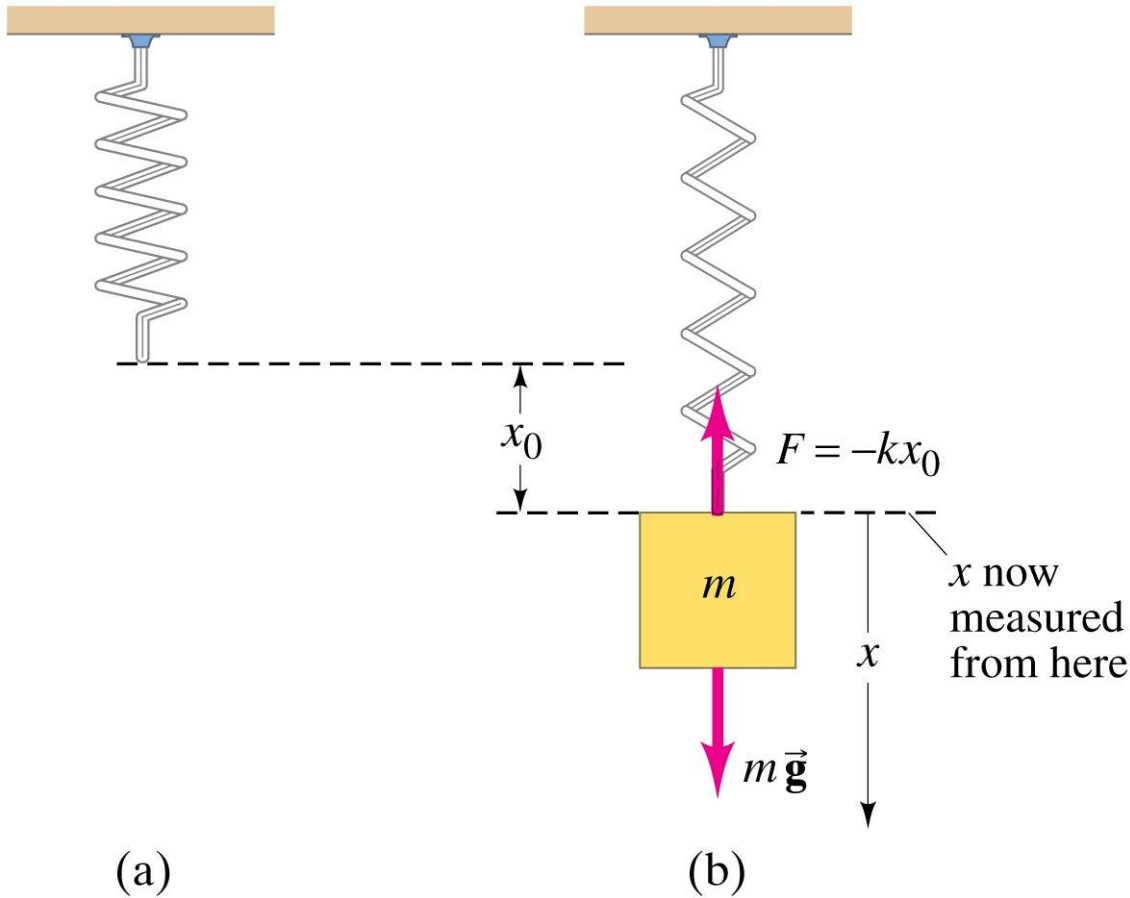
Κύκλος=πλήρη κίνηση μπρος πίσω από την αρχική θέση και πάλι πίσω σε αυτήν

T =περίοδος=ο χρόνος για έναν πλήρη κύκλο

Περιγραφή της ταλάντωσης

πλάτος	A	το μέγιστο μέτρο της μετατόπισης $ x $ από τη θέση ισορροπίας	Είναι πάντοτε θετικό	Μέτρο(m)
περίοδος	T	είναι ο χρόνος που απαιτείται για να ολοκληρωθεί ένας πλήρης κύκλος	Είναι πάντοτε θετική	Δευτερόλεπτο (s), (ή «δευτερόλεπτα ανά κύκλο»).
συχνότητα	f	ο αριθμός των κύκλων ανά μονάδα χρόνου.	Είναι πάντοτε θετική	hertz (1 hertz = 1 Hz = 1 κύκλος/s = 1 s ⁻¹)
γωνιακή συχνότητα	ω	είναι το γινόμενο του 2π επί τη συχνότητα: $\omega = 2\pi f$ Εκφράζει τον ρυθμό μεταβολής ενός γωνιακού μεγέθους (που δεν σχετίζεται κατ' ανάγκη με περιστροφική κίνηση)	Είναι πάντοτε θετική.	rad/s <i>προσοχή: τα rad (ακτίνια) είναι αδιάστατες ποσότητες</i>

Ταλάντωση στην κατακόρυφη διεύθυνση



Ελεύθερο
ελατήριο
αναρτημένο
κατακόρυφα

Η ταλάντωση της
μάζας m .
Ισορροπία στο
σημείο όπου $\Sigma F=0$
οπότε $F=mg$

Αρμονική ταλάντωση

Το πιο απλό είδος ταλάντωσης συμβαίνει όταν η συνισταμένη **δύναμη επαναφοράς** F_x είναι ανάλογη της αρνητικής μετατόπισης x από τη **θέση ισορροπίας**.

Η μετατόπιση x είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου

$$x(t)=A \sin(\omega t+\varphi) \quad \text{ή} \quad x(t)=A \cos(\omega t+\varphi)$$

A=πλάτος (αφού \sin ή \cos μεταβάλλονται μεταξύ -1 και 1, η απομάκρυνση x θα μεταβαλλεται μεταξύ $-A$ και A)

$\omega t+\varphi$ =φάση της ταλάντωσης
 φ =γωνία φάσης ή σταθερά φάσης
 ω =γωνιακή συχνότητα

Στην περιοδική κίνηση η συχνότητα είναι αντίστροφη της περιόδου.

$$f = \frac{1}{T} \quad T = \frac{1}{f}$$

Περίοδος
Συχνότητα

(14.1)

Η φάση περιγράφει τη χρονική αφετηρία της καμπύλης μετατόπισης-χρόνου στην ταλάντωση:

Ταλάντωση με περίοδο $T=2\pi/\omega$

Η γωνιακή συχνότητα σχετίζεται με τη συχνότητα και την περίοδο.

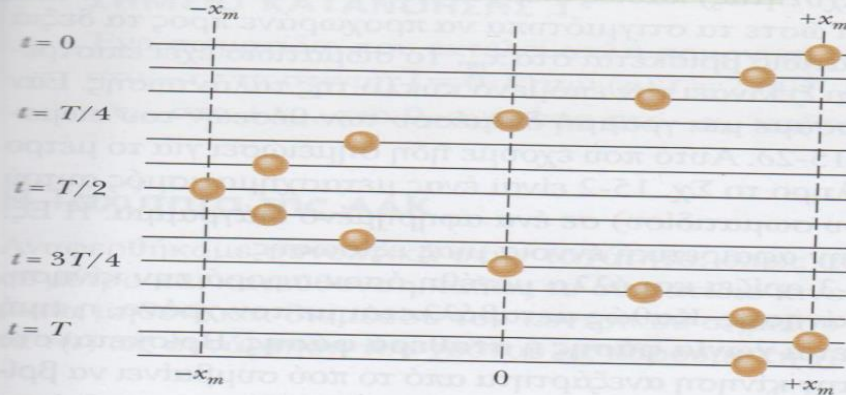
$$\omega = 2\pi f = \frac{2\pi}{T}$$

Συχνότητα
Περίοδος

(14.2)

Ακολουθία στιγμιοτύπων που δείχνουν τη θέση ενός σημείου που ταλαντώνεται γύρω από τον άξονα x σε ίσα χρονικά διαστήματα

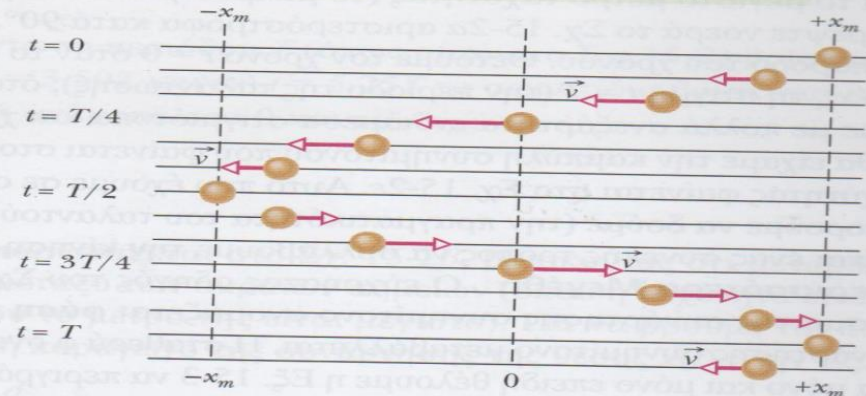
Το σωματίδιο ταλαντώνεται δεξιά-αριστερά σε απλή αρμονική κίνηση.



(α)

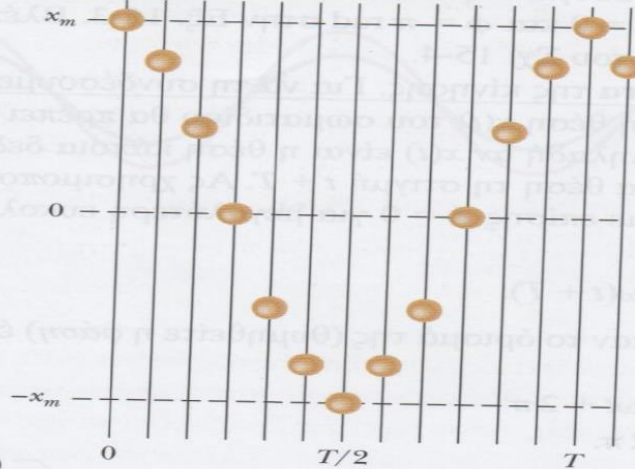
Η ταχύτητα είναι μηδέν στα ακριανά σημεία.

Η ταχύτητα (μέτρο) είναι μέγιστη στο μεσαίο σημείο.



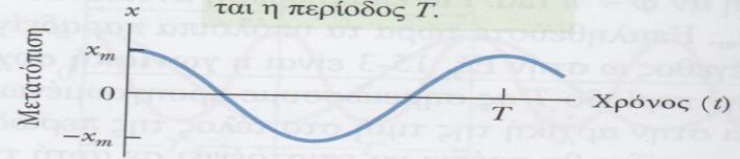
(β)

Περιστρέφοντας το σχήμα αποκαλύπτεται ότι η κίνηση σχηματίζει συνημιτονοειδή συνάρτηση.



(γ)

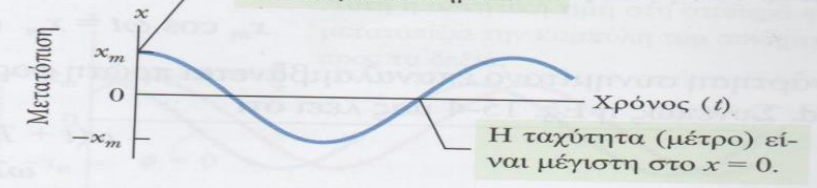
Αυτό είναι ένα διάγραμμα της κίνησης, όπου φαίνεται η περίοδος T .



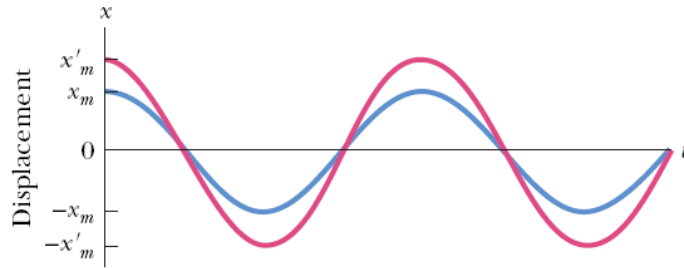
(δ)

Η ταχύτητα είναι μηδέν στα ακριανά σημεία.

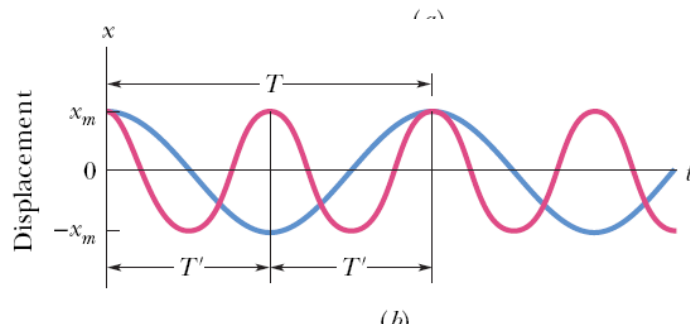
Η ταχύτητα (μέτρο) είναι μέγιστη στο $x = 0$.



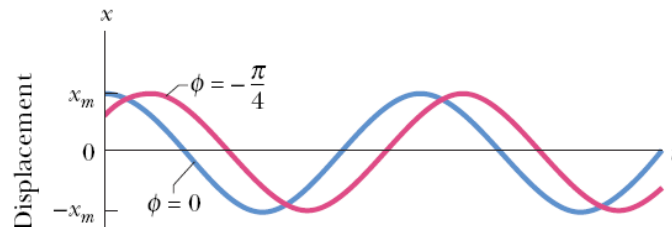
(ε)



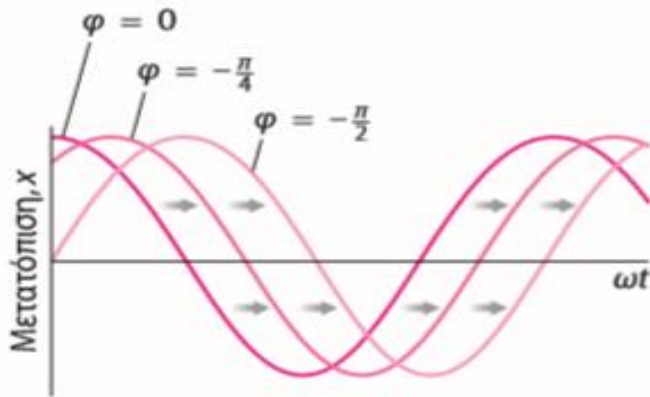
Διαφορετικά πλάτη,
ίδια περίοδος



Ίδιο πλάτος,
διαφορετική περίοδος
και συχνότητα



Ίδιο πλάτος, ίδια περίοδος,
διαφορετική γωνία φάσης



Οι θετικές τιμές ϕ μετατοπίζουν την
συνημιτοειδή καμπύλη προς τα αριστερά
και οι αρνητικές προς τα δεξιά

Ερώτηση: Σε μια ταλάντωση ποιες από τις ακόλουθες προτάσεις είναι αληθείς για κάποια στιγμή στη διάρκεια της κίνησης **ταυτόχρονα**

A) Το σώμα έχει $V=0$ και $a \neq 0$

B) $V=0$ και $a=0$

Γ) $V \neq 0$ και $a=0$

Δ) $V \neq 0$ και $a \neq 0$

Ερώτηση: Σε ποια θέση η επιτάχυνση είναι μηδενική?

A) $x=-A$

B) $x=0$

Γ) $x=A$

Δ) $x=-A$ και $x=A$

E) πουθενά

Πότε η ταλάντωση είναι αρμονική?

Η απομάκρυνση $x(t)$ υλικού σημείου που εκτελεί αρμονική ταλάντωση ικανοποιεί την διαφορική εξίσωση

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Παράδειγμα

Η ασκούμενη δύναμη ελατηρίου σε σημειακή μάζα m δίνεται από τη σχέση (Νόμος του Hooke):

$$F = -kx \Rightarrow ma = -kx \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx \Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Rightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

όπου:

$$\omega^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

και

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Ερώτηση: Πότε έχουμε αρμονική ταλάντωση?

$$F=-5x$$

$$F=-400x^2$$

$$F=10x$$

$$F= 3x^2$$

Ερώτηση: Πότε έχουμε αρμονική ταλάντωση?

$$F=8.6 x$$

$$F=-0,5x^2$$

$$F=-2.3 y$$

$$F= -4\theta$$

Η συνάρτηση $x(t) = A \sin(\omega t)$ ή $x(t) = A \cos(\omega t)$ αποτελεί μια απλή λύση της διαφορικής αυτής εξίσωσης:

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = 0$$

Απόδειξη

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega^2 x = \frac{d^2}{dt^2} [A \sin(\omega t)] + \omega^2 [A \sin(\omega t)] =$$

$$= \frac{d}{dt} [A \omega \cos(\omega t)] + \omega^2 [A \sin(\omega t)] =$$

$$= -A \omega^2 \sin(\omega t) + \omega^2 A \sin(\omega t) = 0$$

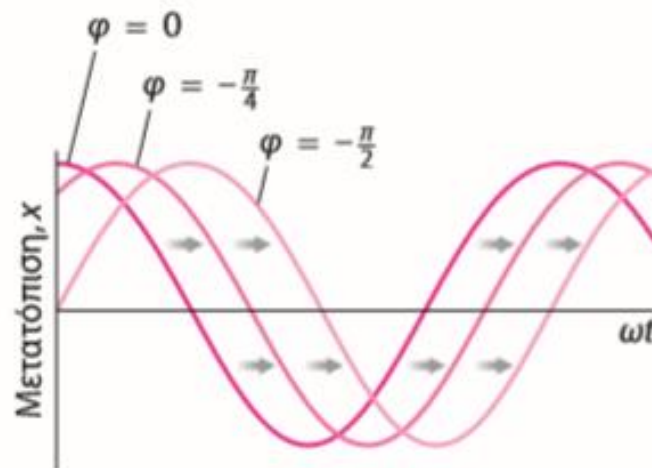
Ποσότητες στην απλή αρμονική κίνηση

- Γωνιακή συχνότητα, συχνότητα, περίοδος:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad T = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

- Φάση

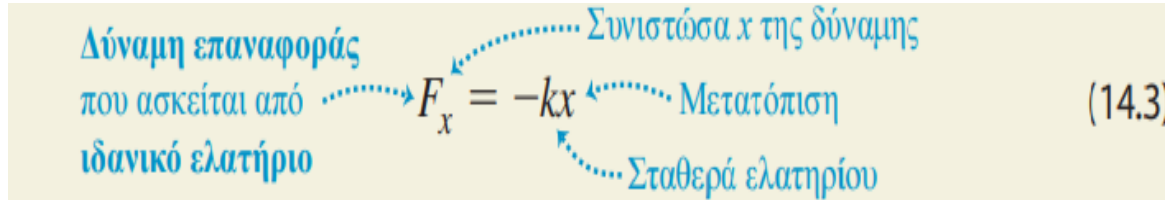
Περιγράφει τη χρονική αφετηρία της καμπύλης μετατόπισης-χρόνου στην ταλάντωση:



$$x(t) = A \cos(\omega t + \phi)$$

Απλή αρμονική ταλάντωση

Αυτό συμβαίνει όταν το ελατήριο είναι ένα ιδανικό ελατήριο που υπακούει στο νόμο του **Hooke**



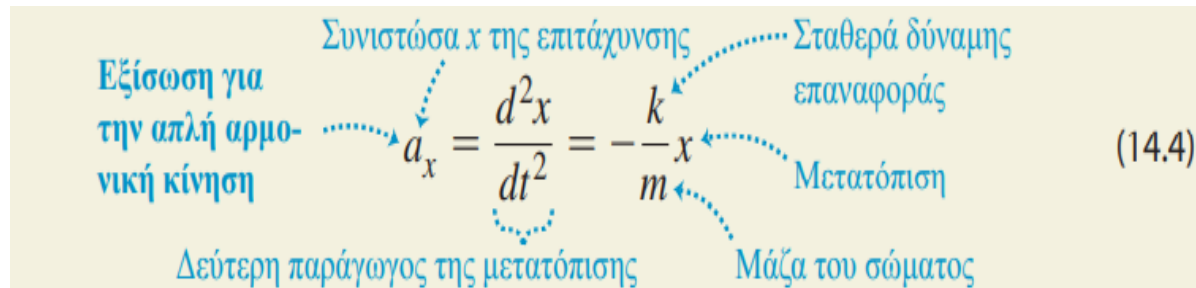
Δύναμη επαναφοράς που ασκείται από ιδανικό ελατήριο

$$F_x = -kx \quad (14.3)$$

Συνιστώσα x της δύναμης
Μετατόπιση
Σταθερά ελατηρίου

Η σταθερά του ελατηρίου (ή σταθερά της δύναμης επαναφοράς ή σταθερά της δύναμης) k είναι πάντοτε θετική και οι μονάδες της είναι **N/m (kg/s²)**.

Η επιτάχυνση ενός σώματος στην απλή αρμονική κίνηση είναι.



Εξίσωση για την απλή αρμονική κίνηση

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{k}{m}x \quad (14.4)$$

Συνιστώσα x της επιτάχυνσης
Σταθερά δύναμης επαναφοράς
Μετατόπιση
Μάζα του σώματος
Δεύτερη παράγωγος της μετατόπισης

Το αρνητικό πρόσημο σημαίνει ότι στην απλή αρμονική κίνηση η επιτάχυνση και η μετατόπιση έχουν πάντοτε αντίθετα πρόσημα.

Η επιτάχυνση **ΔΕΝ** είναι σταθερή.

Ένα σώμα που κάνει απλή αρμονική ταλάντωση ονομάζεται **αρμονικός ταλαντωτής**.

ΑΠΛΗ ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΚΙΝΗΣΗ

Ιδανική περίπτωση: Η δύναμη επαναφοράς ακολουθεί τον νόμο του Hooke ($F_x = -kx$), άρα η γραφική παράσταση της F_x ως προς τη x είναι ευθεία γραμμή.



Δεν είναι όλες οι περιοδικές κινήσεις απλές αρμονικές.

Σε πολλά συστήματα η δύναμη επαναφοράς είναι κατά προσέγγιση ανάλογη της μετατόπισης, εάν η μετατόπιση είναι αρκετά μικρή. Για μεγαλύτερες μετατοπίσεις η δύναμη F αποκλίνει από τον νόμο του Hooke.

Ταχύτητα και επιτάχυνση στην απλή αρμονική ταλάντωση

$$v(t) = \frac{dx(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [x_m \cos(\omega t + \varphi)]$$

→ $v(t) = -\omega A \sin(\omega t + \varphi)$ Ημιτονοειδής συνάρτηση

Μέγιστη ταχύτητα = ωA = πλάτος της ταχύτητας
όταν $x=0$

Μηδενική ταχύτητα = όταν $x=A$ ή $-A$

$$a(t) = \frac{dv(t)}{dt} = \frac{d}{dt} [-\omega A \sin(\omega t + \varphi)]$$

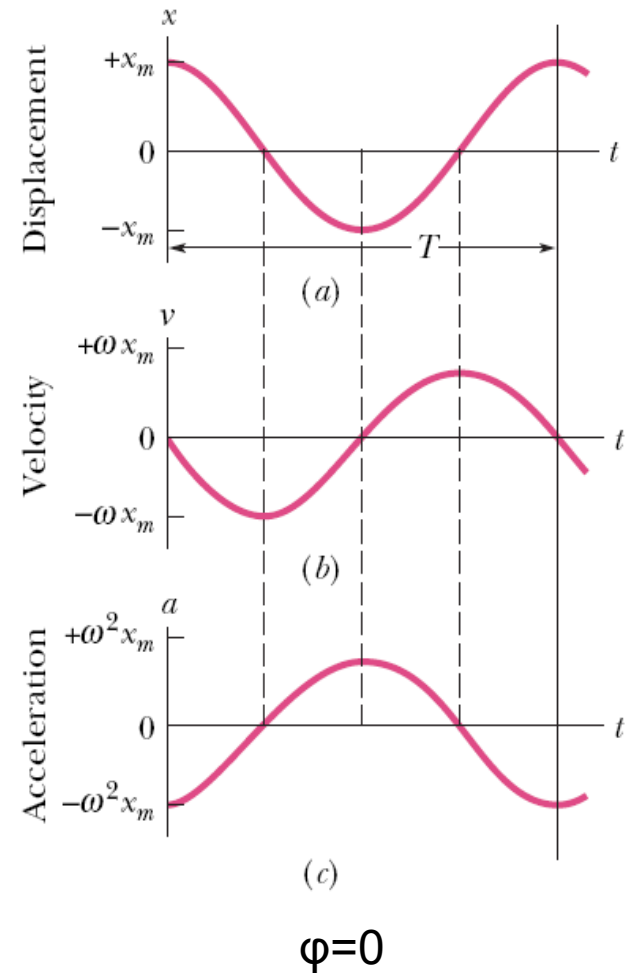
→ $a(t) = -\omega^2 A \cos(\omega t + \varphi)$
→ $a(t) = -\omega^2 x(t)$

Μέγιστη επιτάχυνση = $\omega^2 A$ = πλάτος της επιτάχυνσης

Όταν $x = \pm A$

Μηδενική επιτάχυνση όταν $x=0$

Άρα η επιτάχυνση είναι ανάλογη της μετατόπισης με αντίθετο πρόσημο (όπως και η δύναμη)



Η συνάρτηση $x(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$ αποτελεί γενική λύση της διαφορικής εξίσωσης της αρμονικής ταλάντωσης και περιέχει δύο αυθαίρετες σταθερές A και ω που προκύπτουν από τις δυο διαδοχικές ολοκληρώσεις

Είναι αυθαίρετες από μαθηματική άποψη αλλά στη φυσική προσδιορίζονται από τις **αρχικές συνθήκες**

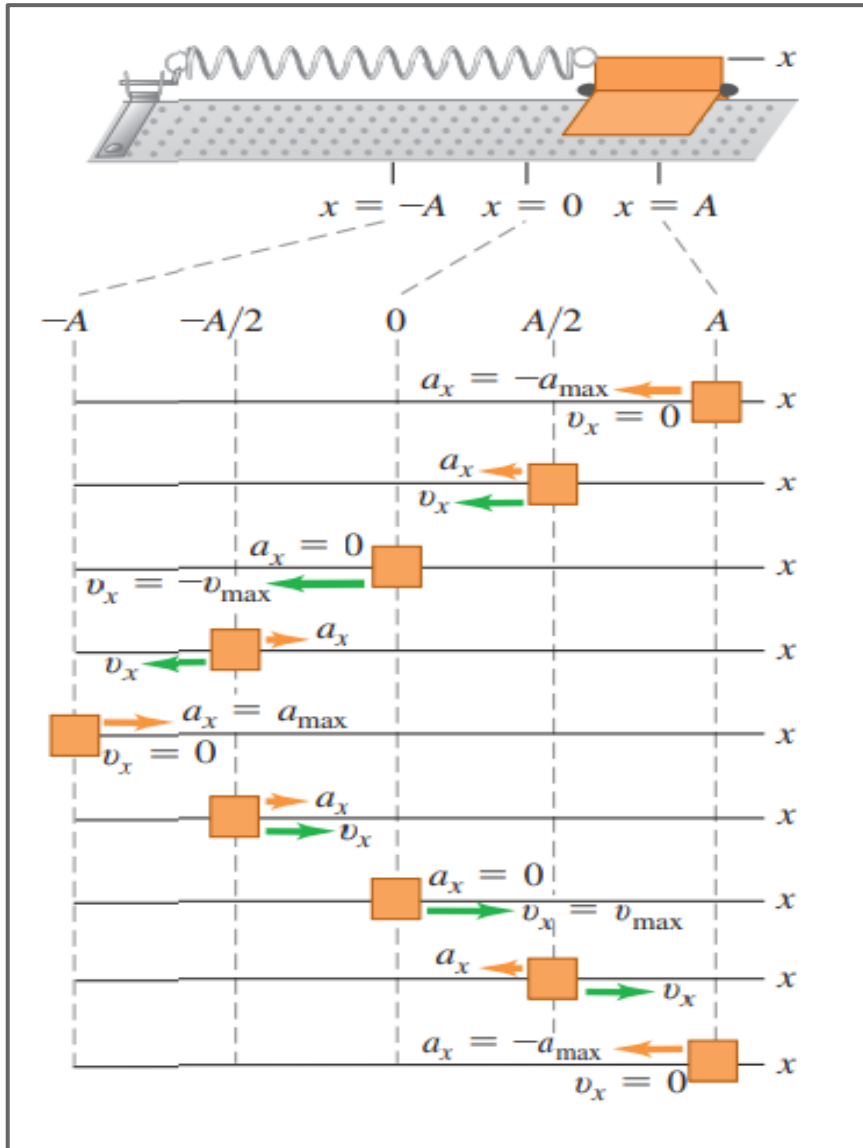
Παράδειγμα:

Αν για $t=0$ η μάζα βρίσκεται στο σημείο $x=0$ και της δίνεται μια αρχική ταχύτητα προς τα θετικά του x , δηλαδή $V>0$.

$$x = A \cos(\omega t + \varphi) \rightarrow 0 = A \cos \varphi \rightarrow \varphi = \pm \pi/2$$

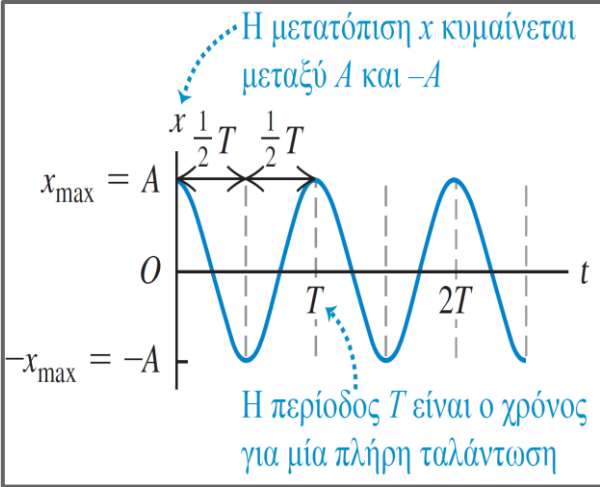
Επειδή $V>0$ θα ισχύει $V = -\omega A \sin(\omega t + \varphi) > 0$ μόνον όταν $\varphi = -\pi/2$ αφού $\sin(-\pi/2) = -1$

Αρα λύση στην περίπτωση αυτή είναι: $x(t) = A \cos(\omega t - \pi/2) = A \sin \omega t$



Πώς μεταβάλλεται η συνιστώσα x της ταχύτητας, v_x , και η συνιστώσα x της επιτάχυνσης, a_x , κατά τη διάρκεια ενός κύκλου της απλής αρμονικής κίνησης.

Όταν $\varphi = 0$.



Σταθερά ελατηρίου και συχνότητα ταλάντωσης

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = 2\pi f$$

$$\rightarrow T = \frac{\omega}{2\pi} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

Φυσική ερμηνεία:

Μεγάλο K δημιουργεί μεγάλο ω (ταχεία ταλάντωση) και με μικρή περίοδο T

Μεγάλη μάζα δημιουργεί μικρό ω και μεγάλο T

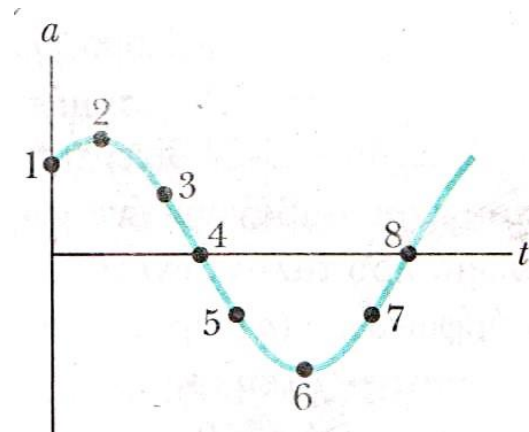
Ερώτηση: κατά πόσο πρέπει να μεταβληθεί η μάζα m στο άκρο ελατηρίου ώστε η συχνότητα ταλάντωσης να υποδιπλασιαστεί: α) να μείνει αμετάβλητη β) να διπλασιαστεί γ) να τετραπλασιαστεί δ) να υποδιπλασιαστεί ε) να υποτετραπλασιαστεί

Ερωτήσεις

1. Ένα σώμα εκτελεί απλή αρμονική κίνηση. Τι ισχύει για την επιτάχυνση αυτού του σώματος; (Μπορεί να υπάρχουν περισσότερες από μία σωστές επιλογές.)
- A) Η επιτάχυνση είναι μέγιστη όταν η μετατόπιση του σώματος είναι μέγιστη.
 - B) Η επιτάχυνση είναι μέγιστη όταν η ταχύτητα του σώματος είναι μέγιστη.
 - Γ) Η επιτάχυνση είναι μέγιστη όταν η μετατόπιση του σώματος είναι ίση με το μηδέν.
 - Δ) Η επιτάχυνση είναι ίση με το μηδέν όταν η ταχύτητα του σώματος είναι μέγιστη.
 - E) Η επιτάχυνση είναι μέγιστη όταν η ταχύτητα είναι μηδέν.

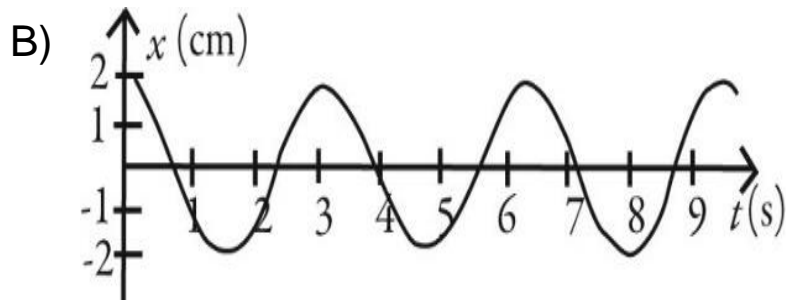
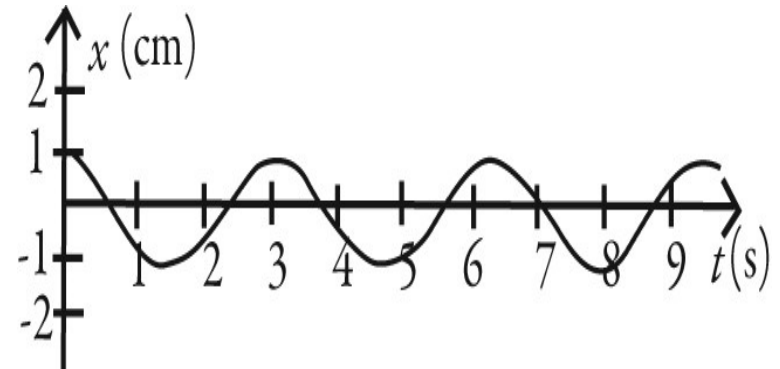
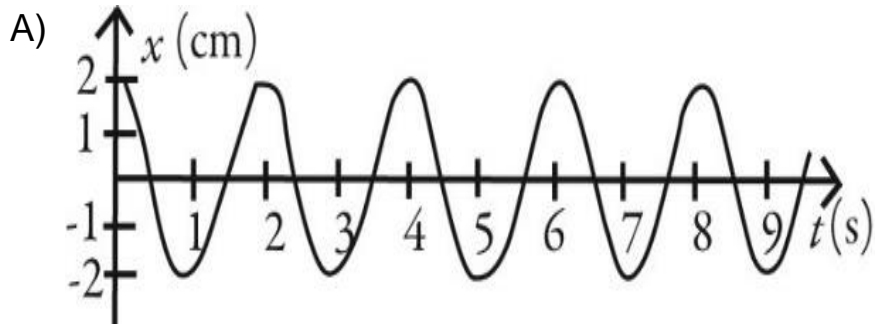
2.

- a) Ποιο σημείο αντιστοιχεί στο $-A$
- b) Στο σημείο 4 η ταχύτητα είναι θετική, αρνητική ή μηδέν
- c) Στο σημείο 5 το σωματίδιο βρίσκεται μεταξύ των θέσεων $-A$ και 0 ή 0 και A ?

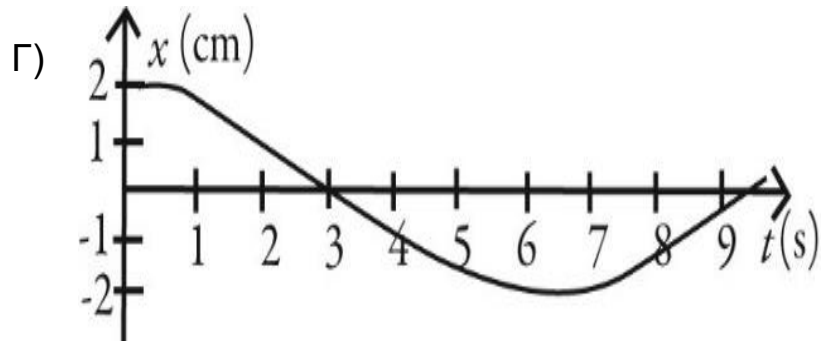


Ερώτηση

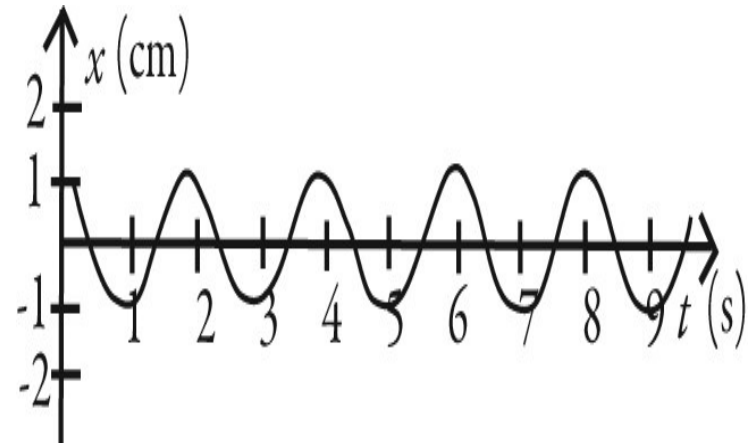
Ποια από τις παρακάτω γραφικές παραστάσεις περιγράφουν μια απλή περιοδική κίνηση με πλάτος 2 cm και γωνιακή συχνότητα 2 rad/s;



Δ)



Ε)



Παράδειγμα 1

Για $t=0$ η μετατόπιση $x(0)$ ενός απλού αρμονικού ταλαντωτή είναι $-8,50$ cm. Η ταχύτητα $v(0)=-0,920$ m/s και η επιτάχυνση $a(0)=+47$ m/s²

α) Πόση είναι η γωνιακή συχνότητα ω ?

β) Πόση είναι η γωνία φάσης και το πλάτος?

Παράδειγμα 2

Σωματίδιο μάζας $m=2$ kg κινείται πάνω στον άξονα x και έλκεται από το σημείο O από μια δύναμη $-8x$ (σε N). Για $t=0$ η μετατόπιση $x(0)=20$ m και η ταχύτητα $v(0)=0$. Βρείτε α) τη διαφορική εξίσωση της κίνησης β) τη θέση και την ταχύτητα του σωματιδίου ως συνάρτηση του χρόνου γ) το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης

Παράδειγμα 3

Ένα σώμα μάζας m υποστηρίζεται από δύο ταυτόσημα παράλληλα κατακόρυφα ελατήρια με το καθένα από αυτά να χαρακτηρίζεται από σταθερά k . Ποια θα είναι η συχνότητα της κατακόρυφης ταλάντωσης? Ποια θα είναι η διαφορική εξίσωση της απομάκρυνσης $x(t)$?

Ενέργεια στην απλή αρμονική ταλάντωση

Δυναμική ενέργεια ελαστικότητας (για το ελατήριο)

$$U(t) = \int F dx = \frac{1}{2} kx^2 = \frac{1}{2} kA^2 \cos^2(\omega t + \varphi)$$

Κινητική ενέργεια (για το σώμα)

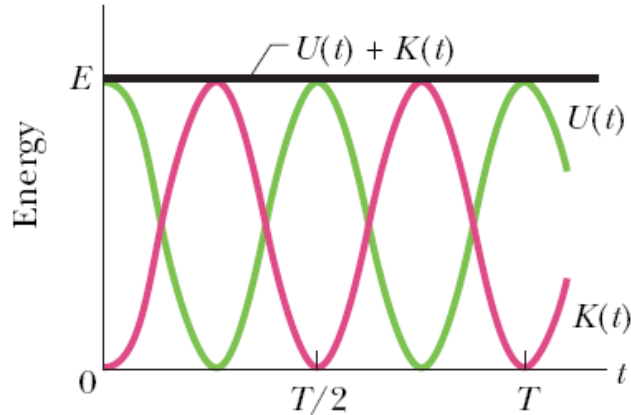
$$K(t) = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 A^2 \sin^2(\omega t + \varphi) = \frac{1}{2} kA^2 \sin^2(\omega t + \varphi) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Συνολική μηχανική ενέργεια:

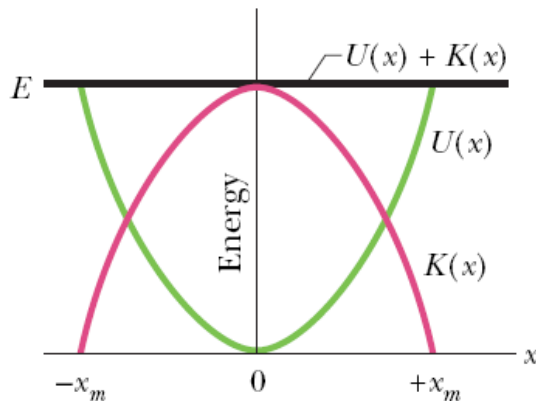
$$E = U + K = \frac{1}{2} kA^2$$

$$\cos^2(\omega t + \varphi) + \sin^2(\omega t + \varphi) = 1$$

$U(t)$ =δυναμική ενέργεια
 $K(t)$ = κινητική ενέργεια



Καθώς μεταβάλλεται ο χρόνος η ενέργεια μετατρέπεται από τη μια μορφή στην άλλη αλλά το άθροισμα είναι σταθερό



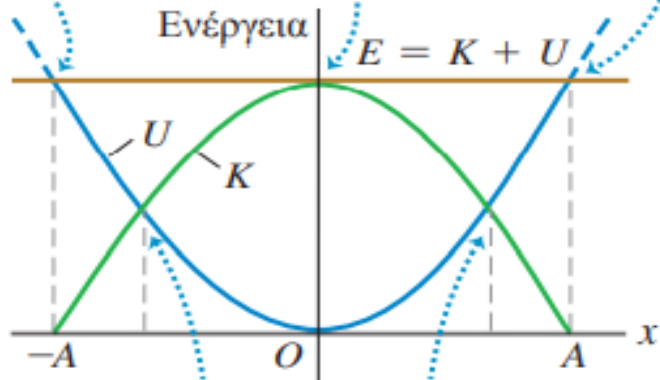
Καθώς μεταβάλλεται η θέση η ενέργεια μετατρέπεται από τη μια μορφή στην άλλη αλλά το άθροισμα είναι σταθερό

Ενέργεια ως συνάρτηση της θέσης

Για κάθε τιμή του x το άθροισμα των K και U ισούται με τη σταθερή τιμή της E .

Στο $x = \pm A$ η ενέργεια είναι όλη δυναμική, $K = 0$

Στο $x = 0$ η ενέργεια είναι όλη κινητική, $U = 0$.



Σε αυτά τα σημεία η ενέργεια είναι μισή κινητική και μισή δυναμική.

Η ταχύτητα για δεδομένη μετατόπιση x

$$E = U + K = \frac{1}{2}kA^2 = \frac{1}{2}kx^2 +$$

$$\frac{1}{2}mv^2 \rightarrow$$

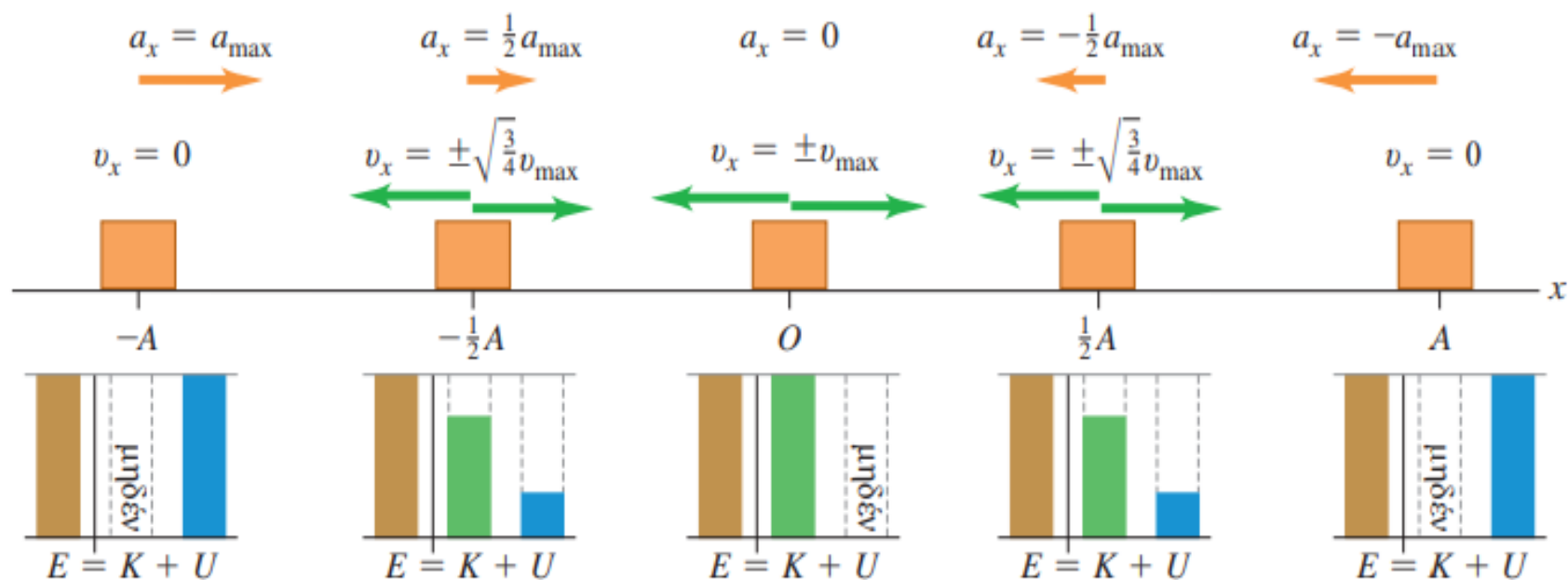
$$v^2 = \frac{k}{m}(A^2 - x^2)$$

$$v_x = \pm \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{A^2 - x^2} \quad (14.22)$$

Ερωτήσεις

- Εάν διπλασιάσουμε μόνο τη μάζα ενός ιδανικού, δονούμενου συστήματος μάζας-ελατηρίου, η μηχανική ενέργεια του συστήματος
 - A) αυξάνεται κατά ένα παράγοντα ίσο με $1/2$.
 - B) αυξάνεται κατά ένα παράγοντα ίσο με 2.
 - Γ) αυξάνεται κατά ένα παράγοντα ίσο με 3.
 - Δ) αυξάνεται κατά ένα παράγοντα ίσο με 4.
 - E) δεν μεταβάλλεται.

- Ένα σώμα συνδεδεμένο με ένα κάθετο, αβαρές ελατήριο και μετακινείται πάνω-κάτω μεταξύ των δυο ακραίων σημείων A και B. Όταν η κινητική ενέργεια του σώματος είναι ελάχιστη, το σώμα βρίσκεται
 - A) είτε στο A είτε στο B.
 - B) στο μέσο μεταξύ των A και B.
 - Γ) στο $1/3$ της απόστασης από το A στο B.
 - Δ) στο $1/4$ της απόστασης από το A στο B.



Η E είναι όλη δυναμική ενέργεια.

Η E είναι εν μέρει δυναμική και εν μέρει κινητική ενέργεια.

Η E είναι όλη κινητική ενέργεια.

Η E είναι εν μέρει δυναμική και εν μέρει κινητική ενέργεια.

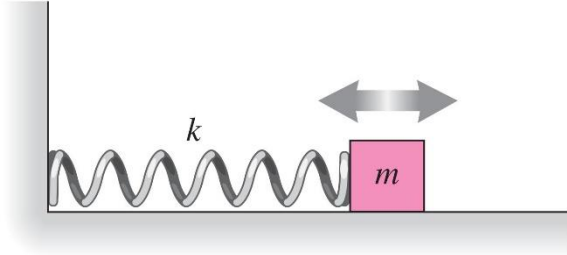
Η E είναι όλη δυναμική ενέργεια.

Ολική μηχανική ενέργεια στην απλή αρμονική κίνηση

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kA^2 = \text{σταθερή} \quad (14.21)$$

Labels for the equation: m (Μάζα), v_x (Ταχύτητα), k (Σταθερά της δύναμης επαναφοράς), x (Μετατόπιση), A (Πλάτος).

Ερώτηση



Το σώμα έχει κινητική ενέργεια 3 J και το ελατήριο έχει δυναμική ενέργεια 2 J όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση $x=+2$ cm.

- Πόση είναι η κινητική ενέργεια όταν το σώμα βρίσκεται στη θέση $x=0$?
- Πόση είναι η δυναμική ενέργεια όταν βρίσκεται στο σημείο $x=-2$ cm
- Πόση είναι η δυναμική ενέργεια όταν βρίσκεται στο σημείο $x=-A$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΑΠΛΗΣ ΑΡΜΟΝΙΚΗΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Κατακόρυφη Απλή Αρμονική Κίνηση

(a) Ένα ελατήριο που κρέμεται και ακολουθεί τον νόμο του Hooke.

(b) Ένα σώμα κρέμεται από το ελατήριο. Βρίσκεται σε ισορροπία όταν η δύναμη του τεντωμένου ελατηρίου προς τα επάνω ισούται με το βάρος του σώματος.

(c) Εάν το σώμα μετατοπιστεί από τη θέση ισορροπίας, η ολική δύναμη είναι ανάλογη της μετατόπισης. Οι ταλαντώσεις είναι απλές αρμονικές.

Ένα ελατήριο που ακολουθεί τον νόμο του Hooke

Ένα ελατήριο που ακολουθεί τον νόμο του Hooke

Ένα σώμα είναι τοποθετημένο πάνω σε ένα ελατήριο. Βρίσκεται σε ισορροπία όταν η δύναμη που ασκεί το συμπιεσμένο ελατήριο προς τα πάνω εξισώνεται με το βάρος του.

Ένα ελατήριο που ακολουθεί τον νόμο του Hooke

Ένα σώμα είναι τοποθετημένο πάνω σε ένα ελατήριο. Βρίσκεται σε ισορροπία όταν η δύναμη που ασκεί το συμπιεσμένο ελατήριο προς τα πάνω εξισώνεται με το βάρος του.

Στη θέση ισορροπίας $mg = k\Delta l$

Όταν το σώμα βρίσκεται σε απόσταση x προς τα πάνω, η επιμήκυνση του ελατηρίου θα είναι $\Delta l - x$ και η ολική δύναμη θα έχει φορά προς τα κάτω

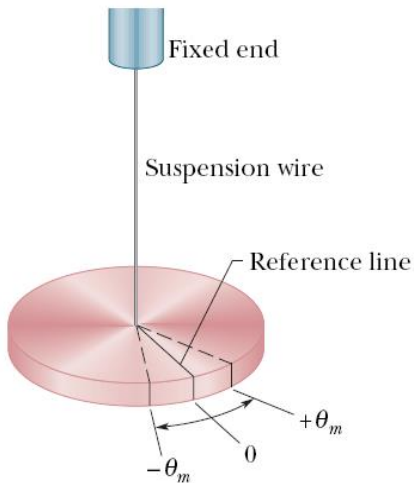
$F_{ολ} = k(\Delta l - x) - mg = -kx$

Όπως στην οριζόντια ταλάντωση με το ίδιο ω

Το ίδιο και όταν επιμηκύνεται προς τα κάτω η δύναμη θα έχει φορά προς τα πάνω

Γωνιακή Απλή Αρμονική Κίνηση

Η απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας γίνεται μέσω στροφής (στροφικό εκκρεμές)



Η απομάκρυνση θ από τον άξονα περιστροφής γίνεται από την τάση τ (ροπή επαναφοράς)

$$\tau = -\kappa\theta = I\alpha \quad \text{ή} \quad \frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{\kappa}{I}\theta$$

κ =σταθερά στρέψης που εξαρτάται από το μήκος, τη διάμετρο και το υλικό του σύρματος ανάρτησης

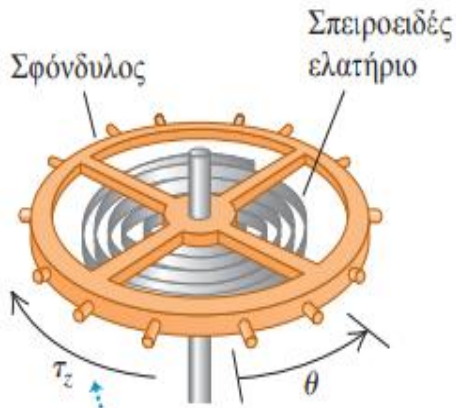
Γωνιακή απλή αρμονική κίνηση $\omega = \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$ και Συχνότητα $f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\kappa}{I}}$ (14.24)

Λόγος σταθεράς στρέψης προς τη ροπή αδράνειας

Η γωνιακή μετατόπιση θ συναρτήσει του χρόνου δίνεται από την:

$$\theta = \Theta \cos(\omega t + \varphi)$$

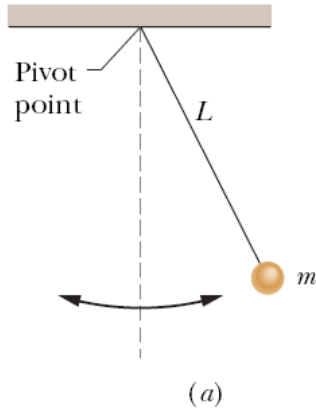
όπου το Θ παίζει τον ρόλο γωνιακού πλάτους.



Ροπή του ελατηρίου τ_z που αντιστέκεται στη γωνιακή μετατόπιση θ .

Ο σφόνδυλος ενός μηχανικού ρολογιού. Το σπειροειδές ελατήριο ασκεί ροπή επαναφοράς ανάλογη της γωνιακής μετατόπισης θ . Άρα πρόκειται για γωνιακή απλή αρμονική κίνηση.

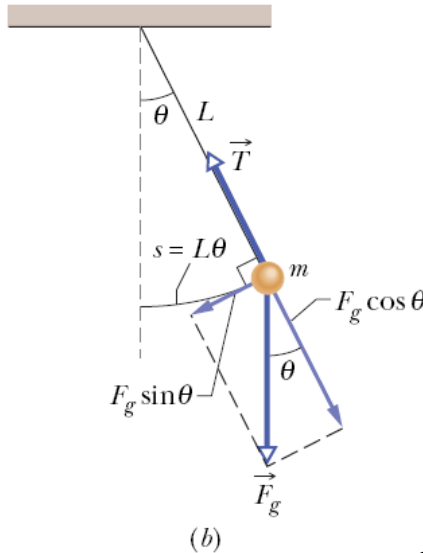
ΤΟ ΑΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ



η μάζα του σώματος m είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο

Ροπή επαναφοράς ως προς το σημείο περιστροφής από την εφαπτομενική συνιστώσα του βάρους $F_g \sin \theta$ (αντίθετη στη μετατόπιση)

$$\tau = -L(mg \sin \theta) = I\alpha_{\Gamma}$$



L =μοχλοβραχίονας της δύναμης $F_g \sin \theta$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = \alpha_{\Gamma} = -\frac{mgL}{I} \sin \theta$$

I =ροπή αδράνειας του εκκρεμούς
 α_{Γ} =γωνιακή επιτάχυνση

Επειδή $I = mL^2$ (ροπή σημείου)

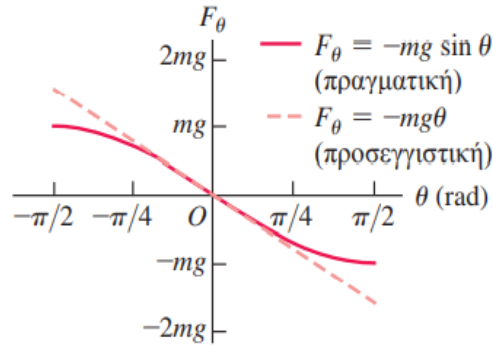
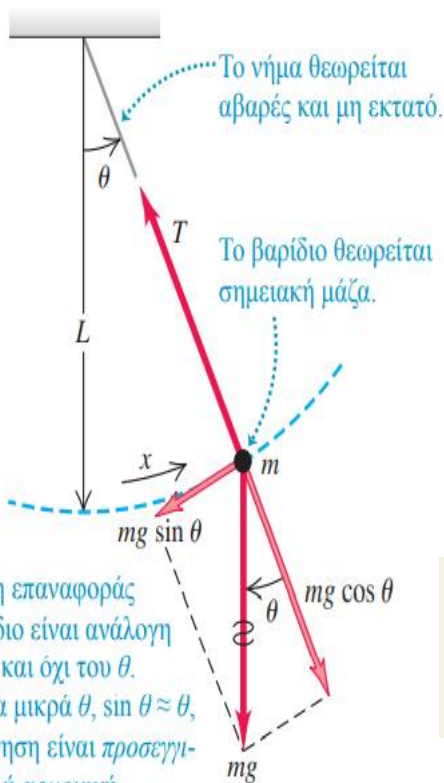
$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{mgL}{mL^2} \theta = -\frac{g}{L} \theta$$

Αν θεωρήσουμε ότι θ =πολύ μικρή (ιδανικό εκκρεμές)

Συμπέρασμα: η επιτάχυνση είναι ανάλογη της γωνιακής επιτάχυνσης αλλά με αντίθετο πρόσημο

ΤΟ ΑΠΛΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

Ένα ιδανικό απλό εκκρεμές



Για μικρές γωνιακές μετατοπίσεις θ , η δύναμη επαναφοράς $F_\theta = -mg \sin \theta$ σε ένα απλό εκκρεμές είναι κατά προσέγγιση ίση με $-mg\theta$, δηλαδή είναι προσεγγιστικά ανάλογη της μετατόπισης θ . Κατά συνέπεια, οι ταλαντώσεις για μικρές γωνίες είναι απλές αρμονικές.

Η δύναμη επαναφοράς στο βαρίδιο είναι ανάλογη του $\sin \theta$ και όχι του θ . Όμως, για μικρά θ , $\sin \theta \approx \theta$, άρα η κίνηση είναι προσεγγιστικά απλή αρμονική.

Γωνιακή συχνότητα απλού εκκρεμούς, μικρό πλάτος

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{mg/L}{m}} = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας

Μήκος εκκρεμούς

Μάζα εκκρεμούς (απαλείφεται)

(14.32)

Συχνότητα απλού εκκρεμούς, μικρό πλάτος

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{g}{L}}$$

Γωνιακή συχνότητα

Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας

Μήκος εκκρεμούς

(14.33)

Περίοδος απλού εκκρεμούς, μικρό πλάτος

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{1}{f} = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}$$

Γωνιακή συχνότητα

Συχνότητα

Μήκος εκκρεμούς

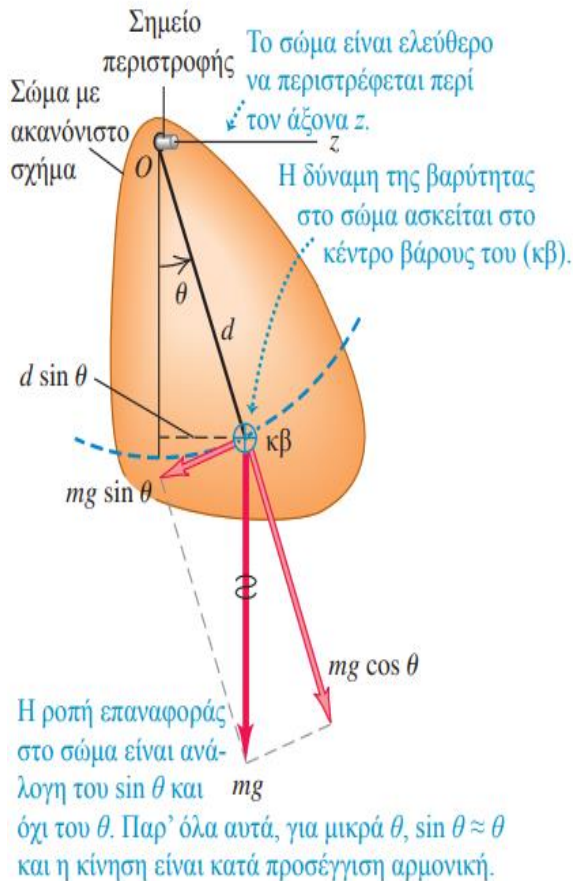
Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας

(14.34)

ΤΟ ΦΥΣΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ (ταλάντωση στερεού σώματος)

Φυσικό εκκρεμές είναι οποιοδήποτε πραγματικό εκκρεμές, όπου χρησιμοποιείται σώμα με πεπερασμένο μέγεθος, σε αντίθεση με το εξιδανικευμένο μοντέλο του απλού εκκρεμούς, στο οποίο όλη η μάζα είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο.

14.23 Η δυναμική ενός φυσικού εκκρεμούς.



Ροπή επαναφοράς (ροπή βάρους ως προς τον άξονα περιστροφής O):

$$\tau_z = -(mg \sin \theta) d$$

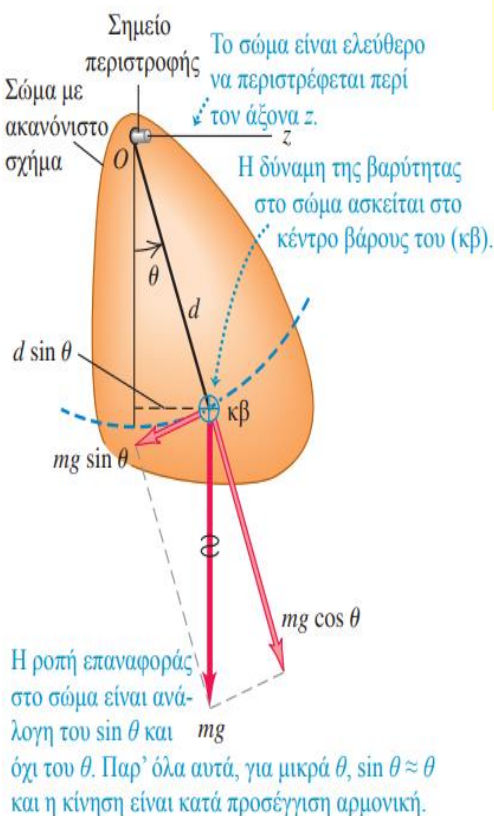
d =μοχλοβραχίονας

Όπως και στο απλό εκκρεμές η ροπή επαναφοράς είναι η ίδια. Η διαφορά είναι ότι ο **μοχλοβραχίονας είναι η απόσταση του κέντρου μάζας από τον άξονα περιστροφής και όχι το μήκος του νήματος.**

Ομοια με το απλό εκκρεμές, όταν η γωνία θ είναι μικρή, προσεγγίζουμε το $\sin \theta$ με θ (σε ακτίνια)

ΤΟ ΦΥΣΙΚΟ ΕΚΚΡΕΜΕΣ

14.23 Η δυναμική ενός φυσικού εκκρεμούς.



$$Ia_{\Gamma} = -mgd\theta \Leftrightarrow I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgd\theta \Leftrightarrow \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgd}{I} \theta = 0$$

οπότε το στερεό σώμα εκτελεί αρμονική ταλάντωση με περίοδο

$$\text{Όπου } \omega^2 = \frac{mgd}{I}$$

Η ροπή αδράνειας I αναφέρεται στον άξονα περιστροφής O ενώ το $\tau_0 = mgd\theta$ είναι η μοναδική ασκούμενη ροπή του βάρους με μοχλοβραχίονα το d , δηλαδή την απόσταση του κέντρου μάζας (C) από τον άξονα περιστροφής (O).

$$\omega = \sqrt{\frac{mgd}{I}} \quad (14.38)$$

Γωνιακή συχνότητα φυσικού εκκρεμούς, μικρό πλάτος

Μάζα

Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας

Απόσταση του κέντρου βάρους από τον άξονα περιστροφής

Ροπή αδράνειας

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgd}} \quad (14.39)$$

Περίοδος φυσικού εκκρεμούς, μικρό πλάτος

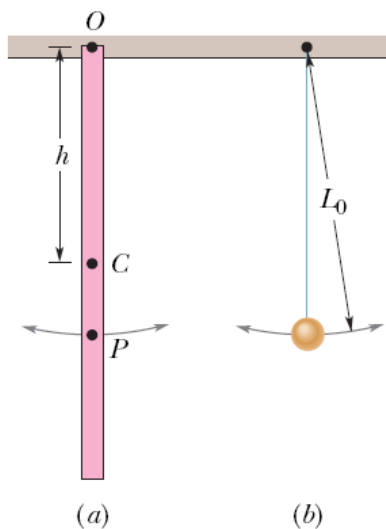
Ροπή αδράνειας

Απόσταση του κέντρου βάρους από τον άξονα περιστροφής

Μάζα

Επιτάχυνση λόγω βαρύτητας

Ένας χάρακας αιωρείται αναρτημένος από ένα σημείο περιστροφής στο ένα άκρο σε απόσταση h από το κέντρο μάζας του. Α) Πόση είναι η περίοδος ταλάντωσης? Β) Πόση είναι η απόσταση L_0 μεταξύ του σημείου περιστροφής O του χάρακα και του κέντρου ταλάντωσης του χάρακα?



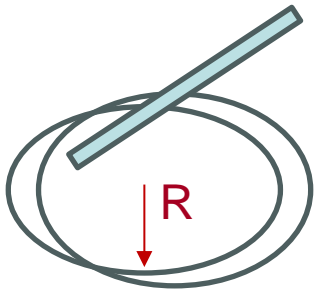
Για ομογενή ράβδο που περιστρέφεται από το κμ, η ροπή αδράνειας δίνεται

$$I_C = \frac{1}{12} mL^2$$

Όταν η ράβδος περιστρέφεται από το ένα άκρο της

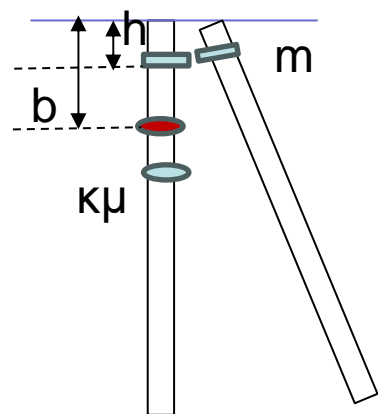
$$I = I_C + mh^2 = \frac{1}{12} mL^2 + m\frac{L^2}{4} = \frac{1}{3} mL^2$$

Δακτύλιος με ακτίνα 0.10 m κρέμεται από τριγωνική ράβδο. Να υπολογιστεί η περίοδος ταλαντώσεων του δακτυλίου ως προς το κέντρο στήριξης στην περιφέρεια



$$I_{\text{δακτυλίου}} = MR^2$$

Ράβδος μήκους L ταλαντώνεται κρεμασμένη από οριζόντιο άξονα που περνά από το άκρο της. Σημειακή μάζα ίση με τη μάζα της ράβδου προσαρμόζεται σε απόσταση h από τον άξονα περιστροφής πάνω στη ράβδο. Βρείτε την περίοδο ταλαντώσεων του συστήματος. (ροπή της ράβδου ως τον άξονα περιστροφής $I = \frac{1}{3}mL^2$).



Η εξίσωση της κίνησης είναι

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -2mgb \sin\theta$$

όπου b =απόσταση του κμ του συστήματος από τον άξονα περιστροφής

ΑΠΟΣΒΕΝΟΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Τα πραγματικά συστήματα έχουν πάντοτε κάποιες δυνάμεις απόσβεσης και οι ταλαντώσεις ελαττώνονται σιγά σιγά με τον χρόνο εκτός και αν αντικαταστήσουμε τη μηχανική ενέργεια που χάνεται.

Η ελάττωση που προκαλείται στο πλάτος λόγω των δυνάμεων απωλειών ονομάζεται **απόσβεση** και η αντίστοιχη κίνηση ονομάζεται **αποσβενόμενη ταλάντωση**.



πρόσθετη δύναμη απόσβεσης στο σώμα (συνήθως λόγω τριβής), $-bv$

$$-kx - bv = ma \quad \text{ή} \quad -kx - b \frac{dx}{dt} = m \frac{d^2x}{dt^2} \quad \text{όπου } b = \text{σταθερά απόσβεσης}$$

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + b \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

Λύση της διαφορικής εξίσωσης

- $b = 0,1\sqrt{km}$ (ασθενής δύναμη απόσβεσης)
- $b = 0,4\sqrt{km}$ (ισχυρότερη δύναμη απόσβεσης)



- Με την ισχυρότερη απόσβεση (μεγαλύτερο b):
- το πλάτος (εμφανίζεται με τις διακεκομμένες γραμμές) ελαττώνεται πιο ραγδαία.
 - η περίοδος T αυξάνεται (T_0 = περίοδος με μηδενική απόσβεση).

Μετατόπιση ταλαντωτή, μικρή απόσβεση

Αρχικό πλάτος

Σταθερά απόσβεσης

Μάζα

Χρόνος

Γωνιακή συχνότητα αποσβενόμενων ταλαντώσεων

Γωνία φάσης

$$x = Ae^{-(b/2m)t} \cos(\omega' t + \phi) \quad (14.42)$$

Γωνιακή συχνότητα ταλαντωτή, μικρή απόσβεση

Σταθερά ελατηρίου δύναμης επαναφοράς

Σταθερά απόσβεσης

Μάζα

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}} \quad (14.43)$$

$$\omega' < \omega$$

ΑΠΟΣΒΕΝΟΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

$$\omega' = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Αν $b=0$

Αν $b^2 = 4mk$ τότε
 $\omega' = 0$

Αν $b^2 \gg 4mk$ τότε
 ω' είναι φανταστικός αριθμός

Αν $b^2 < 4mk$

Κάποια συστήματα σχεδιάζονται να λειτουργούν συνήθως σε κρίσιμη απόσβεση αλλά όσο περνά ο καιρός με τη φθορά τους η απόσβεση γίνεται υποκρίσιμη

Για να υπάρχει πραγματική λύση

$$\frac{k}{m} > \frac{b^2}{4m^2} \rightarrow b^2 < 4mk$$

Δεν υπάρχει απόσβεση

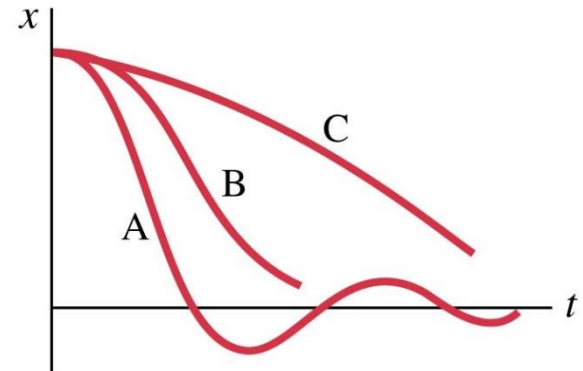
$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Κρίσιμη απόσβεση. Το b γίνεται αρκετά μεγάλο. Το σύστημα δεν ταλαντώνεται πια, αλλά επανέρχεται στην κατάσταση ισορροπίας του χωρίς ταλάντωση στο πιο σύντομο χρόνο (καμπύλη Β)

Υπεραπόσβεση Και πάλι δεν υπάρχει ταλάντωση καθώς η απόσβεση είναι πολύ μεγάλη. Το σύστημα όμως επιστρέφει στην ισορροπία πολύ πιο αργά από ότι στην κρίσιμη απόσβεση (καμπύλη C). Λύσεις της μορφής:

$$x(t) = C_1 e^{-a_1 t} + C_2 e^{-a_2 t}$$

Υποκρίσιμη απόσβεση Το σύστημα εκτελεί έναν μεγάλο αριθμό ταλαντώσεων μέχρι να έρθει σε κατάσταση ισορροπίας (καμπύλη Α)



ΑΠΟΣΒΕΝΟΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Ενέργεια στις Αποσβενόμενες Ταλαντώσεις

Στις αποσβενόμενες ταλαντώσεις η δύναμη απόσβεσης δεν είναι διατηρητική. Η μηχανική ενέργεια του συστήματος ελαττώνεται συνεχώς πλησιάζοντας το μηδέν μετά από πολύ χρόνο.

$$E = \frac{1}{2}mv_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 \qquad \frac{dE}{dt} = mv \frac{dv}{dt} + k \frac{dx}{dt} = v(ma + k) = v(-bv) = -bv^2$$

Επειδή από το 2^ο
νόμο του Νεύτωνα

$$-kx - bv = ma$$

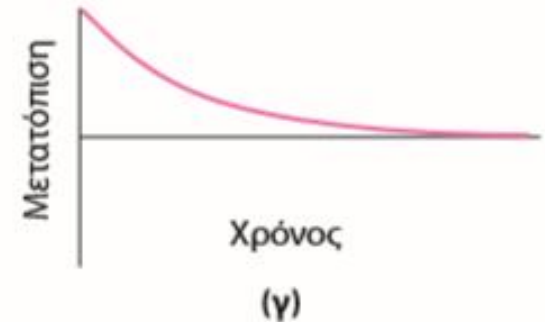
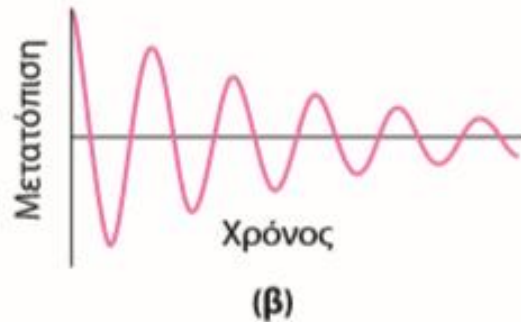
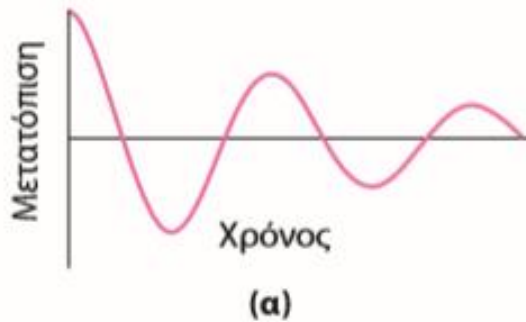
Ο όρος $-bv^2$ είναι πάντοτε αρνητικός και για θετική και αρνητική ταχύτητα. Αυτό δείχνει ότι καθώς κινείται το σώμα η ενέργεια ελαττώνεται όχι όμως με σταθερό ρυθμό. Ο όρος αυτός δείχνει το ρυθμό που η δύναμη απόσβεσης παράγει αρνητικό έργο

Ερώτηση

Το σχήμα δείχνει τρία διαφορετικά συστήματα μάζας - ελατηρίου. Ο χρόνος είναι ο ίδιος και για τα τρία συστήματα

Σε ποιο σύστημα η απόσβεση είναι ισχυρότερη;

Σε ποιο σύστημα η απόσβεση είναι ασθενέστερη;



Σωματίδιο μάζας $m=2\text{kg}$ κινείται στον άξονα x και έλκεται προς τη θέση ισορροπίας από μια δύναμη ίση με $4x$ (N). Αν στο σωματίδιο επιδρά δύναμη απόσβεσης $F_T=4u$ (όπου u =ταχύτητα) βρείτε την μετατόπιση $x(t)$ και την ταχύτητα $u(t)$ της ταλάντωσης

ΕΞΑΝΑΓΚΑΣΜΕΝΕΣ ΤΑΛΑΝΤΩΣΕΙΣ

Ένας ταλαντωτής με απόσβεση, αν αφεθεί ελεύθερος, κάποια στιγμή θα σταματήσει να κινείται. Μπορούμε όμως να διατηρήσουμε την κίνησή του με σταθερό πλάτος ασκώντας μία δύναμη που μεταβάλλεται με τον χρόνο με περιοδικό τρόπο. Αυτή την πρόσθετη δύναμη την ονομάζουμε **διεγείρουσα δύναμη**.

Ταλάντωση με Περιοδική Διεγείρουσα Δύναμη

Αν ασκήσουμε μια περιοδικά μεταβαλλόμενη διεγείρουσα δύναμη με γωνιακή συχνότητα ω_d σε έναν ταλαντωτή με απόσβεση, η κίνηση που θα προκύψει ονομάζεται **εξαναγκασμένη ταλάντωση**.

Σε μια εξαναγκασμένη ταλάντωση, όμως, η γωνιακή συχνότητα με την οποία ταλαντώνεται η μάζα ισούται με τη διεγείρουσα γωνιακή συχνότητα ω_d .

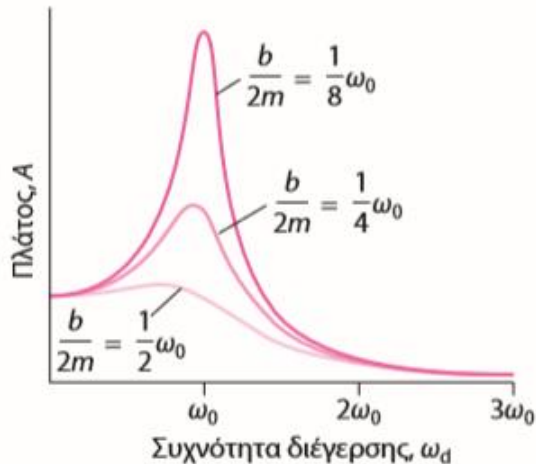
Αυτή δεν πρέπει να είναι κατ' ανάγκη ίση με τη φυσική γωνιακή συχνότητα ω' , η οποία καθορίζεται από τα m , k και b .

The diagram shows the equation for the amplitude A of a forced oscillator with damping. The equation is
$$A = \frac{F_{\max}}{\sqrt{(k - m\omega_d^2)^2 + b^2\omega_d^2}} \quad (14.46)$$
 Blue arrows point from text labels to the corresponding parts of the equation: 'Πλάτος εξαναγκασμένου ταλαντωτή' points to A ; 'Μέγιστη τιμή δύναμης επαφώρας' points to F_{\max} ; 'Σταθερά απόσβεσης' points to b ; 'Σταθερά ελατηρίου δύναμης επαφώρας' points to k ; 'Μάζα' points to m ; 'Γωνιακή συχνότητα διεγείρουσας δύναμης' points to ω_d .

Συντονισμός

Όταν ένα σύστημα εξαναγκάζεται από μια εξωτερική δύναμη η οποία είναι κοντά στη φυσική του συχνότητα, αντιδρά με ταλαντώσεις μεγάλου πλάτους. Αυτό το φαινόμενο ονομάζεται **συντονισμός** ($\omega_d = \omega_0$)

- Το μέγεθος του συντονισμού αυξάνεται καθώς η απόσβεση μειώνεται: η μικρότερη απόσβεση δίνει την υψηλότερη και πιο στενή κορυφή συντονισμού)



Η ω_0 είναι η φυσική συχνότητα $\sqrt{k/m}$

Η εμφάνιση ενός μέγιστου στην καμπύλη του πλάτους όταν οι διεγείρουσες συχνότητες είναι κοντά στη φυσική συχνότητα του συστήματος---συντονισμός

Οι καμπύλες συντονισμού για τρεις διαφορετικές σταθερές απόσβεσης