

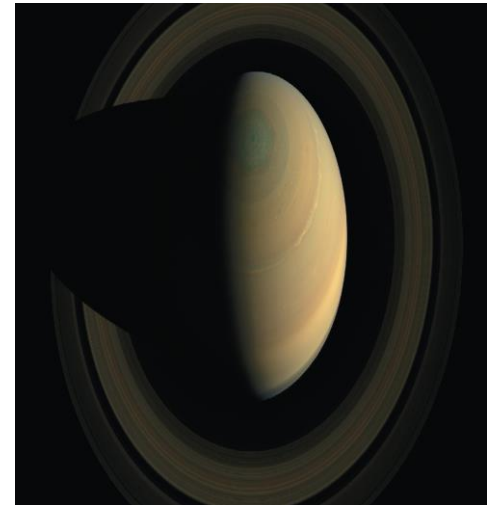
Βαρύτητα



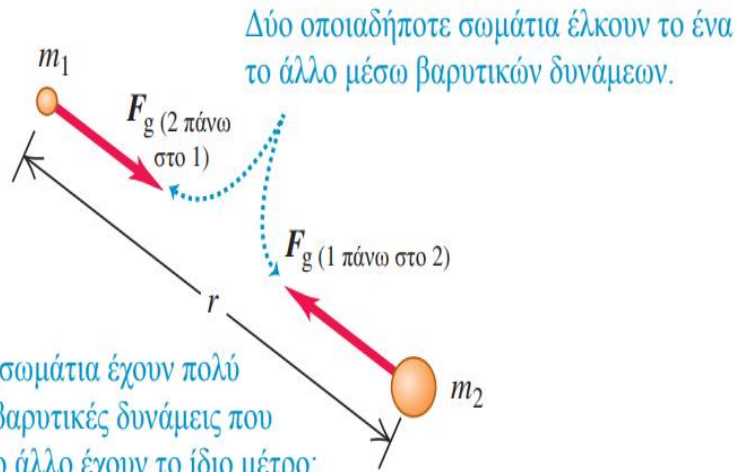
- Νόμος της Βαρύτητας
- Βαρύτητα στο Εσωτερικό και Πάνω από την Επιφάνεια της Γης
- Πλανήτες σε Ελλειπτικές Τροχιές – Νόμοι του Kepler
- Βαρυτική Δυναμική Ενέργεια
- Τροχιές και Ενέργεια

Σχετικά ερωτήματα

- ✓ Γιατί το Φεγγάρι δεν πέφτει στη Γη;
- ✓ Γιατί οι πλανήτες μετατοπίζονται στον ουρανό;
- ✓ Γιατί η Γη δεν διαφεύγει στο διάστημα αλλά παραμένει σε τροχιά γύρω από τον Ήλιο;



Ο ΝΟΜΟΣ ΤΟΥ ΝΕΥΤΩΝΑ ΓΙΑ ΤΗ ΒΑΡΥΤΗΤΑ



Ακόμη και όταν τα δύο σωμάτια έχουν πολύ διαφορετικές μάζες, οι βαρυτικές δυνάμεις που ασκούν το ένα πάνω στο άλλο έχουν το ίδιο μέτρο:

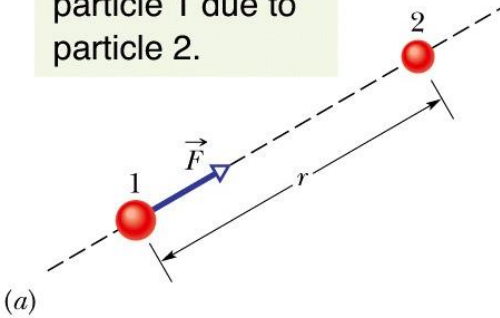
$$F_g (1 \text{ πάνω στο } 2) = F_g (2 \text{ πάνω στο } 1)$$

Οι βαρυτικές δυνάμεις

- δρουν πάντοτε κατά μήκος της ευθείας που ενώνει τα δύο αλληλεπιδρώντα σωμάτια
- είναι ελκτικές
- αποτελούν ένα ζεύγος δράσης- αντίδρασης.
- οι δύο δυνάμεις αλληλεπίδρασης έχουν ίσα μέτρα, ακόμη και όταν οι μάζες των δύο σωματίων διαφέρουν
- Δεν μεταβάλλονται από άλλα σώματα που παρεμβαίνουν μεταξύ των δύο σωμάτων

Νόμος της Βαρύτητας σε διανυσματική μορφή

This is the pull on particle 1 due to particle 2.

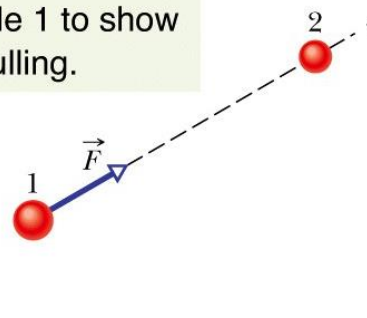


F_{12} = η δύναμη που ασκείται στο σώμα 1 από το σώμα 2

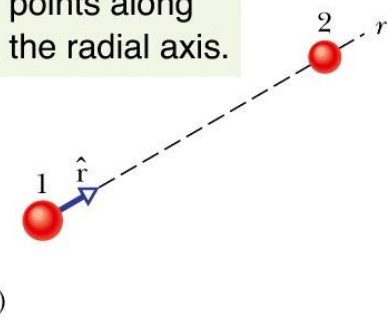
$$F_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2}$$



Draw the vector with its tail on particle 1 to show the pulling.



A unit vector points along the radial axis.



$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Η βαρυτική δύναμη F που ασκείται στο σώμα 1 από το σώμα 2 έχει διεύθυνση πάνω στην ευθεία που συνδέει τα δύο σώματα και πάντα φορά προς το σώμα 2

G=βαρυτική σταθερά=Θεμελιώδης σταθερά της φυσικής που έχει την ίδια τιμή για οποιαδήποτε δυο σωμάτια

Νόμος της Βαρύτητας σε διανυσματική μορφή

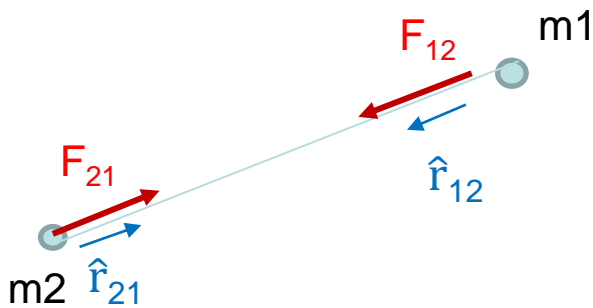
F_{12} = η δύναμη που ασκείται στο σώμα 1 από το σώμα 2

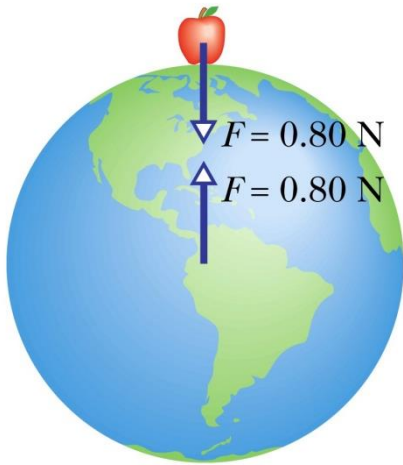
$$\vec{F}_{12} = G \frac{m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{r}_{12}$$

Η βαρυτική δύναμη μειώνεται όταν αυξάνεται η απόσταση μεταξύ των δύο σωματίων

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{r_{21}^2} \hat{r}_{21}$$

$$\hat{r}_{12} = -\hat{r}_{21}$$





Μεταξύ των δύο σωμάτων ασκείται η ίδια δύναμη.

Η Γη ασκεί την ίδια βαρυτική δύναμη που ασκούμε εμείς στη γη.

Αυτό που διαφέρει είναι η επιτάχυνση που παράγεται: το μήλο έχει επιτάχυνση 9.8 m/s^2 και η Γη 10^{-25} m/s^2

$$\vec{F}_g = G \frac{Mm}{r^2}$$

Προσοχή: μη μπερδευουμε το g με το G . Αντιπροσωπεύουν διαφορετικά μεγέθη. Το g είναι η επιτάχυνση λόγω βαρύτητας που συνδέει τη μάζα με το βάρος. Η τιμή του είναι διαφορετική σε διαφορετικό ύψος απο την επιφανεια της γης και στις επιφανειες διαφορετικών πλανητών. Το G συσχετίζει τη βαρυτική δύναμη μεταξύ δύο σωμάτων με τις μαζες τους και την μεταξύ τους απόσταση. Έχει την ίδια τιμή για οποιαδηποτε δυο σωματα ανεξάρτητα της θέσης τους στο χώρο.

Υπολογισμός του g στην επιφάνεια της γης-Σχέση g και G

Το βάρος ενός σώματος είναι η ολική βαρυτική δύναμη που ασκείται πάνω στο σώμα από όλα τα άλλα σώματα στο σύμπαν. Όταν το σώμα βρίσκεται κοντά στην επιφάνεια της Γης, μπορούμε να αγνοήσουμε όλες τις άλλες βαρυτικές δυνάμεις και να θεωρήσουμε ως βάρος του σώματος μόνο τη βαρυτική έλξη της Γης.

$$W = mg = F_g = G \frac{mM}{R_{\Gamma}^2} \Rightarrow \boxed{g = G \frac{M}{R_{\Gamma}^2}}$$

Το g είναι ανεξάρτητο της μάζας του σώματος

Εκτίμηση της Επιτάχυνσης Βαρύτητας στην επιφάνεια της Γης-Περιορισμοί

$$g = G \frac{M}{R_{\Gamma}^2}$$

Το συμπέρασμα ότι το βάρος ενός σώματος ισούται με τη βαρυτική δύναμη που ασκεί η γη σε αυτό προϋποθέτει ότι:

- **η γη είναι ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς.** Η γη όμως περιστρέφεται και υπάρχει κεντρομόλος επιτάχυνση. Οι επιπτώσεις όμως είναι σχετικά μικρές
- **Η γη είναι σφαιρική.** Η Γη όμως έχει σχήμα ελλειψοειδές συμπιεσμένο στους πόλους και εξογκωμένο στο ισημερινό με μεγαλύτερη ακτίνα στον ισημερινό. Συνεπώς ένα σημείο στους πόλους είναι πλησιέστερα στον πυρήνα της γης από όσο ένα σημείο στον ισημερινό. Για το λόγο αυτό η επιτάχυνση βαρύτητας αυξάνεται από τον ισημερινό προς τους πόλους
- **Η μάζα της γης είναι ομοιόμορφα κατανεμημένη.** Η πυκνότητα όμως της γης μεταβάλλεται ακτινικά και αυξάνει από την επιφάνεια προς τον πυρήνα (όπως θα φανεί παρακάτω), ενώ ακόμα και στην επιφάνεια της γης μεταβάλλεται

Παράδειγμα 1

Ο πλανήτης Κρόνος έχει μάζα 100 φορές μεγαλύτερη της μάζας της Γης και βρίσκεται 10 φορές πιο μακριά από τον Ήλιο σε σχέση με τη Γη. Συγκρίνετε τη δύναμη βαρύτητας που προκαλείται στη Γη από την βαρυτική έλξη του Ήλιου με αυτή του Κρόνου

Παράδειγμα 2

Ενας πλανήτης έχει α) διπλάσια μάζα απο τη μάζα της Γης και διπλάσια ακτίνα απο την ακτίνα της Γης β) τετραπλάσια μάζα απο τη Γη και διπλάσια ακτίνα απο την ακτίνα της Γης. Βρείτε την επιτάχυνση βαρύτητας g στην επιφάνεια του πλανήτη σε σχέση με την επιτάχυνση βαρύτητας στην επιφάνεια της γης.

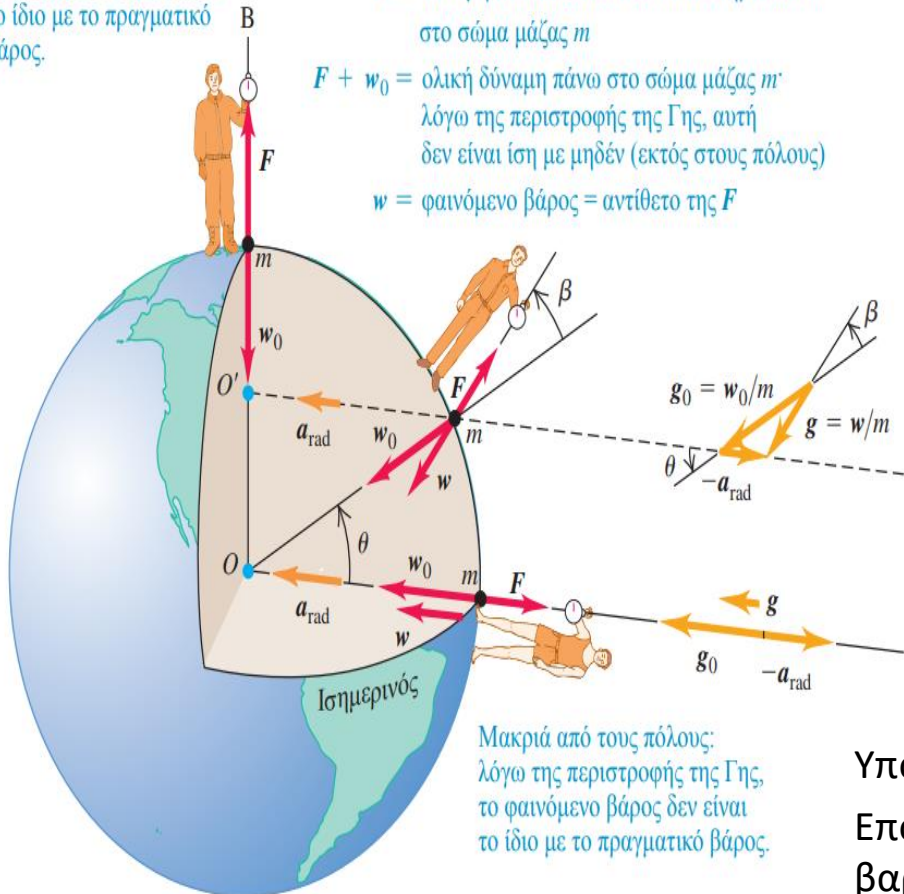
Επίδραση της περιστροφής της γης

φαινόμενο βάρος w ενός σώματος στη Γη που μετρείται με το ζυγό σε ένα γεωγραφικό πλάτος = F

πραγματικό βάρος w_0 του σώματος είναι ακριβώς ίσο με τη βαρυτική δύναμη με την οποία η Γη το έλκει = mg

Στον Βόρειο ή Νότιο Πόλο:
το φαινόμενο βάρος είναι
το ίδιο με το πραγματικό
βάρος.

- w_0 = πραγματικό βάρος ενός σώματος μάζας m
- F = δύναμη που ασκείται από το ελατήριο πάνω στο σώμα μάζας m
- $F + w_0$ = ολική δύναμη πάνω στο σώμα μάζας m λόγω της περιστροφής της Γης, αυτή δεν είναι ίση με μηδέν (εκτός στους πόλους)
- w = φαινόμενο βάρος = αντίθετο της F



Μακριά από τους πόλους:
λόγω της περιστροφής της Γης,
το φαινόμενο βάρος δεν είναι
το ίδιο με το πραγματικό βάρος.

↻ Περιστροφή της Γης

Για οποιοδήποτε γεωγραφικό πλάτος το w_0 και το w σχηματίζουν γωνία β , που είναι μικρότερη από $0,1^\circ$

Στους πόλους $mg - w = 0 \dots\dots w = w_0$

στον ισημερινό πάνω σε έναν κύκλο ακτίνας R_E με ταχύτητα v , και πρέπει να ασκείται πάνω του μια καθαρή δύναμη προς τα μέσα, ίση με τη μάζα του σώματος επί την κεντρομόλο επιτάχυνση:

$$w_0 - F = \frac{mv^2}{R_E}$$

Έτσι, το φαινόμενο βάρος είναι:

$$w = w_0 - \frac{mv^2}{R_E} \quad (\text{στον Ισημερινό}) \quad (13.27)$$

η πραγματική επιτάχυνση

$$g = g_0 - \frac{v^2}{R_E} \quad (\text{στον ισημερινό})$$

Υπολογίζεται ότι ο όρος $\frac{v^2}{R_E} = \omega^2 \cdot R_E = 0,0339 \text{ m/s}^2$

Επομένως για μια σφαιρική γη η επιταχυνση βαρύτητας στον ισημερινό είναι κατά 0,003 μικρότερη από αυτή στους πόλους

Αρχή της υπέρθεσης

Για n αλληλεπιδρώντα σωμάτια, η συνισταμένη των βαρυτικών δυνάμεων που ασκούνται στο σωμάτιο 1 είναι:

$$\vec{F}_{1,\text{net}} = \vec{F}_{12} + \vec{F}_{13} + \vec{F}_{14} + \vec{F}_{15} + \dots + \vec{F}_{1n}.$$

$\mathbf{F}_{1,\text{net}}$ είναι η συνισταμένη δύναμη στο σωμάτιο 1 λόγω της βαρυτικής επίδρασης των υπολοίπων ενώ πχ \mathbf{F}_{13} είναι η δύναμη που ασκείται στο σωμάτιο 1 από το 3. Άρα:

$$\vec{F}_{1,\text{net}} = \sum_{i=2}^n \vec{F}_{1i}.$$

Η βαρυτική δύναμη πάνω σε ένα σωμάτιο από ένα εκτεταμένο σώμα είναι :

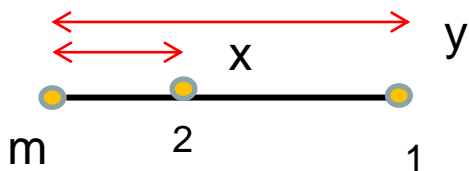
$$\vec{F}_1 = \int d\vec{F},$$

Όπου το ολοκλήρωμα αναφέρεται σε όλο το εκτεταμένο σώμα .

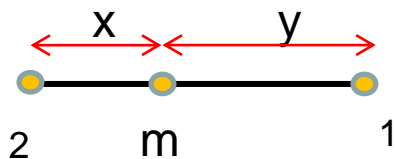
Προσοχή: δυο ίδιες μαζες δεν ασκούν αναγκαστικά την ίδια βαρυτική δύναμη σε μια τρίτη, καθώς η δύναμη εξαρτάται και από την απόσταση των δυο μαζών από την τρίτη

Παράδειγμα 3

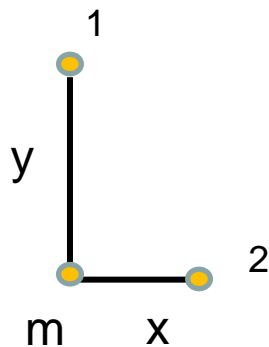
Στα παρακάτω σχήματα έχουμε τη διάταξη τριών ίσων μαζών. Κατατάξετε τις διατάξεις αυτές με βάση τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σωματίο m από τη μεγαλύτερη προς τη μικρότερη



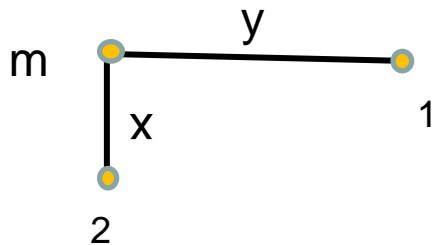
Σχήμα 1



Σχήμα 3



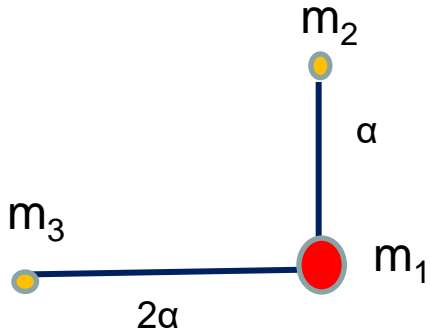
Σχήμα 2



Σχήμα 4

Παράδειγμα 4

Στο παρακάτω σχήμα να υπολογίσετε τη συνισταμένη βαρυτική δύναμη στη μάζα m_1 από τις άλλες 2 μάζες. Δίνεται $m_1=6$ kg, $m_2=m_3=4$ kg. Η απόσταση είναι $\alpha=2$ cm



ΝΟΜΟΣ ΤΗΣ ΒΑΡΥΤΗΤΑΣ (NEWTON)

Εκτίμηση της μάζας M της Γης

$$g = G \frac{M}{R_{\Gamma}^2} \Rightarrow M = g \frac{R_{\Gamma}^2}{G} \Rightarrow M \approx 10 \cdot \frac{(6.4 \times 10^6)^2}{6.67 \times 10^{-11}} \text{ Kg} \approx 6 \cdot 10^{24} \text{ Kg}$$

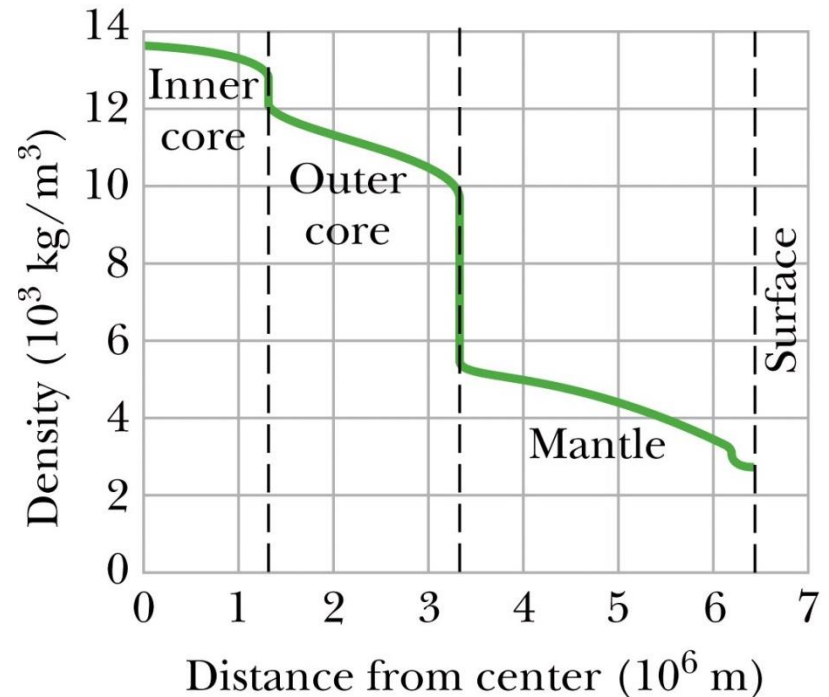
Η Γη δεν είναι ομοιογενής. Αν θεωρήσουμε ότι είναι σφαιρική μπορούμε να εκτιμήσουμε τη μέση πυκνότητά της

Εκτίμηση της μέσης πυκνότητας ρ_{Γ} της Γης

$$\rho_{\Gamma} = \frac{M}{V} = \frac{g \frac{R_{\Gamma}^2}{G}}{\frac{4}{3} \pi R_{\Gamma}^3} = \frac{3}{4\pi} \frac{g}{GR_{\Gamma}}$$

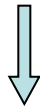
$$\rho_{\Gamma} \approx 5.5 \cdot 10^3 \text{ Kg/m}^3$$

Η πυκνότητα της γης αυξάνει από την επιφάνεια προς το εσωτερικό της



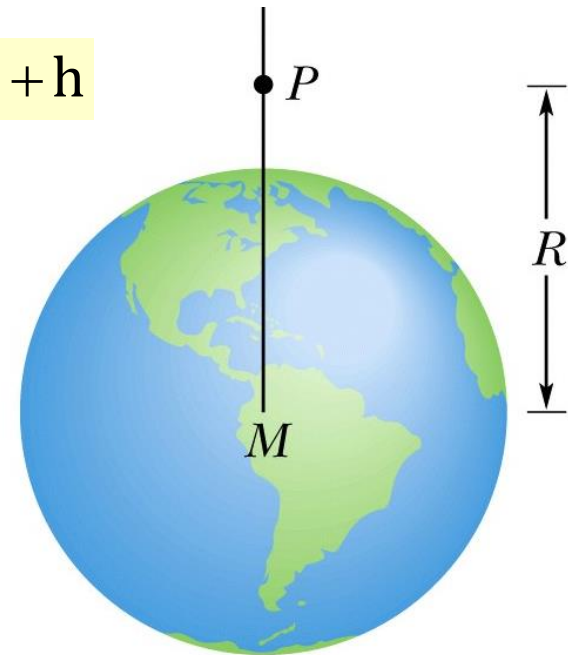
Βαρύτητα πάνω από την επιφάνεια της Γης

$$mg_h = G \frac{mM}{(R_\Gamma + h)^2}$$



$$g_h = G \frac{M}{(R_\Gamma + h)^2} < g$$

$$R = R_\Gamma + h$$



- Το διαστημικό λεωφορείο για το οποίο το $h \approx 400$ km δέχεται βαρυτική επιτάχυνση $g_h \approx 8.70 \text{ m/s}^2$.

Βαρύτητα σε διαφορετικούς Πλανήτες

Σε δύο διαφορετικούς σφαιρικούς πλανήτες με ακτίνες R_A και R_B , των οποίων οι πυκνότητες είναι αντίστοιχα ρ_A και ρ_B , η βαρύτητα στην επιφάνεια καθενός είναι:

$$g = G \frac{M}{R^2} = G \frac{\frac{4}{3} \pi R^3 \rho}{R^2} = \frac{4\pi}{3} GR\rho$$

ΠΛΑΝΗΤΗΣ Α	$g_A = \frac{4\pi}{3} GR_A \rho_A$	}	→	$\frac{g_A}{g_B} = \frac{R_A \cdot \rho_A}{R_B \cdot \rho_B}$
ΠΛΑΝΗΤΗΣ Β	$g_B = \frac{4\pi}{3} GR_B \rho_B$			

Στην επιφάνεια της Σελήνης το g είναι περίπου το $1/6$ (1.63m/s^2) της τιμής στην Γη. Δεδομένου ότι ο λόγος των ακτίνων των δύο αυτών ουρανίων σωμάτων είναι 0.27 συνάγεται πως η μέση πυκνότητα της Σελήνης είναι μικρότερη (0.62 φορές) της μέσης πυκνότητας της Γης.

Γιατί Είναι Σημαντικές οι Βαρυτικές Δυνάμεις?

- Δρουν εξ αποστάσεως, χωρίς την άμεση επαφή των σωμάτων (την ίδια ιδιότητα έχουν και οι ηλεκτρικές και οι μαγνητικές δυνάμεις, αλλά είναι λιγότερο σημαντικές σε αστρονομικές κλίμακες γιατί οι μεγάλες συσσωρεύσεις μάζας είναι ηλεκτρικά ουδέτερες)
- Είναι υπεύθυνες για τη συνοχή των αστέρων στον σπειροειδή γαλαξία που συμπεριλαμβάνει το ηλιακό μας σύστημα μαζί με 10^{11} άστρα
- Ασκούνται και στο χώρο ανάμεσα στους γαλαξίες που περιέχει και το δικό μας γαλαξία, δηλαδή τον γαλαξία της Ανδρομέδας και αρκετούς νάνους γαλαξίες (πχ το Μεγάλο Νέφος του Μαγγελάνου)



Γιατί Είναι Σημαντικές οι Βαρυτικές Δυνάμεις?

- Έχουν ακόμα μεγαλύτερη εμβέλεια εφόσον προσπαθούν να συγκρατήσουν όλο το σύμπαν το οποίο διαστέλλεται
- Ευθύνονται και για καποιες μυστηριώδεις δομές στο σύμπαν όπως **οι μαύρες τρύπες**. Σε ένα άστρο, με μάζα πολύ μεγαλύτερη απο αυτή του ήλιου, του οποίου τα αποθέματα ενέργειας έχουν εξαντληθεί, η βαρυτική δύναμη ανάμεσα σε όλα τα σωματίά του μπορεί να προκαλέσει κατάρρευση του άστρου και στη θέση του να δημιουργηθεί μια μαύρη τρύπα. Η βαρυτική δύναμη στην επιφάνεια του άστρου που έχει καταρρεύσει είναι τόσο μεγάλη ώστε κανένα σωματίο, ούτε το φως μπορεί να ξεφύγει απο την επιφάνειά του



ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Για ένα σώμα που εκτοξεύεται σε ακτινική απόσταση R από το κέντρο της γης, το έργο W για να πάει από το σημείο P (σε απόσταση R) μέχρι το ∞ είναι:

$$W = \int_R^\infty \vec{F}(r) \cdot d\vec{r}.$$

$$\vec{F}(r) \cdot d\vec{r} = F(r) dr \cos \phi = -\frac{GMm}{r^2} dr,$$

$$W = -GMm \int_R^\infty \frac{1}{r^2} dr = \left[\frac{GMm}{r} \right]_R^\infty$$

$$= 0 - \frac{GMm}{R} = -\frac{GMm}{R},$$

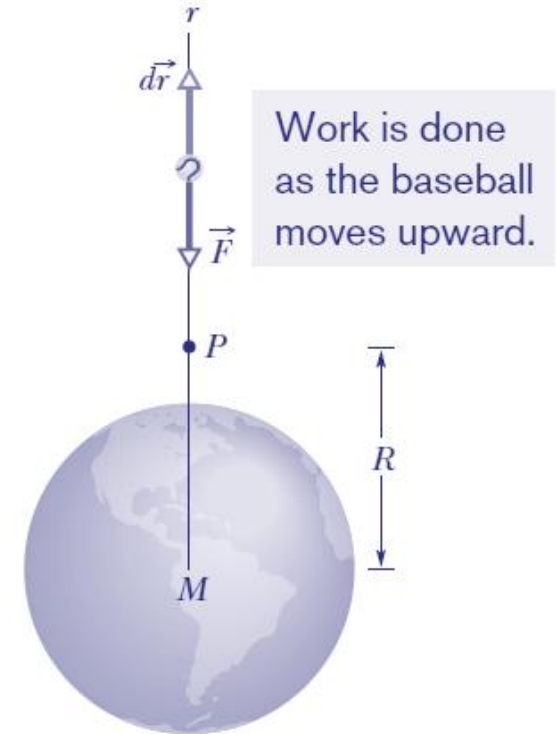
$$\Delta U = -W$$

$$U_\infty - U = -W. \quad \Rightarrow \quad U = W = -\frac{GMm}{R}.$$

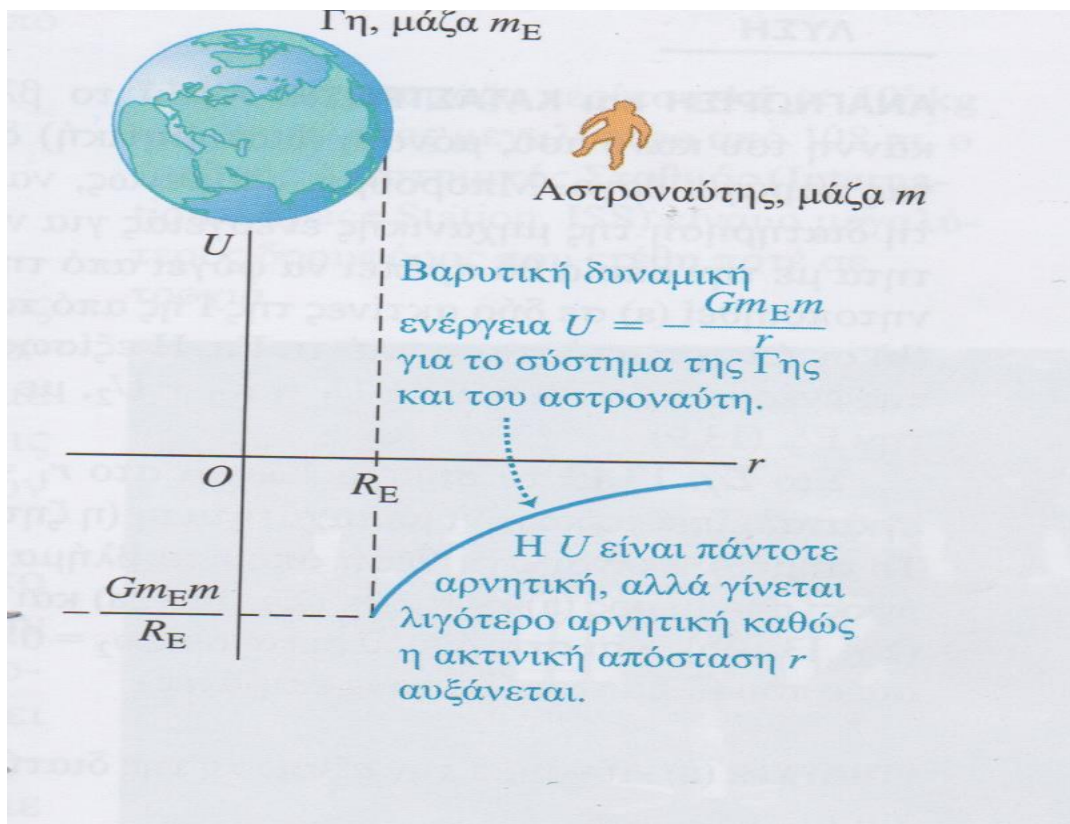
Η βαρυτική δυναμική ενέργεια εξαρτάται από την απόσταση R μεταξύ του σώματος και του κέντρου της γης (όχι από το τετράγωνο της απόστασης όπως η F)

όπου ϕ =γωνία μεταξύ \vec{F} και $d\vec{r}$ που στην περίπτωση μας είναι 180°

R =ακτινική απόσταση από το κέντρο της γης
 M =μάζα της γης
 m =μάζα του σώματος



Όταν το σώμα απομακρύνεται από τη γη, R αυξάνει, η βαρυτική δύναμη παράγει αρνητικό έργο και η U αυξάνει (γίνεται λιγότερο αρνητική). Όταν το σώμα πλησιάζει τη γη, το R μειώνεται, η βαρυτική δύναμη παράγει θετικό έργο και η δυναμική ενέργεια μειώνεται (γίνεται περισσότερο αρνητική)



Καθώς $r \rightarrow \infty$ η βαρυτική δυναμική ενέργεια τείνει στο 0

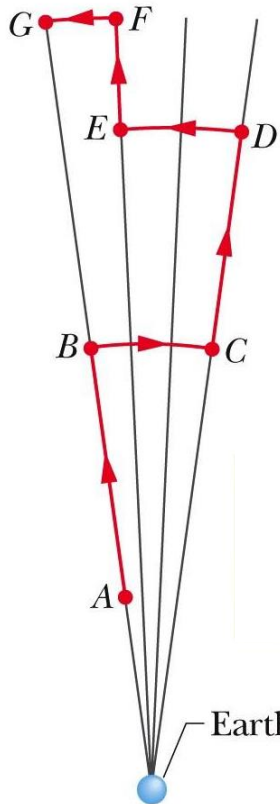
Βαρυτικό δυναμικό σε ένα σημείο του βαρυτικού πεδίου είναι η βαρυτική δυναμική ενέργεια στη μοναδα μάζας που τοποθετήθηκε στο πεδίο σε απόσταση r από τη μάζα M

$$V = -G \cdot \frac{M}{r}$$

ΒΑΡΥΤΙΚΗ ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Το βαρυτικό πεδίο είναι συντηρητικό.

Δηλαδή το έργο της βαρυτικής δύναμης είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή που επιλέγεται και εξαρτάται μόνο από τη διαφορά του δυναμικού στο αρχικό και τελικό σημείο:



$$W_{A \rightarrow G} = U_A - U_G$$

το έργο κατά μήκος των τόξων BC και DE είναι μηδενικό, δεδομένου ότι κατά μήκος των τόξων αυτών η βαρυτική δύναμη είναι κάθετη σε οποιαδήποτε στοιχειώδη μετατόπιση.

$$U(r) = -G \frac{mM}{r} \quad \vec{F} = -\text{grad } U = -\frac{\partial U}{\partial r} \hat{r} \quad \vec{F} = -G \frac{mM}{r^2} \hat{r}$$

Το αρνητικό πρόσημο δηλώνει ότι η δύναμη κατευθύνεται προς τη μάζα M

Επομένως, αν η βαρυτική δύναμη της Γης πάνω σε ένα σώμα είναι η μόνη δύναμη που παράγει έργο, τότε η ολική μηχανική ενέργεια του συστήματος της Γης και του σώματος είναι σταθερή ή **διατηρείται**.

Ταχύτητα διαφυγής

Η απαιτούμενη ελάχιστη αρχική ταχύτητα βλήματος για να μπορέσει να διαφύγει της επίδρασης του βαρυτικού πεδίου της Γης.

$$E = K + U \xrightarrow{E_R = E_\infty} K_R + U_R = K_\infty + U_\infty = 0$$

$K_\infty = 0$ γιατί
σταματά
 $U_\infty = 0$ ως
διάταξη
αναφοράς

$$E = K_R + U_R = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{R} = 0 \Rightarrow v^2 = 2G\frac{M}{R}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}} = 11.2 \text{ km/s}$$

για τη Γη

Η εξίσωση αυτή ισχύει για κάθε ουράνιο σώμα. Για τον Ήλιο ($M=2 \times 10^{30} \text{ Kg}$, $R=7 \times 10^8 \text{ m}$) η ταχύτητα διαφυγής είναι **618 km/s** ενώ για αστέρια νετρονίων αυτή γίνεται **$2 \times 10^5 \text{ km/s}$** .

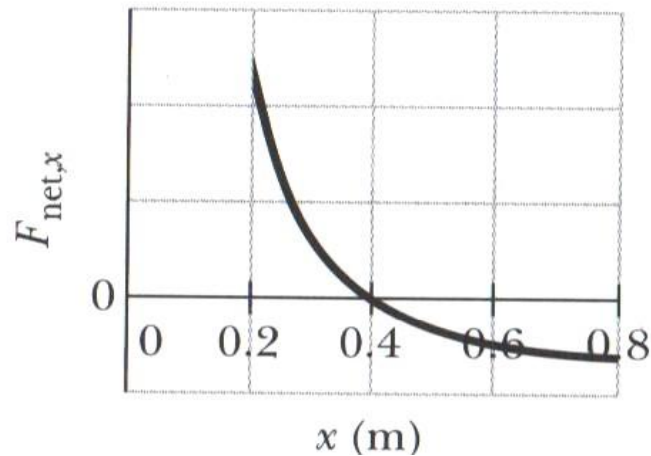
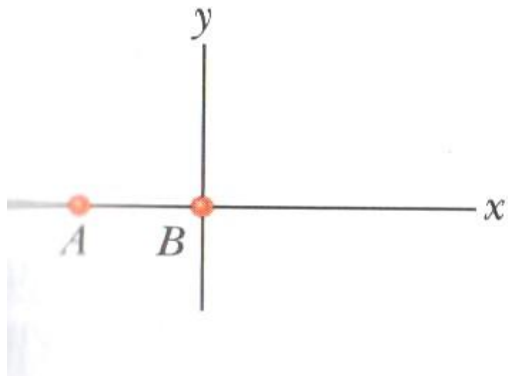
Παράδειγμα 5

Ενα βλήμα εκτοξεύεται απο τη γη. Α) βρείτε την ελάχιστη ταχύτητα που απαιτείται για να εκτοξευτεί το βλήμα κατευθείαν πάνω από τη γη μέχρι ένα ύψος ίσο με την ακτίνα της γης R . Β) βρείτε την ταχύτητα διαφυγής του βλήματος. Αγνοήστε την αντίσταση του αέρα, την περιστροφή της γης και τη βαρυτική έλξη απο τη Σελήνη. Η ακτίνα της γης είναι $R=6,37 \times 10^6$ m και η μάζα της γης $M=5,94 \times 10^{24}$ kg

Παράδειγμα 6

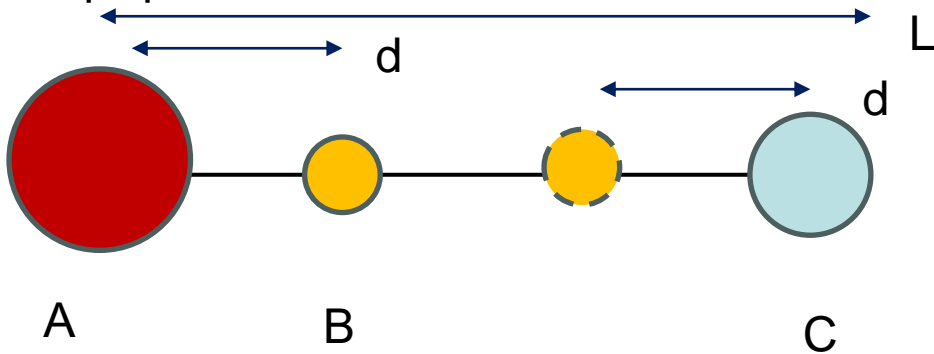
Το σώμα A είναι στερεωμένο στη θέση $x = -0,2$ m στον άξονα x και το σώμα B στην αρχή των αξόνων με μάζα 1 Kg. Ένα σώμα C μετακινείται κατά μήκος του άξονα

x , μεταξύ της θέσης του B και του $x = \infty$. Το διάγραμμα δίνει τη μεταβολή της ολικής βαρυτικής δύναμης στο σώμα B (εξαιτίας των σωμάτων A και C ως συνάρτηση της θέσης x του σώματος C. Το διάγραμμα εκτείνεται προς τα δεξιά και δίνει ασυμπτωτικά την τιμή της δύναμης -4.17×10^{-10} N. Πόση είναι η μάζα του σώματος A και του σώματος C?



Παράδειγμα 7

Οι 3 σφαίρες του Σχήματος με μάζες $m_A=80$ gr, $m_B=10$ gr $m_C=20$ gr έχουν τα κέντρα τους πάνω σε κοινή ευθεία με $L=12$ cm και $d=4$ cm. Αν η σφαίρα B μετακινηθεί σε νέα θέση σε απόσταση $d=4$ cm από την σφαίρα C, πόσο είναι το έργο που εκτελείται από τη συνολική βαρυτική δύναμη στη B εξαιτίας των σφαιρών A και C?



NOMOI TOY KEPLER

Οι νόμοι αυτοί είναι πρακτικοί και διατυπώθηκαν από τον Γερμανό Kepler (1571-1630) με τη βοήθεια πολλών παρατηρήσεων και επιβεβαιώθηκαν από τον Newton (1642-1727) με τους νόμους για την κίνηση και την βαρύτητα

Αν και εφαρμόζονται για τροχιές πλανητών γύρω από τον Ήλιο ισχύουν εξίσου και για δορυφόρους φυσικούς ή τεχνητούς που είναι σε τροχιά γύρω από τη γη ή οποιοδήποτε άλλο σώμα μεγάλης μάζας.

Ο 1^{ος} και 3^{ος} νόμος του Kepler ισχύουν για δυνάμεις ανάλογες του $1/r^2$.

Ο 2^{ος} νόμος ισχύει για κάθε **κεντρική δύναμη**, δηλαδή δύναμη που ασκείται κατά μήκος της ευθείας που ενώνει το σώμα που την υφίσταται με ένα σταθερό σημείο

Η ιδέα ότι η Γη περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο είχε προταθεί για πρώτη φορά από τον Αρίσταρχο τον Σάμιο τον 3ο π.Χ. αιώνα.

NOMOI TOY KEPLER

Όταν ένα σώμα κινείται υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης η στροφορμή του L είναι διατηρήσιμη ποσότητα.

Απόδειξη:

Μια κεντρική δύναμη (όπως είναι η βαρυτική δύναμη) μπορεί να γραφεί στην παρακάτω μορφή:

$$\vec{F}(r) = F(r)\hat{r} = F(r)\frac{\vec{r}}{r}$$

Οπότε η ροπή της δύναμης αυτής $\vec{\tau}$ ως προς την αρχή των αξόνων είναι:

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \vec{r} \times \left(\frac{F(r)}{r} \vec{r} \right) = \frac{F(r)}{r} (\vec{r} \times \vec{r}) = 0$$

και δεδομένου
ότι

$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt} = 0$$



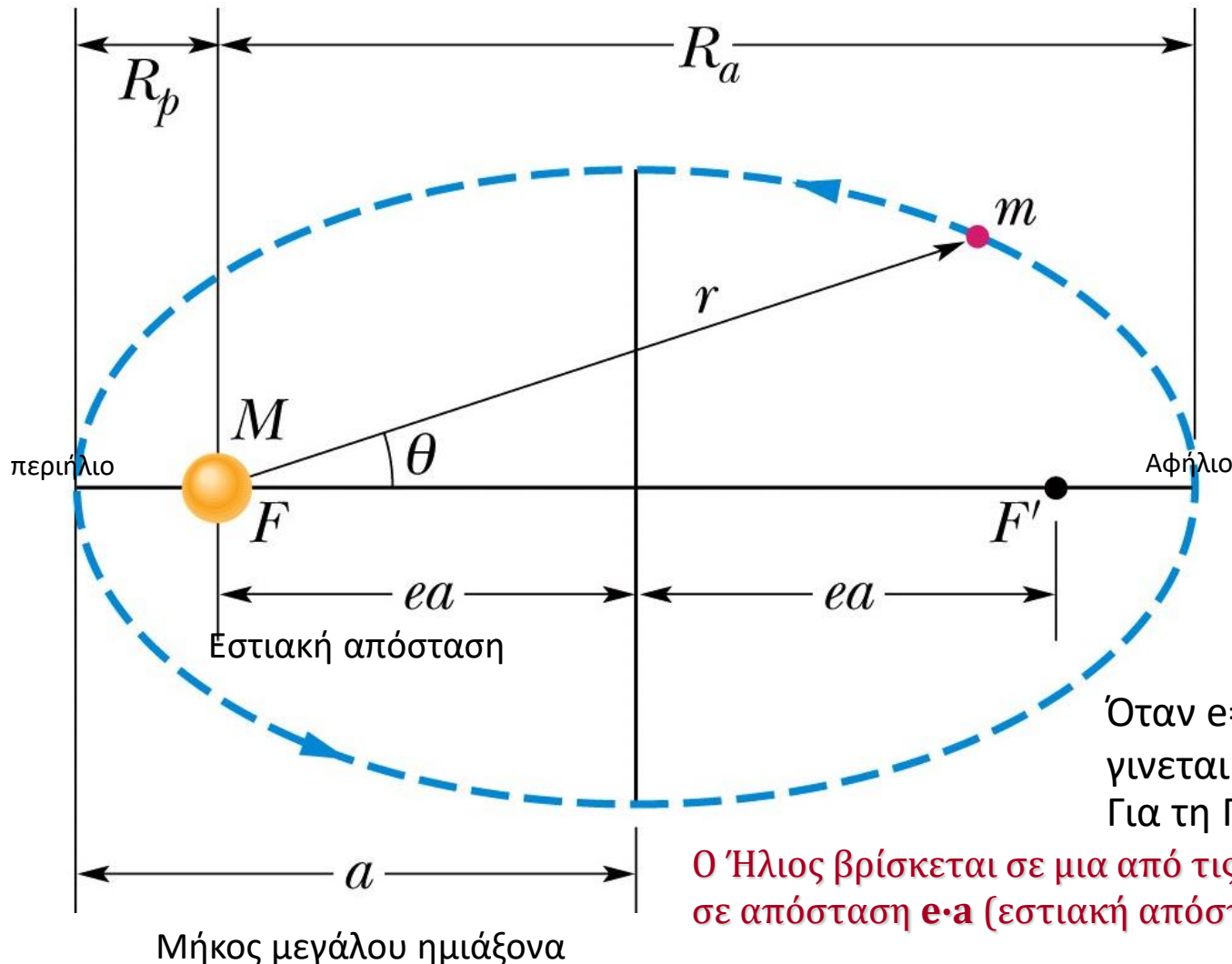
$$L = mr^2 \frac{d\theta}{dt} = \text{const}$$

Η κίνηση ενός δορυφόρου γύρω από έναν πλανήτη αποτελεί χαρακτηριστικό παράδειγμα.

NOMOI TOY KEPLER

1^{ος} Νόμος Kepler

Όλοι οι πλανήτες κινούνται σε Ελλειπτικές Τροχιές με τον ήλιο στη μια εστία



$$0 < e < 1$$

Εκκεντρότητα

R_a = Απόσταση Αφήλιου

το σημείο της τροχιάς που βρίσκεται πιο μακριά από τον Ηλιο

R_p = Απόσταση Περιηλίου:

το σημείο της τροχιάς που βρίσκεται πιο κοντά στον Ηλιο

Ο Ηλιος με μάζα M βρίσκεται στο σημείο F και όχι στο κέντρο της ελλειψης

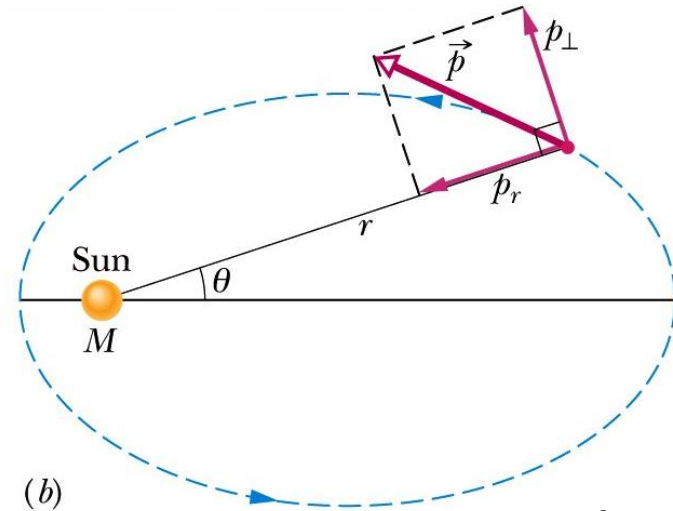
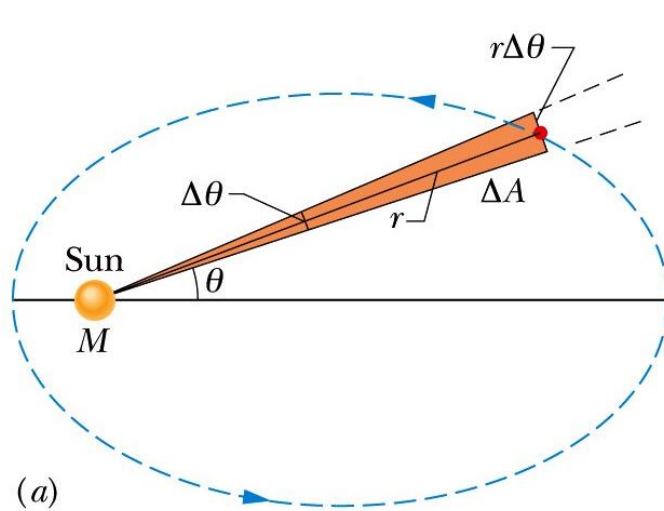
Όταν $e=0$ τότε η τροχιά γίνεται κυκλική
Για τη Γη $e=0,017$

Ο Ήλιος βρίσκεται σε μια από τις εστίες της έλλειψης και σε απόσταση $e \cdot a$ (εστιακή απόσταση) από το κέντρο της.

NOMOI TOY KEPLER

2^{ος} Νόμος Kepler

Η επιβατική ακτίνα (νοητή ευθεία από τον Ηλιο μέχρι τον πλανήτη) διαγράφει ίσα εμβαδά σε ίσους χρόνους



Επιβατική ακτίνα
 r = απόσταση του
 ήλιου από τον
 πλανήτη

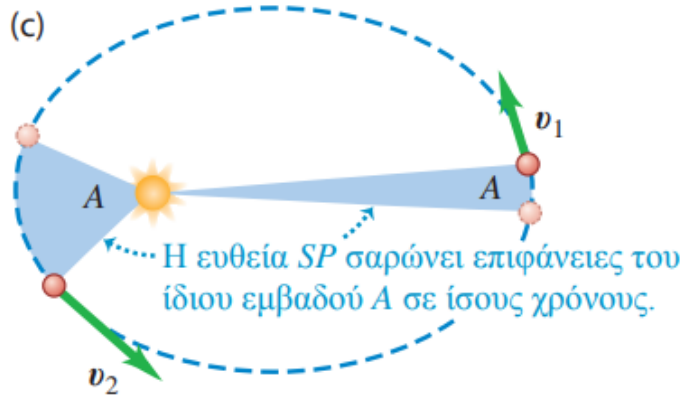
$$\frac{dA}{dt} = \frac{d}{dt} \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta} = \frac{1}{2} r \frac{d}{dt} r \dot{\theta} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\dot{\theta}}{dt} = r^2 \omega$$

αλλά $L = r p_{\perp} = r(mv_{\perp}) = r(m\omega r) = mr^2 \omega \implies \frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m}$

Άρα:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = \text{const}$$

2^{ος} Νόμος Kepler



Η ταχύτητα του πλανήτη μεταβάλλεται με τέτοιο τρόπο ώστε η ευθεία SP να σαρώνει το ίδιο εμβαδόν A σε έναν δεδομένο χρόνο t ανεξαρτήτως της θέσης του πλανήτη πάνω στην τροχιά του.

$$L = r(mv) = \text{σταθερό}$$

Όταν το $r = \text{μικρό}$ (πλανήτης κοντά στον Ήλιο) τότε $d\theta/dt = \omega = \text{μεγάλο}$,
οπότε και η ταχύτητα v είναι μεγάλη (πλανήτης κινείται γρήγορα)

Όταν το $r = \text{μεγάλο}$ (πλανήτης μακριά από τον Ήλιο) τότε $d\theta/dt = \text{μικρό}$
(πλανήτης κινείται αργά)

Ο δευτερος νόμος είναι ισοδύναμος με την αρχή διατήρησης της στροφορμής

Η διατήρηση της στροφορμής εξηγεί γιατί η τροχιά βρίσκεται σε σταθερό επίπεδο

NOMOI TOY KEPLER

3^{ος} Νόμος Kepler

Το τετράγωνο της περιόδου είναι ανάλογο του κύβου του μεγάλου ημιάξονα (ο λόγος των τετραγώνων των περιόδων δύο πλανητών που περιφέρονται γύρω από τον ήλιο είναι ίσος με τον λόγο των κύβων των κυρίων ημιαξόνων τους)

$$\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3} \quad \text{ή διαφορετικά} \quad \frac{T_1^2}{a_1^3} = \frac{T_2^2}{a_2^3}$$

Όπου M η μάζα του ήλιου

Σε κυκλική τροχιά: Κεντρομόλος Δύναμη = Βαρυτική Δύναμη

$$\frac{mv^2}{r} = G \frac{mM}{r^2} = m\omega^2 r \Rightarrow \omega^2 = G \frac{M}{r^3}$$

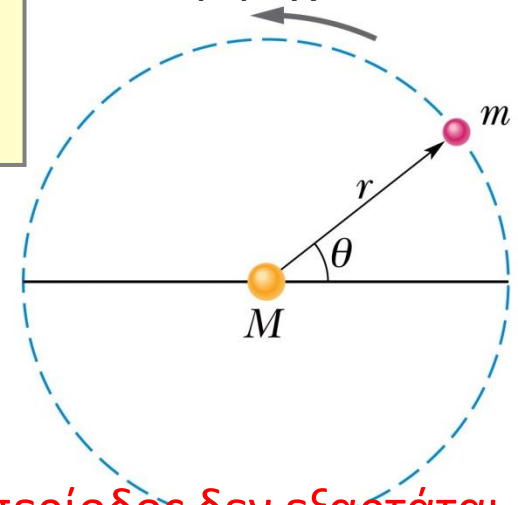
$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

$$\Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} = G \frac{M}{r^3} \Rightarrow T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) r^3$$

Ελλειπτική τροχιά

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) a^3$$

Κυκλική τροχιά



Στην ελλειπτική κίνηση το r της σχέσης αυτής ταυτίζεται με τον μεγάλο ημιάξονα a της έλλειψης.

Η περίοδος δεν εξαρτάται από την εκκεντρότητα e

Παράδειγμα 8

Ο κομήτης του Χάλευ κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από τον Ήλιο. Οι αποστάσεις του από τον Ήλιο στο περιήλιο και αφήλιο είναι $8,75 \times 10^7$ km $5,26 \times 10^9$ km αντίστοιχα. Βρείτε το μήκος του μεγάλου ημιάξονα της τροχιάς, την εκκεντρότητα και την περίοδο. (δίνεται η μάζα του ήλιου $= 1,99 \times 10^{30}$ kg)

ΤΡΟΧΙΕΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Κίνηση δορυφόρου σε κυκλική τροχιά γύρω από πλανήτη

Συνολική Ενέργεια: $E = K + U$

Για κυκλική τροχιά ισχύει:

$$G \frac{mM}{r^2} = \frac{mv^2}{r} \quad \& \quad K = \frac{mv^2}{2}$$

Συνεπώς:

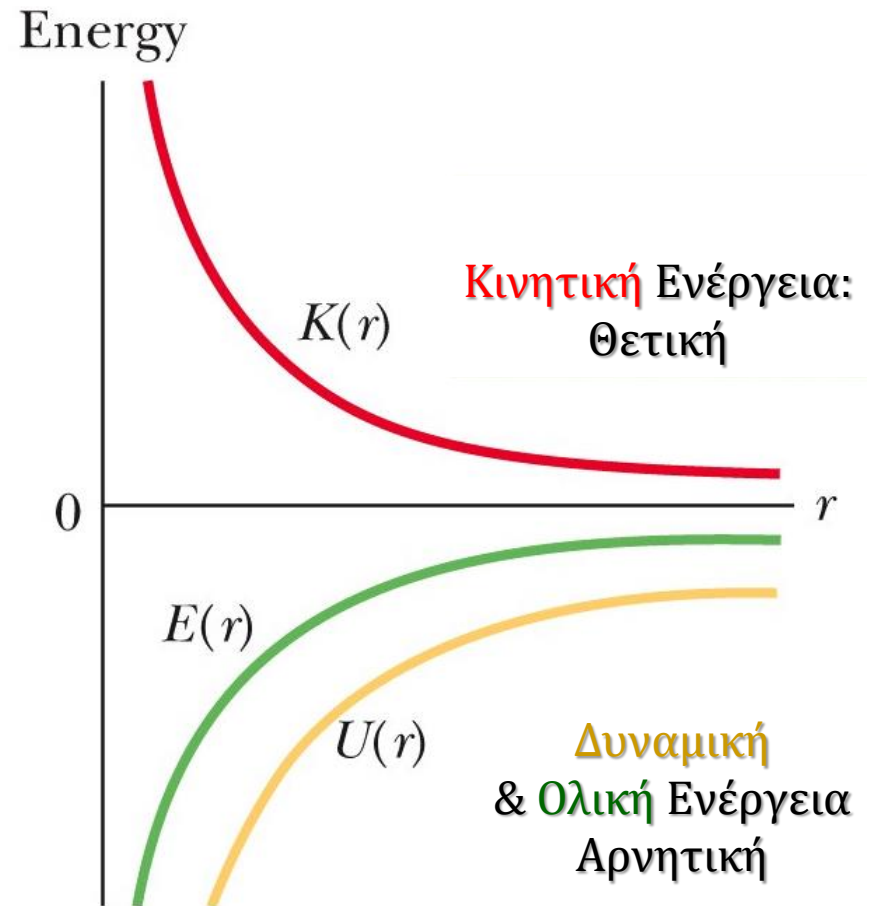
$$K = \frac{1}{2} \frac{GmM}{r} \quad \Rightarrow \quad K = -\frac{U}{2}$$

$$E = K + U = \frac{U}{2} = -K = -\frac{GMm}{2r}$$

Αύξηση της r συνεπάγεται αύξηση της E
(λιγότερο αρνητική)

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}}$$

Ταχύτητα του δορυφόρου εξαρτάται από την ακτίνα της τροχιάς και είναι ανεξαρτητη από τη μάζα του



ΤΡΟΧΙΕΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Υπολογισμός της συνολικής ενέργειας δορυφόρου κινούμενου σε ελλειπτική τροχιά γύρω από πλανήτη

m : Μάζα δορυφόρου

M : Μάζα πλανήτη

L : Στροφορμή δορυφόρου

$$E = K + U = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} = \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\perp^2) - G\frac{mM}{r}$$

όπου $v_r = \frac{dr}{dt}$, $v_\perp = r\frac{d\theta}{dt} = r\omega$ οπότε

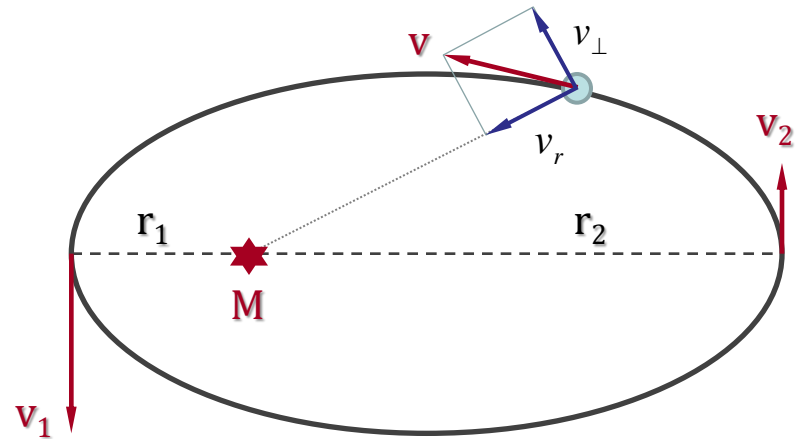
$$E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{1}{2}mr^2\omega^2 - G\frac{mM}{r}$$

Επειδή όμως η δύναμη είναι κεντρική, η στροφορμή L του συστήματος διατηρείται και ισχύει:

$$L = rp_\perp = r(mv_\perp) = r(m\omega r) = mr^2\omega \Rightarrow \omega = \frac{L}{mr^2} \Rightarrow E = \frac{1}{2}mv_r^2 + \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$$

Στις ακραίες θέσεις της έλλειψης ο δορυφόρος δεν έχει ακτινική ταχύτητα ($v_r=0$) και η παραπάνω εξίσωση γίνεται:

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - G\frac{mM}{r}$$



ΤΡΟΧΙΕΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Υπολογισμός της συνολικής ενέργειας δορυφόρου κινούμενου σε ελλειπτική τροχιά γύρω από πλανήτη

Σε ακραία θέση

$$E = \frac{L^2}{2mr^2} - G \frac{mM}{r} \Rightarrow 2mEr^2 + 2Gm^2Mr - L^2 = 0$$

Οι λύσεις της δευτεροβάθμιας αυτής εξίσωσης ταυτίζονται με τα r_1 και r_2 , το άθροισμα των οποίων είναι ο άξονας της έλλειψης ($=2a$):

$$r_1 + r_2 = 2a \Rightarrow -\frac{2Gm^2M}{2mE} = 2a$$



$$E = -G \frac{mM}{2a}$$

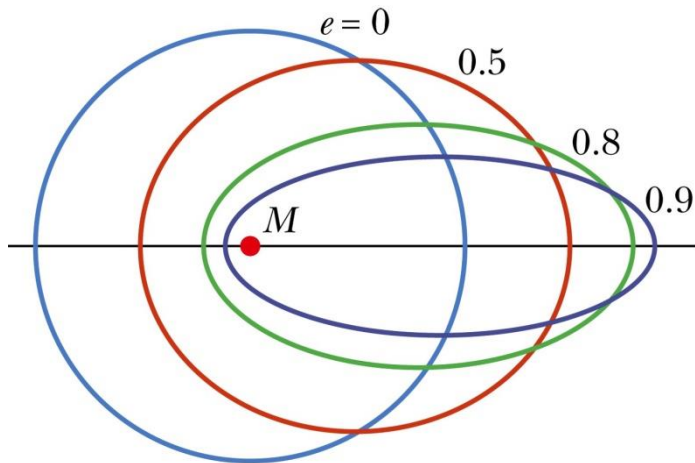
Το αποτέλεσμα αυτό είναι ταυτόσημο με την ενέργεια δορυφόρου κινούμενου σε κυκλική τροχιά, όπου ο ημιάξονας a ταυτίζεται με την ακτίνα της κυκλικής τροχιάς r .

ΤΡΟΧΙΕΣ ΚΑΙ ΕΝΕΡΓΕΙΑ

Για ελλειπτική τροχιά
ισχύει:

$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

Αρα η συνολική ενέργεια δορυφόρου σε τροχιά εξαρτάται μόνο από τον μεγάλο ημιάξονα a και όχι από την εκκεντρότητα e



Στις τέσσερες ελλειπτικές τροχιές με τον ίδιο μεγάλο ημιάξονα που απεικονίζονται στο διπλανό σχήμα, παρόλο που η εκκεντρότητα έχει διαφορετική τιμή, η συνολική ενέργεια είναι η ίδια.

Σε ποιο σημείο μια ελλειπτικής τροχιάς κινείται ένας πλανήτης πιο γρήγορα?

Η μηχανική ενέργεια του πλανήτη διατηρείται. Όταν η κινητική ενέργεια είναι μέγιστη η δυναμική του είναι ελάχιστη. Η δυναμική ενέργεια είναι

$$U(r) = -G \frac{mM}{r}$$

Αρα η δυναμική ενέργεια είναι ελάχιστη (δηλαδή πιο αρνητική) όταν το r είναι ελάχιστο, δηλαδή στο περιήλιο. Αρα στο περιήλιο η ταχύτητα μεγιστοποιείται. Αντιθέτα στο αφήλιο είναι ελάχιστη η ταχύτητα.

Ερωτήσεις

Δύο πλανήτες ίσης μάζας, βρίσκονται σε κυκλική τροχιά γύρω από έναν αστέρα. Ο πλανήτης A έχει μικρότερη ακτίνα τροχιάς από τον πλανήτη B . Ποιος ισχυρισμός ισχύει;

A) Ο πλανήτης A έχει περισσότερη κινητική ενέργεια, λιγότερη δυναμική ενέργεια και λιγότερη μηχανική ενέργεια (δυναμική και κινητική) από τον πλανήτη B .

B) Ο πλανήτης A έχει περισσότερη κινητική ενέργεια, περισσότερη δυναμική ενέργεια και περισσότερη μηχανική ενέργεια (δυναμική και κινητική) από τον πλανήτη B .

Γ) Ο πλανήτης A έχει περισσότερη κινητική ενέργεια, λιγότερη δυναμική ενέργεια και περισσότερη μηχανική ενέργεια (δυναμική και κινητική) από τον πλανήτη B .

Δ) Ο πλανήτης A και ο πλανήτης B έχουν το ίδιο ποσό μηχανικής ενέργειας (δυναμική και κινητική).

$$E = -\frac{GMm}{2r}$$

$$U(r) = -G\frac{mM}{r}$$

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}\frac{GmM}{r}$$

Ερωτήσεις

Το φεγγάρι βρίσκεται σε τροχιά γύρω από τον πλανήτη Χ. Τι συμβαίνει με την κινητική ενέργεια K και την δυναμική ενέργεια βαρύτητας U ?

- a) $K < 0$ and $U < 0$
- b) $K < 0$ and $U > 0$
- c) $K > 0$ and $U < 0$
- d) $K > 0$ and $U > 0$
- e) $K < 0$ and $U = 0$

Αν η μάζα της Γης αυξηθεί 4 φορές, η νέα περίοδος της τροχιάς της γύρω από τον ήλιο σε σύγκριση με την αρχική θα :

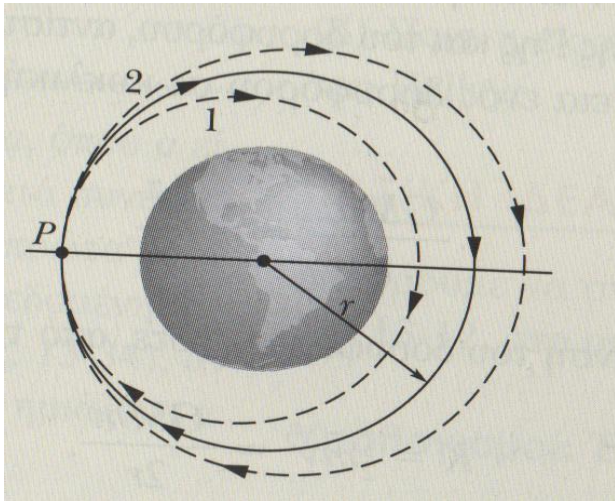
- A) αυξηθεί 4 φορές
- B) αυξηθεί 2 φορές
- Γ) ελαττωθεί 4 φορές
- Δ) ελαττωθεί 2 φορές
- E) Θα παραμείνει αμετάβλητη

Παράδειγμα 9

Ένα διαστημικό λεωφορείο βρίσκεται αρχικά σε κυκλική τροχιά με ακτίνα r γύρω από τη Γη. Στο σημείο P ο πιλότος θέτει σε λειτουργία για σύντομο χρονικό διάστημα έναν προωθητήρα που εκτοξεύει καυσάερα με κατεύθυνση προς τα μπρος ώστε να μειώσει την κινητική ενέργεια και την μηχανική ενέργεια του λεωφορείου

α) ποια από τις διακεκομμένες ελλειπτικές τροχιές 1 και 2 θα ακολουθήσει το λεωφορείο?

β) Η περίοδος της τροχιάς του λεωφορείου (δηλαδή ο χρόνος ώστε να επιστρέψει στο P) είναι μεγαλύτερη, μικρότερη ή ίση με αυτή της κυκλικής τροχιάς?



$$E = -\frac{GMm}{2a}$$

$$T^2 = \left(\frac{4\pi^2}{GM} \right) a^3$$

Παράδειγμα 10

Ένας γεωστατικός δορυφόρος περιφέρεται σε τροχιά γύρω από το γη σε σταθερό σημείο στον ισημερινό. Να προσδιορίσετε α) το ύψος πάνω από την επιφάνεια της γης στο οποίο πρέπει να κινείται ο γεωστατικός δορυφόρος β) την ταχύτητά του γ) να συγκρίνετε την ταχύτητα του γεωστατικού δορυφόρου με αυτήν ενός δορυφόρου που περιφέρεται σε ύψος 200 km από την επιφάνεια της γης.