

ΦΥΣΙΚΗ Ι



ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο

Ακαδημαϊκό Έτος 2024-2025

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

- Καρτεσιανές Συντεταγμένες
- Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων
- Εξωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων
- Βαθμωτό Γινόμενο Τριών Διανυσμάτων

ΔΥΝΑΜΕΙΣ

- Διανυσματική Φύση της Δύναμης
- Σύνθεση Δυνάμεων

ΡΟΠΗ

- Η Έννοια της Ροπής
- Ροπή Πολλών Δυνάμεων
- Ζεύγος Δυνάμεων

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο

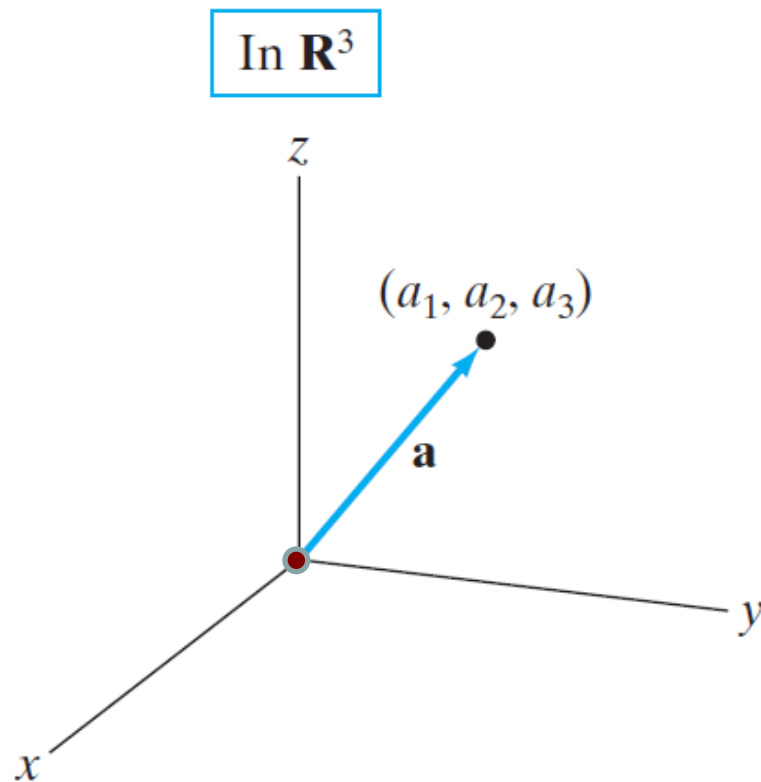
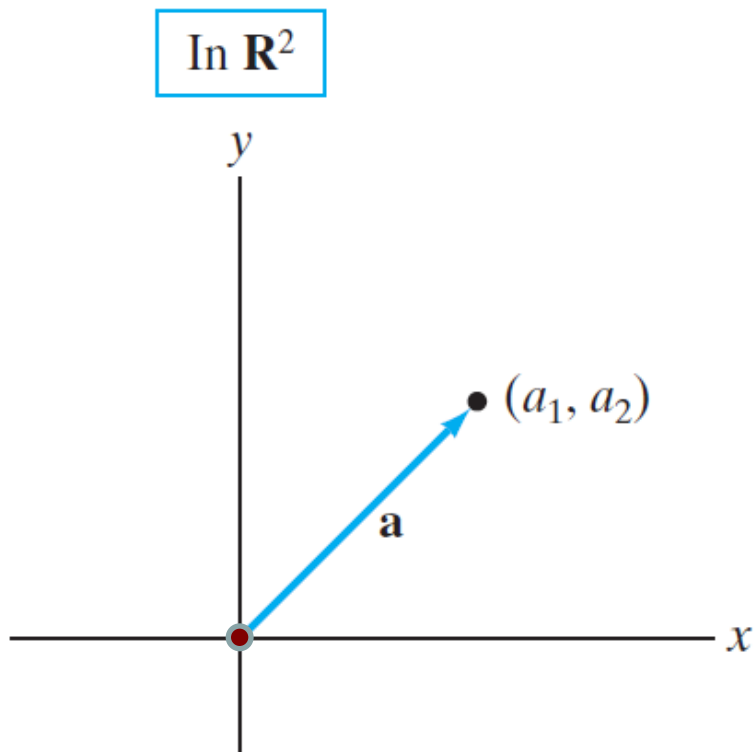
Ακαδημαϊκό Έτος 2024-2025

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ΦΑΡΑΚΟΣ	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ Εσωτερικό & Εξωτερικό Γινόμενο	1.1 – 1.3 1.5	3.1 – 3.5	3.1 – 3.8	1.7 – 1.10
ΔΥΝΑΜΕΙΣ Διανυσματική Φύση	2.1	4.1, 4.2	5.4	5.1
ΡΟΠΗ	7.1	10.1-10.4	10.8, 11.6	10.1

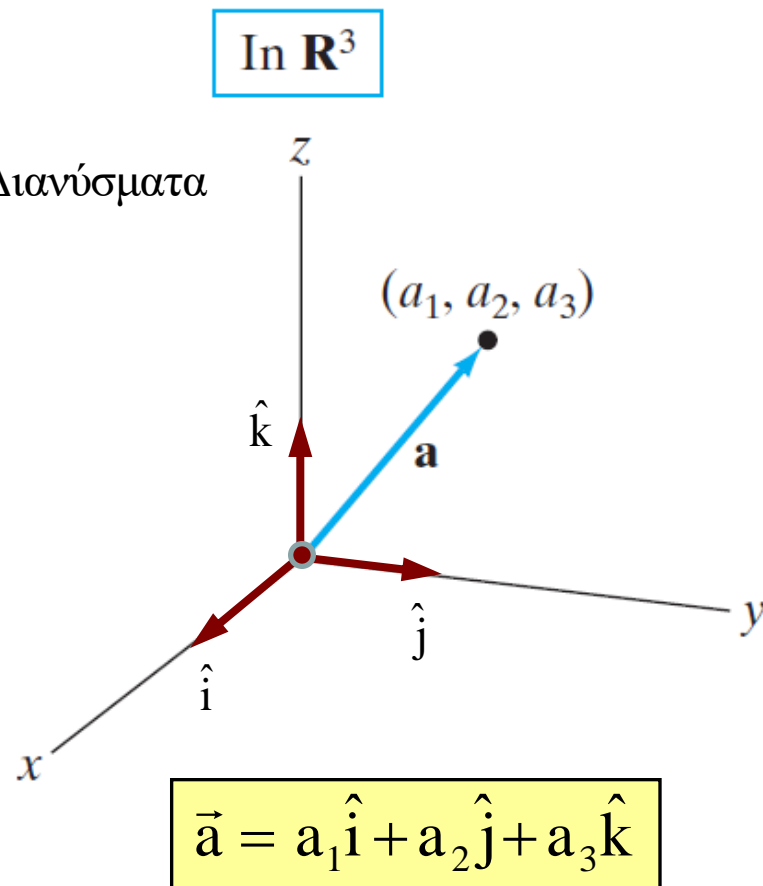
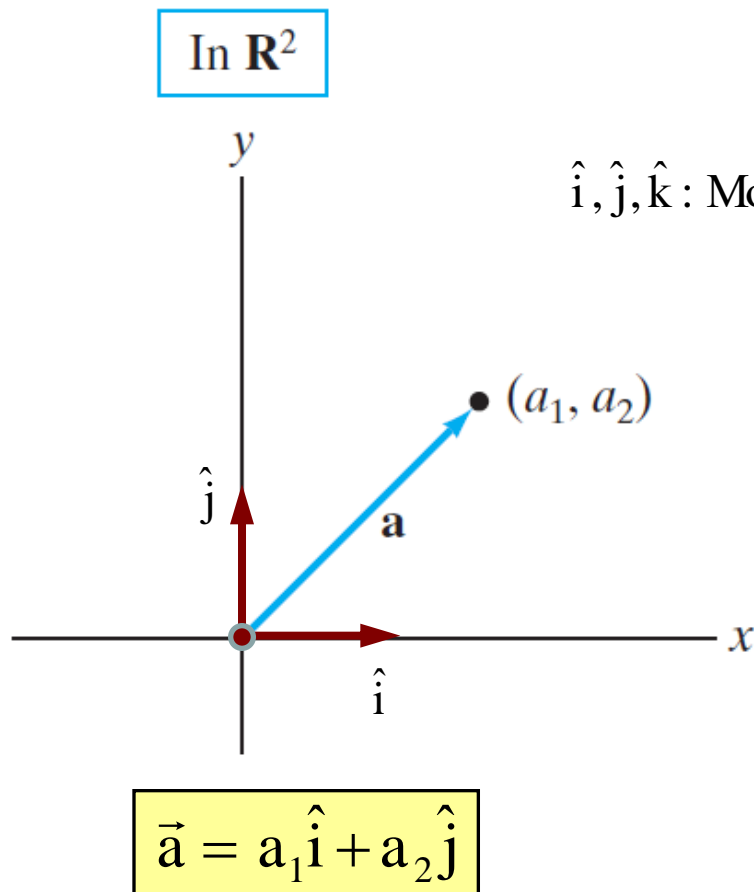
ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Διάνυσμα που καταλήγει στο σημείο (a_1, a_2) του επιπέδου και στο σημείο (a_1, a_2, a_3) του τρισδιάστατου χώρου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.



ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

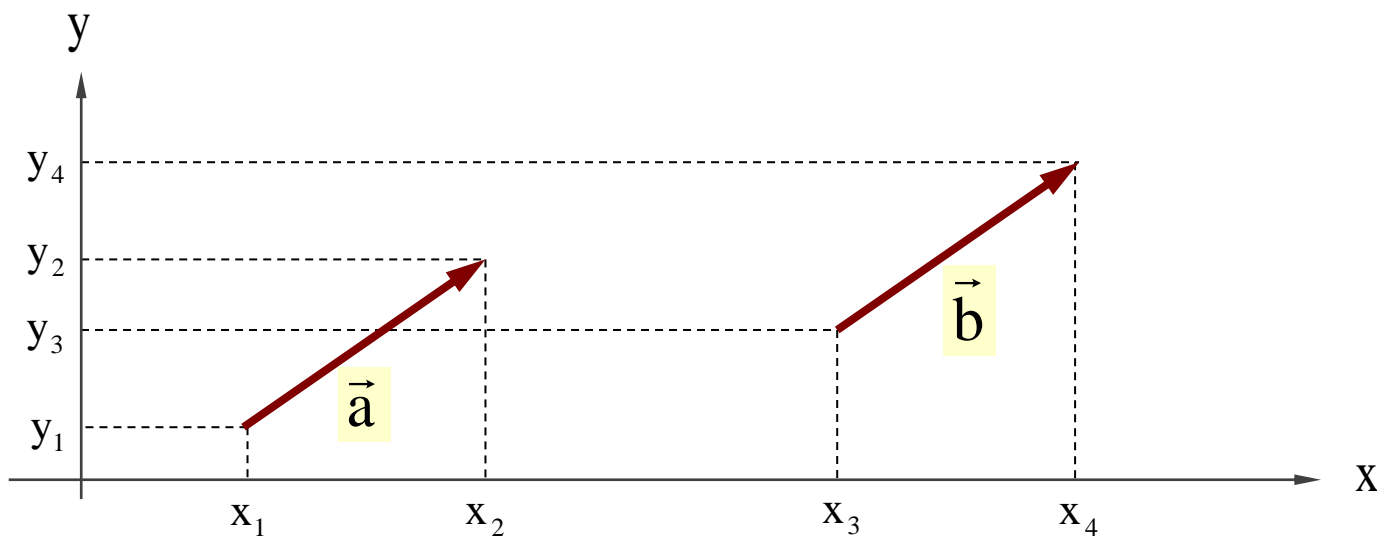
Διάνυσμα που καταλήγει στο σημείο (a_1, a_2) του επιπέδου και στο σημείο (a_1, a_2, a_3) του τρισδιάστατου χώρου σε καρτεσιανές συντεταγμένες.



ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Μερικές Βασικές Διαπιστώσεις

Παράλληλη μετατόπιση διανύσματος στο χώρο αφήνει τις συνιστώσες του αμετάβλητες.



$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{a} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} \\ \vec{b} = (x_4 - x_3)\hat{i} + (y_4 - y_3)\hat{j} \end{array} \right\}$$

$$\begin{array}{l} x_2 - x_1 = x_4 - x_3 \\ y_2 - y_1 = y_4 - y_3 \end{array}$$

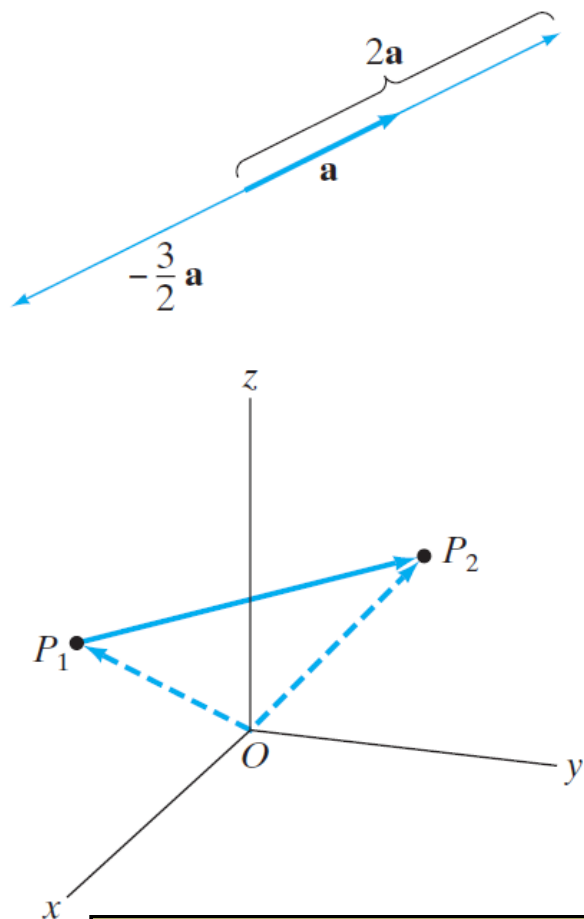
$$\vec{a} = \vec{b}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: Μοναδιαία Διανύσματα

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

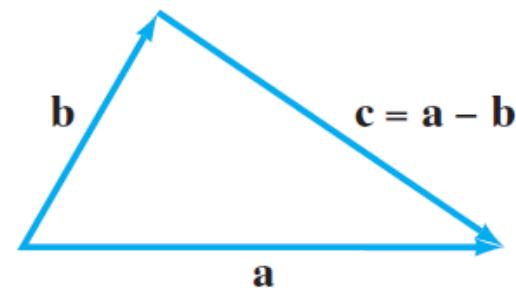
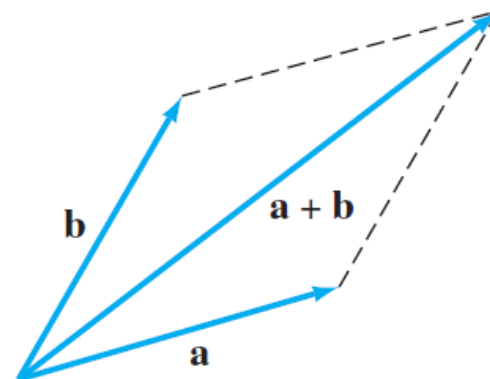
Βασικές Πράξεις επί των Διανυσμάτων

Αριθμητικά Πολλαπλάσια



$$\vec{P}_{12} = (x_2 - x_1)\hat{i} + (y_2 - y_1)\hat{j} + (z_2 - z_1)\hat{k}$$

Άθροισμα Διανυσμάτων



Διαφορά Διανυσμάτων

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΑ ΣΤΟΝ ΤΡΙΣΔΙΑΣΤΑΤΟ ΧΩΡΟ

Βασικές Πράξεις επί των Διανυσμάτων

$$\vec{a} = a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}$$

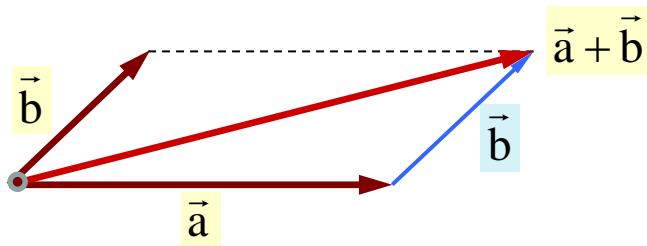
$$\vec{b} = b_1\hat{i} + b_2\hat{j} + b_3\hat{k}$$

Αριθμητικά Πολλαπλάσια

$$\lambda\vec{a} = \lambda(a_1\hat{i} + a_2\hat{j} + a_3\hat{k}) = \lambda a_1\hat{i} + \lambda a_2\hat{j} + \lambda a_3\hat{k}$$

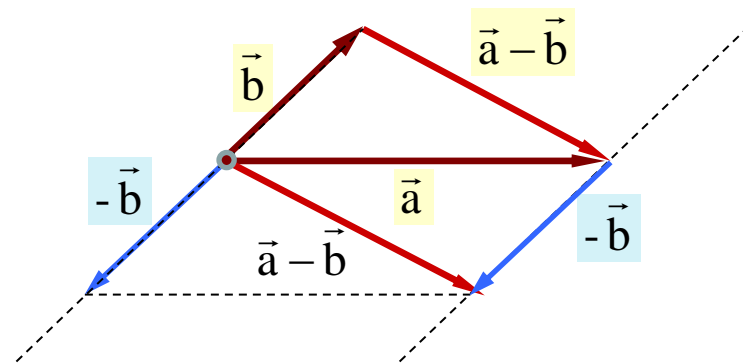
Άθροισμα Διανυσμάτων

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1)\hat{i} + (a_2 + b_2)\hat{j} + (a_3 + b_3)\hat{k}$$



Διαφορά Διανυσμάτων

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1)\hat{i} + (a_2 - b_2)\hat{j} + (a_3 - b_3)\hat{k}$$



ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Για τα διανύσματα $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ και $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$ του τρισδιάστατου χώρου το εσωτερικό γινόμενο ορίζεται ως:

$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{b}} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

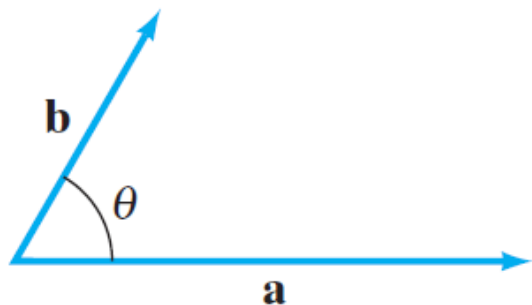
Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΣΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$, and $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ if and only if $\mathbf{a} = \mathbf{0}$;
2. $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$;
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$;
4. $(k\mathbf{a}) \cdot \mathbf{b} = k(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot (k\mathbf{b})$.

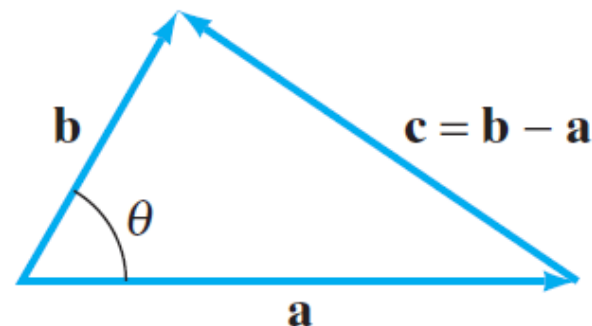
$$\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = |\vec{\mathbf{a}}|^2 \Leftrightarrow |\vec{\mathbf{a}}| = \sqrt{\vec{\mathbf{a}} \cdot \vec{\mathbf{a}}}$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta$$

ΑΠΟΔΕΙΞΗ



$$|\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



$$|\vec{b} - \vec{a}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Leftrightarrow (\vec{b} - \vec{a})(\vec{b} - \vec{a}) = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$



$$\vec{b}\vec{b} + \vec{a}\vec{a} - 2\vec{a}\vec{b} = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Διαπιστώσεις για το Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta$$

- **Κάθετα διανύσματα** ($\theta=90^\circ$) έχουν εσωτερικό γινόμενο **μηδέν**.
- **Παράλληλα διανύσματα** ($\theta=0^\circ$) έχουν εσωτερικό γινόμενο ίσο με το γινόμενο των μέτρων τους.

Μοναδιαία Διανύσματα

$$\hat{i} \cdot \hat{j} = |\hat{i}| |\hat{j}| \cos 90^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 0 = 0$$



$$\hat{i} \cdot \hat{j} = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\hat{j} \cdot \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \cdot \hat{i} = |\hat{i}| |\hat{j}| \cos 0^\circ = 1 \cdot 1 \cdot 1 = 1$$



$$\hat{i} \cdot \hat{i} = 1$$

$$\hat{j} \cdot \hat{j} = 1$$

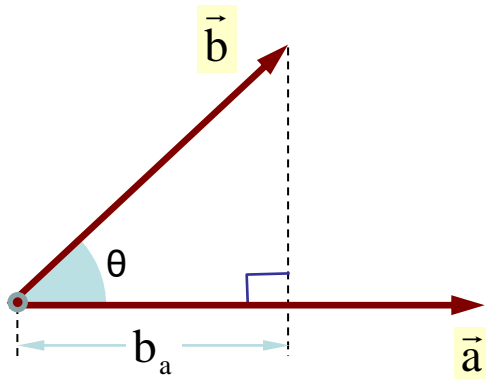
$$\hat{k} \cdot \hat{k} = 1$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

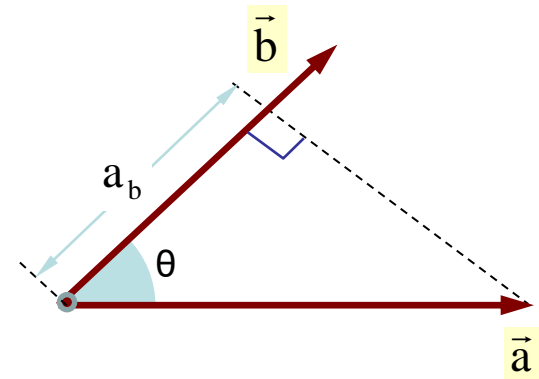
Διαπιστώσεις για το Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta$$

Το εσωτερικό γινόμενο συσχετίζεται με το μέτρο της **προβολής**



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta = |\vec{a}| b_a$$



$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta = |\vec{b}| a_b$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Διαπιστώσεις για το Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta$$

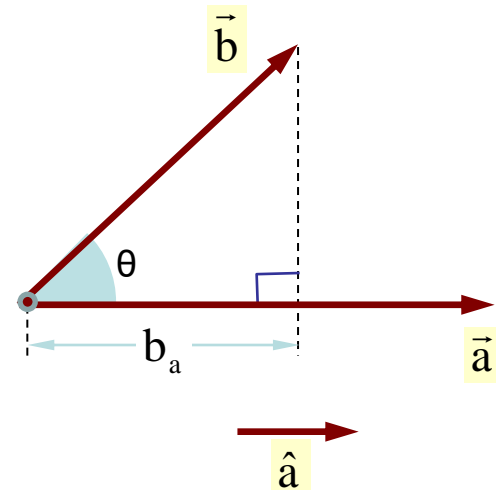
Επειδή το μοναδιαίο διάνυσμα οποιουδήποτε διανύσματος προκύπτει διαιρώντας το διάνυσμα με το μέτρο του, τότε:

Το εσωτερικό γινόμενο διανύσματος με μοναδιαίο διάνυσμα **ισούται** με το μέτρο της **προβολής** του διανύσματος αυτού **στην κατεύθυνση του μοναδιαίου**.

$$\hat{a} = \frac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$$



$$\hat{a} \cdot \vec{b} = |\hat{a}| |\vec{b}| \cos\theta = 1 |\vec{b}| \cos\theta = b_a$$



ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Διαπιστώσεις για το Εσωτερικό Γινόμενο Διανυσμάτων

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos\theta$$

Θεωρώντας την παραπάνω σχέση σαν τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων, τότε προκύπτει:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}) \cdot (b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k})$$



$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} &= a_1 b_1 \hat{i} \cdot \hat{i} + \cancel{a_1 b_2 \hat{i} \cdot \hat{j}} + \cancel{a_1 b_3 \hat{i} \cdot \hat{k}} \\ &+ \cancel{a_2 b_1 \hat{j} \cdot \hat{i}} + a_2 b_2 \hat{j} \cdot \hat{j} + \cancel{a_2 b_3 \hat{j} \cdot \hat{k}} \\ &+ \cancel{a_3 b_1 \hat{k} \cdot \hat{i}} + \cancel{a_3 b_2 \hat{k} \cdot \hat{j}} + a_3 b_3 \hat{k} \cdot \hat{k} \end{aligned}$$



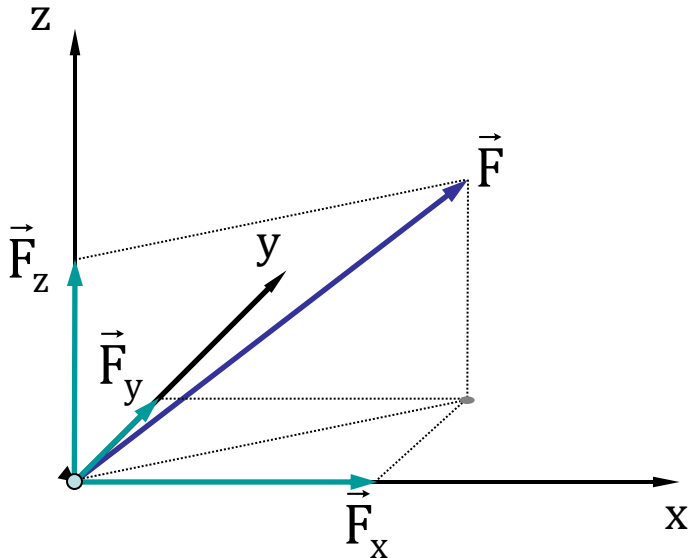
$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΙΚΗ ΦΥΣΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Δύναμη: Διανυσματικό μέγεθος – Για τον καθορισμό της χρειάζεται όχι μόνο το μέτρο της αλλά και η φορά της.

Ο ακριβής ορισμός της δύναμης θα δοθεί σε συνδυασμό με τη δυναμική της κίνησης (Νόμοι του Νεύτωνα).

Στο καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων μια δύναμη F μπορεί να οριστεί πλήρως από τις τρεις συνιστώσες της F_x , F_y και F_z :



$$\vec{F} = \vec{F}_x + \vec{F}_y + \vec{F}_z = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k}$$

$\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$: Μοναδιαία Διανύσματα

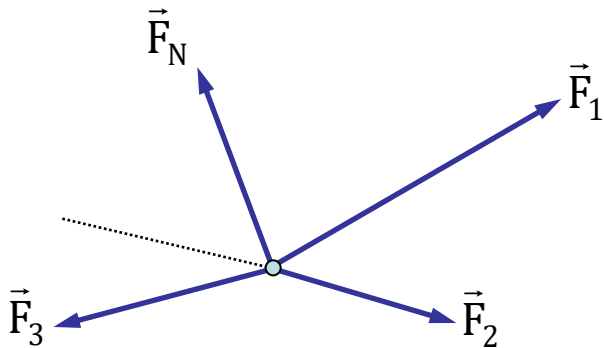
Μέτρο της Δύναμης: $F = \sqrt{F_x^2 + F_y^2 + F_z^2}$

Μονάδα Μέτρησης (S.I.): **N** (Newton)

ΣΥΝΘΕΣΗ ΣΥΝΤΡΕΧΟΥΣΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Συντρέχουσες δυνάμεις: Οι δυνάμεις που εφαρμόζονται στο ίδιο υλικό σημείο

Συνισταμένη: Το διανυσματικό άθροισμα όλων των συντρεχουσών δυνάμεων



$$R_x = F_{1x} + F_{2x} + F_{3x} + \dots + F_{Nx} = \sum_{i=1}^N F_{ix}$$

$$R_y = F_{1y} + F_{2y} + F_{3y} + \dots + F_{Ny} = \sum_{i=1}^N F_{iy}$$

$$R_z = F_{1z} + F_{2z} + F_{3z} + \dots + F_{Nz} = \sum_{i=1}^N F_{iz}$$

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

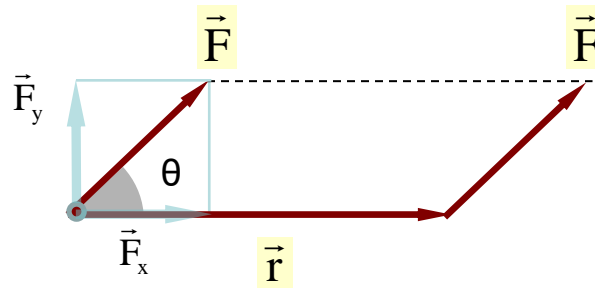
$$\vec{R} = R_x \hat{i} + R_y \hat{j} + R_z \hat{k} \quad \text{με} \quad \hat{i}, \hat{j}, \hat{k} \quad \text{τα μοναδιαία διανύσματα}$$

ΕΣΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Φυσικά Μεγέθη που προκύπτουν από το Εσωτερικό Γινόμενο

Χαρακτηριστικό παράδειγμα βαθμωτού φυσικού μεγέθους που προκύπτει από το **εσωτερικό γινόμενο** δύο άλλων διανυσματικών φυσικών μεγεθων είναι το έργο που παράγει η δύναμη \vec{F} μετατοπιζόμενη κατά διάστημα \vec{r} :

$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = |\vec{F}| |\vec{r}| \cos\theta$$



$$W = \vec{F} \cdot \vec{r} = |\vec{F}| |\vec{r}| \cos\theta = F_x r$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

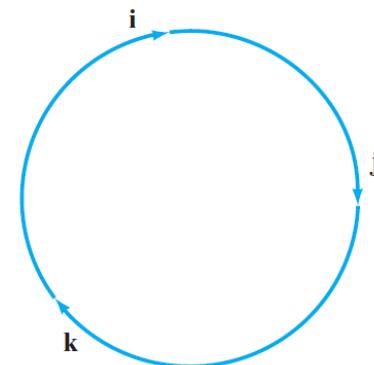
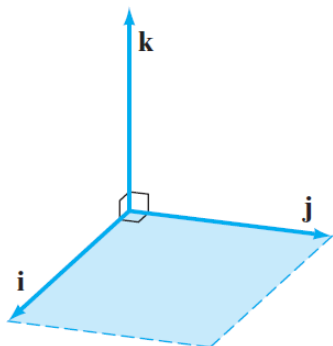
Για τα διανύσματα $\mathbf{a}=(a_1, a_2, a_3)$ και $\mathbf{b}=(b_1, b_2, b_3)$ του τρισδιάστατου χώρου το εξωτερικό γινόμενο δίνεται μέσω της ορίζουσας:

$$\vec{\mathbf{a}} \times \vec{\mathbf{b}} = \begin{vmatrix} \hat{\mathbf{i}} & \hat{\mathbf{j}} & \hat{\mathbf{k}} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

Το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι διανυσματικό μέγεθος.

ΙΔΙΟΤΗΤΕΣ ΕΞΩΤΕΡΙΚΟΥ ΓΙΝΟΜΕΝΟΥ

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ (anticommutativity);
2. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ (distributivity);
3. $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = \mathbf{a} \times \mathbf{c} + \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ (distributivity);
4. $k(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = (k\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times (k\mathbf{b})$.



$$\hat{\mathbf{i}} \times \hat{\mathbf{j}} = \hat{\mathbf{k}}, \quad \hat{\mathbf{j}} \times \hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{i}}, \quad \hat{\mathbf{k}} \times \hat{\mathbf{i}} = \hat{\mathbf{j}}$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Το ανάπτυγμα μιας οριζουσας 3×3 ισοδυναμεί με το άθροισμα τριών οριζουσών 2×2 :

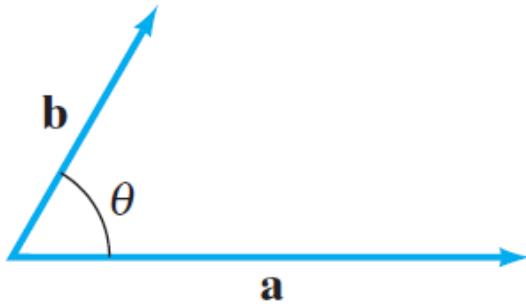
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$

Το ανάπτυγμα της οριζουσας μπορεί να γίνει ως προς οποιαδήποτε σειρά ή στήλη με τον μνημονικό κανόνα των προσήμων:

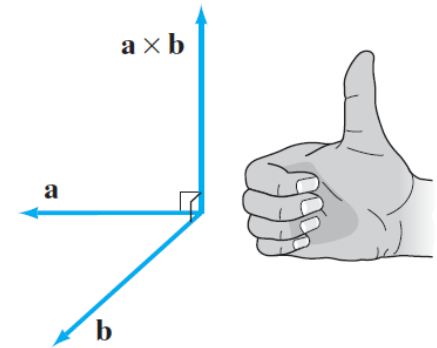
$$\begin{vmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{vmatrix}$$

Είναι προφανές πως ισχύει η γενίκευση, ότι μια οριζουσα n τάξεως μπορεί να αντικατασταθεί με n οριζουσες τάξεως $(n-1)$.

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\theta$$



ΑΠΟΔΕΙΞΗ

$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_1 b_3 - a_3 b_1)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$



$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2$$



$$|\vec{a} \times \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - (\vec{a} \cdot \vec{b})^2 = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 - |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \cos^2\theta = |\vec{a}|^2 |\vec{b}|^2 \sin^2\theta$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

Αντίστροφα, θεωρώντας γνωστές τις σχέσεις των εξωτερικών γινομένων για τα μοναδιαία διανύσματα:

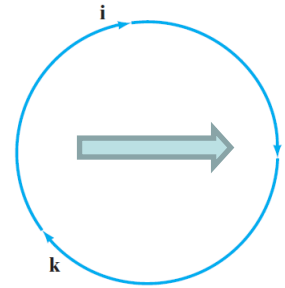
$$\hat{i} \times \hat{i} = \vec{0} \quad \hat{j} \times \hat{j} = \vec{0} \quad \hat{k} \times \hat{k} = \vec{0} \quad \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \dots$$

τότε προκύπτει:

$$\vec{a} \times \vec{b} = (a_1 \hat{i} + a_2 \hat{j} + a_3 \hat{k}) \times (b_1 \hat{i} + b_2 \hat{j} + b_3 \hat{k})$$



$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = & \cancel{a_1 b_1} \hat{i} \times \hat{i} + a_1 b_2 \hat{i} \times \hat{j} + a_1 b_3 \hat{i} \times \hat{k} \\ & + a_2 b_1 \hat{j} \times \hat{i} + \cancel{a_2 b_2} \hat{j} \times \hat{j} + a_2 b_3 \hat{j} \times \hat{k} \\ & + a_3 b_1 \hat{k} \times \hat{i} + a_3 b_2 \hat{k} \times \hat{j} + \cancel{a_3 b_3} \hat{k} \times \hat{k} \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} = & a_1 b_2 \hat{k} - a_1 b_3 \hat{j} \\ & - a_2 b_1 \hat{k} + a_2 b_3 \hat{i} \\ & + a_3 b_1 \hat{j} - a_3 b_2 \hat{i} \end{aligned}$$

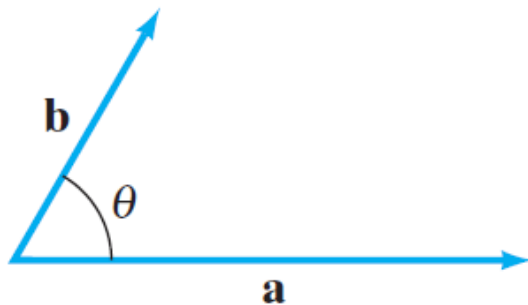


$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \hat{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \hat{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \hat{k}$$



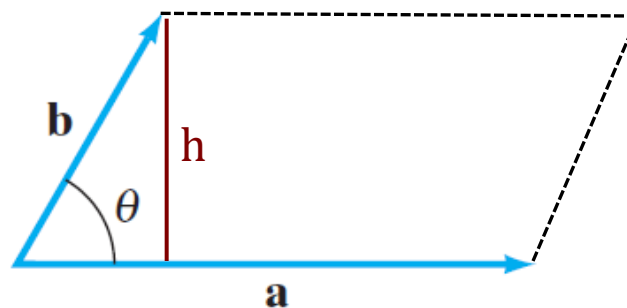
$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

ΕΞΩΤΕΡΙΚΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ



$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\theta$$

Γεωμετρική σημασία
του Εξωτερικού
Γινομένου

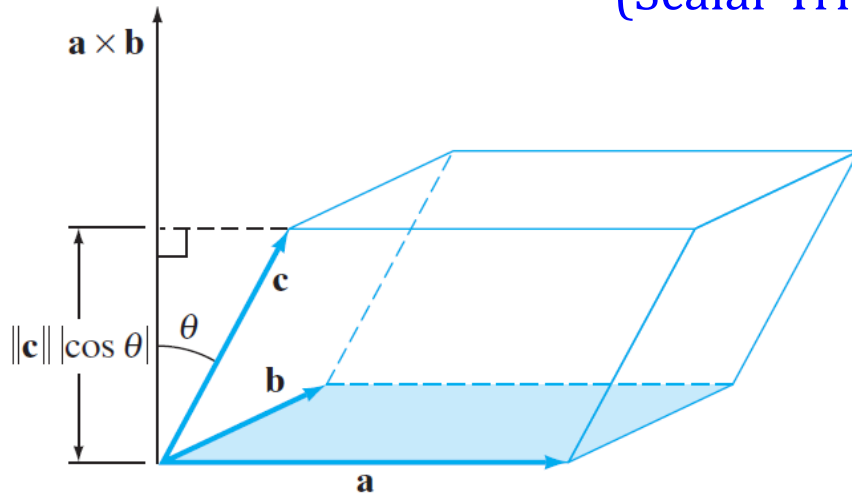


$$|\vec{a} \times \vec{b}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin\theta = |\vec{a}| (|\vec{b}| \sin\theta) = |\vec{a}| h = E$$

Το μέτρο του εξωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων ισούται με το **εμβαδόν** του αντίστοιχου παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα δύο αυτά διανύσματα.

ΒΑΘΜΩΤΟ ΓΙΝΟΜΕΝΟ ΤΡΙΩΝ ΔΙΑΝΥΣΜΑΤΩΝ

(Scalar Triple Product)



Ορίζεται σαν το μεικτό γινόμενο:

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$$

και είναι ένα **βαθμωτό** μέγεθος.

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = (c_1 \hat{i} + c_2 \hat{j} + c_3 \hat{k}) \cdot \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} c_1 & c_2 & c_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

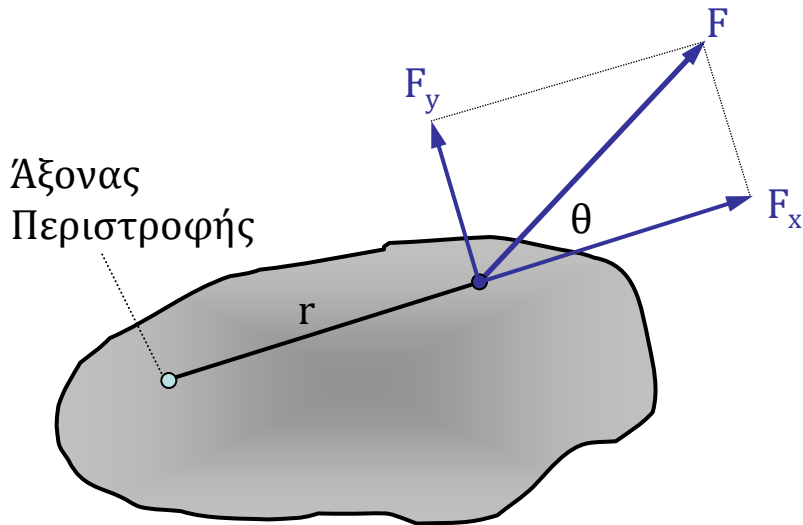
Γεωμετρική σημασία του Τριπλού Γινομένου

$$\vec{c} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = |\vec{c}| |\vec{a} \times \vec{b}| \cos \theta = (|\vec{c}| \cos \theta) |\vec{a} \times \vec{b}| = (|\vec{c}| \cos \theta) E = V$$

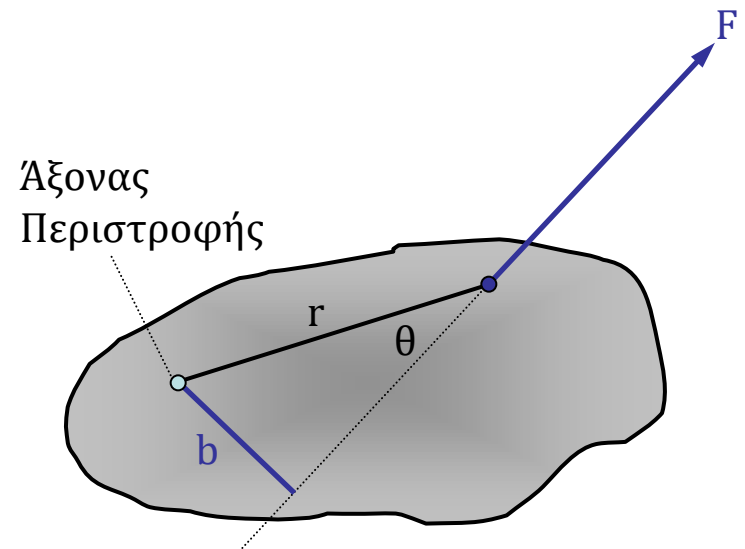
Το τριπλό γινόμενο διανυσμάτων ισούται με τον **όγκο** του αντίστοιχου παραλληλεπίπεδου που σχηματίζουν τα τρία διανύσματα.

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Ροπή: Η ικανότητα μιας δύναμης F να θέτει σε περιστροφή ένα σώμα



F_y : Η κάθετη συνιστώσα της δύναμης στο διάστημα r



b : Η απόσταση του άξονα περιστροφής από το φορέα της δύναμης F (βραχίονας)

$$\tau = F_y r = [F \sin(\theta)] r$$

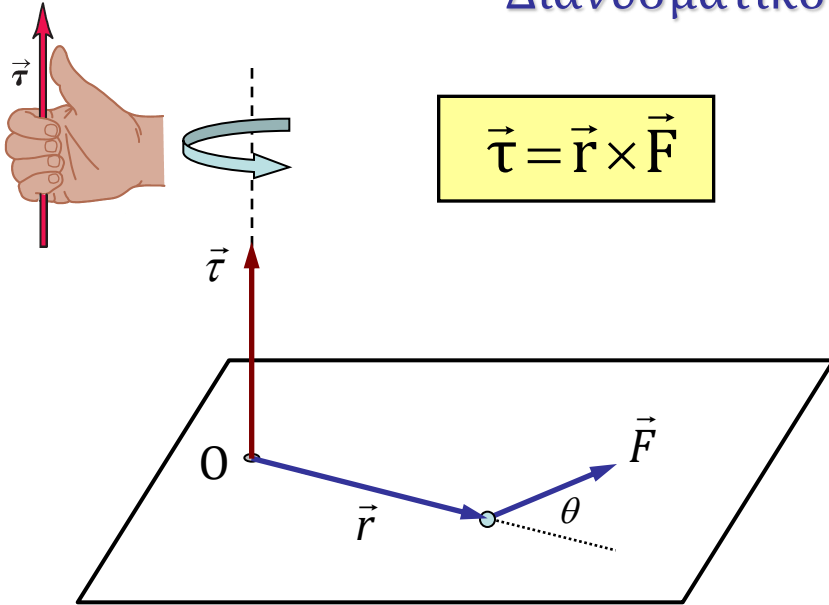
Μέτρο της ροπής τ

$$\tau = F b = F [r \sin(\theta)]$$

$$\tau = r F \sin(\theta)$$

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Διανυσματικός ορισμός της ροπής



Μέτρο: $\tau = r F \sin(\theta)$

Κατεύθυνση: Κάθετη στο επίπεδο επιβατικής ακτίνας - δύναμης (r - F)

Φορά: Καθοριζόμενη από τον κανόνα του αντίχειρα του δεξιού χεριού

Μονάδα μέτρησης: Nm (S.I.)

- Η ροπή δύναμης ορίζεται πάντοτε ως προς κάποιο συγκεκριμένο σημείο αναφοράς.
- Μετατόπιση της δύναμης κατά μήκος του άξονα εφαρμογής αφήνει αναλλοίωτη την ροπή της.
- Αλλαγή του σημείου αναφοράς αλλάζει την ροπή της δύναμης.

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Διανυσματικός ορισμός της ροπής

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{F} = F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k} \\ \vec{r} = x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k} \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = (x_0 \hat{i} + y_0 \hat{j} + z_0 \hat{k}) \times (F_x \hat{i} + F_y \hat{j} + F_z \hat{k})$$

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = & x_0 F_x \hat{i} \times \hat{i} + x_0 F_y \hat{i} \times \hat{j} + x_0 F_z \hat{i} \times \hat{k} \\ & + y_0 F_x \hat{j} \times \hat{i} + y_0 F_y \hat{j} \times \hat{j} + y_0 F_z \hat{j} \times \hat{k} \\ & + z_0 F_x \hat{k} \times \hat{i} + z_0 F_y \hat{k} \times \hat{j} + z_0 F_z \hat{k} \times \hat{k} \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ll} \hat{i} \times \hat{i} = 0 & \hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \\ \hat{j} \times \hat{j} = 0 & \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \\ \hat{k} \times \hat{k} = 0 & \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j} \end{array}$$

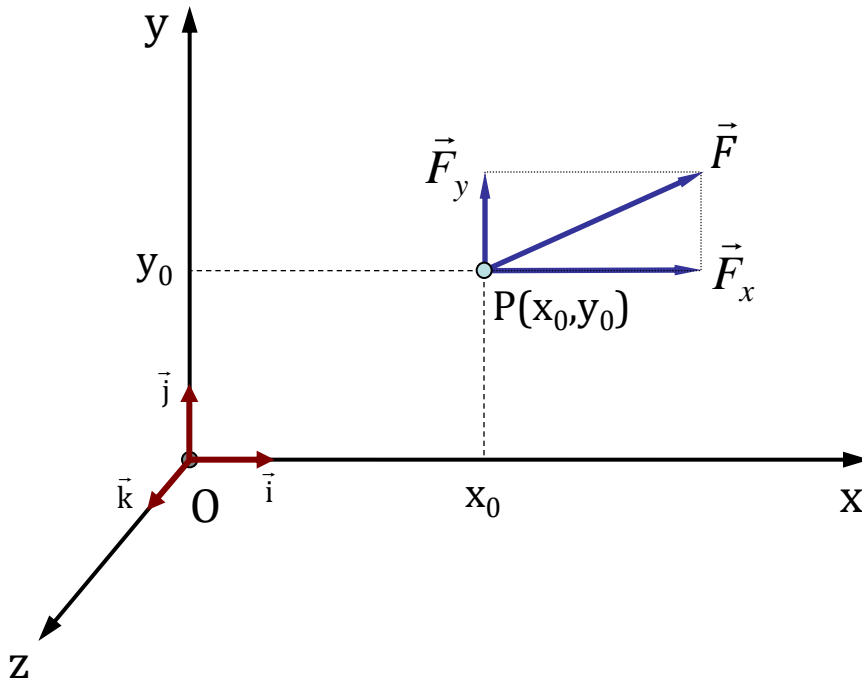
$$\begin{aligned} \vec{\tau} = & (y_0 F_z - z_0 F_y) \hat{i} \\ & - (x_0 F_z - z_0 F_x) \hat{j} \\ & + (x_0 F_y - y_0 F_x) \hat{k} \end{aligned}$$

Γραφή σε μορφή ορίζουσας

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_0 & y_0 & z_0 \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$$

ΡΟΠΗ ΔΥΝΑΜΗΣ

Ειδική Περίπτωση: Υπολογισμός ροπής δύναμης που βρίσκεται στο επίπεδο XY



Συνιστώσες της F : F_x, F_y

• Ροπή της F_y : $+x_0 F_y$

• Ροπή της F_x : $-y_0 F_x$

Συνολικό μέτρο ροπής:

$$\tau = x_0 F_y - y_0 F_x$$

με κατεύθυνση κατά μήκος του άξονα z .

Με βάση τον
διανυσματικό
ορισμό της ροπής

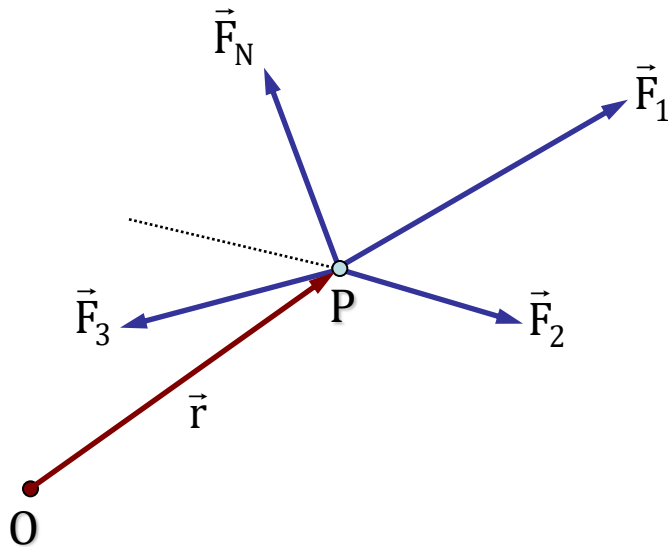
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{F}$$



$$\begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_0 & y_0 & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (x_0 F_y - y_0 F_x) \hat{k}$$

ΡΟΠΗ ΠΟΛΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Υπολογισμός ροπής πολλών δυνάμεων ως προς το σημείο O, όταν αυτές έχουν κοινό σημείο εφαρμογής (συντρέχουσες)



$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots + \vec{\tau}_N$$

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots + \vec{\tau}_N \\ &= \vec{r} \times \vec{F}_1 + \vec{r} \times \vec{F}_2 + \vec{r} \times \vec{F}_3 + \dots + \vec{r} \times \vec{F}_N \\ &= \vec{r} \times (\vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N) \\ &= \vec{r} \times \vec{R}\end{aligned}$$

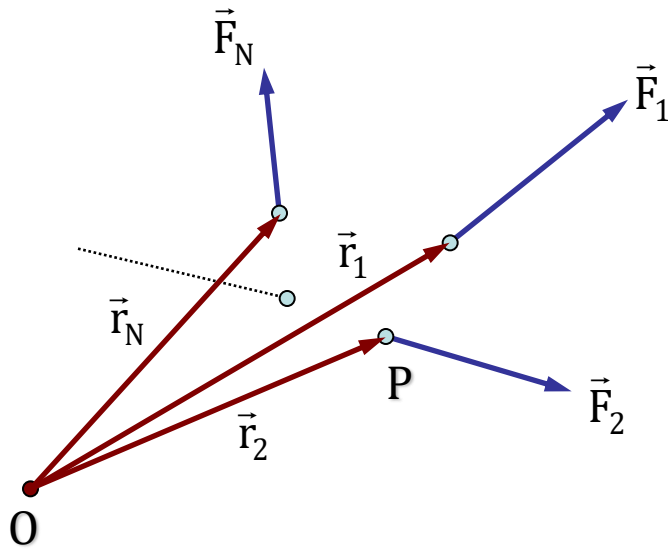
$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{R}$$

Η συνισταμένη δύναμη μπορεί να αντικαταστήσει ένα σύστημα συντρεχουσών δυνάμεων σε ένα σώμα: *Επιφέρει το ίδιο αποτέλεσμα αναφορικά με μετατοπίσεις και περιστροφές.*

\vec{R} : Συνισταμένη των συντρεχουσών

ΡΟΠΗ ΠΟΛΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Προσοχή! Εάν οι δυνάμεις δεν έχουν κοινό σημείο εφαρμογής (δεν είναι συντρέχουσες) τότε η συνισταμένη τους δεν επιφέρει ισοδύναμα αποτελέσματα.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots + \vec{\tau}_N = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i$$

$\vec{R} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i \quad \Rightarrow \quad \text{Μετατόπιση}$
$\vec{\tau} = \sum_{i=1}^N \vec{\tau}_i \quad \Rightarrow \quad \text{Περιστροφή}$

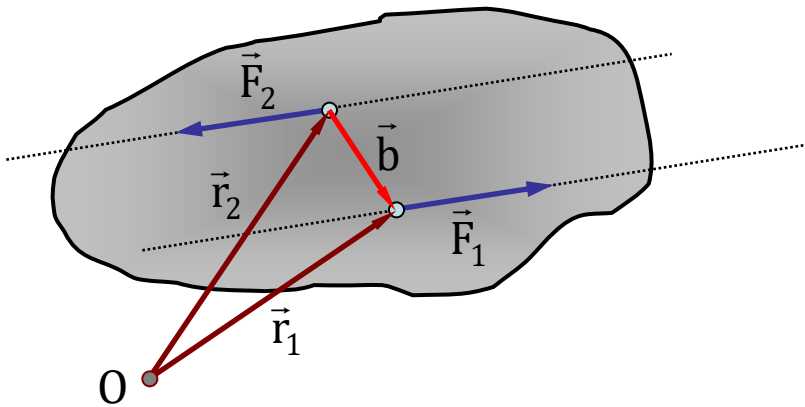
Επειδή κατά κανόνα τα διανύσματα \vec{R} και $\vec{\tau}$ **δεν είναι κάθετα μεταξύ τους**, δεν διασφαλίζεται η ικανοποίηση της σχέσης

$$\vec{\tau} = \vec{r} \times \vec{R}$$

για κάποιο ζητούμενο \vec{r} .

ΖΕΥΓΟΣ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Ζεύγος Δυνάμεων: Σύστημα δύο ίσων κατά μέτρο αλλά με αντίθετη φορά δυνάμεων με παράλληλες διευθύνσεις.



- Η ροπή του ζεύγους είναι **ανεξάρτητη** από το σημείο ως προς το οποίο υπολογίζεται η ροπή.
- Δεν μπορεί να βρεθεί **μια δύναμη** που να αντικαθιστά το ζεύγος δυνάμεων.

Συνισταμένη Δύναμη

$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$

Άρα, το ζεύγος δυνάμεων δεν προκαλεί μεταφορική κίνηση.

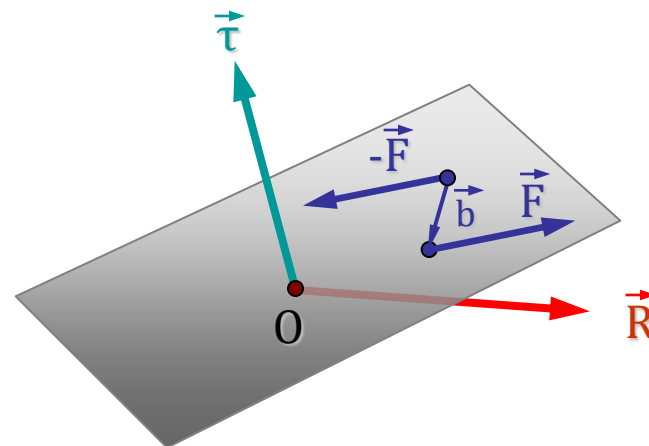
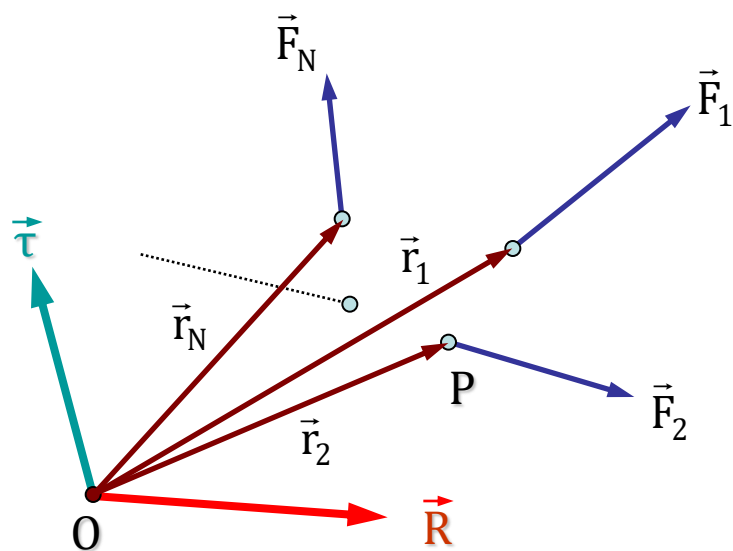
Ασκούμενη Ροπή

$$\begin{aligned}\vec{\tau} &= \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{F}_2 \\ &= \vec{r}_1 \times \vec{F}_1 - \vec{r}_2 \times \vec{F}_1 = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{F}_1 \\ &= \vec{b} \times \vec{F}_1\end{aligned}$$

$$\vec{\tau} = \vec{b} \times \vec{F}_1$$

ΣΥΣΤΗΜΑ ΠΟΛΛΩΝ ΔΥΝΑΜΕΩΝ

Ένα σύστημα πολλών δυνάμεων μπορεί πάντα να αντικατασταθεί με **μια δύναμη** και **ένα ζεύγος δυνάμεων**.



$$\vec{R} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{F}_3 + \dots + \vec{F}_N = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i$$

$$\vec{\tau} = \vec{\tau}_1 + \vec{\tau}_2 + \vec{\tau}_3 + \dots + \vec{\tau}_N = \sum_{i=1}^N \vec{r}_i \times \vec{F}_i = \vec{b} \times \vec{F}$$

- Η συνισταμένη δύναμη R διέρχεται από το σημείο υπολογισμού της ροπής O, ώστε να μην συνεισφέρει στην ροπή.
- Το ζεύγος δυνάμεων τοποθετείται σε επίπεδο κάθετο στην συνολική ροπή τ .