

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο

Ακαδημαϊκό Έτος 2024-2025

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

- Γενική Αντιμετώπιση
- Διατήρηση της Ορμής σε Συστήματα Μεταβλητής Μάζας
- Κίνηση Πυραύλου
- Διάφορα Προβλήματα

ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο
Ακαδημαϊκό Έτος 2024-2025

ΑΝΤΙΣΤΟΙΧΙΣΗ ΚΕΦΑΛΑΙΩΝ

	ΦΑΡΑΚΟΣ	GIANCOLI	HALLIDAY-RESNICK WALKER	YOUNG FREEDMAN
ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ		9.10	9.7, 9.12	8.5-8.6
ΚΙΝΗΣΗ ΠΥΡΑΥΛΟΥ		9.10	9.12	8.6

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Χρονική μεταβολή της μάζας ενός συστήματος

m : σταθερή
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt}$$

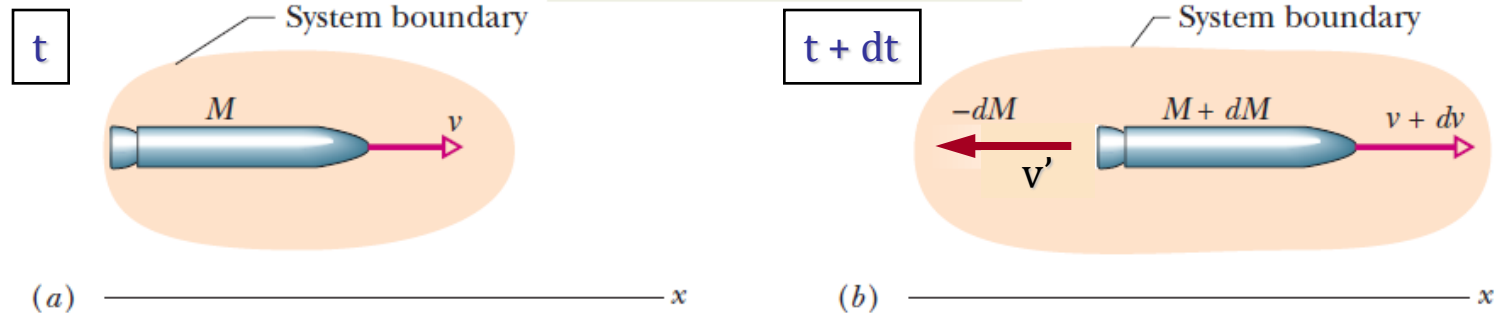
m : μεταβλητή
$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} = \frac{d(m\vec{v})}{dt} = m \frac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v} \frac{dm}{dt}$$

$m \frac{d\vec{v}}{dt}$: Μεταβολή της ορμής εξαιτίας της επιτάχυνσης

$\vec{v} \frac{dm}{dt}$: Μεταβολή της ορμής εξαιτίας της χρονικής μεταβολής της μάζας

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Κίνηση Πυραύλου



$$\vec{P}_i = M\vec{v}$$

$$\vec{P}_f = (M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - dM\vec{v}'$$

Μεταβολή της Ορμής του Συστήματος

$$d\vec{P} = \vec{P}_f - \vec{P}_i = \{(M + dM)(\vec{v} + d\vec{v}) - dM\vec{v}'\} - M\vec{v}$$



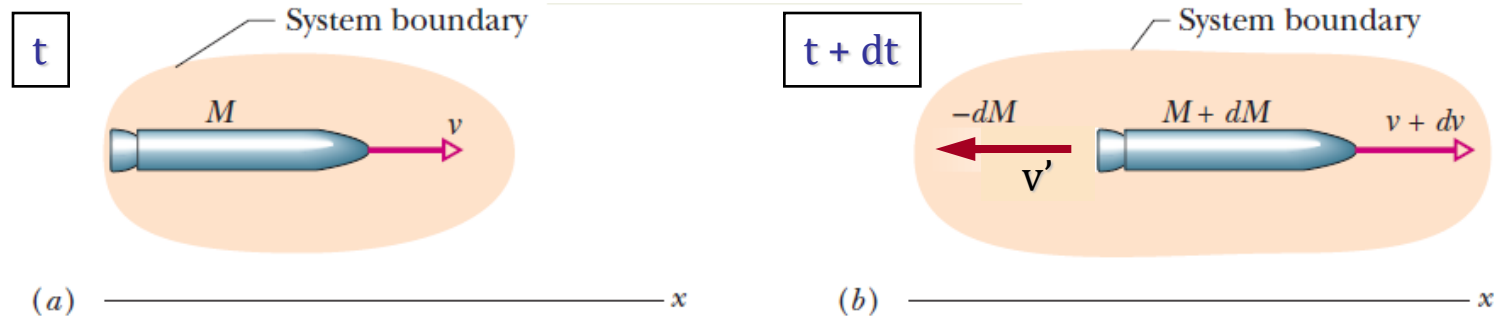
$$d\vec{P} = Md\vec{v} + \vec{v}dM - \vec{v}'dM = Md\vec{v} - dM(\vec{v}' - \vec{v})$$



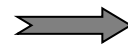
$$d\vec{P} = M d\vec{v} - \vec{v}_{rel} dM$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Κίνηση Πυραύλου



$$d\vec{P} = M d\vec{v} - \vec{v}_{rel} dM$$



$$dP = M dv + v_{rel} dM$$

$$\frac{dP}{dt} = M \frac{dv}{dt} + v_{rel} \frac{dM}{dt}$$

Θετική ποσότητα ($dM/dt < 0$)

Εάν $dP/dt = 0$ $0 = M \frac{dv}{dt} + v_{rel} \frac{dM}{dt} \Rightarrow M \frac{dv}{dt} = -v_{rel} \frac{dM}{dt}$

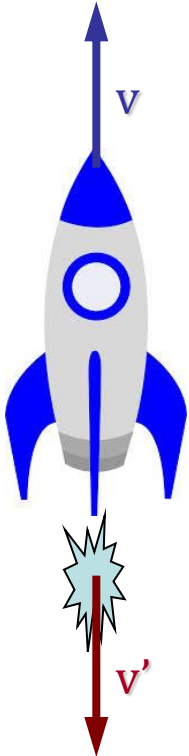


$$-v_{rel} \frac{dM}{dt}$$

Ωστική Δύναμη

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Κατακόρυφη Κίνηση Πυραύλου σε Βαρυτικό Πεδίο



$$\frac{dP}{dt} = M \frac{dv}{dt} + v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt}$$

$$-Mg = M \frac{dv}{dt} + v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt} \Rightarrow -g dt = dv + \frac{v_{\text{rel}}}{M} dM$$



$$-g \int_0^t dt = \int_{v_0}^v dv + v_{\text{rel}} \int_{M_0}^M \frac{dM}{M}$$

$$-gt = v - v_0 + v_{\text{rel}} (\ln M - \ln M_0) \Rightarrow v = v_0 + v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{M_0}{M} \right) - gt$$

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Κατακόρυφη Κίνηση Πυραύλου σε Βαρυτικό Πεδίο

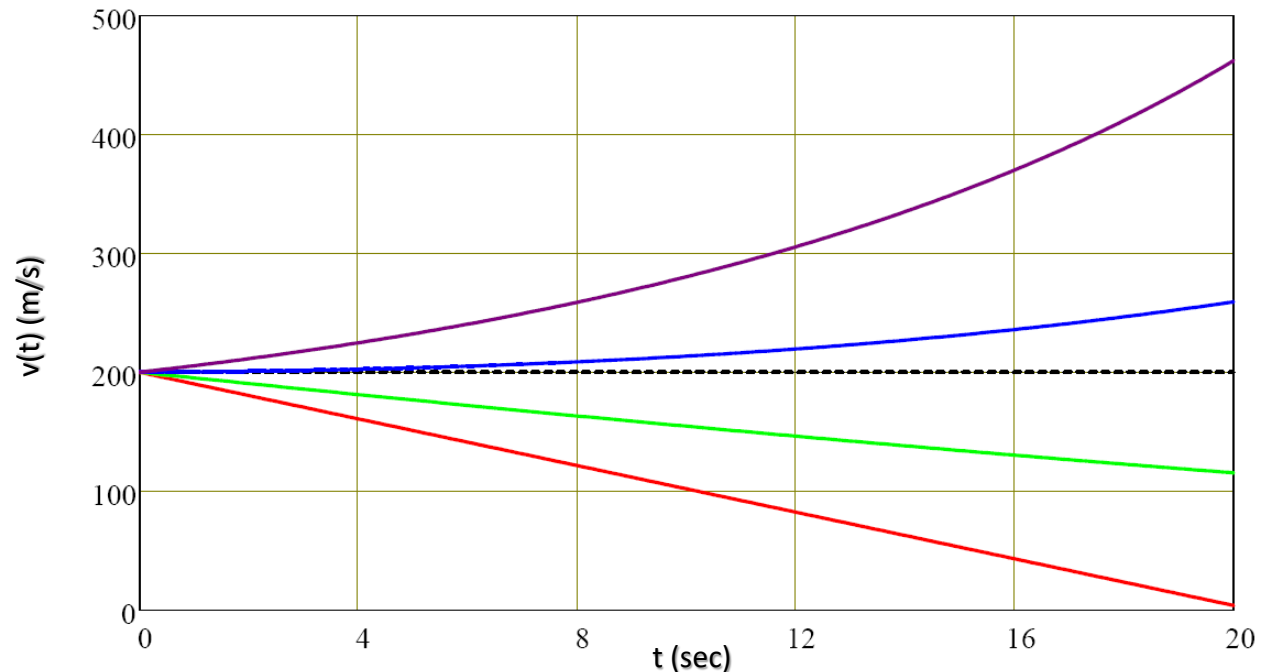
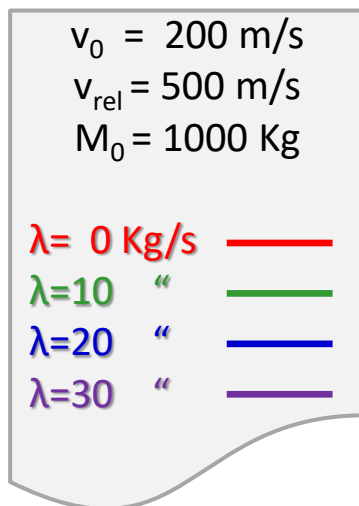
Υποθέτοντας σταθερή εκροή αερίων προώθησης ($\lambda > 0$) η προηγούμενη σχέση γίνεται:

$$v = v_0 + v_{\text{rel}} \ln\left(\frac{M_0}{M}\right) - gt$$

$$\frac{dM}{dt} = -\lambda \Rightarrow M = M_0 - \lambda t$$

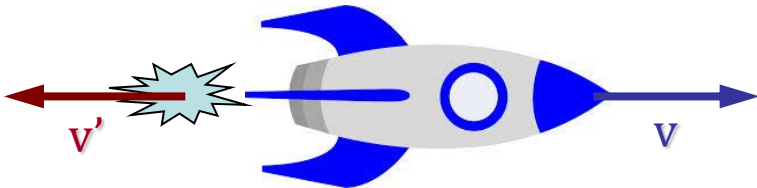
$$v = v_0 + v_{\text{rel}} \ln\left(\frac{M_0}{M_0 - \lambda t}\right) - gt$$

Γραφική παράσταση του $v(t)$ για διαφορετικές τιμές του λ



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Κίνηση Πυραύλου **εκτός** Βαρυτικού Πεδίου



$$\frac{dP}{dt} = M \frac{dv}{dt} + v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt}$$

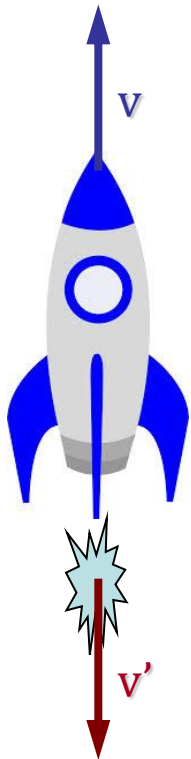
$$0 = M \frac{dv}{dt} + v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt} \Rightarrow 0 = dv + \frac{v_{\text{rel}}}{M} dM \Rightarrow 0 = \int_{v_0}^v dv + v_{\text{rel}} \int_{M_0}^M \frac{dM}{M}$$



$$0 = v - v_0 + v_{\text{rel}} (\ln M - \ln M_0) \Rightarrow v = v_0 + v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{M_0}{M} \right) = v_0 + v_{\text{rel}} \ln \left(\frac{M_0}{M_0 - \lambda t} \right)$$

όπου $\lambda = -dM/dt$ ($\lambda > 0$) η σταθερή εκροή αερίων προώθησης όπως και προηγούμενα.

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ



Εάν ο πύραυλος **παραμένει ακίνητος** στον αέρα ($v_0=0$) σε μικρό ύψος από την επιφάνεια της Γης (το g δεν αλλάζει), τότε συνεχίζει να ισχύει $dP/dt = -Mg$ αλλά και $dv/dt = 0$, οπότε η προηγούμενη εξίσωση γίνεται:

$$\frac{dP}{dt} = M \frac{dv}{dt} + v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt}$$

$$0 + v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt} = -Mg \Rightarrow \frac{dM}{M} = -\frac{g}{v_{\text{rel}}} dt$$

$$\int_{M_0}^M \frac{dM}{M} = -\frac{g}{v_{\text{rel}}} \int_0^t dt \Rightarrow \ln\left(\frac{M}{M_0}\right) = -\frac{g}{v_{\text{rel}}} t \Rightarrow M = M_0 e^{-\frac{g}{v_{\text{rel}}} t}$$

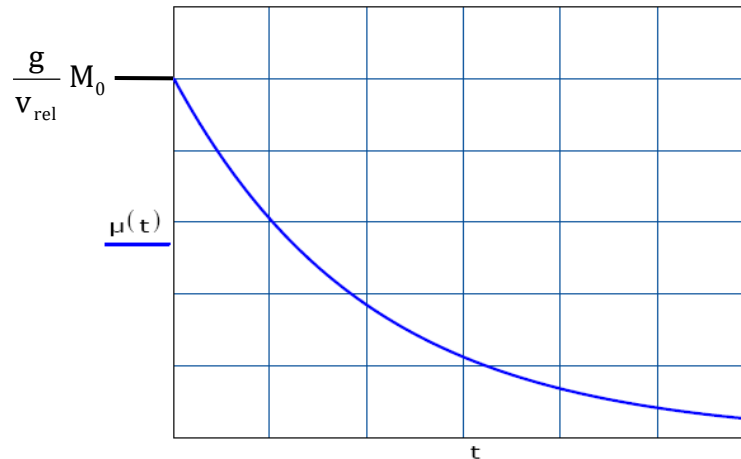
Η συνολική μάζα του πυραύλου βαίνει κατά συνέπεια εκθετικά ελαττούμενη.
Πόσος είναι ο ρυθμός εκτόξευσης των αερίων $\mu(t)$ στην περίπτωση αυτή;

ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Υπολογισμός του ρυθμού εκτόξευσης των αερίων στην περίπτωση που ο πύραυλος παραμένει ακίνητος

$$\mu(t) = -\frac{dM}{dt} = \frac{g}{v_{\text{rel}}} M \Rightarrow \mu(t) = \frac{g}{v_{\text{rel}}} M_0 e^{-\frac{g}{v_{\text{rel}}} t}$$

Όπως είναι προφανές, ο ρυθμός εκτόξευσης των αερίων $\mu(t)$ ελαττώνεται κι αυτός με τον ίδιο εκθετικό ρυθμό που ελαττώνεται και η μάζα του συστήματος.



ΣΥΣΤΗΜΑΤΑ ΜΕΤΑΒΛΗΤΗΣ ΜΑΖΑΣ

Χονδρό ομογενές σχοινί κυλιέται χωρίς τριβές υπό την επίδραση του βάρους του τμήματος που κρέμεται ελεύθερο.

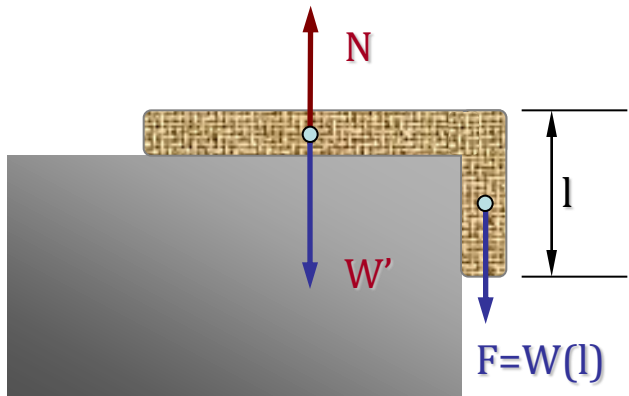
M : Συνολική μάζα σχοινιού

L_0 : Αρχικό μήκος του σχοινιού που κρέμεται ελεύθερο

L : Συνολικό μήκος σχοινιού

V_F : Τελική ταχύτητα

Να υπολογιστεί η τελική του ταχύτητα, όταν απελευθερωθεί όλο το μήκος του.



$$\frac{dP}{dt} = F \Rightarrow \frac{dP}{dt} = W(l) = mg = M \frac{l}{L} g \Rightarrow M \frac{dv}{dt} = M \frac{l}{L} g$$



$$\frac{dv}{dt} = \frac{g}{L} l \Rightarrow \frac{dv}{dl} \frac{dl}{dt} = \frac{g}{L} l \Rightarrow v \frac{dv}{dl} = \frac{g}{L} l \Rightarrow v dv = \frac{g}{L} l dl$$



$$\int_0^{V_F} v dv = \frac{g}{L} \int_{L_0}^L l dl \Rightarrow \frac{V_F^2}{2} = \frac{g}{2L} (L^2 - L_0^2) \Rightarrow$$

$$V_F = \sqrt{\frac{g}{L} (L^2 - L_0^2)}$$