ΦΥΣΙΚΗ Ι

ΕΘΝΙΚΟΝ & ΚΑΠΟΔΙΣΤΡΙΑΚΟΝ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟΝ ΑΘΗΝΩΝ

Χειμερινό Εξάμηνο

Ακαδημαϊκό Έτος 2024-2025

ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΕΣ ΔΙΑΦΑΝΕΙΕΣ & ΑΣΚΗΣΕΙΣ

- Κινηματική
- Ειδική Θεωρία Σχετικότητας
- Στατική – Ροπές – Κέντρο Μάζας
- Δυναμικό – Συντηρητικές Δυνάμεις

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Όταν δίνεται οποιαδήποτε κινηματική σχέση (απόστασης – ταχύτητας – επιτάχυνσης) συναρτήσει του χρόνου, τότε είναι δυνατή η εύρεση των υπολοίπων είτε με παραγώγιση είτε με ολοκλήρωση, σύμφωνα με το σχήμα:

$$v = \frac{dx}{dt} \qquad\qquad a = \frac{dv}{dt}$$

$$x = x(t) \qquad\qquad v = v(t) \qquad\qquad a = a(t)$$

$$x = \int v(t)dt \qquad\qquad v = \int a(t)dt$$

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Όταν δίνεται η ταχύτητα v συναρτήσει της θέσης v=v(x), τότε οι εξισώσεις κίνησης βρίσκονται με το παρακάτω σκεπτικό:

$$v = v(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{dx}{dt} = v(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{v(x)} = dt \;\Leftrightarrow \int \frac{dx}{v(x)} = \int dt = t$$

Παράδειγμα: $v = 2\sqrt{x}$ με αρχικές συνθήκες {t=0, x=4}

$$v = v(x) \;\Leftrightarrow\; \frac{dx}{dt} = v(x) \Leftrightarrow \frac{dx}{v(x)} = dt \;\Leftrightarrow \int \frac{1}{2\sqrt{x}} dx = \int dt = t$$

$$\sqrt{x} + C = t \;\xRightarrow{\text{Α.Σ.}}\; \sqrt{4} + C = 0 \;\Rightarrow\; C = -2$$

$$x = (t+2)^2$$

ΕΥΘΥΓΡΑΜΜΗ ΚΙΝΗΣΗ: ΕΞΙΣΩΣΕΙΣ ΚΙΝΗΣΗΣ

Ομοίως, όταν δίνεται η επιτάχυνση a συναρτήσει της θέσης a=a(x), τότε οι εξισώσεις κίνησης βρίσκονται με το παρακάτω σκεπτικό:

$$a = a(x) \iff \frac{dv}{dt} = a(x) \iff \frac{dv}{dx}\frac{dx}{dt} = a(x) \iff \frac{dv}{dx}v = a(x) \iff vdv = a(x)dx$$

$$\int vdv = \int a(x)dx$$

Παράδειγμα: $a = 6\sqrt[3]{x}$ με αρχικές συνθήκες {t=0, x=0, v=0}

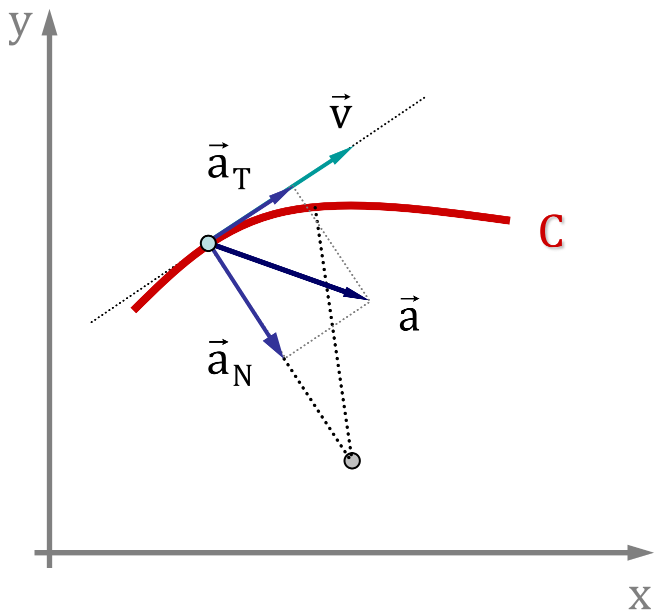
$$vdv = a(x)dx \iff \int vdv = \int 6\sqrt[3]{x}dx \iff \int vdv = \int 6x^{1/3}dx \iff$$

$$\frac{v^2}{2} + C = 6x^{4/3}\frac{3}{4} \iff \frac{v^2}{2} + C = \frac{9}{2}x^{4/3} \xRightarrow{\text{Α.Σ.}} 0 + C = 0 \Rightarrow C = 0$$

$$v^2 = 9x^{4/3} \iff v = 3x^{2/3}$$

Με βάση το προηγούμενο παράδειγμα από την παραπάνω σχέση εξάγεται και η εξίσωση της θέσης $\mathrm{x} = t^3$.

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ



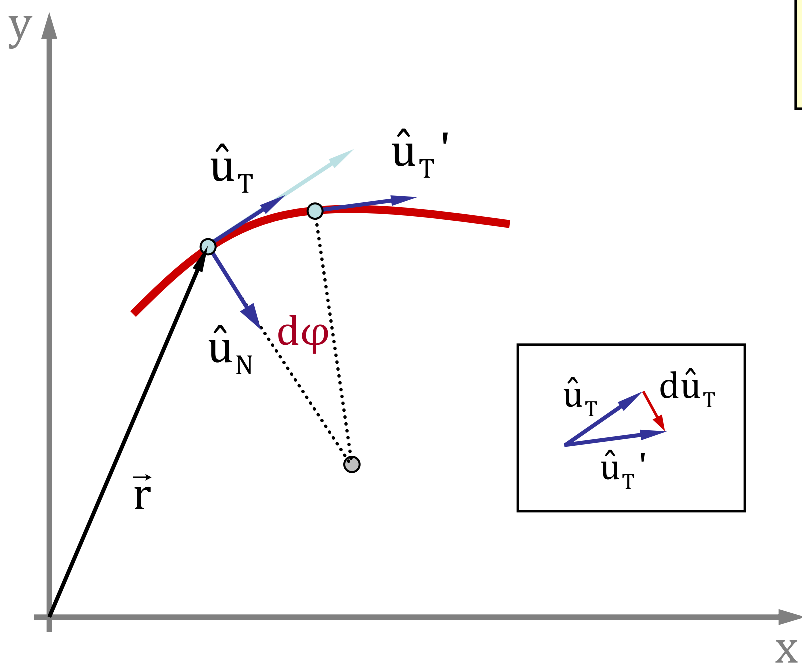
Σώμα κινείται στην τροχιά C και τη χρονική στιγμή t έχει ταχύτητα **v** και επιτάχυνση **a**. Η επιτάχυνση a έχει πάντα κατεύθυνση προς τα κοίλα της τροχιάς.

Μπορούμε να αναλύσουμε την επιτάχυνση σε δύο κάθετες συνιστώσες: Σε μια εφαπτομενική στην τροχιά και σε μια κάθετη συνιστώσα.

$\boxed{\vec{a}_T}$ Εφαπτομενική Επιτάχυνση: Αλλαγή στο μέτρο της ταχύτητας

$\boxed{\vec{a}_N}$ Κάθετη Επιτάχυνση: Αλλαγή στη διεύθυνση της ταχύτητας

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(\hat{u}_T v) = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \frac{d\hat{u}_T}{dt} v$$

Όταν η τροχιά δεν είναι ευθύγραμμη, τότε το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u_T}$ αλλάζει κατεύθυνση και η παράγωγός του ως προς τον χρόνο υπολογίζεται ως εξής:

$$d\hat{u}_T = |\hat{u}_T| d\varphi\, \hat{u}_N = 1 \cdot d\varphi\, \hat{u}_N = \hat{u}_N\, d\varphi$$

όπου το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{u_N}$, το οποίο εισάγεται για να καθορίσει την κατεύθυνση της μεταβολής $\mathbf{du_T}$ είναι κάθετο στο $\mathbf{u_T}$, δηλαδή κάθετο στην εφαπτομενική διεύθυνση της τροχιάς. Έτσι:

$$d\hat{u}_T = \hat{u}_N\, d\varphi \Rightarrow \frac{d\hat{u}_T}{dt} = \hat{u}_N \frac{d\varphi}{dt} = \hat{u}_N \frac{d\varphi}{ds}\frac{ds}{dt} = \hat{u}_N\, v \frac{d\varphi}{ds} = \hat{u}_N\, v \frac{d\varphi}{\rho\, d\varphi} = \hat{u}_N \frac{v}{\rho}$$

ΔΙΑΝΥΣΜΑ ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗΣ

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \Rightarrow \vec{a} = \frac{d}{dt}(\hat{u}_T v) = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \frac{d\hat{u}_T}{dt} v$$

$$\Downarrow$$

$$\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v}{\rho} v = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Εφαπτομενική (επιτρόχια) επιτάχυνση $\mathbf{a_T}$: Ρυθμός αλλαγής του μέτρου της ταχύτητας. Σε περίπτωση ομαλής καμπυλόγραμμης κίνησης (μέτρο ταχύτητας v σταθερό), η εφαπτομενική επιτάχυνση a_T εξαφανίζεται.

Κάθετη (κεντρομόλος) επιτάχυνση $\mathbf{a_N}$: Αλλάζει την κατεύθυνση της ταχύτητας. Σε ευθύγραμμη κίνηση η ακτίνα καμπυλότητας ρ απειρίζεται, οπότε η κάθετη επιτάχυνση μηδενίζεται.

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

Όπως αποδείχτηκε στα προηγούμενα, η επιτάχυνση στην γενικευμένη καμπυλόγραμμη κίνηση εκφράζεται με τις δύο συνιστώσες $\mathbf{a}_T$ (**επιτρόχια**) και $\mathbf{a}_N$ (**κεντρομόλο**):

$$\vec{a} = \hat{u}_T \frac{dv}{dt} + \hat{u}_N \frac{v^2}{\rho} = \vec{a}_T + \vec{a}_N$$

Αν δοθεί το διάνυσμα θέσης **r**(t) ως συνάρτηση του χρόνου, τότε είναι εύκολη η παραγώγισή του και η εύρεση και των υπολοίπων κινηματικών μεγεθών, της ταχύτητας **v**(t) και της επιτάχυνσης **a**(t):

$$\vec{r}(t) = x(t)\,\hat{i} + y(t)\,\hat{j} + z(t)\,\hat{k}$$

$$\vec{v}(t) = \frac{dx}{dt}\,\hat{i} + \frac{dy}{dt}\,\hat{j} + \frac{dz}{dt}\,\hat{k} = v_x(t)\,\hat{i} + v_y(t)\,\hat{j} + v_z(t)\,\hat{k}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{dv_x}{dt}\,\hat{i} + \frac{dv_y}{dt}\,\hat{j} + \frac{dv_z}{dt}\,\hat{k} = a_x(t)\,\hat{i} + a_y(t)\,\hat{j} + a_z(t)\,\hat{k}$$

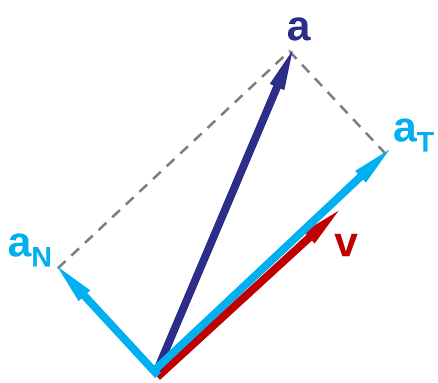
Στα επόμενα παρουσιάζεται η μεθοδολογία για την εύρεση της **ακτίνας καμπυλότητας ρ** από τα διανύσματα της ταχύτητας και της ταχύτητας **v**(t) και της επιτάχυνσης **a**(t).

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

1η Μέθοδος

Για τον υπολογισμό της ακτίνας καμπυλότητας ρ απαιτείται η γνώση του μέτρου της ταχύτητας και της κεντρομόλου συνιστώσας:

$$a_N = \frac{v^2}{\rho} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{a_N}$$



Γνωρίζοντας πως η επιτρόχια συνιστώσα $\mathbf{a_T}$ της επιτάχυνσης είναι συνευθειακή με την ταχύτητα **v**, τότε:

$$a_T = \vec{a} \cdot \hat{u}_T = \vec{a} \cdot \frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{v}}{v}$$

$$a^2 = a_T^2 + a_N^2 \;\Rightarrow\; a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2}$$

Αντικαθιστώντας στην παραπάνω σχέση, η ακτίνα καμπυλότητας ρ υπολογίζεται:

$$\rho = \frac{v^2}{a_N}$$

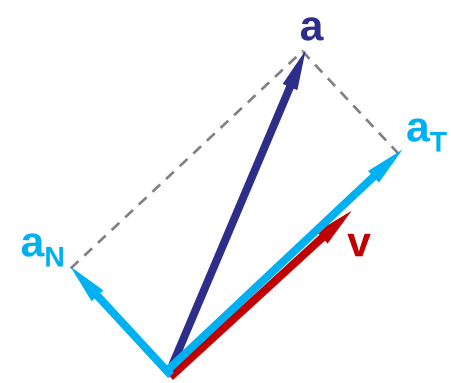
2η Μέθοδος

Εξετάζουμε το εξωτερικό γινόμενο των διανυσμάτων **v** και **a**. Ισχύουν:

$$\vec{v}\times\vec{a} = \vec{v}\times\left(\vec{a}_N + \vec{a}_T\right) = \vec{v}\times\vec{a}_N + \cancel{\vec{v}\times\vec{a}_T} = \vec{v}\times\vec{a}_N$$

$$\left|\vec{v}\times\vec{a}\right| = \left|\vec{v}\times\vec{a}_N\right| = \left|\vec{v}\right|\left|\vec{a}_N\right|\sin 90^o = v\,a_N$$

$$\boxed{a_N = \frac{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|}{v}}$$



Αντικαθιστώντας στην σχέση της ακτίνας καμπυλότητας, έχουμε:

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} \Rightarrow \rho = \frac{v^2}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|/v} \quad\Longrightarrow\quad \boxed{\rho = \frac{v^3}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|}}$$

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

Παράδειγμα

Το διάνυσμα θέσης κινητού στο επίπεδο περιγράφεται από την εξίσωση:

$$\boxed{\vec{r}(t) = 2t\,\hat{i} + 4t^2\,\hat{j}}$$

Να υπολογισθεί η **ακτίνα καμπυλότητας ρ** σαν συνάρτηση του χρόνου.

1η Μέθοδος

Υπολογίζουμε την ταχύτητα **v** και την επιτάχυνση **a** του κινητού:

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{v}(t) &= 2\,\hat{i} + 8t\,\hat{j}\\ \vec{a}(t) &= 0\,\hat{i} + 8\,\hat{j}\end{aligned}}$$

Βρίσκουμε το μέτρο της a_T (προβολή της επιτάχυνσης στην κατεύθυνση της ταχύτητας):

$$a_T = \vec{a}\cdot\hat{u}_T = \vec{a}\cdot\frac{\vec{v}}{v} = \frac{\vec{a}\cdot\vec{v}}{v} = \frac{(8\hat{j})\cdot(2\hat{i}+8t\,\hat{j})}{\sqrt{4+64t^2}} = \frac{64t}{\sqrt{4+64t^2}}$$

Υπολογίζουμε τη συνιστώσα a_N:

$$a_N = \sqrt{a^2 - a_T^2} = \sqrt{64 - \frac{64t^2}{4+64t^2}} = \frac{16}{\sqrt{4+64t^2}}$$

και τελικά:

$$\rho = \frac{v^2}{a_N} = \frac{4+64t^2}{16/\sqrt{4+64t^2}} = \frac{\left(4+64t^2\right)^{3/2}}{16} \Rightarrow \boxed{\rho = \frac{\left(1+16t^2\right)^{3/2}}{2}}$$

ΕΠΙΤΑΧΥΝΣΗ ΚΑΙ ΑΚΤΙΝΑ ΚΑΜΠΥΛΟΤΗΤΑΣ

2η Μέθοδος

Υπολογίζουμε την ταχύτητα **v** και την επιτάχυνση **a** του κινητού:

$$\vec{v}(t) = 2\,\hat{i} + 8t\,\hat{j}$$
$$\vec{a}(t) = 0\,\hat{i} + 8\,\hat{j}$$

Βρίσκουμε το μέτρο του εξωτερικού γινομένου **|v x a|** :

$$\vec{v}\times\vec{a} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 2 & 8t & 0 \\ 0 & 8 & 0 \end{vmatrix} = 16\hat{k} \;\Rightarrow\; \left|\vec{v}\times\vec{a}\right| = 16$$

Υπολογίζουμε την ακτίνα καμπυλότητας με βάση τη σχέση: $\boxed{\rho = \dfrac{v^3}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|}}$

$$\rho = \frac{v^3}{\left|\vec{v}\times\vec{a}\right|} = \frac{\left(4+64t^2\right)^{3/2}}{16}$$

$$\boxed{\rho = \frac{\left(1+16t^2\right)^{3/2}}{2}}$$

ΚΙΝΗΜΑΤΙΚΗ

Σώμα μάζας m κινείται με ταχύτητα $\vec{V}(x,y) = 2\hat{i} + 4x\hat{j}$, (για t=0, ισχύει ότι x=0 και y=0). Να βρεθούν:

1. Η εξίσωση y(x) της τροχιάς.
2. Η δύναμη $\vec{F}$ που ασκείται στο σώμα.
3. Η δυναμική ενέργεια του σώματος.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2020

Σωματίδιο κινείται με ταχύτητα $\vec{U} = t\,\hat{i} + 2t\,\hat{j}$. Βρείτε (α) το διάνυσμα θέσης $\vec{r}(t)$ (β) την επιτάχυνση $\vec{a}(t)$ (γ) την εξίσωση τροχιάς $\psi(x)$ και (δ) την ακτίνα καμπυλότητας $\rho(t)$.
Δίνεται ότι για $t=0$ είναι $x=0$ και $\psi=0$.

ΜΑΪΟΣ 2021

Η επιτάχυνση ενός κινητού κινούμενου στο επίπεδο (xy) περιγράφεται από τις σχέσεις $a_x = -4\cos(2t)$ και $a_y = -12\sin(2t)$. Βρείτε:

(α) Την εξίσωση της τροχιάς του.
(β) Την ακτίνα καμπυλότητάς του για $t=\pi/4$.
Για $t=0$ ισχύει ότι $\{v_{x0} = 0\ ,\ v_{y0} = 6\}$ και $\{x_0 = 1\ ,\ y_0 = 0\}$.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2022

Σωματίδιο κινείται στο επίπεδο *(xy)* και η επιτάχυνσή του περιγράφεται από τις εξισώσεις

$\begin{Bmatrix} a_x = -3\sin t \\ a_y = -4\cos t \end{Bmatrix}$. Εάν για t=0 ισχύουν $\begin{Bmatrix} v_{x0} = 3 \\ v_{y0} = 0 \end{Bmatrix}$ και $\begin{Bmatrix} x_0 = 3 \\ y_0 = 8 \end{Bmatrix}$, να βρεθεί η εξίσωση της τροχιάς του.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2023

Οι Εξισώσεις Μετασχηματισμού του Lorentz

Παράμετρος της ταχύτητας

$$\boxed{\beta = \frac{v}{c}}$$

Συντελεστής Lorentz

$$\boxed{\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}}$$

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt) \\ y' &= y \\ z' &= z \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{aligned} x &= \gamma(x' + vt') \\ y &= y' \\ z &= z' \\ t &= \gamma(t' + vx'/c^2) \end{aligned}$$

Συστολή του Μήκους

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma} = L_0\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

Μήκος Ηρεμίας ή Ιδιομήκος L_0

Το μήκος ενός αντικειμένου που μετριέται στο σύστημα ηρεμίας του αντικειμένου.

Μετρήσεις μήκους σε άλλα συστήματα αναφοράς που βρίσκονται σε σχετική κίνηση, παράλληλη με το μήκος αυτό, δίνουν πάντα μικρότερα αποτελέσματα.

Διαστολή του Χρόνου

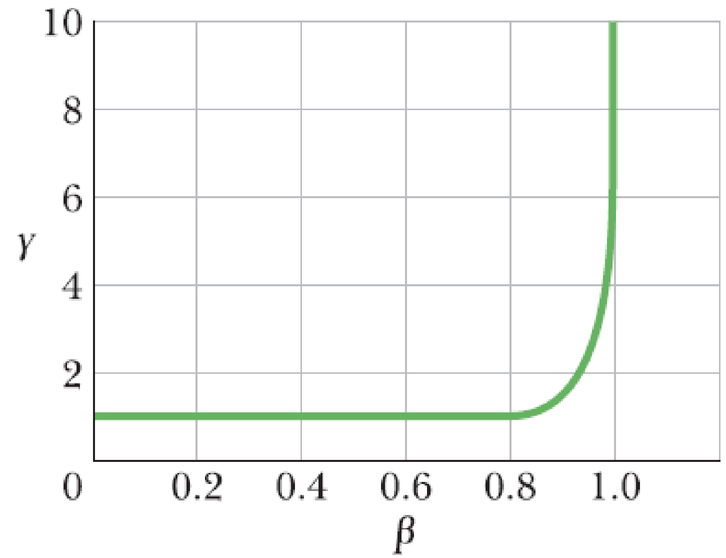
$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta t = \gamma \Delta t_0$$

Παράμετρος της ταχύτητας

$$\beta = \frac{v}{c}$$

Συντελεστής Lorentz

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$



Ιδιοχρονικό Διάστημα ή Ιδιόχρονος Δt_0: Το χρονικό διάστημα που μεσολαβεί ανάμεσα σε δύο συμβάντα αδρανειακού συστήματος τα οποία βρίσκονται στην ίδια θέση.

Οι τιμές αυτού του χρονικού διαστήματος σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα είναι πάντα μεγαλύτερες.

Διαστολή του Χρόνου

Τα μιόνια (μ) παράγονται στα ανώτερα στρώματα της ατμόσφαιρας από την αλληλεπίδραση της κοσμικής ακτινοβολίας με τα πρώτα ατμοσφαιρικά μόρια. Παρά το γεγονός πως η μέσος χρόνος ζωής των μιονίων είναι μόνο $\Delta t_0=2.2\mu s$ στο (ακίνητο) σύστημα του εργαστηρίου, καταφέρνουν να διασχίσουν με ταχύτητα $v=0.9994c$ όλο το πάχος της ατμόσφαιρας και να φτάσουν στην επιφάνεια της γης. Πώς συμβαίνει αυτό;

Απόσταση σε χρόνο Δt_0

$$\Delta t_0 v=(2.2\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s})\times(3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})=660\mathrm{m}$$

Ο χρόνος Δt_0 αποτελεί τον ιδιοχρόνο ζωής του μιονίου στο σταθερό σύστημα αναφοράς του. Αντίθετα, για ένα γήινο παρατηρητή, ο χρόνος αυτός θα είναι διασταλμένος κατά τον παράγοντα Lorentz:

$$\gamma=\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{1}{\sqrt{1-(0.9994)^2}}=28.87 \quad\Rightarrow\quad \Delta t=\gamma\Delta t_0=28.87\cdot 2.2\mu s=63.5\mu s$$

Απόσταση σε χρόνο Δt

$$\Delta t v=(63.5\cdot 10^{-6}\,\mathrm{s})\times(3\cdot 10^{8}\,\mathrm{m/s})=19050\mathrm{m}$$

Η Σχετικότητα των Ταχυτήτων

Το σύστημα O' κινείται με ομαλή ταχύτητα v σε σχέση με το O.

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\Delta t)$$
$$\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\Delta x / c^2)$$

$$\frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\gamma(\Delta x - v\Delta t)}{\gamma(\Delta t - v\Delta x / c^2)} \Rightarrow \frac{\Delta x'}{\Delta t'} = \frac{\Delta x - v\Delta t}{\Delta t - v\Delta x / c^2} = \frac{\Delta x / \Delta t - v}{1 - v(\Delta x / \Delta t)c^2}$$

$\Delta x'/\Delta t' = u_x'$: Η ταχύτητα του σώματος όπως μετράται από το **O'**

$\Delta x/\Delta t = u_x$: Η ταχύτητα του σώματος όπως μετράται από το **O**

$$u_x' = \frac{u_x - v}{1 - u_x v / c^2}$$

Η Σχετικότητα των Ταχυτήτων

$\Delta x'/\Delta t' = u_x'$: Η ταχύτητα του σώματος όπως μετράται από το **O'**

$\Delta x/\Delta t = u_x$: Η ταχύτητα του σώματος όπως μετράται από το **O**

Ισοδύναμα, μπορεί να θεωρηθεί το σύστημα O' *«ακίνητο»,* οπότε το σύστημα O κινείται με ταχύτητα **–v**.

$$u_x = \frac{u_x' - (-v)}{1 - u_x'(-v)/c^2} = \frac{u_x' + v}{1 + u_x' v/c^2}$$

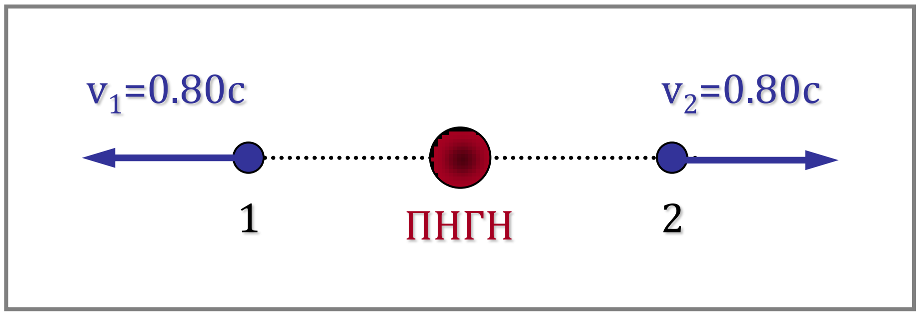
$$\Downarrow$$

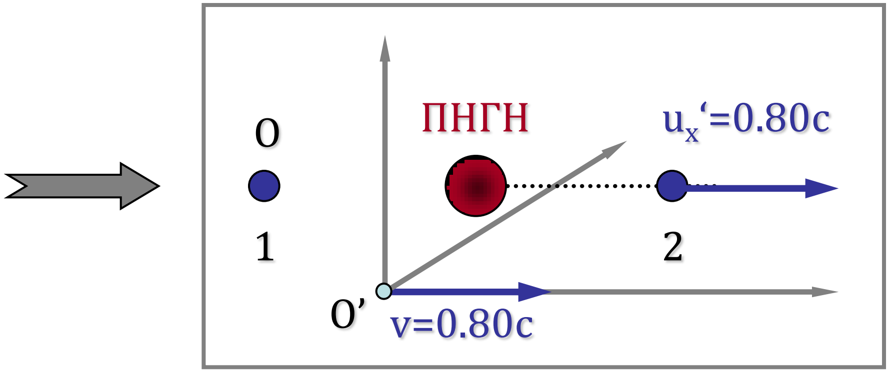
$$\boxed{u_x = \frac{u_x' + v}{1 + u_x' v/c^2}}$$

ΕΙΔΙΚΗ ΘΕΩΡΙΑ ΣΧΕΤΙΚΟΤΗΤΑΣ

Μια πηγή εκπέμπει δύο ηλεκτρόνια κινούμενα σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητα 0.80c το καθένα σε σχέση με την πηγή. Ο Γαλιλαϊκός μετασχηματισμός υπολογίζει σαν σχετική ταχύτητα του ενός ηλεκτρονίου σε σχέση με το άλλο την εσφαλμένη τιμή 0.80c+0.80c=1.60c.

Πώς θα υπολογισθεί με βάση την Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας η σχετική αυτή ταχύτητα;





- Θεωρούμε το ηλεκτρόνιο-1 ακίνητο (Σύστημα Ο)
- Θεωρούμε την πηγή ακίνητη σε κινούμενο (ως προς το Ο) Σύστημα Ο′
- Η ταχύτητα του Ο' σε σχέση με το Ο πρέπει να είναι v=0.80c
- Στο σύστημα Ο' το ηλεκτρόνιο-2 κινείται με ταχύτητα u_x'=0.80c

Η ζητούμενη σχετική ταχύτητα του ηλεκτρονίου-2 σε σχέση με το 1 είναι η u_x, πώς δηλαδή μετασχηματίζεται η ταχύτητα u_x' στο σύστημα Ο:

$$u_x = \frac{u'_x + v}{1 + u'_x v / c^2} = \frac{0.80c + 0.80c}{1 + 0.80 \cdot 0.80} = \frac{1.60c}{1.64} \Rightarrow \boxed{u_x = 0.976c}$$

Σχετικιστική έκφραση Ενέργειας

Ενέργεια Ηρεμίας

$$E_0 = mc^2$$

K: Κινητική Ενέργεια

$$\boxed{E = \gamma mc^2}$$

Ολική Ενέργεια

$$E = E_0 + K = mc^2 + K$$

$$E = \gamma mc^2 \Rightarrow E_0 + K = \gamma mc^2 \Rightarrow K = \gamma mc^2 - E_0 = \gamma mc^2 - mc^2$$

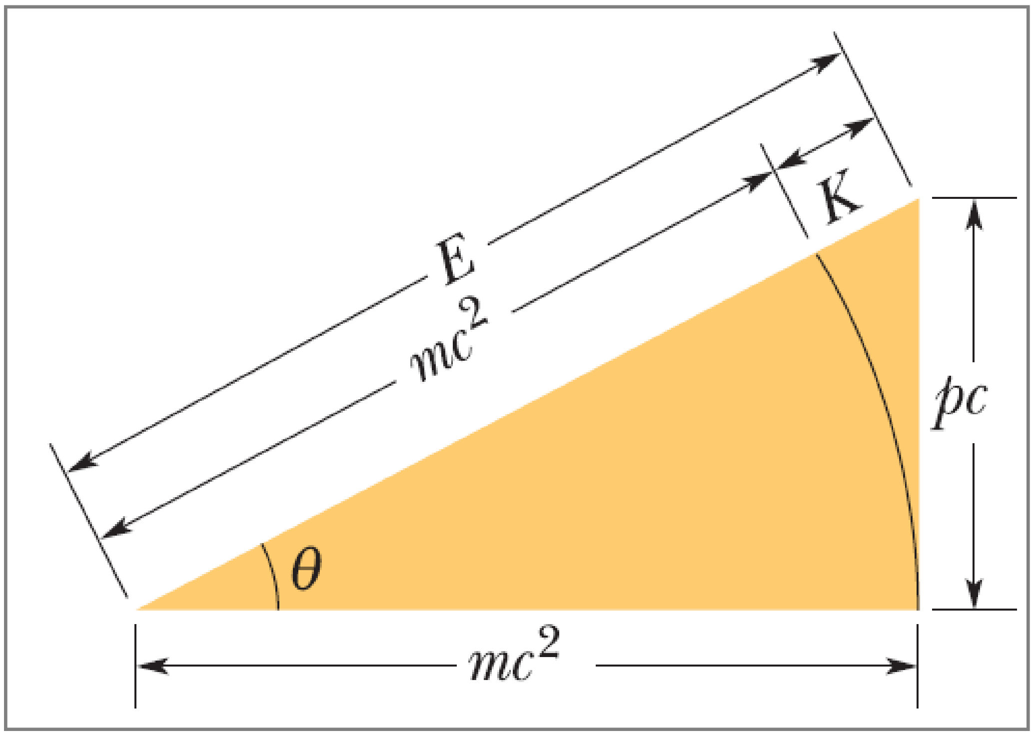
$$\boxed{K = (\gamma - 1)mc^2}$$

Ορμή και Κινητική Ενέργεια

Απαλοιφή της ταχύτητας από τους σχετικιστικούς τύπους της Ενέργειας και της Ορμής δίνει:

$$\boxed{E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2}$$

Πυθαγόρειο Θεώρημα για Ορμή, Ενέργεια Ηρεμίας και Ολική Ενέργεια!



Απόδειξη

$$E = \gamma mc^2 \Rightarrow E^2 = \gamma^2 m^2 c^4$$

$$p = \gamma mv \Rightarrow p^2 = \gamma^2 m^2 v^2$$

$$\begin{aligned} E^2 - p^2c^2 &= \gamma^2 m^2 c^4 - \gamma^2 m^2 v^2 c^2 \\ &= \gamma^2 m^2 c^2 (c^2 - v^2) \\ &= m^2 c^2 \cdot \gamma^2 (c^2 - v^2) \\ &= m^2 c^2 \cdot c^2 = m^2 c^4 \end{aligned}$$

(α) Μια σκάλα μήκους L είναι στηριγμένη στον τοίχο σχηματίζοντας με το δάπεδο (και με τον τοίχο) γωνία $\varphi=45^0$. Ένας κινούμενος παρατηρητής Σ' που τρέχει παράλληλα με το δάπεδο με ταχύτητα V, ως προς το σύστημα του δωματίου στο οποίο η σκάλα είναι ακίνητη, μετράει το μήκος της σκάλας και βρίσκει ότι αυτό είναι $\sqrt{3}\,L/2$. Να υπολογιστεί η ταχύτητα V.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2021

Δύο ασταθή υποατομικά σωματίδια 1 και 2 κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ταχύτητες V_1 και V_2 ως προς ακίνητο παρατηρητή. Για το σωματίδιο 1 ισχύει πως η συνολική του ενέργεια είναι διπλάσια της ενέργειας ηρεμίας του. Ο παρατηρητής βλέπει το σωματίδιο 2 να διασπάται σε τριπλάσιο χρόνο σε σχέση με το χρόνο ζωής του ιδίου σωματιδίου σε ηρεμία. Να υπολογιστεί η σχετική ταχύτητα V_{12} του ενός σωματιδίου ως προς το άλλο.

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2022

Δύο σωματίδια 1 και 2 κινούνται σε αντίθετες κατευθύνσεις με ίσες κατά μέτρο ταχύτητες $V_1=V_2=V$ ως προς ακίνητο παρατηρητή. Εάν η σχετική ταχύτητα V_{12} του ενός σωματιδίου ως προς το άλλο έχει μέτρο $V_{12} = c/\lambda$, όπου λ θετική σταθερά με $\lambda \geq 1$ και c η ταχύτητα του φωτός, να υπολογίσετε την ταχύτητα V των σωματιδίων ως προς τον ακίνητο παρατηρητή.

Επαληθεύστε την ορθότητα της απάντησής σας για $\lambda=1$.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2022

Ισόπλευρο τρίγωνο πλευράς L κινείται με σχετικιστική ταχύτητα $v = 0.6c$ κατά την κατεύθυνση μιας πλευράς του ως προς ακίνητο παρατηρητή. Το εμβαδόν του τριγώνου που αντιλαμβάνεται ο ακίνητος παρατηρητής είναι:

(α) Αυξημένο κατά 25% (β) Μειωμένο κατά 60% (γ) Μειωμένο κατά 25%

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2023

ΕΥΡΕΣΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

Συνεχής κατανομή ύλης: Τα αθροίσματα αντικαθίστανται με ολοκληρώματα

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1x_1 + m_2x_2 + m_3x_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i}$$

$$y_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1y_1 + m_2y_2 + m_3y_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i}$$

$$z_{\mathrm{cm}} = \frac{m_1z_1 + m_2z_2 + m_3z_3 + \cdots}{m_1 + m_2 + m_3 + \cdots} = \frac{\sum_i m_i z_i}{\sum_i m_i}$$

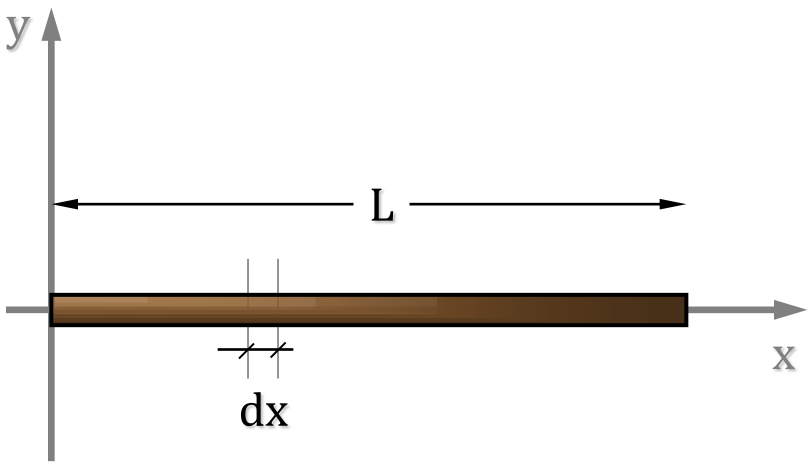
$\Longrightarrow$

$$\boxed{\begin{aligned} x_{\mathrm{CM}} &= \frac{\int_M x\,dm}{\int_M dm} = \frac{\int_M x\,dm}{M} \\ y_{\mathrm{CM}} &= \frac{\int_M y\,dm}{\int_M dm} = \frac{\int_M y\,dm}{M} \\ z_{\mathrm{CM}} &= \frac{\int_M z\,dm}{\int_M dm} = \frac{\int_M z\,dm}{M} \end{aligned}}$$

Η γεωμετρική συμμετρία του σώματος απλουστεύει τους υπολογισμούς.

ΕΥΡΕΣΗ ΚΕΝΤΡΟΥ ΜΑΖΑΣ

Να βρεθεί το κέντρο βάρους ανομοιογενούς ράβδου μήκους L, όταν η πυκνότητά της εξαρτάται γραμμικά από το μήκος της: $\rho(x)=\rho_0(1+x/L)$.



Όπως προηγουμένως, για ένα απειροστό μήκος dx ισχύουν:

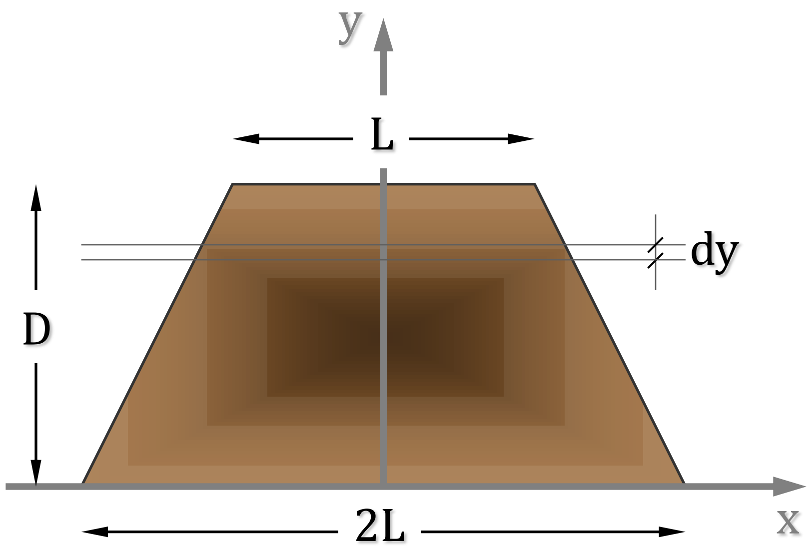
$$dV = D \cdot h \cdot dx$$

$$dm = \rho\, dV = \rho_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) \cdot D \cdot h \cdot dx$$

$$x_{CM} = \frac{\int_0^L x\, dm}{\int_0^L dm} = \frac{\int_0^L x \rho_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) Dhdx}{\int_0^L \rho_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) Dhdx} = \frac{\int_0^L x \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx}{\int_0^L \left(1 + \frac{x}{L}\right) dx} = \frac{L^2/2 + L^3/3L}{L + L^2/2L} = \frac{5L^2/6}{3L/2}$$

$$\boxed{x_{CM} = \frac{5}{9} L}$$

Να βρεθεί το κέντρο βάρους ομογενούς πλάκας σχήματος ισοσκελούς τραπεζίου με βάσεις L και 2L και ύψος D.



Σε τυχαίο ύψος y και για στοιχειώδες dy το μήκος x του στοιχείου δίνεται από τη σχέση:

$$x = 2L - \frac{y}{D}L = L\left(2 - \frac{y}{D}\right)$$

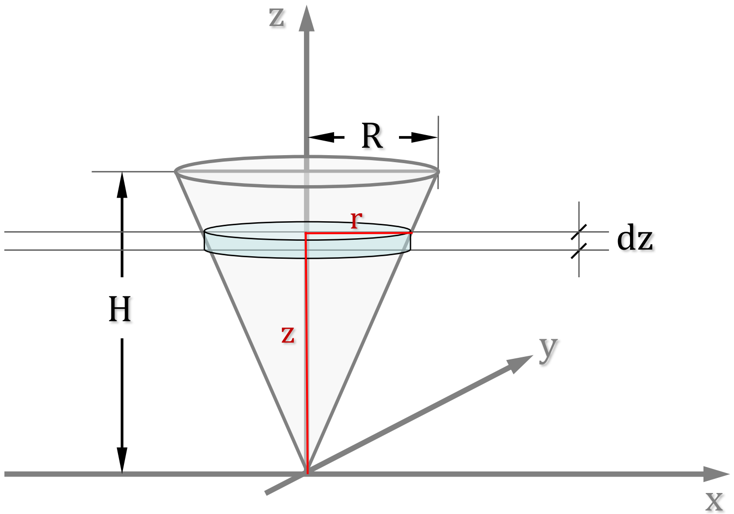
Οπότε:
$$dV = x \cdot h \cdot dy = L\left(2 - \frac{y}{D}\right) \cdot h \cdot dy$$

$$dm = \rho_0 \cdot L\left(2 - \frac{y}{D}\right) \cdot h \cdot dy$$

$$y_{CM} = \frac{\int_0^D y\,dm}{\int_0^D dm} = \frac{\int_0^D y\rho_0 L\left(2 - y/D\right)hdy}{\int_0^D \rho_0 L\left(2 - y/D\right)hdy} = \frac{\int_0^D y\left(2 - y/D\right)dy}{\int_0^D \left(2 - y/D\right)dy} = \frac{D^2 - D^3/3D}{2D - D^2/2D} = \frac{2/3\,D^2}{3/2\,D}$$

$$\boxed{y_{CM} = \frac{4}{9}D}$$

Κέντρο μάζας κώνου ύψους H (και ακτίνας R)



Ο κώνος τοποθετείται με τον άξονα του κατά μήκος του z και η κορυφή του να συμπίπτει με την αρχή των αξόνων. Είναι προφανές πως λόγω συμμετρίας:

$$x_{CM} = y_{CM} = 0$$

Επιλέγοντας λεπτό δίσκο πάχους dz σε ύψος z, του οποίου η ακτίνα είναι r, ισχύει:

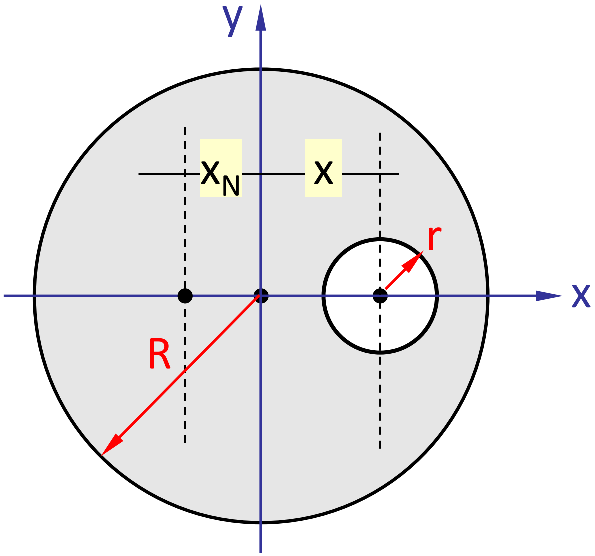
$$\frac{r}{z} = \frac{R}{H} \Rightarrow r = z\frac{R}{H}$$

Οπότε: $dm = \rho_0\, dV = \rho_0\, \pi r^2 dz = \rho_0\, \pi \left(z\frac{R}{H} \right)^2 dz$

$$z_{CM} = \frac{\int_0^H z\, dm}{\int_M dm} = \frac{\int_0^D z\rho_0 \pi \left(R/H \right)^2 z^2\, dz}{\rho_0 \cdot \frac{1}{3}\pi R^2 H} = \frac{\frac{1}{H^2}\int_0^H z^3\, dz}{\frac{1}{3} H} = \frac{\frac{1}{H^2}\frac{H^4}{4}}{\frac{1}{3} H} = \frac{3}{4} H$$

Άρα το κέντρο μάζας κώνου απέχει από την κορυφή του: $\boxed{z_{CM} = \frac{3}{4} H}$
ή ισοδύναμα ¼ H από τη βάση του.

Αφαίρεση τμήματος μάζας από σώμα συμμετρικού σχήματος



Εάν από το δίσκο ακτίνας **R** του σχήματος αφαιρεθεί κυκλικό τμήμα ακτίνας **r** σε απόσταση **x** από το αρχικό κέντρο μάζας του σώματος, τότε το νέο κέντρο μετατίθεται στην απόσταση x_N, για την οποία ισχύει:

$$\boxed{x \cdot m = x_N \cdot (M - m)}$$

όπου **M** η αρχική μάζα του σώματος και **m** η μάζα του σώματος που αφαιρείται.

<u>**Παράδειγμα**</u>
Εάν η ακτίνα του αρχικού (ομογενούς) δίσκου είναι **R** και του τμήματος που αφαιρείται **r = R/4**, το δε **x = R/2**, τότε:

d: πάχος του δίσκου

$$\left.\begin{cases} M = \rho_0 \pi R^2 d \\ m = \rho_0 \pi r^2 d = \rho_0 \pi \left(R/4\right)^2 d = M/16 \end{cases}\right\} \Rightarrow x \cdot m = x_N \cdot (M - m) \Rightarrow \frac{R}{2} \cdot \frac{M}{16} = x_N \cdot \left(M - \frac{M}{16}\right)$$

Οπότε: $$\boxed{x_N = \tfrac{1}{30} R}$$

ΣΤΑΤΙΚΗ – ΡΟΠΕΣ – ΚΕΝΤΡΟ ΜΑΖΑΣ

Η θέση του κέντρου μάζας μιας λεπτής, μη ομογενούς ράβδου μήκους L, η πυκνότητα της οποίας δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{\rho(x) = \rho_o + (\rho_o/L)x}$ όπου ρ_o σταθερά και x η απόσταση από το ένα άκρο της είναι:

(α) (5/6) L　　　(β) (3/2) L　　　(γ) (5/9) L

ΙΑΝΟΥΑΡΙΟΣ 2023

Οι συντεταγμένες των θέσεων τριών σωματιδίων σε ένα ορθογώνιο σύστημα συντεταγμένων (x,y) είναι $m_1(0, 0)$, $m_2(3, 0)$ $m_3(3,3)$. Να βρεθεί το κέντρο μάζας του συστήματος των τριών σωματιδίων ως προς την αρχή των αξόνων εάν $m_1=m_2=m_3=m$.

(α) x=2, y= 1/2　　　(β) x=2, y=1　　　(γ) x=1, y=2

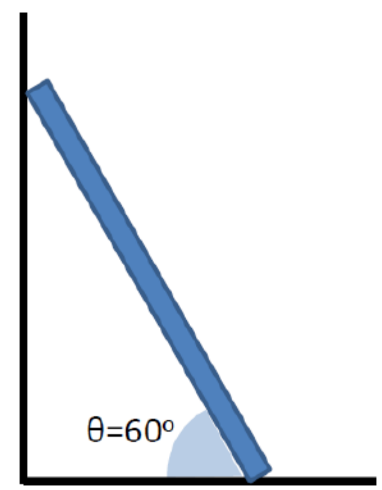
ΜΑΪΟΣ 2023

Μία σκάλα στήριξης μάζας m ισορροπεί σε δάπεδο με τριβή και σε λείο τοίχο, σχηματίζοντας γωνία θ=60° με το δάπεδο. Αν L το μήκος της σκάλας, η δύναμη F από το λείο τοίχο που ασκείται στη σκάλα είναι:

(α) $F = \dfrac{mg}{2\sqrt{3}}$

(β) $F = \dfrac{mg\sqrt{3}}{2}$

(γ) $F = \dfrac{mgL}{2\sqrt{3}}$



ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2023

Ανάλυση σε τρεις διαστάσεις

Το έργο μεταβλητής δύναμης σε τρεις διαστάσεις υπολογίζεται ως ακολούθως:

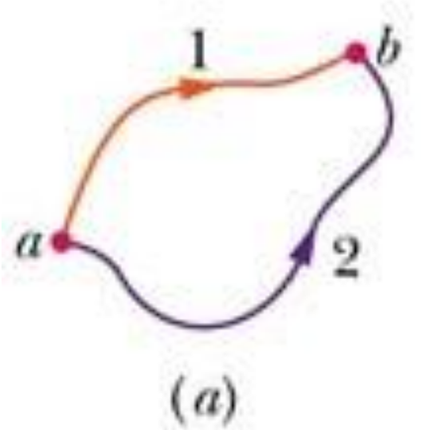
$$\left.\begin{aligned}\vec{F} &= F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k} \\ d\vec{r} &= dx\,\hat{i} + dy\,\hat{j} + dz\,\hat{k}\end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{dW = \vec{F}\cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy + F_z dz}$$

Κατά συνέπεια:

$$W = \int_{r_i}^{r_f} dW = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz$$

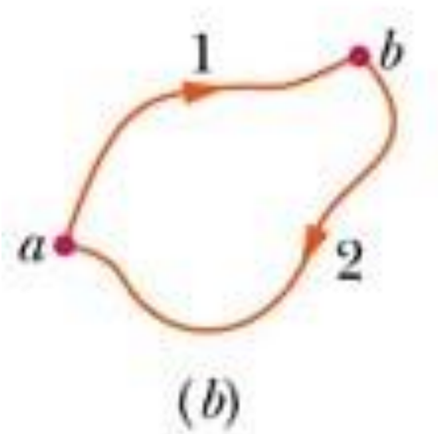
$$\Downarrow$$

$$\boxed{W = \int_{x_i}^{x_f} F_x dx + \int_{y_i}^{y_f} F_y dy + \int_{z_i}^{z_f} F_z dz}$$



Το έργο που παράγεται από μια συντηρητική δύναμη σε ένα σωματίδιο που κινείται από το σημείο a στο σημείο b δεν εξαρτάται από την τροχιά που ακολουθεί το σωματίδιο.

$$\boxed{W_{ab,1} = W_{ab,2}}$$



Κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής μια συντηρητική δύναμη δίνει συνολικό έργο μηδέν.

$$W_{ab,1} = W_{ab,2} = -W_{ba,2}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{W_{ab,1} + W_{ba,2} = W_{ab,1\rightarrow ba,2} = 0}$$

ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Αν μια δύναμη **F** είναι συντηρητική, δηλαδή το παραγόμενο έργο εξαρτάται μόνο από την αρχική και τελική θέση, τότε μπορεί να βρεθεί μια συνάρτηση **U** η οποία να αποδίδει ποσοτικά τη διαφορά αυτή ως:

$$W = \int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = U(x_i) - U(x_f) = -\Delta U$$

Η συνάρτηση αυτή καλείται Δυναμικό ή Δυναμική Ενέργεια. Για το U ισχύει:

$$\int_{x_i}^{x_f} F(x)\,dx = U(x_i) - U(x_f) \Rightarrow F(x)\,dx = -dU(x)$$

$$\Downarrow$$

$$F(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Για το δυναμικό γενικότερα ισχύει:

$$\vec{F} = -\mathrm{grad}U = -\vec{\nabla}U = -\left(\frac{\partial U}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial U}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial U}{\partial z}\hat{k}\right)$$

Για να είναι μια δύναμη συντηρητική αποδεικνύεται πως πρέπει να ισχύουν:

$$\frac{\partial F_x}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \quad , \quad \frac{\partial F_z}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial z} \quad , \quad \frac{\partial F_y}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial y}$$

Τότε μπορεί να προσδιορισθεί η συνάρτηση U(x,y,z) έτσι ώστε

$$\vec{F} = -\vec{\nabla}U$$

Παράδειγμα

$$\vec{F} = (x^2 + y^2)\,\hat{i} + 2xy\,\hat{j}$$

Να βρεθεί το έργο της δύναμης αυτής από το σημείο (0,0) στο (2,4) κατά μήκος της καμπύλης: (α) y=2x (β) y=x^2

$y = 2x$

$$W_a = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy = \int_0^2 (x^2 + y^2)\,dx + \int_0^4 2xy\,dy = \int_0^2 (x^2 + 4x^2)\,dx + \int_0^4 y^2\,dy$$

$$\Downarrow$$

$$W = \left.\frac{5x^3}{3}\right|_0^2 + \left.\frac{y^3}{3}\right|_0^4 = \frac{40}{3} + \frac{64}{3} = \frac{104}{3}$$

$y = x^2$

$$W_b = \int_{x_1}^{x_2} F_x\,dx + \int_{y_1}^{y_2} F_y\,dy = \int_0^2 (x^2 + y^2)\,dx + \int_0^4 2xy\,dy = \int_0^2 (x^2 + x^4)\,dx + \int_0^4 2y^{3/2}\,dy$$

$$\Downarrow$$

$$W = \left.\frac{x^3}{3}\right|_0^2 + \left.\frac{x^5}{5}\right|_0^2 + \left.\frac{4y^{5/2}}{5}\right|_0^4 = \frac{8}{3} + \frac{32}{5} + \frac{128}{5} = \frac{104}{3}$$

ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Στο προηγούμενο παράδειγμα βρέθηκε **$W_a=W_b$**, όπως ήταν αναμενόμενο, δεδομένου ότι:

$$\frac{\partial F_y}{\partial x} = \frac{\partial(2xy)}{\partial x} = 2y = \frac{\partial(x^2+y^2)}{\partial y} = \frac{\partial F_x}{\partial y}$$

Άρα μπορεί να βρεθεί μια συνάρτηση **U(x,y)** τέτοια ώστε:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} &= -F_x = -(x^2+y^2) \Rightarrow U = -\left(\frac{x^3}{3} + xy^2\right) + g(y) \\ \frac{\partial U}{\partial y} &= -F_y = -2xy \Rightarrow U = -xy^2 + f(x) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{\begin{aligned} f(x) &= -\frac{x^3}{3} \\ g(y) &= C \end{aligned}}$$

$$\Downarrow$$

$$\boxed{U(x,y) = -\frac{x^3}{3} - xy^2 + C}$$

Εύκολα παρατηρούμε πως: $U(0,0) - U(2,4) = \frac{8}{3} + 2\cdot 16 = \frac{104}{3}$

ΔΥΝΑΜΙΚΟ – ΣΥΝΤΗΡΗΤΙΚΕΣ ΔΥΝΑΜΕΙΣ

Υλικό σημείο μάζας m=1 κινείται ευθύγραμμα επάνω στον θετικό ημιάξονα των x υπό την επίδραση δύναμης, το δυναμικό της οποίας περιγράφεται από τη σχέση $U(x) = -4x\,e^{-x/4}$.

(α) Να βρεθεί το σημείο μηδενισμού της δύναμης $F(a)=0$.

(β) Να αποδειχθεί ότι για το έργο της δύναμης αυτής ισχύει $W_{0\to a} = -W_{a\to\infty}$.

(γ) Εάν η συνολική (μηχανική) ενέργεια του σωματιδίου είναι $E = -4$, να υπολογιστεί η μέγιστη κινητική ενέργεια αυτού.

Όλα τα παραπάνω φυσικά μεγέθη αναφέρονται σε μονάδες του συστήματος S.I.

ΜΑΪΟΣ 2021

Πεδίο δυνάμεων στο επίπεδο περιγράφεται από τη σχέση $\vec{F}(x,y) = \alpha\beta xy\,\hat{i} + (\alpha x^2 + \beta y^2)\,\hat{j}$, όπου α και β μη μηδενικές σταθερές.

(α) Ποια σχέση πρέπει να ικανοποιούν (ή τι τιμές μπορεί να έχουν) οι σταθερές αυτές, ώστε το πεδίο των δυνάμεων αυτών να είναι συντηρητικό;

(β) Να βρεθεί η συνάρτηση του δυναμικού που παράγει το παραπάνω πεδίο και να υπολογισθεί το έργο της δύνμης από το σημείο (0,0) στο (1,3) του επιπέδου.

ΦΕΒΡΟΥΑΡΙΟΣ 2022

Να αποδειχθεί ότι το πεδίο των δυνάμεων του επιπέδου που περιγράφεται από την εξίσωση

$$\vec{F} = (2x + y)\,\hat{\imath} + (2y + x)\,\hat{\jmath}$$

είναι συντηρητικό και να βρεθεί η συνάρτηση δυναμικού που το παράγει.

ΣΕΠΤΕΜΒΡΙΟΣ 2023