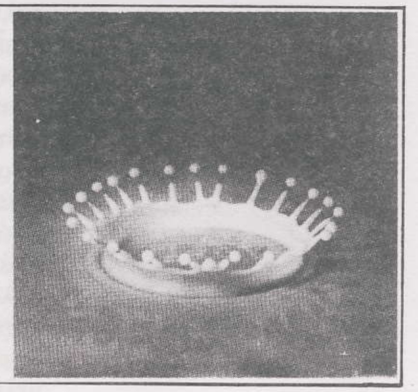
15

Μηχανική τών Ρευστών



Στην ανάλυση που θα κάνουμε στη συνέχεια θα δούμε ότι δεν χρειαζόμαστε καινούργιες αρχές Φυσικής για να εξηγήσουμε φαινόμενα όπως είναι η δύναμη τής άνωσης που δρα πάνω σε ένα βυθισμένο αντικείμενο ή η δυναμική άνωση που δρα στην πτέρυγα ενός αεροπλάνου. Θα αρχίσουμε με τον σχολιασμό τών διάφορων καταστάσεων τής ύλης. Κατόπιν θα μελετήσουμε ένα ρευστό που είναι ακίνητο και θα εξαγάγουμε τη συνάρτηση τής πίεσης με την πυκνότητα και το βάθος. Μετά θα μελετήσουμε την κίνηση τών ρευστών, δηλαδή τη δυναμική τών ρευστών. Θα περιγράψουμε ένα κινούμενο ρευστό απλουστεύοντας το πρόβλημα με ορισμένες παραδοχές. Θα κατασκευάσουμε ένα μοντέλο. Θα χρησιμοποιήσουμε το μοντέλο αυτό για να μελετήσουμε ορισμένα σημαντικά πρακτικά προβλήματα. **Ο νόμος τού Bernoulli** θα μάς δώσει τη δυνατότητα να βρούμε τη σχέση που συνδέει την πίεση με την πυκνότητα και την ταχύτητα σε κάθε σημείο τού ρευστού. Θα δούμε ότι η αρχή τού Bernoulli είναι άμεσο αποτέλεσμα τής εφαρμογής τής αρχής διατήρησης τής ενέργειας σε ένα ιδανικό ρευστό. Θα κλείσουμε το κεφάλαιο με μια σύντομη εξέταση τής εσωτερικής τριβής τών ρευστών και τής τυρβώδους κίνησης.

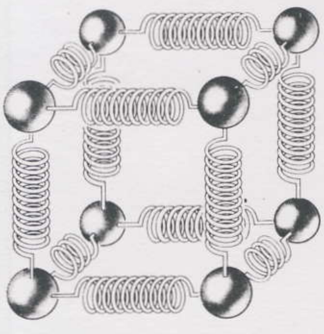
15.1 ΚΑΤΑΣΤΑΣΕΙΣ ΤΗΣ ΥΛΗΣ

Η ύλη γενικά κατατάσσεται ως υπάρχουσα σε μία από τις ακόλουθες τρεις καταστάσεις: στερεά, υγρά και αέρια. Πολλές φορές, επεκτείνουμε την ταξινόμηση αυτή ώστε να περιλαμβάνει και μία τέταρτη κατάσταση που ονομάζεται πλάσμα.

Η καθημερινή πείρα μάς διδάσκει ότι ένα στερεό έχει καθορισμένο σχήμα και όγκο. Ένα τούβλο, λογουχάρη, διατηρεί διαρκώς το ίδιο σχήμα. Γνωρίζουμε επίσης ότι ένα υγρό έχει καθορισμένο όγκο αλλά δεν έχει καθορισμένο σχήμα. Λογουχάρη, όταν βάζουμε βενζίνη στο αυτοκίνητο, η βενζίνη θα πάρει το σχήμα που τής δίνει το ρεζερβουάρ· αλλά εάν είχαμε δέκα λίτρα βενζίνης προτού τά βάλουμε στο ρεζερβουάρ, θα εξακολουθήσουμε να έχουμε δέκα λίτρα βενζίνης μέσα στο ρεζερβουάρ. Τέλος, τα αέρια δεν έχουν καθορισμένο σχήμα ή ορισμένο όγκο. Οι ορισμοί αυτοί μάς βοηθούν να αποκτήσουμε μέσα μας εικόνες για τις καταστάσεις τής ύλης, αλλά είναι πολύ τεχνητοί. Λογουχάρη, συνήθως ταξινομούμε την άσφαλτο και τα πλαστικά ως στερεά, αλλά και αυτά, μέσα σε μεγάλα χρονικά διαστήματα ρέουν επίσης, όπως και τα υγρά. Παρόμοια, το νερό μπορεί να είναι υγρό, αέριο ή στερεό ή συνδυασμός τών προηγούμενων καταστάσεων, ανάλογα με τις επικρατούσες συνθήκες θερμοκρασίας και πίεσης. Έτσι, λοιπόν, ο χρόνος αντίδρασης στη μεταβολή σχήματος λόγω τής δράσης ενός *εξωτερικού* παράγοντα, όπως λ.χ. τής πίεσης, παίζει κανονιστικό ρόλο στο κατά πόσο θεωρούμε ένα υλικό ως στερεό, υγρό ή αέριο.

Η τέταρτη κατάσταση τής ύλης δημιουργείται όταν η ύλη θερμαίνεται σε πολύ υψηλές θερμοκρασίες. Υπό τις συνθήκες αυτές ένα-δύο από τα ηλεκτρόνια κάθε ατόμου ελευθερώνονται από τον πυρήνα. Η τελική κατάσταση αποτελείται από μια συλλογή ελεύθερων φορτισμένων ηλεκτρικά σωματιδίων: δηλαδή αρνητικά φορτισμένων ηλεκτρονίων και θετικά φορτισμένων ιόντων. Ένα τέτοιο ιοντισμένο αέριο με ίσα μέρη αρνητικού και θετικού φορτίου λέγεται **πλάσμα.** Λογουχάρη, τέτοιες καταστάσεις πλάσματος επικρατούν στους αστέρες. Εάν μπορούσαμε να κάνουμε μια κρουαζιέρα στο Σύμπαν, θα βλέπαμε ότι η πιο συνήθης κατάσταση είναι η κατάσταση πλάσματος. Και τούτο γιατί στους αστέρες, περισσότερο από οποιαδήποτε άλλη μορφή, βρίσκεται το μεγαλύτερο μέρος τής παγκόσμιας ύλης, εάν ξεχάσουμε βέβαια για λίγο τη «σκοτεινή» ύλη τού Σύμπαντος. Πάντως, στο κεφάλαιο αυτό δεν θα ασχοληθούμε με καταστάσεις πλάσματος, αλλά θα μελετήσουμε τις πιο οικείες σε μάς καταστάσεις στερεών, υγρών και αερίων, που αποτελούν το άμεσο περιβάλλον μας στον πλανήτη μας.

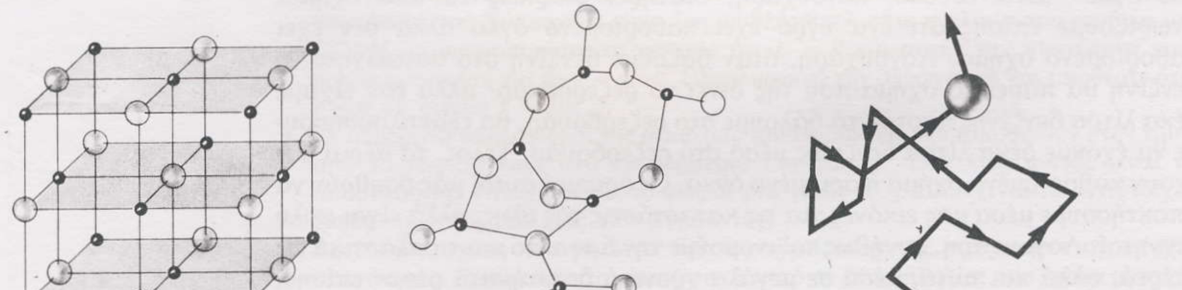
Κάθε μορφή ύλης αποτελείται από μια κατανομή ατόμων. Τα άτομα ενός στερεού συγκρατούνται σε καθορισμένες θέσεις (τού καθενός ως προς τα γειτονικά του) υπό την επίδραση ηλεκτρικών δυνάμεων. Τα άτομα ενός στερεού ταλαντώνονται γύρω από αυτές τις καθορισμένες θέσεις, λόγω τής θερμικής κίνησης (που και αυτή οφείλεται στις ηλεκτρικές δυνάμεις). Σε χαμηλές θερμοκρασίες όμως η ταλάντωση αυτή ελαχιστοποιείται και έτσι είναι καλή προσέγγιση να θεωρούμε ότι τα άτομα τών στερεών κατέχουν καθορισμένες θέσεις στον χώρο. Καθώς όμως προστίθεται θερμική ενέργεια (θερμότητα) στο υλικό, αυξάνεται το εύρος τών ταλαντώσεων. Μπορεί κανείς να περιγράψει τις ταλαντώσεις αυτές τών ατόμων κάνοντας την προσέγγιση ότι τα άτομα είναι στερεωμένα στις θέσεις ισορροπίας με ελατήρια που τά συνδέουν με τα γειτονικά τους άτομα. Μια τέτοια συλλογή ταλαντούμενων ατόμων με τα υποτιθέμενα ελατήρια φαίνεται στο Σχήμα 15.1. Εάν ένα στερεό συμπιέζεται από εξωτερικές δυνάμεις, μπορείτε να φανταστείτε ότι οι δυνάμεις αυτές συμπιέζουν τα μικρά αυτά ελατήρια. Όταν απομακρυνθούν οι εξωτερικές δυνάμεις, το στερεό τείνει να ανακτήσει το αρχικό του σχήμα και μέγεθος. Γι' αυτό λέμε ότι τα στερεά έχουν ελαστικότητα.



Σχήμα 15.1 Παραστατικό μοντέλο ενός στερεού. Οι σφαίρες συμβολίζουν άτομα και τα ελατήρια που τίς ενώνουν συμβολίζουν τις ενδοατομικές δυνάμεις.

Τα στερεά ταξινομούνται σε κρυσταλλικά ή σε άμορφα. **Τα κρυσταλλικά υλικά** έχουν άτομα διατεταγμένα κανονικά με περιοδική δομή. Λογουχάρη, στους κρυστάλλους τού χλωριούχου νατρίου (τού επιτραπέζιου αλατιού) τα ιόντα τού νατρίου και τού χλωρίου κατέχουν εναλλάξ τις κορυφές ενός κύβου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15.2a. Ενώ σε ένα **άμμορφο υλικό,** όπως είναι λ.χ. το γυαλί, τα άτομα κατανέμονται χωρίς καμιά τάξη, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15.2b.

Σε οποιοδήποτε υλικό η υγρά κατάσταση υπάρχει σε υψηλότερες θερμοκρασίες από ό,τι στη στερεά. Η θερμική κίνηση είναι μεγαλύτερη στην υγρά κατάσταση παρά στη στερεά. Αποτέλεσμα τού φαινομένου αυτού είναι



Σχήμα 15.2 (a) Η δομή τού NaCl, όπου ιόντα Na^+ και Cl^- κατέχουν θέσεις σε εναλασσόμενες κορυφές κύβου. Οι μικρές σφαίρες αντιπροσωπεύουν ιόντα Na^+ και οι μεγάλες ιόντα Cl^-. (b) Σε ένα άμορφο στερεό τα άτομα καταλαμβάνουν τυχαίες θέσεις. (c) Τυχαία κίνηση ενός μορίου μέσα σε υγρό.

ότι οι μοριακές δυνάμεις σε ένα υγρό δεν είναι αρκετά ισχυρές ώστε να συγκρατούν τα μόρια σε σταθερές θέσεις, και έτσι τα μόρια κινούνται μέσα στο υγρό σε τυχαίες κατευθύνσεις (Σχήμα 15.2c). Τα στερεά και τα υγρά έχουν όμως την εξής κοινή ιδιότητα: όταν συμπιεστούν, αναπτύσσουν εσωτερικά ισχυρές απωστικές δυνάμεις οι οποίες εναντιώνονται στη συμπίεση.

Στην αέρια κατάσταση, τα μόρια κινούνται συνεχώς σε τυχαίες κατευθύνσεις και αναπτύσσουν μεταξύ τους δυνάμεις που δεν είναι ισχυρές. Η μέση απόσταση που χωρίζει μεταξύ τους τα μόρια ενός αερίου είναι πολύ μεγαλύτερη από το μέγεθος τών μορίων. Τον περισσότερο χρόνο τα μόρια τών αερίων κινούνται σχεδόν ελεύθερα χωρίς να αλληλεπιδρούν. Και μόνον σπάνια συγκρούονται. Στα επόμενα κεφάλαια θα ασχοληθούμε περισσότερο με τις ιδιότητες τών αερίων.

15.2 ΠΥΚΝΟΤΗΤΑ ΚΑΙ ΠΙΕΣΗ

Ορίζουμε ότι η **πυκνότητα** ενός υλικού είναι η μάζα του ανά μονάδα όγκου. Δηλαδή, ένα υλικό μάζας m και όγκου V έχει πυκνότητα ρ, ίση προς

$$\rho \equiv \frac{m}{V} \tag{15.1}$$

Ορισμός τής πυκνότητας

ΠΙΝΑΚΑΣ 15.1 Πυκνότητες κοινών ουσιών

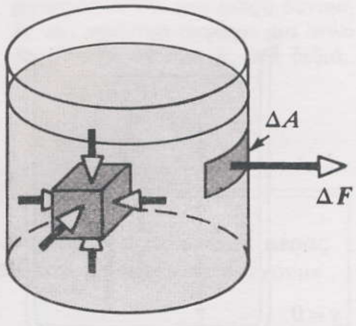
Ουσία	ρ (kg/m^3)[a]	Ουσία	ρ (kg/m^3)[a]
Πάγος	0.917×10^3	Νερό	1.00×10^3
Αλουμίνιο	2.70×10^3	Γλυκερίνη	1.26×10^3
Σίδηρος	7.86×10^3	Αιθυλική αλκοόλη	0.806×10^3
Χαλκός	8.92×10^3	Βενζίνη	0.879×10^3
Άργυρος	10.5×10^3	Υδράργυρος	13.6×10^3
Μόλυβδος	11.3×10^3	Αέρας	1.29
Χρυσός	19.3×10^3	Οξυγόνο	1.43
Πλατίνα	21.4×10^3	Υδρογόνο	8.99×10^{-2}
		Ήλιο	1.79×10^{-1}

[a] Όλες οι τιμές αντιστοιχούν σε κανονικές συνθήκες ατμοσφαιρικής πίεσης και θερμοκρασίας (STP) ή (ΚΣ), δηλαδή κανονική ατμοσφαιρική πίεση (1.013×10^5 Pa) και 0°C. Αν προτιμάτε τις τιμές σε γραμμάρια ανά κυβικό εκατοστόμετρο, πολλαπλασιάστε επί 10^{-3}.

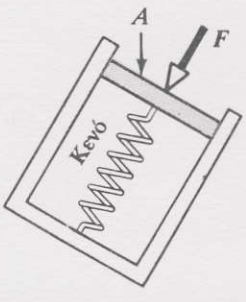
Στο Διεθνές Σύστημα (SI) οι μονάδες πυκνότητας είναι kg/m^3, ενώ στο cgs είναι g/cm^3. Στον Πίνακα 15.1 θα βρείτε τις πυκνότητες ορισμένων ουσιών. Οι τιμές αυτές μεταβάλλονται ελαφρά συναρτήσει τής θερμοκρασίας, επειδή, όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 16, ο όγκος εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Ας σημειωθεί ότι υπό κανονικές συνθήκες (0°C και κανονική ατμοσφαιρική πίεση), οι πυκνότητες τών αερίων είναι 1/1000 περίπου φορές χαμηλότερες από τις πυκνότητες τών στερεών και τών υγρών. Αυτό σημαίνει ότι η μέση ενδομοριακή απόσταση υπό τις συνθήκες αυτές είναι δέκα φορές μεγαλύτερη σε ένα αέριο από ό,τι είναι σε ένα υγρό ή στερεό.

Το σχετικό **ειδικό βάρος** μιας ουσίας ορίζεται ότι είναι ίσο με τον λόγο τής πυκνότητας τής ουσίας προς την πυκνότητα τού νερού θερμοκρασίας 4°C, που είναι 1.0×10^3 kg/m^3. Εξ ορισμού, λοιπόν, το σχετικό ειδικό βάρος είναι καθαρός αριθμός και δεν έχει διαστάσεις. Έτσι εάν το σχετικό ειδικό βάρος μιας ουσίας είναι 3, αυτό σημαίνει ότι η ουσία έχει πυκνότητα $3\,(1.0 \times 10^3$ kg/m$^3) = 3.0 \times 10^3$ kg/m^3.

Έχουμε δει ότι τα ρευστά δεν αντέχουν σε διατμητικές τάσεις. Έτσι η μόνη τάση που μπορεί να υποστεί ένα αντικείμενο που είναι βυθισμένο σε ένα υγρό είναι η τάση που θα προκαλέσει συμπίεση. Η δύναμη την οποία ασκεί το ρευστό πάνω στο αντικείμενο είναι πάντοτε κάθετη προς τις επιφάνειες τού αντικειμένου, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15.3.



Σχήμα 15.3 Η δύναμη τού ρευστού πάνω στο βυθισμένο σώμα είναι πάντοτε κάθετη στις έδρες τού σώματος. Η δύναμη τού ρευστού πάνω στο δοχείο που τό περιέχει είναι πάντοτε κάθετη στα τοιχώματά του.



Σχήμα 15.4 Απλή συσκευή μέτρησης τής πίεσης.

Η πίεση σε οποιοδήποτε μέρος ενός ρευστού μπορεί να μετρηθεί με την απλή συσκευή τού Σχήματος 15.4. Η συσκευή αποτελείται από έναν κύλινδρο στον οποίο έχει δημιουργηθεί κενό και τού οποίου η μία πλευρά είναι ένα έμβολο που μπορεί να κινηθεί με την πίεση ενός εσωτερικού ελατηρίου. Όταν η συσκευή βυθιστεί σε ένα ρευστό, το ρευστό πιέζει το έμβολο, το οποίο με τη σειρά του πιέζει το ελατήριο μέχρις ότου η προς τα μέσα πίεση τού ρευστού εξισορροπιστεί από την προς τα έξω δύναμη τού ελατηρίου. Η πίεση τού ρευστού μπορεί να προσδιοριστεί αμέσως εάν το ελατήριο είναι βαθμονομημένο εκ τών προτέρων. Αυτό γίνεται εύκολα εάν εφαρμόσουμε γνωστές δυνάμεις στο ελατήριο και καταγράψουμε την απόσταση κατά την οποία συμπιέζεται.

Ορισμός τής πίεσης

Εάν *F* είναι το μέτρο τής κάθετης δύναμης πάνω στο έμβολο, το οποίο έχει επιφάνεια *A*, τότε ορίζουμε ότι *η πίεση P* τού ρευστού στο επίπεδο που βρίσκεται βυθισμένο το έμβολο είναι ο λόγος τής δύναμης *F* προς την επιφάνεια *A* τού εμβόλου.

$$P \equiv \frac{F}{A} \tag{15.2}$$

Η πίεση ενός ρευστού δεν είναι η ίδια σε όλα του τα σημεία. Για να ορίσουμε την πίεση σε ένα καθορισμένο σημείο, ας θεωρήσουμε ότι το ρευστό βρίσκεται σε ένα δοχείο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15.3. Εάν η κάθετη δύναμη που ασκεί το ρευστό πάνω σε μια επιφάνεια ΔA είναι ΔF, τότε η πίεση στο σημείο αυτό είναι

$$P = \lim_{\Delta A \to 0} \frac{\Delta F}{\Delta A} = \frac{dF}{dA} \tag{15.3}$$

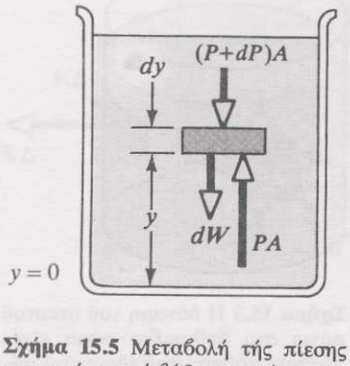
Όπως θα δούμε στο επόμενο υποκεφάλαιο, η πίεση ενός ρευστού το οποίο υπόκειται στη βαρυτική δύναμη είναι συνάρτηση τού βάθους. Επομένως, εάν θέλουμε να υπολογίσουμε την ολική δύναμη την οποία ασκεί το υγρό πάνω στο επίπεδο τοίχωμα ενός δοχείου, πρέπει να ολοκληρώσουμε την Εξίσωση 15.3 πάνω στην επιφάνεια.

Αφού η πίεση ισούται με τη δύναμη διά τής επιφανείας, στο SI έχει μονάδα το N/m^2, που ονομάζεται και **Pascal** (Pa)

$$1 \text{ Pa} \equiv 1 \text{ N/m}^2 \tag{15.4}$$

15.3 ΜΕΤΑΒΟΛΗ ΤΗΣ ΠΙΕΣΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΙ ΤΟΥ ΒΑΘΟΥΣ

Θεωρήστε ότι ένα ακίνητο ρευστό βρίσκεται μέσα σε ένα δοχείο, όπως στο Σχήμα 15.5. Πρώτον, σημειώνουμε ότι *όλα τα σημεία που βρίσκονται στο ίδιο βάθος υφίστανται την ίδια πίεση*. Εάν αυτό δεν ίσχυε, το ρευστό δεν θα ηρεμούσε. Για να τό κατανοήσουμε πλήρως, ας θεωρήσουμε ότι ένας ιδεατός κύλινδρος βάσεως *A* και ύψους *dy* περιέχει ένα υγρό. Η προς τα επάνω δύναμη που ασκείται στην κάτω βάση τού κυλίνδρου είναι *PA*, η προς τα κάτω δύναμη η οποία ασκείται στην επάνω βάση τού κυλίνδρου είναι $(P + dP)A$. Το βάρος τού ρευστού το οποίο περιέχει ο ιδεατός αυτός κύλινδρος όγκου *dV* είναι $dW = \rho g\, dV = \rho g\, A dy$, όπου ρ είναι η πυκνότητα τού ρευστού. Εφόσον ο κύλινδρος ηρεμεί, οι δυνάμεις πρέπει να είναι εξισορροπημένες, δηλαδή



Σχήμα 15.5 Μεταβολή τής πίεσης συναρτήσει τού βάθους, σε ένα ρευστό. Το στοιχείο όγκου ηρεμεί. Οι δυνάμεις που δρουν πάνω του φαίνονται στο σχήμα.

$$\sum F_y = PA - (P + dP)A - \rho g A\, dy = 0$$

$$\frac{dP}{dy} = -\rho g \tag{15.5}$$

Από το αποτέλεσμα αυτό βλέπουμε ότι η μείωση τού βάθους (δηλαδή θετικό dy) αντιστοιχεί σε μείωση τής πίεσης (αρνητικό dP). Εάν λοιπόν P_1 και P_2 είναι οι πιέσεις οι οποίες αντιστοιχούν στα σημεία y_1 και y_2 επάνω από το επίπεδο αναφοράς, και εάν η πυκνότητα είναι σταθερή, τότε εάν ολοκληρώσουμε την Εξίσωση 15.5 βρίσκουμε

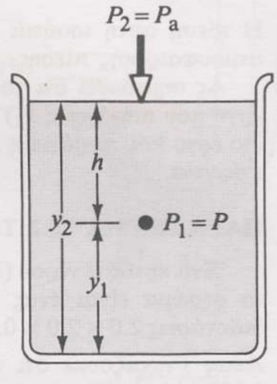
$$P_2 - P_1 = -\rho g(y_2 - y_1) \tag{15.6}$$

Εάν το δοχείο είναι ανοιχτό από επάνω (Σχήμα 15.6), τότε μπορούμε να βρούμε την πίεση η οποία αντιστοιχεί στο σημείο βάθους h εάν χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 15.5. Εάν θεωρήσουμε ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι $P_a = P_2$ και επειδή το βάθος $h = y_2 - y_1$, βρίσκουμε ότι

$$\boxed{P = P_a + \rho gh} \tag{15.7}$$

όπου συνήθως βρίσκουμε την τιμή $P_a \approx 1.01 \times 10^5$ Pa (14.7 lb/in.^{2}). Με άλλα λόγια,

η ολική (ή απόλυτη) πίεση P, σε βάθος h, κάτω από την επιφάνεια ενός υγρού το οποίο είναι ανοιχτό στην ατμόσφαιρα, είναι *μεγαλύτερη* από την ατμοσφαιρική πίεση κατά ρgh.



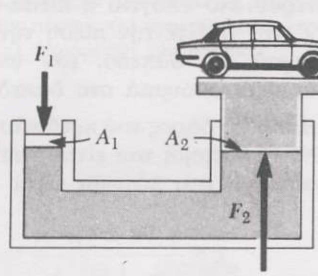
Σχήμα 15.6 Η πίεση P σε βάθος h κάτω από την επιφάνεια ενός υγρού, η οποία επικοινωνεί ελεύθερα με την ατμόσφαιρα, είναι $P = P_a + \rho gh$.

Το αποτέλεσμα επαληθεύει εκείνο που αναφέραμε πιο πάνω δηλαδή, ότι *η πίεση είναι σταθερή σε όλα τα σημεία τα οποία βρίσκονται στο ίδιο βάθος*. Να σημειωθεί, τέλος, ότι *η πίεση δεν επηρεάζεται από το σχήμα τού δοχείου στο οποίο περιέχεται το υγρό.*

Αφού λοιπόν η πίεση σε ένα ρευστό εξαρτάται μόνον από το βάθος, οποιαδήποτε αύξηση τής πίεσης στην επιφάνεια μεταδίδεται σε κάθε σημείο τού ρευστού. Ο πρώτος που επισήμανε το γεγονός αυτό ήταν ο Γάλλος φυσικός Blaise Pascal (1623-1662), ο οποίος τό διατύπωσε με τον νόμο που φέρει το όνομά του, τον **νόμο τού Pascal:**

Κάθε μεταβολή στην πίεση ενός αποθηκευμένου ρευστού μεταδίδεται χωρίς να μειωθεί σε κάθε σημείο τού ρευστού, καθώς και στα τοιχώματα τού δοχείου αποθήκευσης.

Μια σημαντική εφαρμογή τού νόμου τού Pascal αποτελεί η υδραυλική πρέσα που φαίνεται στο Σχήμα 15.7. Η δύναμη $\boldsymbol{F_1}$ δρα πάνω στο μικρό έμβολο επιφάνειας A_1. Η πίεση μεταφέρεται μέσω τού ρευστού στο μεγαλύτερο έμβολο A_2. Αφού η πίεση είναι ίδια και στις δύο επιφάνειες, έχουμε $P = F_1/A_1 = F_2/A_2$. Επομένως, η δύναμη F_2 είναι μεγαλύτερη από την F_1 κατά τον συντελεστή A_2/A_1. Το γεγονός αυτό τό εκμεταλλευόμαστε στους υδραυλικούς ανυψωτήρες, στα υδραυλικά φρένα, στις υδραυλικές πρέσες κ.λπ.



Σχήμα 15.7 Σχηματικό διάγραμμα υδραυλικού ανυψωτήρα (πρέσας). Η αύξηση τής πίεσης είναι η ίδια και για τις δύο μεριές (δεξιά ή αριστερά). Έτσι, μια μικρή δύναμη $\boldsymbol{F_1}$ στα αριστερά παράγει μια πολύ μεγαλύτερη δύναμη $\boldsymbol{F_2}$ στα δεξιά.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15.1 Υδραυλικός ανυψωτήρας αυτοκινήτων

Σε έναν υδραυλικό ανυψωτήρα αυτοκινήτων, ο πεπιεσμένος αέρας ασκεί δύναμη πάνω σε ένα μικρό έμβολο ακτίνας 5 cm. Η πίεση μεταδίδεται σε ένα άλλο έμβολο ακτίνας 15 cm. Ποια είναι η δύναμη που πρέπει να ασκήσει ο πεπιεσμένος αέρας για να ανυψωθεί ένα αυτοκίνητο βάρους 13 300 N; Ποία πίεση αέρα θα δημιουργήσει τη δύναμη αυτή;

Λύση Η πίεση την οποία ασκεί ο πεπιεσμένος αέρας μεταδίδεται αμείωτη μέσω τού ρευστού· έτσι έχουμε

$$F_1 = \left(\frac{A_1}{A_2}\right) F_2 = \frac{\pi(5 \times 10^{-2}\text{ m})^2}{\pi(15 \times 10^{-2}\text{ m})^2}(13\ 300\text{ N})$$

$$= \boxed{1.48 \times 10^3\text{ N}}$$

Η πίεση τού πεπιεσμένου αέρα που είναι αναγκαία για να δημιουργήσει τη δύναμη F_1 είναι

$$P = \frac{F_1}{A_1} = \frac{1.48 \times 10^3\ \text{N}}{\pi(5 \times 10^{-2}\ \text{m})^2} = 1.88 \times 10^5\ \text{Pa}$$

Η πίεση αυτή ισούται χονδρικά με το διπλάσιο τής ατμοσφαιρικής πίεσης.

Ας σημειωθεί ότι το έργο στην είσοδο (δηλαδή το έργο που παράγει η $\boldsymbol{F}_1$) ισούται με το έργο στην έξοδο (το έργο που παράγει η $\boldsymbol{F}_2$), έτσι ώστε να διατηρείται η ενέργεια.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15.2 Το κρεβάτι νερού

Ένα κρεβάτι νερού (δηλαδή ένα κρεβάτι τού οποίου το στρώμα είναι ένας σάκος γεμάτος με νερό) έχει διαστάσεις $2.0 \times 2.0 \times 0.30\ \text{m}^3$: (a) Βρείτε το βάρος του.

Λύση Γνωρίζουμε ότι η πυκνότητα τού νερού είναι 1 000 kg/m^3. Έτσι το στρώμα έχει μάζα

$$M = \rho V = (1000\ \text{kg/m}^3)(1.2\ \text{m}^3) = 1.20 \times 10^3\ \text{kg}$$

και το βάρος του είναι

$$W = Mg = (1.20 \times 10^3\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)$$

$$= 1.18 \times 10^4\ \text{N}$$

Βλέπουμε λοιπόν πόσο βαρύ είναι. Και εάν δεν θέλετε να καταστραφεί το πάτωμά σας, να βάλετε το κρεβάτι νερού στο υπόγειο ή πάνω σε ένα γερό δάπεδο.

(b) Βρείτε την πίεση την οποία ασκεί το κρεβάτι νερού στο δάπεδο, εάν υποτεθεί ότι ολόκληρο το στρώμα ακουμπά στο δάπεδο.

Λύση Το βάρος τού κρεβατιού με νερό είναι 1.18×10^4 N. Η διατομή του είναι 4 m^2. Επομένως η πίεση που ασκείται στο πάτωμα είναι

$$P = \frac{1.18 \times 10^4\ \text{N}}{4\ \text{m}^2} = 2.95 \times 10^3\ \text{Pa}$$

Άσκηση 1 Υπολογίστε την πίεση πάνω στο δάπεδο εάν γυρίσετε το κρεβάτι νερού στο πλευρό.
Απάντηση Δεδομένου ότι η διατομή τής πλευράς αυτής έχει επιφάνεια 0.6 m^2, η πίεση είναι 1.96×10^4 Pa.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15.3 Η πίεση στον ωκεανό

Υπολογίστε την πίεση σε βάθος 1 000 m στον ωκεανό. Υποθέστε ότι η πυκνότητα τού νερού είναι 1.0×10^3 kg/m^3 και ότι η ατμοσφαιρική πίεση $P_a = 1.01 \times 10^5$ Pa.

Λύση

$$P = P_a + \rho g h$$

$$= 1.01 \times 10^5\ \text{Pa} + (1.0 \times 10^3\ \text{kg/m}^3)\,(9.80\ \text{m/s}^2)(10^3\ \text{m})$$

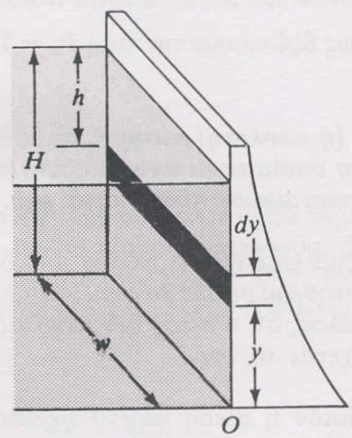
$$P = 9.90 \times 10^6\ \text{Pa}$$

Είναι λοιπόν 100 φορές μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική!

Άσκηση 2 Υπολογίστε την ολική δύναμη που υφίσταται το παράθυρο ενός βαθυσκάφους διαμέτρου 30 cm στο παραπάνω βάθος.
Απάντηση 7.00×10^5 N.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15.4 Η δύναμη σε ένα φράγμα

Σε ένα φράγμα πλάτους w το νερό φτάνει σε ύψος H (Σχήμα 15.8). Υπολογίστε τη συνισταμένη δύναμη που ασκείται πάνω στο φράγμα.



Σχήμα 15.8 (Παράδειγμα 15.4) Για να βρούμε την ολική δύναμη που ασκείται πάνω σε ένα φράγμα χρησιμοποιούμε την έκφραση $F = \int P\,dA$, όπου dA είναι η επιφάνεια τής σκιασμένης λωρίδας τού σχήματος.

Λύση Η πίεση που ασκείται σε βάθος h πάνω στη σκιασμένη επιφάνεια είναι

$$P = \rho g h = \rho g(H - y)$$

(Δεν έχουμε λάβει ύπ' όψιν την ατμοσφαιρική πίεση, διότι η πίεση αυτή δρα και στις δύο πλευρές). Χρησιμοποιούμε την Εξίσωση 15.3 και βρίσκουμε ότι η δύναμη πάνω στη σκιασμένη επιφάνεια είναι

$$dF = P\,dA = \rho g(H - y)w\,dy$$

Επομένως η ολική δύναμη επί τού φράγματος είναι

$$F = \int P dA = \int_0^H \rho g(H - y)w\,dy = \tfrac{1}{2}\rho g w H^2$$

Λογουχάρη, εάν $H = 30$ m και $w = 100$ m, βρίσκουμε ότι $F = 4.4 \times 10^8$ N. Πρέπει να σημειωθεί ότι, επειδή η πίεση αυξάνεται συναρτήσει τού βάθους, τα φράγματα σχεδιάζονται έτσι ώστε το πάχος τους να αυξάνεται συναρτήσει τού βάθους, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15.8.

15.4 ΜΕΤΡΗΣΕΙΣ ΠΙΕΣΗΣ

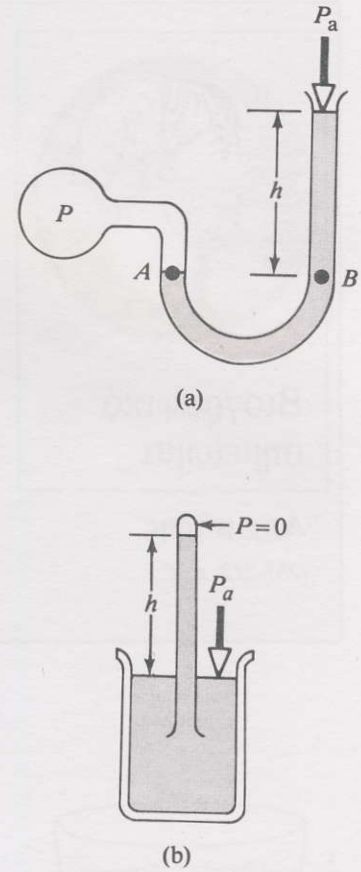
Μία απλή συσκευή για τη μέτρηση τής πίεσης είναι το ανοιχτό μανόμετρο που απεικονίζεται στο Σχήμα 15.9a. Όπως βλέπουμε, ο σωλήνας σχήματος U περιέχει υγρό· το ένα άκρο του είναι ανοιχτό στην ατμόσφαιρα και το άλλο συνδέεται με το σύστημα τού οποίου την πίεση P θέλουμε να μετρήσουμε. Η πίεση στο σημείο B ισούται με $P_a + \varrho gh$, όπου ϱ είναι η πυκνότητα τού υγρού. Αλλά η πίεση στο B ισούται με την πίεση στο A, το οποίο υφίσταται την άγνωστη πίεση P. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι

$$P = P_a + \rho gh$$

Η πίεση P λέγεται **απόλυτη πίεση** ενώ η $P - P_a$ λέγεται υπερπίεση. Έτσι λοιπόν εάν η πίεση τού συστήματος είναι μεγαλύτερη από την ατμοσφαιρική, το h είναι θετικό. Εάν είναι μικρότερη (μερικό κενό αέρα), το h είναι αρνητικό.

Ένα άλλο όργανο για τη μέτρηση τής πίεσης είναι το κοινό βαρόμετρο, το οποίο εφεύρε ο Evangelista Torricelli (1608-1647). Παίρνουμε έναν μακρύ σωλήνα, κλειστό στο ένα άκρο του, τόν γεμίζουμε με υδράργυρο και μετά τόν αναποδογυρίζουμε βυθίζοντας το ανοιχτό άκρο σε ένα δοχείο που περιέχει υδράργυρο (Σχήμα 15.9b). Το κλειστό μέρος τού σωλήνα είναι σχεδόν κενό αέρα και έτσι μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η πίεση εκεί μέσα είναι μηδενική. Είναι προφανές λοιπόν ότι $P_a = \varrho gh$, όπου ϱ είναι η πυκνότητα τού υδραργύρου και h το ύψος τής στήλης τού υδραργύρου μέσα στον σωλήνα. Εξ ορισμού η πίεση μιας φυσικής (κανονικής) ατμόσφαιρας είναι ίση προς την πίεση στήλης υδραργύρου ύψους 0.76 m ακριβώς σε 0°C και για $g = 9.80665$ m/s^2. Στη θερμοκρασία αυτή η πυκνότητα τού υδραργύρου είναι 13.595×10^3 kg/m^3. Επομένως

$$P_a = \rho gh = (13.595 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(9.80665 \text{ m/s}^2)(0.7600 \text{ m})$$
$$= 1.013 \times 10^5 \text{ Pa}$$



Σχήμα 15.9 Δύο συσκευές μέτρησης τής πίεσης: (a) ανοιχτό μανόμετρο, (b) βαρόμετρο υδραργύρου.

15.5 Η ΑΝΩΣΗ ΚΑΙ Η ΑΡΧΗ ΤΟΥ ΑΡΧΙΜΗΔΗ

Η αρχή τού Αρχιμήδη ορίζει ότι:

Η αρχή τού Αρχιμήδη

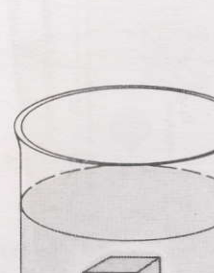
Κάθε σώμα που είναι πλήρως ή μερικώς βυθισμένο σε ένα ρευστό υφίσταται δύναμη άνωσης ίση προς το βάρος τού ρευστού το οποίο εκτοπίζει.

Όλοι μας έχουμε εμπειρίες από την αρχή τού Αρχιμήδη. Λογουχάρη, σκεφθείτε πόσο πιο εύκολο είναι να σηκώσετε κάποιον που είναι μέσα στη θάλασσα παρά όταν είναι στην ξηρά. Είναι προφανές ότι το νερό υποστηρίζει εν μέρει κάθε αντικείμενο που βυθίζεται σε αυτό. Λέμε λοιπόν ότι ένα αντικείμενο όταν τοποθετείται μέσα σε ένα ρευστό τότε υφίσταται την προς τα επάνω δύναμη τής **άνωσης**. Σύμφωνα με την αρχή τού Αρχιμήδη,

το μέτρο τής δύναμης τής άνωσης είναι πάντοτε ίσο προς το βάρος τού ρευστού που εκτοπίζει το αντικείμενο.

Η άνωση δρα σε κατακόρυφη διεύθυνση προς τα επάνω εκεί όπου βρίσκεται το κέντρο μάζας τού εκτοπιζόμενου ρευστού.

Μπορούμε να επιβεβαιώσουμε την αρχή τού Αρχιμήδη ως εξής: Ας συγκεντρώσουμε την προσοχή μας στον ιδεατό κύβο νερού μέσα στο γεμάτο με νερό δοχείο τού Σχήματος 15.10. Αυτός ο κύβος νερού ηρεμεί κάτω από τη δράση τών δυνάμεων που δρουν επάνω του. Η μία δύναμη είναι το βάρος τού κύβου τού νερού. Τί λοιπόν εξισορροπεί τη δύναμη αυτή; Προφανώς, τσ' υπόλοιπο νερό μέσα στο δοχείο ωθεί τον κύβο προς τα επάνω, διατηρώντας



Σχήμα 15.10 Οι εξωτερικές δυνάμεις που δρουν πάνω στον κύβο τού νερού είναι το βάρος του $\boldsymbol{W}$, και η άνωση, $\boldsymbol{B}$. Όταν υπάρχει ισορροπία, $\boldsymbol{B} = \boldsymbol{W}$.

Βιογραφικό σημείωμα

Αρχιμήδης

(287-212 π.Χ.)

Ο Αρχιμήδης ήταν ίσως ο μεγαλύτερος μαθηματικός, φυσικός και μηχανικός τής αρχαιότητας. Υπολόγισε πρώτος με ακρίβεια το πηλίκο περιφέρειας κύκλου προς τη διάμετρό του (τον αριθμό π) και επίσης κατέδειξε πώς υπολογίζονται όγκοι και εμβαδά επιφανειών, κύκλων, κυλίνδρων και άλλων γεωμετρικών στερεών. Έγινε διάσημος όταν ανακάλυψε την άνωση που δρα σε βυθισμένα σώματα και ήταν επίσης προικισμένος εφευρέτης. Μια από τις πρακτικές εφευρέσεις του που χρησιμοποιείται ακόμη και σήμερα είναι ένα αντλητικό μηχάνημα, που ονομάζεται κοχλίας τού Αρχιμήδη και αρχικά χρησιμοποιούνταν για την άντληση τών νερών από τη σεντίνα τών πλοίων. Εφεύρε επίσης τον καταπέλτη και επινόησε συστήματα μοχλών, τροχαλιών και βαρούλκων για την ανύψωση βαριών φορτίων. Τέτοιες εφευρέσεις χρησιμοποιήθηκαν με επιτυχία από τους στρατιώτες για να υπερασπίσουν τη γενέτειρά του πόλη, τις Συρακούσες, κατά τη διάρκεια μιας πολιορκίας δύο ετών από τους Ρωμαίους.

Σύμφωνα με την παράδοση, ο τύραννος τών Συρακουσών, Ιέρων, ζήτησε απο τον Αρχιμήδη να διαπιστώσει αν το στέμμα του ήταν κατασκευασμένο από καθαρό χρυσό ή είχε νοθευθεί με κάποιο άλλο μέταλλο. Η εξέταση έπρεπε να γίνει χωρίς να καταστραφεί το στέμμα. Ο Αρχιμήδης βρήκε τη λύση ενώ έκανε μπάνιο μέσα στο λουτρό του, παρατηρώντας τη μείωση τού βάρους του όταν βύθιζε τα χέρια του και τα πόδια του στο νερό. Ενθουσιάστηκε τόσο πολύ από την ανακάλυψή του, ώστε έτρεξε γυμνός στους δρόμους των Συρακουσών, φωνάζοντας «Εύρηκα! Εύρηκα!».

τον σε ηρεμία. Έτσι, η δύναμη τής άνωσης B που δρα πάνω στον κύβο τού νερού είναι ίση και αντίθετη προς το βάρος τού νερού που περιέχει ο ιδεατός αυτός κύβος:

$$B = W$$

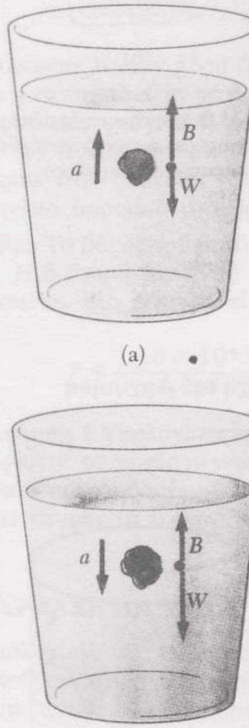
Υποθέστε τώρα ότι αντικαθιστούμε τον ιδεατό αυτό κύβο με έναν συμπαγή κύβο χάλυβα που έχει τις ίδιες ακριβώς διαστάσεις με τον ιδεατό κύβο νερού τον οποίο μελετήσαμε προηγουμένως. Ποια είναι η δύναμη τής άνωσης πάνω στον χάλυβα; Το νερό που περιβάλλει τον κύβο συμπεριφέρεται κατά τον ίδιο τρόπο, ανεξάρτητα από το τί είναι κατασκευασμένος ο κύβος, δηλαδή *η δύναμη τής άνωσης η οποία δρα στον χαλύβδινο κύβο είναι ακριβώς η ίδια με την άνωση που δρα πάνω σε έναν κύβο νερού, ίδιων διαστάσεων*. Το αποτέλεσμα αυτό ισχύει για κάθε βυθισμένο αντικείμενο ανεξάρτητα από μέγεθος, σχήμα ή πυκνότητα.

Ας αποδείξουμε όμως ότι το μέτρο τής δύναμης τής άνωσης ισούται με το βάρος τού εκτοπιζόμενου ρευστού. Η πίεση στην κάτω βάση τού κύβου στο Σχήμα 15.10 είναι μεγαλύτερη από την πίεση στην επάνω βάση τού κύβου κατά ποσότητα ίση με $\varrho_f gh$, όπου ϱ_f είναι η πυκνότητα τού ρευστού και h η ακμή τού κύβου. Αλλά η διαφορά πίεσης, ΔP ισούται με το μέτρο τής δύναμης τής άνωσης B ανά μονάδα επιφάνειας δηλαδή $\Delta P = B/A$. Βλέπουμε λοιπόν ότι $B = (\Delta P)\ (A) = (\varrho_f gh)\ (A) = \varrho_f gV$, όπου V είναι ο όγκος τού κύβου. Αλλά η μάζα τού ρευστού στον κύβο είναι $M = \varrho_f V$. Έτσι έχουμε

$$B = W = \rho_f Vg = Mg \tag{15.8}$$

όπου W είναι το βάρος τού εκτοπιζόμενου ρευστού.

Προτού παραθέσουμε τα παραδείγματα, παρουσιάζει ενδιαφέρον να συγκρίνουμε τις δυνάμεις οι οποίες δρουν πάνω σε ένα εντελώς βυθισμένο αντικείμενο με τις δυνάμεις που δρουν πάνω σε ένα αντικείμενο το οποίο επιπλέει.



Σχήμα 15.11 (a) Η ολική δύναμη που δρα πάνω σε ένα βυθισμένο σώμα που έχει πυκνότητα *μικρότερη* από την πυκνότητα τού νερού κατευθύνεται προς τα επάνω. (b) Εάν το βυθισμένο σώμα έχει πυκνότητα μεγαλύτερη από την πυκνότητα τού υγρού, θα πάει στον πυθμένα τού δοχείου.

Περίπτωση I Εντελώς βυθισμένο αντικείμενο Όταν ένα αντικείμενο είναι *εντελώς* βυθισμένο σε ένα ρευστό πυκνότητας ϱ_f, η δύναμη τής άνωσης η οποία δρα προς τα επάνω είναι $B = \varrho_f V_o g$, όπου V_o είναι ο όγκος τού αντικειμένου. Εάν το αντικείμενο έχει πυκνότητα ϱ_o, το βάρος του είναι $W =$

$Mg = \varrho_o V_o g$. Έτσι η συνισταμένη δύναμη που δρα πάνω του είναι $B - W = (\varrho_f - \varrho_o)V_o g$. Επομένως, εάν η πυκνότητα τού αντικειμένου είναι *μικρότερη* από την πυκνότητα τού ρευστού, όπως στην περίπτωση τού Σχήματος 15.11a, το αντικείμενο θα επιταχυνθεί προς τα επάνω. Εάν όμως η πυκνότητα τού αντικειμένου είναι *μεγαλύτερη* από την πυκνότητα τού ρευστού, τότε το αντικείμενο θα επιταχυνθεί προς τα κάτω και θα βυθιστεί. (Βλ. Σχήμα 15.11b).

Περίπτωση II Ένα αντικείμενο που επιπλέει. Θεωρήστε τώρα ότι ένα αντικείμενο σε στατική ισορροπία *επιπλέει* πάνω στο ρευστό. Δηλαδή μόνο ένα *μέρος* τού αντικειμένου βρίσκεται μέσα στο ρευστό. Στην περίπτωση αυτή η άνωση εξισορροπείται από το βάρος τού αντικειμένου. Εάν ο όγκος τού εκτοπιζόμενου από το αντικείμενο ρευστού είναι V (προφανώς αυτός είναι ίσος προς τον όγκο τού μέρους τού αντικειμένου που βρίσκεται κάτω από την επιφάνεια τού ρευστού), το μέτρο τής άνωσης είναι $B = \varrho_f V g$. Το βάρος τού αντικειμένου είναι $W = Mg = \varrho_o V_o g$. Επειδή έχουμε στατική ισορροπία, $W = B$, $\rho_f V g = \rho_o V_o g$,

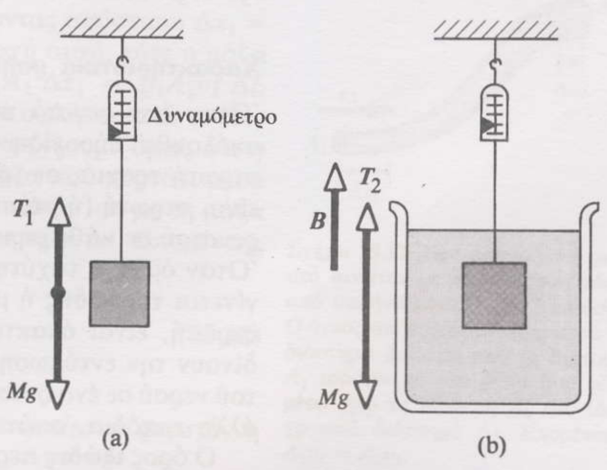
ή

$$\frac{\rho_o}{\rho_f} = \frac{V}{V_o} \tag{15.9}$$

Συνήθως η μέση πυκνότητα ενός ψαριού είναι λίγο μεγαλύτερη από την πυκνότητα τού νερού. Εάν λοιπόν τα ψάρια δεν είχαν στη διάθεσή τους έναν μηχανισμό μεταβολής τής πυκνότητάς τους θα βυθίζονταν. Τα ψάρια τό κατορθώνουν αυτό μεταβάλλοντας το μέγεθος τής λεγόμενης «φούσκας» τους, δηλαδή τής νηκτικής κύστης τους. Με τον τρόπο αυτό κατορθώνουν να βρίσκονται σε στατική ισορροπία (όταν δεν κολυμπούν) καθώς πηγαίνουν σε διαφορετικά βάθη (όπου μεταβάλλεται η πυκνότητα τού νερού ϱ_f).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15.5 Ένα βυθισμένο αντικείμενο

Ένα κομμάτι αλουμίνιο είναι αναρτημένο από ένα νήμα και βυθίζεται στο νερό ενός δοχείου (Σχήμα 15.12). Η μάζα τού αλουμινίου είναι 1 kg και η πυκνότητά του είναι 2.7×10^3 kg/m^3. Υπολογίστε την τάση στο νήμα προτού και αφού βυθιστεί το αλουμίνιο στο νερό.



Σχήμα 15.12 (Παράδειγμα 15.5) (a) Όταν το κομμάτι αλουμινίου είναι αναρτημένο στον αέρα, η ζυγαριά δείχνει το βάρος του, ***Mg*** (διότι η άνωση τού αέρα είναι αμελητέα). (b) Όταν όμως τοποθετηθεί στο νερό, η άνωση ***B*** μειώνει την ένδειξη τής ζυγαριάς σε $T_2 = Mg - B$.

Λύση Όταν το αλουμίνιο βρίσκεται στον αέρα, όπως στο Σχήμα 15.12a, η τάση στο νήμα είναι T_1 και ίση με το βάρος του ***Mg***, που φαίνεται και στη ζυγαριά (εάν δεν ληφθεί υπ' όψιν η άνωση τού αέρα).

$$T_1 = Mg = (1 \text{ kg})(9.80 \text{ m/s}^2) = \boxed{9.80 \text{ N}}$$

Όταν βυθιστεί στο νερό, το αλουμίνιο υπόκειται και στην άνωση ***B***, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15.2b, η οποία δρα προς τα επάνω, και έτσι ελαττώνεται η τάση τού νήματος. Το σύστημα ισορροπεί και πάλι. Επομένως

$$T_2 + B - Mg = 0$$

$$T_2 = Mg - B = 9.80 \text{ N} - B$$

Για να υπολογίσουμε την άνωση πρέπει προηγουμένως να βρούμε τον όγκο τού αλουμινίου:

$$V_{Al} = \frac{M}{\rho_{Al}} = \frac{1 \text{ kg}}{2.7 \times 10^3 \text{ kg/m}^3} = 3.70 \times 10^{-4} \text{ m}^3$$

Γνωρίζουμε ότι το μέτρο τής άνωσης ισούται με το βάρος τού εκτοπιζόμενου νερού, άρα λοιπόν

$$\begin{aligned} B &= M_w g = \rho_w V_{Al} g \\ &= (1 \times 10^3 \text{ kg/m}^3)(3.7 \times 10^{-4} \text{ m}^3)(9.80 \text{ m/s}^2) \\ &= 3.63 \text{ N} \end{aligned}$$

Επομένως

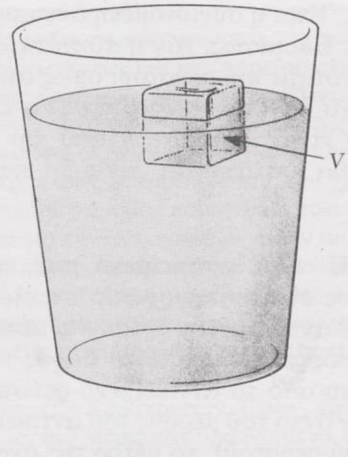
$$T_2 = 9.80\ \mathrm{N} - B = 9.80\ \mathrm{N} - 3.63\ \mathrm{N} = \boxed{6.17\ \mathrm{N}}$$

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15.6 Το παγάκι που επιπλέει □

Ένα παγάκι επιπλέει μέσα σε ένα ποτήρι νερό (Σχήμα 15.13). Πόσο μέρος του βρίσκεται έξω από το νερό;

Λύση Το πρόβλημά μας αντιστοιχεί στην περίπτωση II, που περιγράψαμε στις προηγούμενες σελίδες τού κειμένου. Το βάρος τού πάγου είναι $W = \varrho_i V_i g$, όπου $\varrho_i = 917\ \mathrm{kg/m^3}$ και V_i ο όγκος τού πάγου. Η άνωση έχει κατεύθυνση προς τα επάνω και μέτρο ίσο με το βάρος τού νερού το οποίο εκτοπίζεται από το παγάκι, δηλαδή $B = \varrho_w V g$, όπου V είναι ο όγκος τού πάγου που είναι *βυθισμένος* μέσα στο νερό και ϱ_w η πυκνότητα τού νερού, $\varrho_w = 1\,000\ \mathrm{kg/m^3}$. Γνωρίζουμε ότι $\varrho_i V_i g = \varrho_w V g$· επομένως το μέρος τού πάγου που βρίσκεται *έξω* από το νερό είναι

$$f = 1 - \frac{\rho_i}{\rho_f} = 1 - \frac{917\ \mathrm{kg/m^3}}{1000\ \mathrm{kg/m^3}} = \boxed{0.083 \text{ ή } 8.3\%}$$



Σχήμα 15.13 (Παράδειγμα 15.6).

Άσκηση 3 Πόσο μέρος τού όγκου ενός παγόβουνου βρίσκεται *μέσα* στη θάλασσα; Η πυκνότητα τού θαλασσινού νερού είναι $1\,024\ \mathrm{kg/m^3}$.
Απάντηση 0.896 ή 89.6%.

15.6 ΔΥΝΑΜΙΚΗ ΤΩΝ ΡΕΥΣΤΩΝ

Η μελέτη τών ρευστών που κάναμε μέχρι τώρα περιοριζόταν σε ακίνητα ρευστά. Τώρα όμως θα μελετήσουμε ρευστά που κινούνται. Αλλά αντί να προσπαθήσουμε να μελετήσουμε την κίνηση κάθε μορίου (όχι με τη χημική έννοια αλλά με τη σημασία «μικρό κομμάτι». Σημ. μετφρ.) τού ρευστού ως συνάρτηση τού χρόνου, θα ακολουθήσουμε τον συνήθη τρόπο και θα περιγράψουμε τις ιδιότητες τού ρευστού σε κάθε σημείο του συναρτήσει τού χρόνου.

Χαρακτηριστικά ροής

Όταν ένα ρευστό κινείται, η κίνησή του περιγράφεται ως ένα από τα ακόλουθα δύο είδη κίνησης. Όταν κάθε μόριο τού ρευστού ακολουθεί στρωτή τροχιά, οι τροχιές τών μορίων δεν τέμνονται. Τότε λέμε ότι η ροή είναι **στρωτή** (ή **στάσιμη** ή **μόνιμη**). Έτσι, στη στρωτή ροή, η ταχύτητα τού ρευστού σε κάθε σημείο τού χώρου παραμένει σταθερή ως προς τον χρόνο. Όταν όμως η ταχύτητα υπερβεί τη λεγόμενη κρίσιμη ταχύτητα, τότε η ροή γίνεται **τυρβώδης** ή **μη στάσιμη** ή **στροβιλώδης**. Η τυρβώδης ροή δεν είναι στρωτή, είναι άτακτη, ακανόνιστη και χαρακτηρίζεται από περιοχές που δίνουν την εντύπωση μικρών στροβίλων ή καταβοθρών. Λογουχάρη, η ροή τού νερού σε ένα ρυάκι γίνεται τυρβώδης εκεί όπου το νερό συναντά βράχια ή άλλα εμπόδια, οπότε αρχίζει να «αφρίζει» και να στριφογυρίζει.

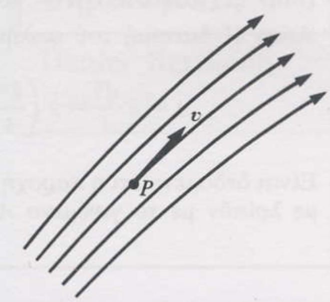
Ο όρος **ιξώδες** περιγράφει την εσωτερική τριβή τού ρευστού. Η εσωτερική τριβή τού ρευστού περιγράφει την τριβή ανάμεσα σε δύο συνεχόμενες «στρώσεις» τού ρευστού όταν η μία κινείται σε σχέση με την άλλη. Λόγω τού ιξώδους, μέρος τής κινητικής ενέργειας μετατρέπεται σε θερμική. Η διαδικασία είναι παρόμοια με την περίπτωση κατά την οποία ένα αντικείμενο κινείται πάνω σε τραχιά οριζόντια επιφάνεια χάνοντας κινητική ενέργεια.

Η κίνηση τών ρευστών, γενικά, είναι πρόβλημα πολύπλοκο. Και γι' αυτό θα κάνουμε ορισμένες υποθέσεις οι οποίες θα απλουστεύσουν τη μελέτη μας. Όπως θα δούμε, πολλά προβλήματα τής κίνησης τών ρευστών μπορούμε να τά κατανοήσουμε καλύτερα εάν μελετήσουμε πρώτα την κίνηση ενός ιδανικού ρευστού. Στο μοντέλο τού **ιδανικού ρευστού** που θα κατασκευάσουμε κάνουμε τις εξής τέσσερεις υποθέσεις:

1. **Ρευστό χωρίς ιξώδες.** Δηλαδή δεν λαμβάνουμε υπ' όψιν την εσωτερική τριβή. Έτσι, ένα αντικείμενο που κινείται μέσα σε ένα ρευστό το οποίο δεν έχει ιξώδες δεν υπόκειται σε καμιά επιβραδύνουσα δύναμη προερχόμενη από την τριβή με το ρευστό.
2. **Στρωτή ροή.** Δηλαδή υποθέτουμε ότι κάθε σημείο τού ρευστού στον χώρο έχει σταθερή ταχύτητα, δεν μεταβάλλεται εν χρόνῳ.
3. **Ασυμπίεστο ρευστό.** Δηλαδή η πυκνότητα τού ρευστού παραμένει σταθερή εν χρόνῳ.
4. **Αστρόβιλη ροή.** Η ροή ενός ρευστού είναι αστρόβιλη εάν η στροφορμή τού ρευστού είναι μηδενική ως προς κάθε σημείο του. Εάν δηλαδή τοποθετήσουμε έναν τροχίσκο οπουδήποτε μέσα στο ρευστό, ο τροχίσκος δεν περιστρέφεται. (Εάν όμως η ροή ήταν τυρβώδης, θα υπήρχαν στρόβιλοι και ο τροχίσκος θα περιστρεφόταν).

15.7 ΡΕΥΜΑΤΙΚΕΣ ΓΡΑΜΜΕΣ ΚΑΙ Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ

Η τροχιά την οποία ακολουθεί κάθε μόριο τού ρευστού υπό συνθήκες στάσιμης ροής λέγεται **ρευματική γραμμή.** Η ταχύτητα τού μορίου τού ρευστού έχει πάντοτε τη διεύθυνση τής εφαπτομένης στη ρευματική γραμμή που διέρχεται από αυτό το σημείο, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15.16. Δύο ρευματικές γραμμές δεν τέμνονται ποτέ όταν η ροή είναι στρωτή, διότι εάν τέμνονταν, τότε κάθε μόριο τού ρευστού στο σημείο τομής θα μπορούσε να ακολουθήσει ή τη μία τροχιά ή την άλλη και έτσι η ροή δεν θα ήταν στρωτή. Μια ομάδα ρευματικών γραμμών, όπως αυτές που φαίνονται στο Σχήμα 15.16, αποτελεί αυτό που λέγεται φλέβα ή *σωλήνας ροής*.Πρέπει να σημειωθεί ότι τα μόρια τού ρευστού δεν μπορούν να ρέουν προς τα μέσα ή προς τα έξω τών τοιχωμάτων τής φλέβας, διότι τότε οι ρευματικές γραμμές θα τέμνονταν.



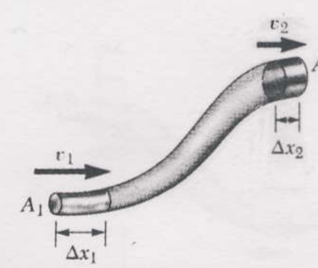
Σχήμα 15.16 Στο διάγραμμα αυτό απεικονίζονται οι ρευματικές γραμμές. Το σωματίδιο που βρίσκεται στο P ακολουθεί μία από αυτές τις ρευματικές γραμμές η δε ταχύτητά του εφάπτεται στη ρευματική γραμμή σε κάθε σημείο τής τροχιάς του.

Θεωρήστε ότι η ροή ενός ρευστού γίνεται μέσα σε έναν σωλήνα μεταβλητής διατομής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15.17. Τα μόρια τού ρευστού κινούνται παράλληλα προς τις ρευματικές γραμμές υπό συνθήκες στρωτής ροής. Σε όλα τα σημεία οι ταχύτητες τών μορίων εφάπτονται τών αντίστοιχων ρευματικών γραμμών τις οποίες ακολουθούν.

Στο μικρό χρονικό διάστημα Δt, το ρευστό που φαίνεται στο αριστερό μέρος τού σωλήνα τού Σχήματος 15.17 κινείται διανύοντας απόσταση $\Delta x_1 = v_1\,\Delta t$. Εάν A_1 είναι η διατομή τού σωλήνα στην περιοχή αυτή, τότε η μάζα που ρέει μέσα στην ίδια περιοχή είναι $\Delta m_1 = \varrho_1 A_1\,\Delta x_1 = \varrho_1 A_1 v_1\,\Delta t$. Παρομοίως, το ρευστό που κινείται στο δεξιό μέρος τού σωλήνα κατά το ίδιο χρονικό διάστημα Δt έχει μάζα $\Delta m_2 = \varrho_2 A_2 v_2\,\Delta t$. Γνωρίζουμε όμως ότι *η μάζα διατηρείται* και, επειδή έχουμε στρωτή ροή, η μάζα που περνάει μέσα από τη διατομή A_1 στο χρονικό διάστημα Δt πρέπει να είναι ίση με τη μάζα που περνάει από τη διατομή A_2 στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt. Επομένως, $\Delta m_1 = \Delta m_2$ ή

$$\varrho_1 A_1 v_1 = \varrho_2 A_2 v_2 \tag{15.10}$$

Η εξίσωση αυτή λέγεται **εξίσωση τής συνέχειας.**



Σχήμα 15.17 Ένα ασυμπίεστο ρευστό κινείται με στρωτή ροή μέσα από σωλήνα μεταβλητής διατομής. Ο όγκος τού υγρού που ρέει κατά το διάστημα Δt μέσα από τη διατομή A_1 ισούται με τον όγκο που ρέει μέσα από τη διατομή A_2 στο ίδιο χρονικό διάστημα Δt. Επομένως, $A_1 v_1 = A_2 v_2$.

Επειδή η πυκνότητα ϱ είναι σταθερή για ένα *ασυμπίεστο* ρευστό, η Εξίσωση 15.10 ανάγεται στην

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{σταθερό} \tag{15.11}$$

Δηλαδή

για όλα τα σημεία τής φλέβας το γινόμενο τής επιφάνειας διατομής επί την ταχύτητα τού ρευστού είναι σταθερό (δηλαδή η παροχή μιας φλέβας είναι σταθερή).

Επομένως, το μέτρο τής ταχύτητας είναι μεγάλο εκεί όπου ο σωλήνας είναι στενός και μικρό εκεί όπου ο σωλήνας είναι φαρδύς. Το γινόμενο Av, που έχει διαστάσεις όγκος/χρόνος ονομάζεται *παροχή* ή *ρυθμός ροής*. Η συνθήκη Av = σταθερό ισοδυναμεί με το γεγονός ότι η ποσότητα τού ρευστού που εισέρχεται στον σωλήνα στο χρονικό διάστημα Δt είναι ίση με την ποσότητα τού ρευστού που εξέρχεται από τον σωλήνα στο ίδιο χρονικό διάστημα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15.7 Το γέμισμα ενός κουβά με νερό

Χρησιμοποιούμε λαστιχένιο σωλήνα διαμέτρου 2 cm για να γεμίσουμε με νερό έναν κουβά χωρητικότητας 20 lt. Εάν χρειαζόμαστε 1 min για να γεμίσουμε τον κουβά, με τί μέτρο ταχύτητας εξέρχεται το νερό από το σωλήνα; (Μην ξεχνάτε ότι 1 lt = 10^3 cm^3).

Λύση Η διατομή τού σωλήνα είναι

$$A = \pi \frac{d^2}{4} = \pi \left(\frac{2^2}{4}\right) \mathrm{cm}^2 = \pi \ \mathrm{cm}^2$$

Είναι δεδομένο ότι η παροχή είναι 20 lt/min. Εξισώνουμε λοιπόν με το γινόμενο Av και παίρνουμε

$$Av = 20 \ \frac{\text{liters}}{\text{min}} = \frac{20 \times 10^3 \ \mathrm{cm}^3}{60 \ \mathrm{s}}$$

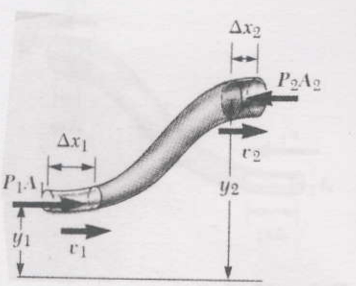
$$v = \frac{20 \times 10^3 \ \mathrm{cm}^3}{(\pi \ \mathrm{cm}^2)(60 \ \mathrm{s})} = 106 \ \mathrm{cm/s}$$

Άσκηση 4 Εάν η διάμετρος τού σωλήνα μειωθεί στο 1 cm, βρείτε το μέτρο τής ταχύτητας με την οποία εξέρχεται το νερό εάν υποτεθεί ότι ο ρυθμός ροής είναι ίδιος.
Απάντηση 424 cm/s.

15.8 Η ΕΞΙΣΩΣΗ ΤΟΥ BERNOULLI

Καθώς ένα ρευστό κινείται μέσα σε έναν σωλήνα μεταβλητής διατομής και μεταβλητού ύψους, η πίεση μεταβάλλεται κατά μήκος τού σωλήνα. Το 1738 ο Ελβετός φυσικός Daniel Bernoulli (1700-1782) επινόησε μια σχέση η οποία συνδέει την πίεση με την ταχύτητα τού ρευστού και με το ύψος. Όπως θα δούμε, η σχέση αυτή είναι άμεσο αποτέλεσμα τής εφαρμογής τής διατήρησης τής ενέργειας σε ένα ιδανικό ρευστό.

Θα υποθέσουμε πάλι ότι το ρευστό είναι ασυμπίεστο, χωρίς ιξώδες και ότι ρέει χωρίς στροβίλους, με στρωτή ροή. Θεωρήστε ότι η ροή γίνεται στο χρονικό διάστημα Δt μέσα σε έναν σωλήνα μεταβλητής διατομής, όπως φαίνεται στο Σχήμα 15.18. Εάν η πίεση στο σημείο 1, που είναι το χαμηλότερο σημείο τής ροής, είναι P_1, τότε η δύναμη είναι P_1A_1. Το έργο που παράγει η δύναμη αυτή είναι $W_1 = F_1 \,\Delta x_1 = P_1A_1 \,\Delta x_1 = P_1 \,\Delta V$, όπου ΔV είναι ο όγκος τής γραμμοσκιασμένης περιοχής. Παρομοίως, το έργο το οποίο παράγεται στο επάνω μέρος τού ρευστού κατά το χρονικό διάστημα Δt είναι $W_2 = -\,P_2A_2 \,\Delta x_2 = -\,P_2 \,\Delta V$. (Ο όγκος τού ρευστού που περνάει από το 1 κατά το χρονικό διάστημα Δt είναι ίσος με τον όγκο που περνάει από το 2 κατά το ίδιο χρονικό διάστημα). Το έργο είναι αρνητικό, διότι η δύναμη τού ρευστού εναντιώνεται στη μετατόπιση. Έτσι, το συνολικό έργο που παράγουν οι δυνάμεις αυτές κατά το χρονικό διάστημα Δt, είναι



Σχήμα 15.18 Ένα ασυμπίεστο ρευστό ρέει μέσα από τη στένωση ενός σωλήνα με στρωτή ροή. Το ρευστό πού βρίσκεται στο μέρος τού σωλήνα μήκους Δx_1 κινείται στο μέρος τού σωλήνα μήκους Δx_2. Οι όγκοι τού ρευστού στα δύο μέρη είναι ίσοι.

$$W = (P_1 - P_2)\,\Delta V$$

Μέρος τού έργου αυτού μεταβάλλει την κινητική ενέργεια τού ρευστού και άλλο μέρος μεταβάλλει τη βαρυτική δυναμική ενέργειά του. Εάν Δm είναι η ποσότητα μάζας που περνάει από τον σωλήνα στο χρονικό διάστημα Δt, τότε η μεταβολή τής κινητικής ενέργειας είναι

$$\Delta K = \tfrac{1}{2}(\Delta m)v_2^{\,2} - \tfrac{1}{2}(\Delta m)v_1^{\,2}$$

Η μεταβολή τής δυναμικής ενέργειας είναι

$$\Delta U = \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1$$

Ο Daniel Benroulli ήταν Ελβετός φυσικός και μαθηματικός που έκανε σημαντικές ανακαλύψεις στον τομέα τής υδροδυναμικής. Γεννήθηκε σε οικογένεια μαθηματικών στις 8 Φεβρουαρίου 1700 αλλά ήταν το μόνο μέλος τής οικογένειας που διακρίθηκε στη Φυσική. Σπούδασε και πήρε το διδακτορικό του στη Βασιλεία τής Ελβετίας.

Η πιο φημισμένη εργασία τού Bernoulli, η *Υδροδυναμική* (Hydrodynamica), δημοσιεύθηκε το 1738. Είναι θεωρητική και πειραματική μελέτη τής ισορροπίας, τής πίεσης και τής ταχύτητας τών ρευστών. Στο έργο του αυτό ο Bernoulli απέδειξε ότι, καθώς η ταχύτητα ροής ενός ρευστού αυξάνεται, η πίεσή του μειώνεται. Το φαινόμενο αυτό είναι γνωστό ως «αρχή τού Bernoulli» και μια κοινή εφαρμογή της είναι η δημιουργία κενού στα εργαστήρια χημείας με τη σύνδεση ενός δοχείου με έναν σωλήνα στον οποίο τρέχει νερό γρήγορα. Η αρχή τού Bernoulli αποτελεί μία από τις πρώτες διατυπώσεις τής ιδέας τής διατήρησης τής ενέργειας.

Ο Bernoulli στην *Υδροδυναμική* του προσπάθησε να εξηγήσει τη μεταβολή τής συμπεριφοράς τών αερίων συναρτήσει τής μεταβολής τής πίεσης και τής θερμοκρασίας. Και αυτό αποτέλεσε την απαρχή τής κινητικής θεωρίας τών αερίων.

Βιογραφικό σημείωμα

Daniel Bernoulli

(1700-1782)

Μπορούμε να εφαρμόσουμε το θεώρημα έργου-ενέργειας για αυτόν τον όγκο ρευστού στη μορφή $W = \Delta K + \Delta U$ (Κεφάλαιο 8).

$$(P_1 - P_2)\,\Delta V = \tfrac{1}{2}(\Delta m)v_2^2 - \tfrac{1}{2}(\Delta m)v_1^2 + \Delta m g y_2 - \Delta m g y_1$$

Διαιρούμε κάθε όρο με ΔV, αντικαθιστούμε $\varrho = \Delta m/\Delta V$ και βρίσκουμε

$$P_1 - P_2 = \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 - \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_2 - \rho g y_1$$

Ξαναγράφουμε το αποτέλεσμα ως

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g y_1 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g y_2 \qquad (15.12)$$

Αυτή είναι η **εξίσωση τού Bernoulli** για ένα ασυμπίεστο ρευστό, χωρίς ιξώδες και για συνθήκες στρωτής ροής. Πολλές φορές τήν γράφουμε με τη μορφή

$$P + \tfrac{1}{2}\varrho v^2 + \varrho g y = \text{σταθερό} \qquad (15.13)$$

Η εξίσωση τού Bernoulli

Η εξίσωση τού Bernoulli ορίζει ότι το άθροισμα τής πίεσης (P), τής κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου ($\frac{1}{2}\varrho v^2$) και τής δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου ($\varrho g y$) έχει την ίδια σταθερή τιμή σε οποιοδήποτε σημείο τής ρευματικής γραμμής.

Όταν το ρευστό είναι *ακίνητο*, $v_1 = v_2 = 0$, $y_2 - y_1 = h$ και η Εξίσωση 15.12 γίνεται

$$P_1 - P_2 = \rho g(y_2 - y_1) = \rho g h$$

που συμφωνεί με την Εξίσωση 15.6. Τα ακόλουθα παραδείγματα είναι ενδιαφέρουσες εφαρμογές τής εξίσωσης τού Bernoulli.

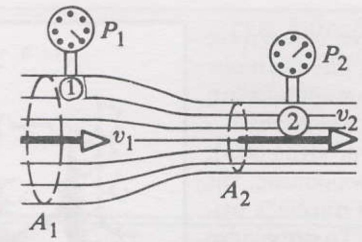
ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15.8 Ο σωλήνας Venturi (ή Βεντουρίμετρο)

Ο στενός οριζόντιος σωλήνας που φαίνεται στο Σχήμα 15.19 ονομάζεται *σωλήνας Venturi*. Τόν χρησιμοποιούμε για να μετρήσουμε ταχύτητες ροής σε ένα ασυμπίεστο ρευστό. Ας προσδιορίσουμε την ταχύτητα ροής στο σημείο 2 εάν είναι γνωστή η διαφορά πίεσης $P_1 - P_2$.

Λύση Επειδή ο σωλήνας είναι οριζόντιος, $y_1 = y_2$. Εφαρμόζουμε την Εξίσωση 15.12 για τα σημεία 1 και 2 και βρίσκουμε

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho v_1^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2^2$$

Γνωρίζουμε όμως από την εξίσωση συνέχειας (Εξίσωση 15.11) ότι $A_1 v_1 = A_2 v_2$



Σχήμα 15.19 (Παράδειγμα 15.8) Σχηματικό διάγραμμα βεντουριμέτρου (σωλήνα Venturi). Η πίεση P_1 είναι μεγαλύτερη από την P_2, διότι $v_1 < v_2$. Το όργανο αυτό χρησιμοποιείται για τη μέτρηση τής ταχύτητας ρευστών.

ή

$$v_1 = \frac{A_2}{A_1} v_2$$

Θέτουμε την τιμή αυτή στην πρώτη εξίσωση και βρίσκουμε

$$P_1 + \tfrac{1}{2}\rho \left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 v_2{}^2 = P_2 + \tfrac{1}{2}\rho v_2{}^2$$

$$v_2 = A_1 \sqrt{\frac{2(P_1 - P_2)}{\rho(A_1{}^2 - A_2{}^2)}} \qquad (15.14)$$

Μπορούμε επίσης να βρούμε μια έκφραση για το v_1 αν χρησιμοποιήσουμε την Εξίσωση 15.14 και την εξίσωση συνέχειας. Πρέπει να σημειωθεί ότι, επειδή $A_2 < A_1$, η P_1 είναι *μεγαλύτερη* από την P_2. Με άλλα λόγια, η πίεση *ελαττώνεται* στο στενό μέρος τού σωλήνα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15.9 Ο νόμος τού Torricelli (ταχύτητα εκροής)

Ένα δοχείο που περιέχει υγρό πυκνότητας ρ έχει μια μικρή οπή στη μια πλευρά του σε ύψος y_1 από τη βάση του (Σχήμα 15.20). Ο αέρας πάνω από το υγρό διατηρείται σε σταθερή πίεση P. Προσδιορίστε το μέτρο τής ταχύτητας με την οποία εκρέει το υγρό από την οπή όταν το ύψος τού υγρού πάνω από αυτήν είναι h.

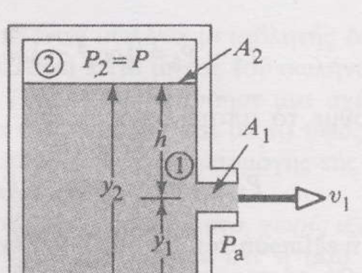
Λύση Υποθέτουμε ότι η διατομή τού δοχείου είναι μεγάλη σε σχέση με το άνοιγμα τής οπής ($A_2 \gg A_1$). Έτσι το υγρό, προσεγγιστικά, ηρεμεί στο επάνω μέρος τού δοχείου, σημείο 2. Εφαρμόζουμε τον νόμο τού Bernoulli στα σημεία 1 και 2 (αντικαθιστούμε $P_1 = P_a$), και βρίσκουμε

$$P_a + \tfrac{1}{2}\rho v_1{}^2 + \rho g y_1 = P + \rho g y_2$$

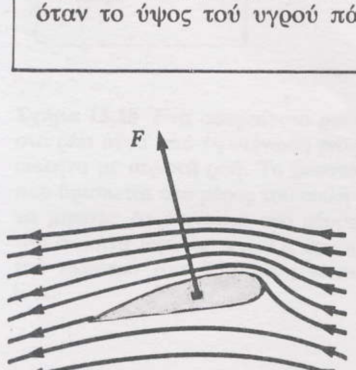
Αλλά $y_2 - y_1 = h$. Έτσι βρίσκουμε ότι

$$v_1 = \sqrt{\frac{2(P - P_a)}{\rho} + 2gh} \qquad (15.15)$$

Εάν ονομάσουμε A_1 τη διατομή τής οπής, τότε η παροχή της είναι $A_1 v_1$. Εάν η πίεση P είναι μεγάλη σε σύγκριση με την ατμοσφαιρική πίεση (και επομένως μπορούμε να αγνοήσουμε τον όρο $2gh$), τότε η ταχύτητα εκροής είναι, κυρίως, συνάρτηση τού P. Τέλος, εάν το δοχείο είναι ανοιχτό στην ατμόσφαιρα, τότε $P = P_a$ και $v_1 = \sqrt{2gh}$. Με άλλα λόγια, η ταχύτητα εκροής από ένα ανοιχτό δοχείο είναι ίση με την ταχύτητα που θα είχε το υγρό αν έπεφτε ελεύθερα από κατακόρυφο ύψος h. Αυτός είναι ο **νόμος τού Toricelli.**



Σχήμα 15.20 (Παράδειγμα 15.9) Η ταχύτητα εκροής v_1 από την οπή στην πλευρά τού δοχείου είναι $v_1 = \sqrt{2gh}$.



Σχήμα 15.21 Ρευματικές γραμμές γύρω από την πτέρυγα αεροπλάνου. Η πίεση στο επάνω μέρος είναι μικρότερη από την πίεση στο κάτω. Έτσι δημιουργείται δυναμική άνωση προς τα επάνω.

* 15.9 ΑΛΛΕΣ ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ ΤΗΣ ΕΞΙΣΩΣΗΣ ΤΟΥ BERNOULLI

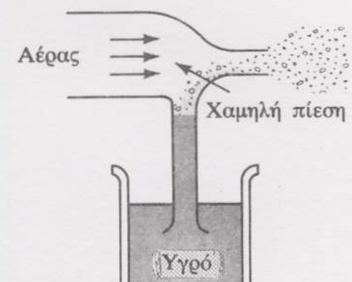
Πολλά συνήθη φαινόμενα εξηγούνται με την εξίσωση τού Bernoulli. Θα περιγράψουμε τώρα ποιοτικά μερικά τέτοια φαινόμενα.

Ας παρακολουθήσουμε τις ρευματικές γραμμές που ρέουν γύρω από την πτέρυγα τού αεροπλάνου τού Σχήματος 15.21. Οι πτέρυγες τών αεροπλάνων είναι ειδικά σχεδιασμένες ώστε η επάνω επιφάνεια να έχει μικρότερη ακτίνα καμπυλότητας από την κάτω επιφάνεια. Ο αέρας που ρέει πάνω στην άνω επιφάνεια ακολουθεί πιο καμπύλη τροχιά από τον αέρα που ρέει στην κάτω επιφάνεια. Επειδή η κατεύθυνση τής μείωσης τής πίεσης είναι προς το κέντρο καμπυλότητας, η πίεση είναι *χαμηλότερη* στην άνω επιφάνεια. Ο αέρας επιταχύνεται προς αυτήν την περιοχή χαμηλής πίεσης και έτσι η ταχύτητα τού αέρα είναι μεγαλύτερη στην άνω επιφάνεια. Η συνισταμένη δύναμη $\boldsymbol{F}$ είναι προς τα άνω και λέγεται **αεροδύναμη**, ενώ η κατακόρυφη συνιστώσα της λέγεται *δυναμική άνωση* και εξαρτάται από πολλούς συντελεστές, όπως είναι η ταχύτητα τού αεροπλάνου, η επιφάνεια τής πτέρυγας, η καμπυλότητά της και η γωνία που σχηματίζει η πτέρυγα με το οριζόντιο επίπεδο. Καθώς η γωνία αυτή μεγαλώνει, μπορεί να αρχίσει τυρβώδης ροή πάνω από το αεροπλάνο ελαττώνοντας έτσι την άνωση που προβλέπει η αρχή τού Bernoulli. Στην πράξη, οι πτέρυγες είναι συνήθως γυρισμένες προς τα επάνω ώστε να εκτρέπουν τη μάζα τού αέρα προς τα κάτω και να δημιουργείται έτσι μία επί πλέον δύναμη προς τα επάνω.

Εάν τοποθετήστε ένα φύλλο χαρτί πάνω σε ένα τραπέζι και φυσήξετε από τα πλάγια προς την επάνω επιφάνειά του, το χαρτί σηκώνεται. Αυτό συμβαίνει διότι ο αέρας που κινείται γρήγορα στην επάνω επιφάνεια μειώνει την πίεση και έτσι δημιουργείται ανοδική δύναμη.

Όλοι ξέρουμε ότι οι δυνατοί άνεμοι «σηκώνουν» συχνά τις στέγες τών σπιτιών. Γνωρίζουμε από την αρχή τού Bernoulli ότι όταν φυσάει ο αέρας η πίεση στο επάνω μέρος τής σκεπής μειώνεται. Εάν τα παράθυρα τού κτηρίου είναι κλειστά, τότε είναι πολύ πιθανόν η πίεση επάνω από τη σκεπή να είναι χαμηλότερη από την πίεση κάτω από τη σκεπή και έτσι να «σηκωθεί» η στέγη.

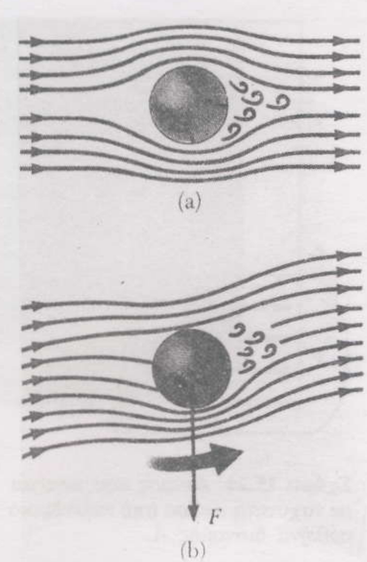
Πάρα πολλές συσκευές λειτουργούν με τον τρόπο που βλέπουμε στο Σχήμα 15.22. Ένα ρεύμα αέρα περνάει πάνω από τον ανοιχτό σωλήνα και μειώνει έτσι την πίεση στην περιοχή αυτή. Η μείωση τής πίεσης πάνω από το άνοιγμα τού σωλήνα έχει ως αποτέλεσμα να ανυψωθεί το υγρό και να αναμιχθεί με το ρεύμα τού αέρα. Έτσι το υγρό διαχέεται σε πολύ μικρές σταγόνες. Είναι ευνόητο ότι με τον τρόπο αυτό λειτουργούν τα διάφορα «σπρέι» χρωμάτων και αρωμάτων. Η ίδια αρχή χρησιμοποιείται και στους εξαεριωτές (καρμπυρατέρ) τών βενζινοκίνητων αυτοκινήτων. Στην περίπτωση αυτή η περιοχή υποπίεσης δημιουργείται από τον αέρα που προσροφά το έμβολο μέσω τού φίλτρου τού αέρα. Η βενζίνη λοιπόν εξαεριώνεται και αναμιγνύεται με τον αέρα προτού εισέλθει στον κύλινδρο για να συμπιεστεί.



Σχήμα 15.22 Όταν μέσα από έναν σωλήνα που είναι βουτηγμένος σε ένα υγρό περάσει ρεύμα αέρα, τότε το υγρό ανυψώνεται στον σωλήνα.

Εάν κάποιος υποφέρει από προχωρημένη αρτηριοσκλήρωση, λόγω τής αρχής τού Bernoulli δημιουργείται ο λεγόμενος «αγγειακός πτερυγισμός». Στην περίπτωση αυτή η αρτηρία έχει υποστεί στένωση λόγω τής εναπόθεσης λιπών και ασβεστίου στα εσωτερικά τοιχώματά της. Για να διατηρηθεί σταθερή η παροχή τού αίματος διά μέσου ενός αγγείου που έχει υποστεί στένωση, πρέπει να αυξηθεί η οδηγήτρια πίεση. Αυτό σημαίνει ότι ο μυς τής καρδιάς πρέπει να εργαστεί σκληρότερα. Εάν αυξηθεί πολύ η ταχύτητα τού αίματος (οπότε πέφτει η τοπική πίεση) μέσα στην πάσχουσα αυτή αρτηρία, η αρτηρία μπορεί να υποστεί σύσφιγξη λόγω τής εξωτερικής πίεσης και αυτό να δημιουργήσει στιγμιαία διακοπή τής ροής τού αίματος. Τη στιγμή εκείνη, εφόσον δεν υπάρχει ροή, δεν λειτουργεί και η αρχή τού Bernoulli, οπότε η αρτηρία ξανανοίγει υπό την επίδραση τής συνήθους αιμοστατικής πίεσης τής αρτηρίας. Αλλά καθώς το αίμα ρέει πάλι γρήγορα μέσα στην αποστενωμένη αρτηρία, η αρχή τού Bernoulli ελαττώνει πάλι την πίεση και η αρτηρία ξανακλείνει. Οι γιατροί μπορούν να διακρίνουν τα «κλεισίματα» αυτά τών αρτηριών εξετάζοντας τον ασθενή με ένα στηθοσκόπιο.

Τέλος, ας παρακολουθήσουμε την κυκλοφορία τού αέρα γύρω από μία μπάλλα τού μπέιζμπωλ. Εάν η μπάλλα δεν στριφογυρίζει (βλ. Σχήμα 15.23), η κίνηση τού αέρα γύρω της είναι σχεδόν στρωτή. Στο Σχήμα αυτό η μπάλλα κινείται από τα δεξιά προς τα αριστερά. Έτσι, ως προς την μπάλλα, ο αέρας κινείται από τα αριστερά προς τα δεξιά. Δημιουργείται, λοιπόν, μια περιοχή συμμετρικών στροβίλων πίσω από την μπάλλα, όπως φαίνεται στο Σχήμα. Όταν όμως η μπάλλα στριφογυρίζει με φορά αντίθετη προς τη φορά τών δεικτών τού ρολογιού, όπως στο Σχήμα 15.23b, λόγω τού ιξώδους (θα τό εξετάσουμε στο Υποκεφάλαιο 15.11) στρώματα αέρα κινούνται προς την κατεύθυνση τού στριφογυρίσματος. Η συνδυασμένη κίνηση τής στρωτής ροής τού αέρα και τού αέρα που «έλκεται» λόγω τού στριφογυρίσματος τής μπάλλας παράγει τις ρευματικές γραμμές τού Σχήματος 15.23b και ένα μη συμμετρικό σύστημα στροβίλων. Η ταχύτητα τού αέρα κάτω από την μπάλλα είναι μεγαλύτερη από την ταχύτητα τού αέρα πάνω από την μπάλλα. Έτσι, όπως γνωρίζουμε από τον νόμο τού Bernoulli, στο κάτω μέρος, όπου η ταχύτητα είναι μεγαλύτερη, δημιουργείται υποπίεση και έτσι η μπάλλα



Σχήμα 15.23 (a) Το ρεύμα τού αέρα γύρω από μια μη περιστρεφόμενη μπάλλα τού μπέιζ-μπωλ καθώς αυτή κινείται από τα δεξιά στα αριστερά. Οι ρευματικές γραμμές δείχνουν τη ροή τού αέρα ως προς την μπάλλα. Να σημειωθεί η συμμετρική περιοχή τυρβώδους ροής πίσω από την μπάλλα. (b) Το ρεύμα τού αέρα γύρω από περιστρεφόμενη μπάλλα. Η μπάλλα υπόκειται σε μία πλάγια δύναμη λόγω, μεταξύ άλλων, και τής αρχής τού Bernoulli.

υφίσταται μια αποκλίνουσα προς τα πλάγια δύναμη, που είναι *η αεροδύναμη*. Έτσι, εάν ο παίκτης που κλωτσά την μπάλλα θέλει να τής δώσει απόκλιση προς τα πλάγια, ο άξονας τού στριφογυρίσματος πρέπει να είναι κατακόρυφος (κάθετος προς τη σελίδα τού βιβλίου με το Σχήμα 15.23b). Εάν όμως θέλει να ρίξει την μπάλλα «βουτηχτά», τότε ο άξονας περιστροφής της πρέπει να είναι οριζόντιος. Οι μπάλλες τού γκολφ και τού τένις όταν στριφογυρίζουν υπόκεινται σε δυναμική άνωση.

* 15.10 ΕΝΕΡΓΕΙΑ ΑΠΟ ΤΟΝ ΑΝΕΜΟ (ΑΙΟΛΙΚΗ ΕΝΕΡΓΕΙΑ)

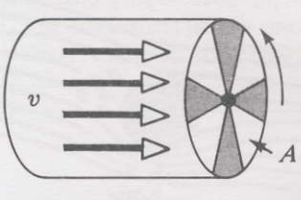
Η χρήση τού ανέμου για παραγωγή ενέργειας ανάγεται στο απώτερο παρελθόν, στους Βαβυλωνίους και στους Κινέζους τού 2000 π.Χ. Η κινητική ενέργεια τών ανέμων οφείλεται στην ηλιακή ενέργεια.

Ο άνεμος αποτελεί, δυνητικά, μεγάλη πηγή ενέργειας (1.25 περίπου kW ανά στρέμμα στις ΗΠΑ), αλλά η ενέργεια αυτή, η αιολική ενέργεια όπως λέγεται, έχει χρησιμοποιηθεί σε μικρή μόνο κλίμακα. Σε παγκόσμια κλίμακα οι άνεμοι μπορούν να αποδώσουν συνολική ισχύ 2×10^{10} kW (τριπλάσια τής παγκόσμιας κατανάλωσης τού 1972). Έτσι, εάν κατορθώναμε να χρησιμοποιήσουμε μέρος μόνο τής αιολικής ενέργειας θα καλύπταμε σε σημαντικό ποσοστό τις ενεργειακές ανάγκες μας. Το κυριότερο μειονέκτημα για την εκμετάλλευσή της είναι η μεγάλη διακύμανση τής ταχύτητας τών ανέμων.

Η μεγαλύτερη ανεμογεννήτρια παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας στις ΗΠΑ παρήγε 1.25 MW και βρισκόταν στο Grandpa's Knob στο Rutland τού Vermont. Το άνοιγμα τών πτερυγίων της ήταν 175 ft σε διάμετρο. Η ανεμοηλεκτρική γεννήτρια παρήγε ηλεκτρικό ρεύμα από το 1941 έως το 1945, οπότε έσπασαν από την κόπωση δύο πτερύγιά της, τα οποία όμως δεν επισκευάστηκαν ποτέ. Το υπουργείο ενέργειας τών ΗΠΑ έχει σήμερα κατασκευάσει ανεμομηχανές οι οποίες μπορούν να αποδώσουν 2.5 MW ηλεκτρικής ισχύος.

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε όσα μάθαμε στο κεφάλαιο αυτό για να υπολογίσουμε την αιολική ισχύ. Όλες οι ανεμομηχανές μετατρέπουν την κινητική ενέργεια τού ανέμου σε μηχανική ενέργεια με τη χρησιμοποίηση συνήθως ενός στρεφόμενου άξονα. Η κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου μιας κινούμενης στήλης αέρα ισούται με

$$\frac{KE}{\text{όγκος}} = \tfrac{1}{2}\rho v^2$$



Σχήμα 15.24 Άνεμος που κινείται με ταχύτητα v μέσα από κυλινδρικό σωλήνα διατομής A.

όπου ρ είναι η πυκνότητα τού αέρα και v το μέτρο τής ταχύτητάς του. Ο ρυθμός ροής τού αέρα διά μέσου μιας στήλης διατομής A είναι Av (Σχήμα 15.24), είναι δηλαδή ο όγκος τού αέρα που περνάει από την επιφάνεια κάθε δευτερόλεπτο. Σε μια μηχανή εκμετάλλευσης αιολικής ενέργειας, A είναι συνήθως η διατομή τού συστήματος που συλλέγει τον αέρα, όπως είναι, λ.χ., τα πτερύγια τού ανεμόμυλου. Εάν πολλαπλασιάσουμε την κινητική ενέργεια ανά μονάδα όγκου με τον ρυθμό ροής, βρίσκουμε τον ρυθμό μεταφοράς ενέργειας ή, με άλλα λόγια, την ισχύ:

$$\text{Ισχύς} = \frac{KE}{\text{όγκος}} \times \frac{\text{όγκος}}{\text{χρόνος}} = (\tfrac{1}{2}\rho v^2)(Av) = \tfrac{1}{2}\rho v^3 A \qquad (15.16)$$

Έτσι λοιπόν η ισχύς που έχουμε στην διάθεσή μας ανά μονάδα επιφάνειας είναι

$$\frac{P}{A} = \tfrac{1}{2}\rho v^3 \qquad (15.17)$$

όπου δεν πρέπει να συγχέεται το σύμβολο τής ισχύος P με την πίεση. Σύμφωνα με το αποτέλεσμα αυτό, εάν σταματούσαμε τη στήλη τού αέρα, θα είχαμε στη διάθεσή μας ισχύ ίση προς $\frac{1}{2}\rho v^3$ για κάθε τετραγωνικό μέτρο που «κόβει» η μηχανή. Λογουχάρη, εάν υποθέσουμε ότι η ταχύτητα είναι 27 mi/h ή 12 m/s και πάρουμε $\rho = 1.3$ kg/m^3, βρίσκουμε ότι

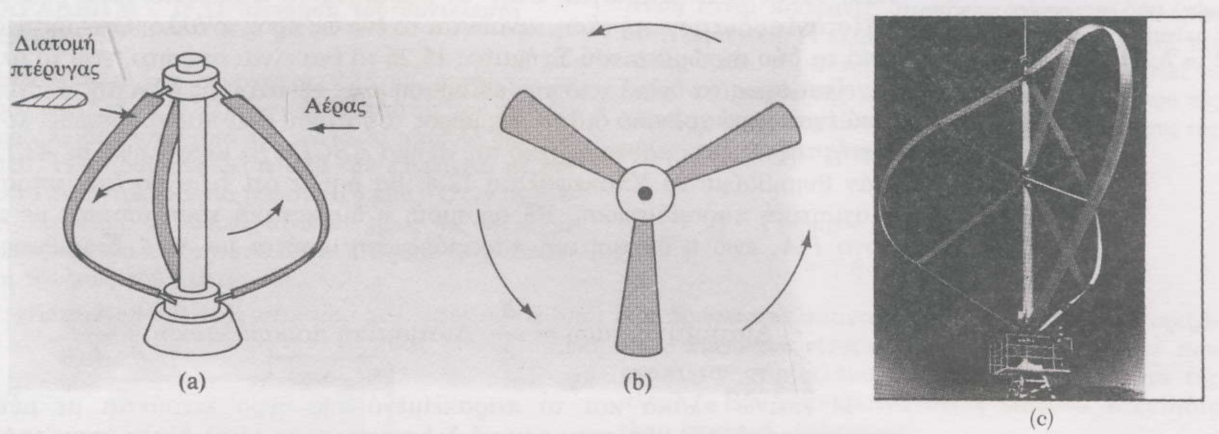
$$\frac{P}{A} = \frac{1}{2}\left(1.3\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)\left(12\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^3 \approx 1100\ \frac{\text{W}}{\text{m}^2} = 1.1\ \frac{\text{kW}}{\text{m}^2}$$

Εφόσον λοιπόν η ισχύς ανά μονάδα επιφάνειας μεταβάλλεται κατά τον κύβο τής ταχύτητας, διπλασιάζεται όταν η ταχύτητα v αυξηθεί κατά 26%. Αντίστροφα, η ισχύς θα μειωθεί στο μισό εάν η ταχύτητα μειωθεί κατά 26%.

Κατά τον προηγούμενο υπολογισμό μας υποτίθεται ότι οι συνθήκες είναι ιδεώδεις και ότι όλη η διαθέσιμη κινητική ενέργεια μετατρέπεται σε ισχύ. Στην πραγματικότητα όμως το ρεύμα τού αέρα εξέρχεται από τη μηχανή μετατροπής αιολικής ενέργειας με κάποια ταχύτητα. Πιο ρεαλιστικοί υπολογισμοί δείχνουν ότι στην καλύτερη περίπτωση δεν παίρνουμε περισσότερο από το 59.3% τής ποσότητας που υπολογίσαμε (βλ. J. H. Krenz, *Energy Conversion and Utilization,* Boston, Allyn and Bacon, 1976, κεφάλαιο 8). Η έκφραση που δίνει τη μέγιστη δυνατή ισχύ ανά μονάδα επιφάνειας για την ιδεώδη μηχανή μετατροπής αιολικής ενέργειας είναι

$$\frac{P_{\text{max}}}{A} = \frac{8}{27}\rho v^3 \tag{15.18}$$

Στην πράξη όμως έχουμε πρόσθετες απώλειες στις τριβές τών γραναζιών και τού άξονα και έτσι η τελική ισχύς μειώνεται κατά 15% τής τιμής που προβλέπει η Εξίσωση 15.17. Στο Σχήμα 15.25 θα δείτε σχέδια δύο αιολικών μηχανών.



Σχήμα 15.25 (a) Ανεμογεννήτρια κατακόρυφου άξονα. (b) Ανεμογεννήτρια οριζόντιου άξονα (c) Φωτογραφία ανεμογεννήτριας κατακόρυφου άξονα.(Προσφορά U. S. Department of Energy).

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15.10 Ισχύς εξόδου ενός ανεμόμυλου

Υπολογίστε την ισχύ εξόδου μιας ανεμογεννήτριας που έχει διάμετρο ανοίγματος πτερυγίων 80 m. Υποθέστε ότι το μέτρο τής ταχύτητας τού ανέμου είναι 10 m/s και ότι η απόδοση τού συστήματος είναι 15%.

Λύση Η ακτίνα τών πτερυγίων είναι 40 m. Έτσι η επιφάνεια διατομής τών πτερυγίων είναι

$$A = \pi r^2 = \pi(40\ \text{m})^2 = 5.0 \times 10^3\ \text{m}^2$$

Εάν η απόδοση ήταν 100%, η μέγιστη ισχύς θα ήταν

$$P_{\text{max}} = \tfrac{1}{2}\rho A v^3 = \tfrac{1}{2}\left(1.2\ \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}\right)(5.0 \times 10^3\ \text{m}^2)\left(10\ \frac{\text{m}}{\text{s}}\right)^3$$
$$= 3.0 \times 10^6\ \text{W} = 3.0\ \text{MW}$$

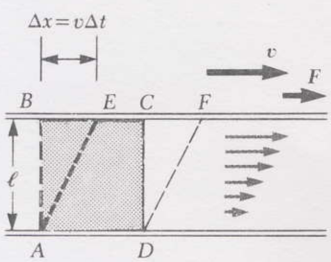
Γνωρίζουμε όμως ότι η απόδοση τής ανεμογεννήτριας αυτής είναι 15%, έτσι η ισχύς εξόδου είναι

$$P = 0.15 P_{\text{max}} = 0.45\ \text{MW}$$

Για σύγκριση ας έχουμε υπ' όψιν ότι ένα μεγάλο εργοστάσιο παραγωγής ηλεκτρικής ενέργειας με ατμοστροβίλους έχει ισχύ εξόδου 1 GM. Έτσι, εάν θέλουμε να παράγουμε την ίδια ισχύ, θα χρειαστούμε 2 200 ανεμογεννήτριες τού παραδείγματός μας. Ο μεγάλος αυτός αριθμός είναι ένα από τα κύρια μειονεκτήματα για τη χρήση τής αιολικής ενέργειας (βλ. και Πρόβλημα 52).

* 15.11 ΙΞΩΔΕΣ (ΕΣΩΤΕΡΙΚΗ ΤΡΙΒΗ ΡΕΥΣΤΩΝ)

Έχουμε δει ότι τα ρευστά δεν αντέχουν σε διατμητικές παραμορφώσεις. Πάντως, τα ρευστά αντιστέκονται σε μικρό βαθμό στη διατμητική κίνηση. Αυτή η αντίσταση στην κίνηση στρωμάτων τού ρευστού είναι ένα είδος εσωτερικής τριβής, που ονομάζεται **ιξώδες**. Στην περίπτωση τών υγρών το ιξώδες οφείλεται στη δύναμη τριβής ανάμεσα σε παρακείμενα στρώματα τού ρευστού καθώς αυτά ολισθαίνουν το ένα πάνω στο άλλο. Από το ακόλουθο παράδειγμα μπορούμε να καταλάβουμε καλύτερα το μέγεθος τού ιξώδους ενός ρευστού. Πάρτε δύο τζάμια, στερεώστε καλά το ένα επάνω σε ένα τραπέζι και αλείψτε την επάνω επιφάνειά του με λάδι. Τοποθετήστε το δεύτερο τζάμι επάνω στο πρώτο και κινήστε το ελαφρά. Θα δείτε ότι ολισθαίνει με ευκολία (Σχήμα 15.26). Εάν όμως αντί για λάδι βάλετε πίσσα ανάμεσα στα δύο τζάμια, θα δείτε ότι είναι πολύ δυσκολότερο να κινήσετε το ένα τζάμι πάνω στο άλλο. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η πίσσα έχει μεγαλύτερο ιξώδες από ό,τι το λάδι. Στο Σχήμα 15.26 βλέπετε ότι η ταχύτητα τών παρακείμενων στρωμάτων αυξάνεται γραμμικά από το 0 στο v καθώς προχωρούμε από το στρώμα που είναι δίπλα στην ακίνητη πλάκα στο στρώμα που βρίσκεται δίπλα στην κινούμενη πλάκα.



Σχήμα 15.26 Στρώματα υγρού που περιέχεται μεταξύ δύο στερεών επιφανειών, από τις οποίες η κάτω είναι ακίνητη ενώ η επάνω κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα v.

Θυμηθείτε ότι σε ένα στερεό που υπόκειται σε διατμητική τάση τα παρακείμενα στρώματα μετατοπίζονται το ένα ως προς το άλλο (Υποκεφάλαιο 12.4). Κατ' αναλογία, όταν τα παρακείμενα στρώματα ενός ρευστού υφίστανται διατμητική τάση, κινούνται το ένα ως προς το άλλο. Θεωρήστε ότι από τα δύο στρώματα τού Σχήματος 15.26 το ένα είναι ακίνητο, ενώ το άλλο κινείται προς τα δεξιά υπό την επίδραση μιας εξωτερικής δύναμης $\mathbf{F}$. Μετά από ένα μικρό χρονικό διάστημα, μέρος τού υγρού έχει παραμορφωθεί λόγω αυτής τής κίνησης και το αρχικό του σχήμα $ABCD$ έχει μεταβληθεί σε $AEFD$. Εάν θυμηθούμε το Υποκεφάλαιο 12.4, θα δούμε ότι το υγρό έχει υποστεί διατμητική παραμόρφωση. Εξ ορισμού, η διατμητική τάση ισούται με τον λόγο F/A, ενώ η διατμητική παραμόρφωση ισούται με $\Delta x/\ell$. Επομένως,

$$\text{Διατμητική τάση} = \frac{F}{A} \qquad \text{Διατμητική παραμόρφωση} = \frac{\Delta x}{\ell}$$

Η επάνω πλάκα και το παρακείμενό της υγρό κινούνται με μέτρο ταχύτητας v. Δηλαδή στο χρονικό διάστημα Δt το υγρό δίπλα στην επάνω πλάκα μετατοπίστηκε κατά απόσταση $\Delta x = v\,\Delta t$. Η διατμητική παραμόρφωση ανά μονάδα χρόνου είναι

$$\frac{\text{Διατμητική παραμόρφωση}}{\Delta t} = \frac{\Delta x/\ell}{\Delta t} = \frac{v}{\ell}$$

Η εξίσωση αυτή λέει ότι ο ρυθμός μεταβολής τής διατμητικής παραμόρφωσης είναι v/ℓ.

Ορίζουμε ότι ο **συντελεστής ιξώδους (ή εσωτερικής τριβής)**, η, τού ρευστού ισούται με τον λόγο τής διατμητικής τάσης προς τον ρυθμό μεταβολής τής διατμητικής παραμόρφωσης:

Συντελεστής ιξώδους

$$\eta \equiv \frac{F/A}{v/\ell} = \frac{F\ell}{Av} \tag{15.19}$$

Οι μονάδες τού συντελεστή ιξώδους στο SI είναι N · s/m². Στον Πίνακα 15.2 θα βρείτε τον συντελεστή ιξώδους για διάφορες ουσίες. Η μονάδα τού ιξώδους στο cgs είναι dyne · s/cm² και ονομάζεται **poise** και συμβολίζεται με P (προς τιμήν τού Γάλλου φυσικού Poiseuille).

ΠΙΝΑΚΑΣ 15.2 Συντελεστής ιξώδους διαφόρων ρευστών

ρευστό	**T(°C)**	**ιξώδες η (N · s/m²)**
Νερό	20	1.0×10^{-3}
Νερό	100	0.3×10^{-3}
Αίμα	37	2.7×10^{-3}
Γλυκερίνη	20	830×10^{-3}
Μηχανέλαιο (δεκάρι)	30	250×10^{-3}

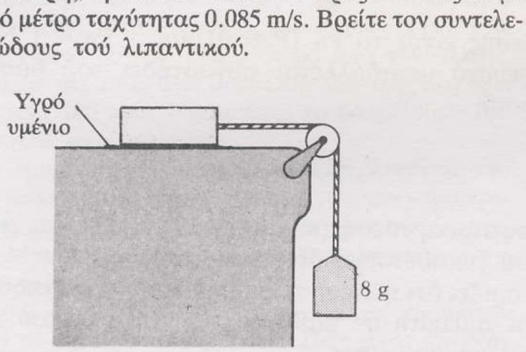
Η Εξίσωση 15.19 που ορίζει τον συντελεστή ιξώδους η ισχύει μόνον εάν το μέτρο τής ταχύτητας μεταβάλλεται γραμμικά συναρτήσει τού πάχους τού ρευστού. Τότε λέμε ότι ο ρυθμός μεταβολής τής ταχύτητας συναρτήσει τού πάχους *είναι* σταθερός. Εάν *δεν* είναι, τότε πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τον γενικό ορισμό τού η

$$\eta \equiv \frac{F/A}{dv/dy} \tag{15.20}$$

όπου η βαθμίδα τής ταχύτητας, dv/dy, μετριέται σε κάθετη κατεύθυνση προς την ταχύτητα.

ΠΑΡΑΔΕΙΓΜΑ 15.11 Μέτρηση τού συντελεστή ιξώδους

Μεταλλική πλάκα επιφάνειας 0.15 m² συνδέεται με μάζα 8 g (Σχήμα 15.27) μέσω ενός νήματος που περνάει χωρίς τριβές πάνω από μία τροχαλία η οποία δεν έχει μάζα. Η πλάκα χωρίζεται από την επιφάνεια με ένα λεπτό λιπαντικό υμένιο πάχους 0.3 mm. Όταν αφήνεται ελεύθερη, η πλάκα κινείται προς τα δεξιά με σταθερό μέτρο ταχύτητας 0.085 m/s. Βρείτε τον συντελεστή ιξώδους τού λιπαντικού.



Σχήμα 15.27 (Παράδειγμα 15.11).

Λύση Είναι προφανές ότι η επιτάχυνση τής πλάκας είναι μηδενική. Η πλάκα κινείται λόγω τής δράσης τής τάσης $\boldsymbol{T}$ και τής δύναμης τριβής $\boldsymbol{f}$ την οποία ασκεί το λιπαντικό επάνω της. Στην περίπτωσή μας το μέτρο τής τάσης τού νήματος είναι ίσο με το μέτρο τού βάρους τής μάζας που είναι αναρτημένη από το νήμα:

$$f = T = mg = (8 \times 10^{-3}\ \text{kg})(9.80\ \text{m/s}^2)$$
$$= 7.84 \times 10^{-2}\ \text{N}$$

Το στρώμα τού λιπαντικού που εφάπτεται στην οριζόντια επιφάνεια είναι ακίνητο, ενώ το στρώμα που εφάπτεται στην πλάκα κινείται με την ταχύτητα τής πλάκας. Εάν υποθέσουμε ότι η βαθμίδα ταχύτητας είναι σταθερή, βρίσκουμε

$$\eta = \frac{F\ell}{Av} = \frac{(7.84 \times 10^{-2}\ \text{N})(0.3 \times 10^{-3}\ \text{m})}{(0.05\ \text{m}^2)(0.085\ \text{m/s})}$$

$$= 5.53 \times 10^{-3}\ \text{N}\cdot\text{s/m}^2$$

* 15.12 ΤΥΡΒΩΔΗΣ ΡΟΗ

Όταν τα παρακείμενα στρώματα ενός ρευστού με ιξώδες ρέουν στρωτά το ένα πάνω στο άλλο, αυτή η σταθερή ροή λέγεται *στρωματική ροή* (laminar flow). Σε μεγάλες όμως ταχύτητες η ροή τού ρευστού μεταβάλλεται και από στρωματική γίνεται τελείως ακανόνιστη και τυχαία, οπότε ονομάζεται *τυρβώδης ροή*. Η ταχύτητα κατά την οποία αρχίζει η τυρβώδης ροή εξαρτάται από το ιξώδες τού ρευστού και από τη γεωμετρία τού περιβάλλοντος το ρευστό μέσου.

Μπορούμε να δώσουμε πολλά παραδείγματα τυρβώδους ροής. Το νερό ενός ρυακιού που έχει πολλές πέτρες και ο καπνός που βγαίνει από τις καπνοδόχους ρέουν τυρβωδώς. Επίσης τα απόνερα ενός ταχύπλοου σκάφους και ο αέρας πίσω από ένα αεροπλάνο κινούνται τυρβωδώς.

Έχει διαπιστωθεί από διάφορα πειράματα ότι η αρχή τής τυρβώδους ροής προσδιορίζεται από μια παράμετρο που ονομάζεται **αριθμός τού Reynolds,** *RN*, ο οποίος ισούται με

Αριθμός τού Reynolds

$$RN = \frac{\rho v d}{\eta} \tag{15.21}$$

όπου ρ είναι η πυκνότητα τού ρευστού, v είναι το μέτρο τής ταχύτητάς του, η ο συντελεστής ιξώδους και d είναι ένα χαρακτηριστικό μήκος που έχει σχέση με την ροή. Λ.χ. για ροή διά μέσου ενός σωλήνα το d ισούται με τη διάμετρο τού σωλήνα για την περίπτωση ροής γύρω από σφαίρα το d ισούται με τη διάμετρο τής σφαίρας.

Από διάφορα πειράματα γνωρίζουμε ότι εάν ο αριθμός τού Reynolds είναι μικρότερος από 2 000, τότε η ροή είναι στρωματική. Εάν ο αριθμός τού Reynolds είναι μεγαλύτερος από 3 000, η ροή είναι τυρβώδης.

ΑΝΑΚΕΦΑΛΑΙΩΣΗ

Ορίζουμε ότι **πυκνότητα**, ρ, ενός υλικού είναι η μάζα του ανά μονάδα όγκου και στο SI έχει μονάδες kg/m^3:

Πυκνότητα

$$\rho \equiv \frac{m}{V} \tag{15.1}$$

Η ***πίεση P*** σε ένα ρευστό είναι ίση με τη δύναμη ανά μονάδα επιφάνειας την οποία ασκεί το ρευστό σε μια επιφάνεια:

Μέση πίεση

$$P \equiv \frac{F}{A} \tag{15.2}$$

Στο SI μονάδα τής πίεσης είναι το Pa (Pascal) και 1 Pa = 1 N/m^2.

Η πίεση σε ένα ρευστό μεταβάλλεται συναρτήσει τού βάθους, h, σύμφωνα με την έκφραση

Πίεση σε βάθος *h*

$$P = P_a + \rho g h \tag{15.7}$$

όπου P_a είναι η ατμοσφαιρική πίεση ($= 1.01 \times 10^5$ N/m^2) και ρ είναι η πυκνότητα τού ρευστού (υποθέτουμε ότι είναι σταθερή).

Ο νόμος τού Pascal ορίζει ότι η πίεση που ασκείται σε ένα αποθηκευμένο ρευστό μεταφέρεται αμείωτη σε κάθε σημείο τού ρευστού και στα τοιχώματα τού δοχείου αποθήκευσης.

Όταν ένα αντικείμενο είναι μερικώς ή ολικώς βυθισμένο σε ένα ρευστό, το ρευστό ασκεί στο αντικείμενο τη **δύναμη άνωσης,** που κατευθύνεται προς τα επάνω. Σύμφωνα με την **αρχή τού Αρχιμήδη,** το μέτρο τής άνωσης είναι ίσο με το βάρος τού ρευστού το οποίο εκτοπίζει το αντικείμενο.

Μπορούμε να καταλάβουμε καλύτερα διάφορα μέρη τής κινητικής τών ρευστών εάν υποθέσουμε ότι το ρευστό δεν έχει εσωτερική τριβή (ιξώδες), είναι ασυμπίεστο και η κίνηση είναι στρωτή, χωρίς στροβίλους (χωρίς τυρβώδη ροή).

Εάν κάνουμε τις υποθέσεις αυτές, καταλήγουμε στα ακόλουθα σημαντικά συμπεράσματα για τη ροή ενός ρευστού μέσα σε ένα σωλήνα μεταβλητής διατομής:

1. Η παροχή μέσα στον σωλήνα είναι σταθερή, με άλλα λόγια το γινόμενο τής διατομής τού σωλήνα A επί το μέτρο τής ταχύτητας v σε οποιοδήποτε σημείο είναι σταθερό. Δηλαδή

$$A_1 v_1 = A_2 v_2 = \text{σταθερό} \qquad (15.11)$$

Εξίσωση συνέχειας

2. Το άθροισμα τής πίεσης, τής κινητικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου καθώς και τής δυναμικής ενέργειας ανά μονάδα όγκου είναι σταθερό για όλα τα σημεία μιας ρευματικής γραμμής. Δηλαδή

$$P + \tfrac{1}{2}\rho v^2 + \rho g y = \text{σταθερό} \qquad (15.13)$$

Η εξίσωση τού Bernoulli

Η παραπάνω εξίσωση είναι ο **νόμος τού Bernoulli** και είναι θεμελιώδης νόμος τής δυναμικής τών ρευστών.

Το ιξώδες ενός ρευστού δίνει το μέτρο τής αντίστασής του σε διατμητική κίνηση. Ο **συντελεστής τού ιξώδους** ενός ρευστού ισούται με τον λόγο τής διατμητικής τάσης προς τον ρυθμό μεταβολής τής διατμητικής παραμόρφωσης.

Η αρχή τής τυρβώδους ροής ενός ρευστού περιγράφεται από μία παράμετρο που λέγεται **αριθμός τού Reynolds,** τού οποίου η τιμή εξαρτάται από την πυκνότητα τού ρευστού, από την ταχύτητά του, από το ιξώδες και από έναν γεωμετρικό συντελεστή.

ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1. Γεμίζουμε δύο γυάλινες κούπες, που έχουν την ίδια μάζα αλλά διαφορετικό σχήμα και διαφορετική εγκάρσια διατομή, με νερό στην ίδια στάθμη. Σύμφωνα λοιπόν με τον νόμο $P = P_a + \rho g h$, η πίεση στον πυθμένα είναι ίδια και για τις δύο κούπες. Γιατί τότε η μία κούπα ζυγίζει περισσότερο από την άλλη;

2. Υποθέστε ότι το επάνω μέρος τής κεφαλής σας έχει επιφάνεια 100 cm^2. Υπολογίστε το βάρος τού αέρα πάνω από το κεφάλι σας.

3. Όταν πίνετε υγρά με ένα καλαμάκι μειώνετε την πίεση μέσα στο στόμα σας και αφήνετε την ατμοσφαιρική πίεση να κινήσει το υγρό. Εξηγήστε πώς γίνεται αυτό. Μπορείτε να χρησιμοποιείτε καλαμάκι για να πίνετε το ποτό σας στη Σελήνη;

4. Οι Ινδοί φακίρηδες ξαπλώνουν για να κοιμηθούν επάνω σε στρώμα από καρφιά. Πώς είναι δυνατόν αυτό;

5. Στο βαρόμετρο που κατασκεύασε ο Pascal χρησιμοποίησε νερό. Γιατί δεν ακολουθούμε σήμερα την επιλογή του αυτή;

6. Κάποιος βρίσκεται πάνω σε μια βάρκα που πλέει σε μια πολύ μικρή λίμνη και ρίχνει μέσα στο νερό μια πολύ μεγάλη άγκυρα. Αυξάνεται, μειώνεται ή παραμένει σταθερή η στάθμη τού νερού τής λίμνης;

7. Ο χάλυβας είναι πολύ πιό πυκνός από το νερό. Γιατί δεν βυθίζονται τα σημερινά πλοία, μολονότι είναι κατασκευασμένα από χάλυβα;

8. Ένα αερόστατο που είναι γεμάτο με ήλιο θα ανυψώνεται ωσότου ο αέρας γύρω του θα έχει την ίδια πυκνότητα με αυτό. Εάν ένα σφραγισμένο υποβρύχιο αρχίζει να βυθίζεται, θα φτάσει στον βυθό τού ωκεανού ή θα παύσει να βυθίζεται όταν η πυκνότητα τού νερού γύρω του θα είναι ίδια με τη δική του;

9. Ζυγίζετε ένα ψάρι που είναι ακίνητο μέσα σε έναν κουβά με νερό. Μεταβάλλεται η ένδειξη τής ζυγαριάς εάν το ψάρι αρχίσει να κινείται;

10. Πού έχει υψηλότερα έξαλα ένα σκάφος: στη θάλασσα ή σε μια λίμνη;

11. Εάν προστεθεί βάρος 1 000 000 N στο κατάστρωμα ενός μεγάλου φορτηγού πλοίου η ίσαλος γραμμή του βυθίζεται κατά 2.5 cm. Ποια είναι η οριζόντια διατομή τού φορτηγού στο ύψος τής ισάλου;

12. Ο μόλυβδος έχει μεγαλύτερη πυκνότητα από τον σίδηρο και τα δύο μαζί έχουν μεγαλύτερη πυκνότητα από το νερό. Πάρετε ένα μολυβένιο και ένα σιδερένιο αντικείμενο τού ίδιου όγκου και βυθίστέ τα στο νερό. Υπόκεινται στην ίδια ή σε διαφορετική άνωση; Ποια είναι μεγαλύτερη;

13. Βάζετε ένα παγάκι μέσα σε ένα ποτήρι νερό. Πώς μεταβάλλεται η στάθμη τού νερού καθώς λειώνει το παγάκι;

14. Μια γυναίκα φορά γόβες με ψηλό τακούνι και μπαίνει σε ένα δωμάτιο με καινούργιο πλαστικό δάπεδο. Γιατί ανησυχεί ο ιδιοκτήτης τού σπιτιού;

16. Γιατί οι βρύσες στα ισόγεια διαμερίσματα τρέχουν πιο γρήγορα από τις βρύσες τών ρετιρέ;

16. Γιατί οι βρύσες στα ισόγεια διαμερίσματα τρέχουν πιο γρήγορα από τις βρύσες τών ρετιρέ;

17. Χρησιμοποιήστε την εξίσωση τού Bernoulli για να εξηγήσετε γιατί μια καπνοδόχος «τραβά» τον καπνό καλύτερα όταν φυσά ο αέρας.

19. Θεωρήστε μια διατομή πτέρυγας αεροπλάνου.Η πτέρυγα έχει σχεδιαστεί έτσι ώστε ο αέρας να κινείται με μεγαλύτερη ταχύτητα στο επάνω μέρος της παρά στο κάτω. Χρησιμοποιήστε την αρχή τού Bernoulli και εξηγήστε γιατί υπάρχει δύναμη που κατευθύνεται προς τα επάνω;

20. Όταν ένα τραίνο που κινείται πολύ γρήγορα περάσει δίπλα από ένα ακίνητο τραίνο τα δύο τραίνα έλκονται. Πώς εξηγείται το φαινόμενο αυτό με την αρχή τού Bernoulli;

22. Πολλές φορές, δυνατοί ανεμοστρόβιλοι ξεσηκώνουν τις στέγες τών αγροτικών σπιτιών. Εξηγήστε το φαινόμενο αυτό χρησιμοποιώντας την αρχή τού Bernoulli. Γιατί πρέπει να αφήνετε τα παράθυρα τών σπιτιών ανοιχτά όταν έχει τέτοιες καταιγίδες;

23. Θα έχετε παρατηρήσει ότι όταν ανοίξετε το ντουζ, η κουρτίνα τής ντουζιέρας «έλκεται» προς το νερό. Πώς εξηγείτε το φαινόμενο αυτό;

24. Φυσήξτε παράλληλα προς το επάνω μέρος μιας κόλλας χαρτιού που τήν κρατάτε οριζόντια. Γιατί το χαρτί ανυψώνεται;

25. Πάρτε ένα σεσουάρ και κατευθύνετέ το προς μια μπάλλα τού πινγκ-πονγκ. Θα δείτε ότι η μπάλλα μένει μετέωρη στον αέρα. Εξηγήστε το φαινόμενο.

26. Όταν σε ένα λιμάνι δύο πλοία περάσουν κοντά το ένα με το άλλο, τότε ασκείται επάνω τους αμοιβαία έλξη και κάποτε συγκρούονται πλάγια. Εξηγήστε το φαινόμενο με βάση την αρχή τού Bernoulli.

27. Όταν οι χιονοδρόμοι-άλτες βρίσκονται στον αέρα κάμπτουν το σώμα τους προς τα εμπρός και κρατούν τα χέρια τους κολλημένα στο σώμα τους. Γιατί;

28. Όταν ένα αντικείμενο είναι βυθισμένο σε ένα ακίνητο ρευστό η οριζόντια συνιστώσα τής συνισταμένης τών δυνάμεων οι οποίες δρουν πάνω του είναι μηδενική. Γιατί;

29. Εξηγήστε γιατί επιπλέει μια κλειστή μισογεμισμένη μπουκάλα.

30. Πότε είναι μεγαλύτερη η δύναμη τής άνωσης: όταν εκπνέει ένας κολυμβητής ή όταν εισπνέει;

31. Ένα κομμάτι ξύλο είναι μισοβυθισμένο σε ένα δοχείο γεμάτο νερό. Εάν κλείσετε ερμητικά το δοχείο και αυξήσετε την πίεση πάνω από την ατμοσφαιρική, τί κάνει το ξύλο: σηκώνεται, βυθίζεται ή παραμένει στο ίδιο επίπεδο; (Μην ξεχνάτε ότι το ξύλο έχει πόρους).

32. Μια πλάκα ακινητεί μέσα σε ένα ρευστό. Σε ποια κατεύθυνση τής πλάκας η πίεση επάνω της είναι ομοιόμορφη;

33. Ξέρουμε ότι η ατμοσφαιρική πίεση είναι 10^5 N/m^2 και ότι η επιφάνεια τού στήθους ενός ανθρώπου είναι 0.13 m^2, η δύναμη δηλαδή που ασκεί η ατμόσφαιρα επάνω μας είναι 13 000 N. Γιατί δεν συνθλίβεται το στήθος κάτω από μια τέτοια δύναμη;

34. Τί είναι εκείνο που κρατά μετέωρη μια μέλισσα ή ένα ελικόπτερο;

35. Πώς μπορείτε να προσδιορίσετε την πυκνότητα μιας πέτρας ακαθόριστου σχήματος;

36. Γιατί οι πιλότοι προτιμούν να απογειώνονται έχοντας τον άνεμο κόντρα;

38. Υποθέστε ότι βρίσκεστε μέσα σε ένα ασανσέρ που εκτελεί ελεύθερη πτώση. Εάν αφήσετε μια μπάλλα ελεύθερη, θα δείτε ότι παραμένει μπροστά σας, διότι η μπάλλα, εσείς και το ασανσέρ πέφτετε όλοι σας με την επιτάχυνση τής βαρύτητας. Τί θα συμβεί εάν επαναλάβετε το πείραμα με ένα μπαλόνι γεμάτο ήλιο;

39. Δύο πανομοιότυπα πλοία ταξιδεύουν.Το ένα είναι γεμάτο φελιζόλ και το άλλο άδειο. Ποιο είναι βυθισμένο περισσότερο;

40. Ένα μικρό κομμάτι χάλυβα είναι δεμένο πάνω σε ένα κομμάτι ξύλο. Εάν βάλετε το ξύλο, με τον χάλυβα προς τα επάνω, μέσα σε μια λεκάνη γεμάτη νερό το μισό ξύλο βυθίζεται. Εάν αναποδογυρίσετε το ξύλο (τώρα το κομμάτι τού χάλυβα βρίσκεται μέσα στο νερό) τί συμβαίνει με το ξύλο; Βυθίζεται περισσότερο, λιγότερο ή το ίδιο; Μεταβάλλει ύψος η στάθμη τού νερού;

41. Ο τρόπος με τον οποίο ένα είδος τρωκτικών αερίζουν τη στοά τους είναι ο εξής: Πάνω στην έξοδο που βρίσκεται ψηλά φτιάχνουν έναν κώνο σαν λοφίσκο· η άλλη έξοδος βρίσκεται χαμηλά. Εξηγήστε πώς δημιουργείται το ρεύμα τού αέρα μέσα στη στοά.

42. Βάλτε σε ένα δοχείο με νερό ένα σφραγισμένο κουτί coca cola και ένα σφραγισμένο κουτί διαιτητικής coca cola. Γιατί βυθίζεται μόνο το κουτί τής κανονικής coca cola;

44. Στην παρακάτω φωτογραφία ένα ρεύμα αέρα κινείται μέσα στον σωλήνα από τα δεξιά προς τα αριστερά. Ο σωλήνας έχει μια στένωση στη μέση. Τρεις μπάλλες τού πινγκ πονγκ αιωρούνται ισορροπώντας πάνω από τις τρεις τρύπες από τις οποίες διαφεύγει ο αέρας. (a) Γιατί η δεξιά μπάλλα βρίσκεται ψηλότερα από τη μεσαία; (b) Γιατί η αριστερή μπάλλα βρίσκεται χαμηλότερα από τη δεξιά, παρ' όλο που η διατομή τού αντίστοιχου σωλήνα είναι ίδια;

(Ερώτηση 44).

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

Υποκεφάλαιο 15.2 Πυκνότητα και πίεση

1. Υπολογίστε τη μάζα μιας στερεάς σφαίρας από σίδηρο που έχει διάμετρο 3.0 cm.

2. Ένα μικρό κομμάτι ενός γυαλιστερού γκρίζου μετάλλου έχει όγκο 25 cm^3 και μάζα 535 g. Ποιο είναι το μέταλλο; (Βλ. Πίνακα 15.1).

3. Εκτιμήσετε την πυκνότητα τού *πυρήνα* ενός ατόμου. Τί υποδηλώνει αυτό το αποτέλεσμα σε ό,τι αφορά τη δομή τής ύλης; (Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η μάζα τού πρωτονίου είναι 1.67×10^{-27} kg και η ακτίνα του 10^{-15} m περίπου).

4. Ένας βασιλιάς παρήγγειλε ένα χρυσό στέμμα που είχε μάζα 0.5 kg. Όταν επέστρεψε από τον χρυσοχόο, ο όγκος τού στέμματος βρέθηκε ίσος με 185 cm^3. Ήταν το στέμμα κατασκευασμένο από καθαρό χρυσό;

5. Μια γυναίκα μάζας 50 kg στέκεται ισορροπώντας στο ένα πόδι ενώ φοράει ένα ζευγάρι παπούτσια με ψηλά τακούνια. Αν το τακούνι είναι κυκλικό με ακτίνα 0.5 cm, ποια πίεση ασκεί η γυναίκα στο έδαφος;

6. Χρησιμοποιήστε το γεγονός ότι η κανονική ατμοσφαιρική πίεση είναι 1.013×10^5 N/m^2 και ότι η ακτίνα τής Γης είναι 6.38×10^6 m για να υπολογίσετε τη μάζα τής ατμόσφαιρας τού πλανήτη μας.

7. Εκτιμήσετε την πυκνότητα ενός άστρου νετρονίων. Ένα τέτοιο ουράνιο σώμα πιστεύεται ότι έχει ακτίνα μόνο 10 km και μάζα ίση με τη μάζα τού Ηλίου. ($M_{\eta\lambda\iota o \upsilon} = 2 \times 10^{30}$ kg).

Υποκεφάλαιο 15.3 Μεταβολή τής πίεσης συναρτήσει τού βάθους

8. Προσδιορίστε την ολική πίεση στον πυθμένα μιας λίμνης που έχει βάθος 30 m.

9. Σε ποιο βάθος μιας λίμνης η ολική πίεση είναι τριπλάσια από την ατμοσφαιρική πίεση;

10. Το μικρό έμβολο ενός υδραυλικού πιεστηρίου για την ανύψωση αυτοκινήτων έχει διατομή εμβαδού 3 cm^2 και το μεγάλο έμβολο έχει εμβαδόν 200 cm^2 (βλ. Σχήμα 15.7). Ποια δύναμη πρέπει να εφαρμοστεί στο μικρό έμβολο για να ανυψωθεί ένα αυτοκίνητο βάρους 15 000 N; (Στους σταθμούς εξυπηρετήσεως αυτοκινήτων αυτό γίνεται συνήθως με πεπιεσμένο αέρα).

11. Το ελατήριο τού μανόμετρου που φαίνεται στο Σχήμα 15.4 έχει σταθερά 1 000 N/m και το έμβολο έχει διάμετρο 2 cm. Βρείτε το βάθος μέσα σε νερό στο οποίο το ελατήριο συμπιέζεται κατά 0.5 cm.

12. Μια πισίνα έχει διαστάσεις 30 m × 10 m και επίπεδο πυθμένα. Όταν η πισίνα είναι γεμάτη μέχρι 2 m βάθος με καθαρό νερό, ποια είναι η ολική δύναμη που ασκεί το νερό στον πυθμένα; Σε κάθε πλευρική επιφάνεια;

13. Ποια πρέπει να είναι η επιφάνεια συνεπαφής μιας βεντούζας (τελείως κενής από αέρα) και τής οροφής ενός δωματίου έτσι ώστε να μπορεί να συγκρατεί το βάρος ενός ανθρώπου μάζας 80 kg που θα αναρτηθεί από αυτήν;

14. Ένας ταχυδακτυλουργός είναι βυθισμένος σε νερό σε βάθος 4.0 m μέσα σε ένα σφραγισμένο μπαούλο. Αν το καπάκι τού μπαούλου έχει διαστάσεις 0.70 m × 2.0 m, ποια είναι η δύναμη που ασκεί το νερό στο καπάκι τού μπαούλου;

15. Ποια είναι η κλασματική μεταβολή τής πυκνότητας τού νερού τής θάλασσας μεταξύ τής επιφάνειας (όπου η πίεση είναι ίση με 1 atm) και σε βάθος 5.2 km (όπου η πίεση είναι 500 atm);

16. Ποια είναι η υδροστατική δύναμη στο τοίχωμα ενός φράγματος αν το νερό που συγκρατεί έχει βάθος 150 m και το πλάτος τού φράγματος είναι 1 200 m;

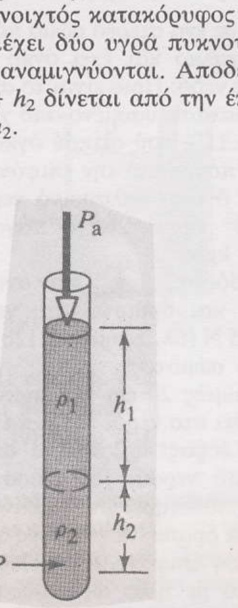
17. Στη Γροιλανδία, σε μερικές περιοχές το στρώμα τού πάγου έχει πάχος 1 km. Εκτιμήσετε την πίεση στο έδαφος κάτω από τον πάγο ($\varrho_{\pi\alpha\gamma o \upsilon} = 920$ kg/m^3).

Υποκεφάλαιο 15.4 Μετρήσεις πίεσης

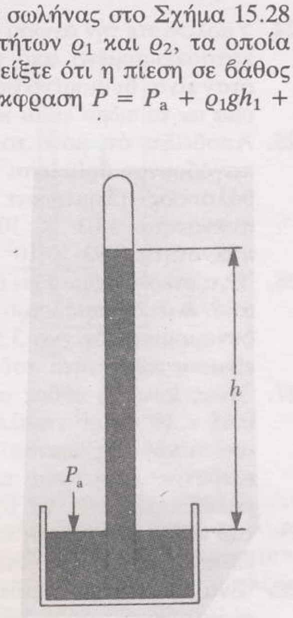
18. Ο σωλήνας σχήματος U στο Σχήμα 15.9a περιέχει υδράργυρο. Ποια είναι η πίεση P, στην αριστερή πλευρά αν $h = 20$ cm; Ποια είναι η υπερπίεση;

19. Αν το υγρό στο βαρόμετρο που φαίνεται στο Σχήμα 15.9b είναι νερό, ποιο θα είναι το ύψος τής στήλης τού νερού στον κατακόρυφο σωλήνα υπό ατμοσφαιρική πίεση;

20. Ο ανοιχτός κατακόρυφος σωλήνας στο Σχήμα 15.28 περιέχει δύο υγρά πυκνοτήτων ϱ_1 και ϱ_2, τα οποία δεν αναμιγνύονται. Αποδείξτε ότι η πίεση σε βάθος $h_1 + h_2$ δίνεται από την έκφραση $P = P_a + \varrho_1 g h_1 + \varrho_2 g h_2$.



Σχήμα 15.28 (Πρόβλημα 20).



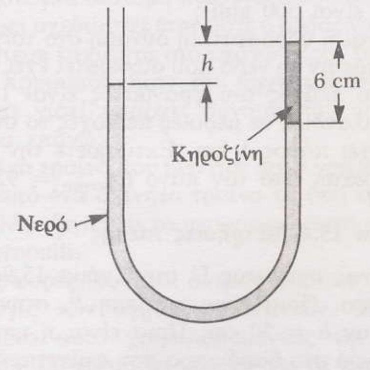
Σχήμα 15.29 (Πρόβλημα 21).

21. Ο Blaise Pascal αναπαρήγαγε το βαρόμετρο τού Torricelli χρησιμοποιώντας (σαν Γάλλος που ήταν) ένα κόκκινο κρασί ως υγρό αντί για υδράργυρο. Η πυκνότητα τού κρασιού που χρησιμοποίησε ήταν 0.984×10^3 kg/m^3. Ποιο ήταν το ύψος h τής στήλης τού κρασιού για κανονική ατμοσφαιρική πίεση; (Αναφερθείτε στο Σχήμα 15.29 και χρησιμοποιήστε $g = 9.80$ m/s^2). Αναμένετε ότι το κενό πάνω από τη στήλη θα είναι τόσο καλό όσο στον υδράργυρο;

22. Η κανονική ατμοσφαιρική πίεση είναι 1.013×10^5 Pa. Η προσέγγιση μιας καταιγίδας προκαλεί ελάττωση τού ύψους τής υδραργυρικής στήλης ενός βαρομέτρου κατά 20 mm από το κανονικό ύψος. Ποια είναι η ατμοσφαιρική πίεση; (Η πυκνότητα τού υδραργύρου είναι 13.59 g/cm^3).

23. Ένας απλός σωλήνας σχήματος U που είναι ανοιχτός και στα δύο άκρα περιέχει ποσότητα νερού (βλ. Σχήμα 15.30). Στη συνέχεια ρίχνουμε κηροζίνη

($\varrho_k = 0.82 \times 10^3$ kg/m^3) στο ένα σκέλος τού σωλήνα που σχηματίζει στήλη ύψους 6 cm, όπως δείχνει το σχήμα. Ποια είναι η διαφορά h τών υψών τών ελεύθερων επιφανειών τών δύο υγρών;



Σχήμα 15.30 (Πρόβλημα 23).

Υποκεφάλαιο 15.5 Η άνωση και η αρχή τού Αρχιμήδη

24. Υπολογίστε την άνωση σε ένα στερεό σώμα που είναι κατασκευασμένο από χαλκό και έχει όγκο 0.2 m^3 όταν είναι βυθισμένο σε νερό. Ποιο είναι το αποτέλεσμα αν το σώμα είναι κατασκευασμένο από χάλυβα;

25. Αποδείξτε ότι μόνο το 11% τού ολικού όγκου ενός παγόβουνου βρίσκεται πάνω από την επιφάνεια τής θάλασσας. (Σημειώστε ότι το θαλασσινό νερό έχει πυκνότητα 1.03×10^3 kg/m^3 και ο πάγος έχει πυκνότητα 0.92×10^3 kg/m^3).

26. Ένα στερεό σώμα έχει βάρος 5.0 N. Όταν αναρτηθεί από ένα δυναμόμετρο και βυθιστεί στο νερό, το δυναμόμετρο δείχνει 3.5 N (βλ. Σχήμα 15.12b). Ποια είναι η πυκνότητα τού σώματος;

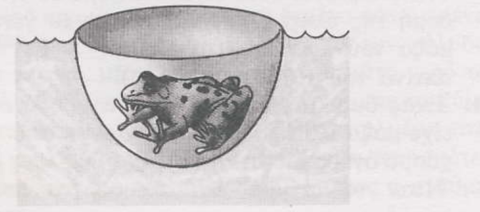
27. Ένας ξύλινος κύβος ακμής 20 cm και πυκνότητας 0.65×10^3 kg/m^3 επιπλέει στο νερό. (a) Ποια είναι η απόσταση τής επάνω έδρας τού κύβου από την ελεύθερη επιφάνεια τού νερού; (b) Πόσο βάρος μολύβδου πρέπει να τοποθετηθεί στην επάνω έδρα τού κύβου ώστε αυτή να βρίσκεται ακριβώς στο ίδιο επίπεδο με την ελεύθερη επιφάνεια τού νερού;

28. Ένα αερόστατο γεμάτο με ήλιο σε ατμοσφαιρική πίεση είναι υπολογισμένο να ανυψώνει μάζα M (ωφέλιμο φορτίο + άδειο αερόστατο). (a) Αποδείξτε ότι ο όγκος τού αερόστατου πρέπει να είναι *τουλάχιστον* $V = M/(\varrho_a - \varrho_{He})$, όπου ϱ_a είναι η πυκνότητα τού αέρα και ϱ_{He} είναι η πυκνότητα τού ηλίου. (Αγνοήστε τον όγκο τού ωφέλιμου φορτίου). (b) Αν $M = 2\,000$ kg, ποια ακτίνα πρέπει να έχει το αερόστατο;

29. Μια κοίλη πλαστική σφαίρα έχει ακτίνα 5 cm και μάζα 100 g. Η σφαίρα έχει μια μικρή τρύπα με καπάκι από την οποία μπορούμε να βάζουμε σκάγια από μόλυβδο. Πόσα γραμμάρια μολύβδου μπορούμε να βάλουμε μέσα στη σφαίρα προτού βυθιστεί στο νερό; (Υποθέστε ότι στη σφαίρα δεν εισέρχεται νερό αφού κλείσουμε το καπάκι).

30. Ένα μεταλλικό σώμα μάζας 10 kg και διαστάσεων 12 cm × 10 cm × 10 cm είναι αναρτημένο από ένα δυναμόμετρο και βυθίζεται στο νερό, όπως στο Σχήμα 15.12b. Η διάσταση τών 12 cm είναι κατακόρυφη και η επάνω επιφάνεια τού σώματος απέχει 5 cm από την επιφάνεια τού νερού. (a) Ποιες είναι οι δυνάμεις στην επάνω και κάτω επιφάνεια τού σώματος; (πάρετε $P_a = 1.0130 \times 10^5$ N/m^2). (b) Ποια είναι η ένδειξη τού δυναμομέτρου; (c) Αποδείξτε ότι η άνωση ισούται με τη διαφορά τών δυνάμεων στην κάτω και στην επάνω επιφάνεια τού σώματος.

31. Ένας βάτραχος βρίσκεται μέσα σε ένα ημισφαιρικό κύπελλο που μόλις επιπλέει στη θάλασσα χωρίς να βυθίζεται. Αν το θαλασσινό νερό έχει πυκνότητα 1.35 g/cm^3 το δε κύπελλο ακτίνα 6 cm και αμελητέα μάζα, ποια είναι η μάζα τού βατράχου; (Βλ. Σχήμα 15.31).



Σχήμα 15.31 (Πρόβλημα 31).

32. Ένας κοίλος σωλήνας από ορείχαλκο, διαμέτρου 4.0 cm, είναι κλειστός στο ένα άκρο και γεμίζεται με σκάγια από μολύβι ώστε η ολική μάζα να έναι 0.20 kg. Όταν ο σωλήνας επιπλέει σε καθαρό νερό, ποιο θα είναι το βάθος z τού κάτω άκρου τού σωλήνα;

33. Ένα στρώμα από φελιζόλ έχει πάχος 10 cm και πυκνότητα 300 kg/m^3. Ποιο είναι το εμβαδόν τής κάτω επιφάνειας τού στρώματος αν αυτό μόλις και επιπλέει σε καθαρό νερό όταν επάνω του είναι ξαπλωμένος ένας κολυμβητής μάζας 75 kg;

34. Ένα ορθογώνιο φουσκωτό στρώμα έχει μήκος 2.0 m, πλάτος 0.50 m και πάχος 0.08 m. Αν η μάζα τού στρώματος είναι 2.3 kg, ποια μάζα μπορεί να συγκρατήσει το στρώμα στο νερό, έτσι ώστε μόλις να μη βυθίζεται;

35. Πόσο ήλιο (σε κυβικά μέτρα) απαιτείται για να ανυψώσει ένα αερόστατο με ωφέλιμο φορτίο μάζας 400 kg σε ύψος 8 000 m; ($\varrho_{He} = 0.18$ kg/m^3). Υποθέστε ότι το αερόστατο διατηρεί *σταθερό* όγκο και ότι η πυκνότητα τού αέρα *ελαττώνεται* με το ύψος σύμφωνα με τη σχέση $\varrho_{αερα} = \varrho_0 e^{-z/8000}$. ($z$ = ύψος σε μέτρα, ϱ_0 = πυκνότητα στο επίπεδο τής θάλασσας = 1.25 kg/m^3).

Υποκεφάλαια 15.6 – 15.8 Δυναμική τών ρευστών και η εξίσωση τού Bernoulli.

36. Η παροχή τού νερού που ρέει μέσα σε οριζόντιο σωλήνα είναι 2 m^3/min. Προσδιορίστε την ταχύτητα ροής σε ένα σημείο όπου η διάμετρος τού σωλήνα είναι (a) 10 cm, (b) 5 cm.

37. Σε μια μεγάλη δεξαμενή γεμάτη με νερό δημιουργείται μια μικρή τρύπα σε μια πλευρική επιφάνεια σε ένα σημείο 16 m κάτω από τη στάθμη τού νερού. Αν η παροχή τού νερού που εκρέει από την τρύπα είναι 2.5×10^{-3} m^3/min, προσδιορίστε (a) την ταχύτητα τού νερού που εκρέει από την τρύπα και (b) τη διάμετρο τής τρύπας.

38. Νερό ρέει μέσα σε έναν σωλήνα που η διατομή του δεν έχει σταθερό εμβαδόν, με σταθερό ρυθμό (βλ. Σχήμα 15.18). Σε ένα σημείο όπου η πίεση είναι 2.5×10^4 Pa, η διάμετρος είναι 8.0 cm. Σε ένα άλλο σημείο 0.5 m ψηλότερα, η πίεση είναι 1.5×10^4 Pa και η διάμετρος 4.0 cm. (a) Βρείτε την ταχύτητα ροής στη χαμηλότερη και ψηλότερη διατομή. (b) Προσδιορίστε την παροχή τού σωλήνα.

39. Ένας οριζόντιος σωλήνας μεταβλητής διατομής διαρρέεται από νερό. Η πίεση είναι ίση με 4.5×10^4 Pa σε ένα σημείο όπου η ταχύτητα είναι 2 m/s και το εμβαδόν διατομής A. Βρείτε την ταχύτητα και την πίεση σε ένα σημείο όπου το εμβαδόν είναι $A/4$.

40. Η τροφοδοσία νερού ενός σπιτιού γίνεται με έναν κύριο σωλήνα διαμέτρου 6 cm. Μια βρύση διαμέτρου 2 cm που βρίσκεται 2 m πάνω από τον κύριο σωλήνα γεμίζει ένα δοχείο 25 lt σε 30 s. (a) Ποια είναι η ταχύτητα με την οποία εκρέει το νερό από τη βρύση; (b) Ποια είναι η *υπερπίεση* στον κύριο σωλήνα τών 6 cm; (Υποθέστε ότι η βρύση είναι η μόνη «διαρροή» στο σπίτι).

41. Σε έναν σωλήνα τής πυροσβεστικής διαμέτρου 6.35 cm ρέει νερό με παροχή 0.012 m^3/s. Ο σωλήνας καταλήγει σε ένα ακροφύσιο εσωτερικής διαμέτρου 2.2 cm. Ποια είναι η ταχύτητα με την οποία το νερό εκτοξεύεται από το ακροφύσιο;

42. Ένας κεντρικός σωλήνας παροχής νερού έχει μια κυκλική διατομή η οποία στενεύει από μια διάμετρο 3.6 m σε διάμετρο 1.2 m. Αν η ταχύτητα ροής είναι 3 m/s στον σωλήνα μεγάλης διαμέτρου, προσδιορίστε την ταχύτητα στον σωλήνα μικρής διαμέτρου;

43. Ένας θερμοπίδακας (Geyser) στο Yellowstone Park τών ΗΠΑ εκτοξεύει κάθε μία ώρα περίπου μια στήλη βραστού νερού σε ύψος 40 m. (a) Με ποια ταχύτητα το νερό εγκαταλείπει το έδαφος; (b) Ποια είναι η πίεση (πάνω από την ατμοσφαιρική) στη λεκάνη μέσα στο υπέδαφος που θερμαίνεται το νερό;

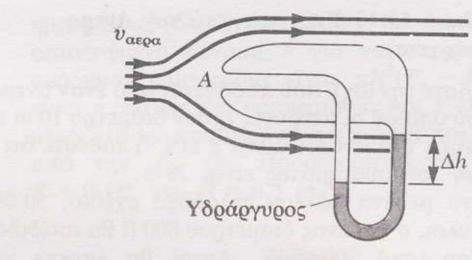
*** Υποκεφάλαιο 15.9 Άλλες εφαρμογές τής εξίσωσης τού Bernoulli**

44. Ένα αεροπλάνο έχει μάζα 16 000 kg και καθεμιά πτέρυγα έχει εμβαδόν 40 m^2. Κατά τη διάρκεια οριζόντιας πτήσης, η πίεση στην κάτω επιφάνεια τής πτέρυγας είναι 7.0×10^4 Pa. Προσδιορίστε την πίεση στην επάνω επιφάνεια τής πτέρυγας.

45. Καθεμιά πτέρυγα ενός αεροπλάνου έχει εμβαδόν 25 m^2. Αν η ταχύτητα τού αέρα είναι 50 m/s στην κάτω επιφάνεια τής πτέρυγας και 65 m/s στην επάνω επιφάνειά της, προσδιορίστε το βάρος τού αεροπλάνου. (Υποθέστε ότι το αεροπλάνο κάνει οριζόντια πτήση με σταθερή ταχύτητα σε υψόμετρο όπου η πυκνότητα τού αέρα είναι 1 kg/m^3. Επίσης υποθέστε ότι ολόκληρη η ανυψωτική δύναμη προέρχεται από τις πτέρυγες).

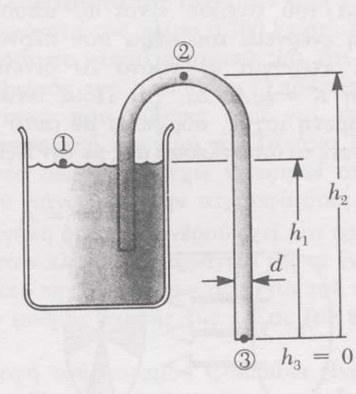
46. Ένας σωλήνας Venturi μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση τής παροχής ενός υγρού (βλ. Σχήμα 15.19). Αν η διαφορά πίεσης $P_1 - P_2 = 21\,000$ Pa ($\approx$ 3 lb/in.^{2}), βρείτε την παροχή τού υγρού σε m^3/s εάν η ακτίνα τού σωλήνα εκροής είναι 1 cm, η ακτίνα τού σωλήνα εισροής είναι 2 cm και το υγρό είναι βενζίνη ($\varrho = 700$ kg/m^3).

47. Ένας σωλήνας Pitot μπορεί να χρησιμοποιηθεί για τη μέτρηση τής ταχύτητας τού αέρα μετρώντας τη διαφορά μεταξύ τής ολικής πίεσης και τής στατικής πίεσης (βλ. Σχήμα 15.32). Αν το υγρό στον σωλήνα είναι υδράργυρος, πυκνότητας $\varrho_{Hg} = 13\,600$ kg/m^3 και $\Delta h = 5$ cm, βρείτε την ταχύτητα τής ροής τού αέρα. (Υποθέστε ότι ο αέρας στο σημείο A έχει ταχύτητα μηδέν, δηλαδή είναι σημείο ανακοπής και πάρετε $\varrho_{αερα} = 1.25$ kg/m^3).



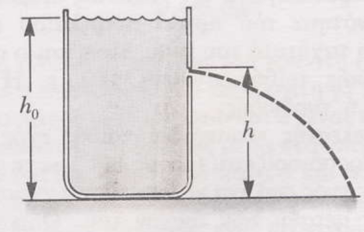
Σχήμα 15.32 (Πρόβλημα 47).

48. Ο σίφωνας χρησιμοποιείται για να μεταγγίζει νερό από μια δεξαμενή, όπως δείχνει το Σχήμα 15.33. Ο σίφωνας έχει σταθερή διάμετρο d. Υποθέστε στρωτή ροή. (a) Πάρετε μια έκφραση για το ρυθμό εκροής τού όγκου τού νερού στο άκρο τού σίφωνα. (Επιλέξετε το επίπεδο αναφοράς στο σημείο 3). (b) Ποιος είναι ο περιορισμός για το ύψος τής κορυφής τού σίφωνα πάνω από την επιφάνεια τού νερού; (Για να έχετε συνεχή ροή τού υγρού, η πίεση τού υγρού δεν πρέπει να πέσει κάτω από την ατμοσφαιρική πίεση).



Σχήμα 15.33 (Πρόβλημα 48).

49. Μια μεγάλη δεξαμενή είναι γεμάτη μέχρι ύψος h_0. Αν σε αυτήν ανοίξουμε μια τρύπα σε ύψος h από τη βάση τής δεξαμενής (βλ. Σχήμα 15.34) σε πόση απόσταση από τη δεξαμενή θα συναντήσει το έδαφος η φλέβα τού υγρού που εκτοξεύεται από την τρύπα;



Σχήμα 15.34 (Πρόβλημα 49).

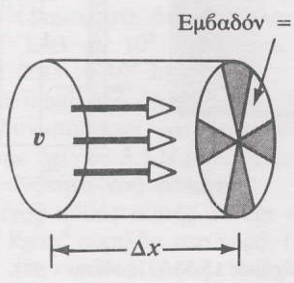
50. Ανοίγουμε μια τρύπα στη πλευρική επιφάνεια ενός δοχείου ύψους 20 cm που είναι γεμάτο με νερό. Αν το νερό πρόκειται να εκτοξευθεί όσο το δυνατό πιο μακριά οριζόντια, (a) σε ποιο ύψος στο δοχείο πρέπει να ανοίξουμε την τρύπα; (b) Εάν αγνοηθούν οι απώλειες τριβής, πόσο μακριά (αρχικά) από την πλευρά τού δοχείου θα προσγειωθεί η φλέβα τού νερού;

*** Υποκεφάλαιο 15.10 Ενέργεια από τον άνεμο (αιολική ενέργεια).**

51. Υπολογίστε την ισχύ που παράγεται από έναν ανεμόμυλο τού οποίου οι πτέρυγες έχουν διάμετρο 10 m αν η ταχύτητα τού ανέμου είναι 8 m/s. Υποθέστε ότι η απόδοση τού συστήματος είναι 20%.

52. Σύμφωνα με ένα μάλλον φιλόδοξο σχέδιο, 50 000 ανεμόμυλοι, ο καθένας διαμέτρου 800 ft θα απέδιδαν μια μέση ισχύ 200 GW. Αυτοί θα έπρεπε για στρατηγικούς λόγους να βρίσκονται κατά μήκος τών Μεσοδυτικών Πεδιάδων, κατά μήκος τών Αλεούτων Νήσων και σε πλωτές πλατφόρμες κατά μήκος τών ακτών τού Ατλαντικού Ωκεανού και τού Κόλπου τού Μεξικού καθώς και στην περιοχή τών Μεγάλων Λιμνών. Η ετήσια κατανάλωση ενέργειας στις ΗΠΑ το 1980 ήταν περίπου 8.3×10^{19} J. Ποιο κλάσμα τής ενέργειας αυτής θα απέδιδε το δίκτυο τών ανεμόμυλων;

53. Θεωρήστε έναν ανεμόμυλο με πτέρυγες εμβαδού διατομής A, όπως στο Σχήμα 15.35, και υποθέστε ότι ο μύλος είναι στραμμένος προς τον άνεμο. (a) Αν η ταχύτητα τού ανέμου είναι v, αποδείξτε ότι η κινητική ενέργεια τού αέρα που περνάει ανάμεσα από τα πτερύγια σε χρόνο Δt δίνεται από την έκφραση $K = \frac{1}{2}\varrho A v^3 \Delta t$. (b) Ποια είναι η μέγιστη αποδιδόμενη ισχύς, σύμφωνα με αυτό το μοντέλο; Συγκρίνετε το αποτέλεσμά σας με την Εξίσωση 15.16.



Σχήμα 15.35 (Πρόβλημα 53).

*** Υποκεφάλαια 15.11 και 15.12 Ιξώδες (εσωτερική τριβή ρευστών) και τυρβώδης ροή**

54. Ποιος είναι ο αριθμός Reynolds για τη ροή υγρού σε έναν πετρελαιαγωγό τής Αλάσκας διαμέτρου 1.2 m; Η πυκνότητα τού αργού πετρελαίου είναι 8 500 kg/m^3, η ταχύτητά του είναι 3 m/s και ο συντελεστής εσωτερικής τριβής είναι 0.3 Pa · s. Η ροή είναι στρωτή ή τυρβώδης;

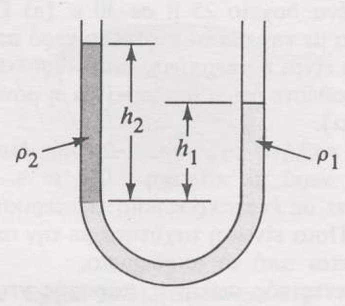
55. Ο συντελεστής εσωτερικής τριβής ενός ορισμένου υγρού προσδιορίζεται (στους 40°C) με τη μέτρηση τής παροχής ενός σωλήνα κάτω από μια γνωστή διαφορά πιέσεως μεταξύ τών άκρων του. Ο σωλήνας έχει ακτίνα 0.70 mm και μήκος 1.50 m. Όταν εφαρμοστεί μια διαφορά πίεσης $\frac{1}{20}$ atm, ένας όγκος 292 cm^3 συλλέγεται σε 10 min. Ποιος είναι ο συντελεστής εσωτερικής τριβής τού υγρού; Ποιο είναι το υγρό;

ΓΕΝΙΚΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

56. Ένα παιδί μάζας 50 kg στέκεται πάνω σε ένα στρώμα θάλασσας διαστάσεων 1 m × 1 m × 0.06 m κατασκευασμένο από φελιζόλ. Αν το στρώμα *μόλις* και κρατάει το παιδί (δηλαδή, το στρώμα είναι βυθισμένο ολόκληρο), προσδιορίστε την πυκνότητα τού φελιζόλ.

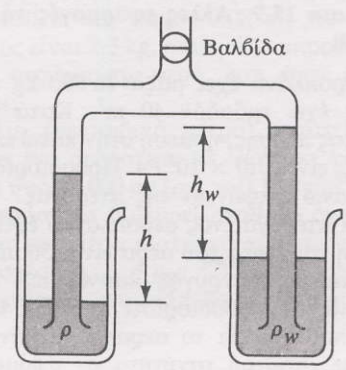
57. Ένα δείγμα χαλκού πρόκειται να υποστεί μια υδροστατική πίεση που θα αυξήσει την πυκνότητά του κατά 0.1%. Ποια πίεση απαιτείται;

58. Το ένα σκέλος ενός σωλήνα σχήματος U περιέχει ένα υγρό πυκνότητας ϱ_1, ενώ το άλλο σκέλος περιέχει υγρό πυκνότητας ϱ_2. Αν τα υγρά δεν αναμιγνύονται, αποδείξτε ότι $\varrho_2 = (h_1/h_2)\varrho_1$. (Βλ. Σχήμα 15.36).



Σχήμα 15.36 (Πρόβλημα 58).

59. Μια μέθοδος για τη μέτρηση τής πυκνότητας ενός υγρού απεικονίζεται στο Σχήμα 15.37. Η μία πλευρά τού σωλήνα σχήματος U βρίσκεται μέσα στο υγρό που εξετάζουμε. Η άλλη πλευρά βρίσκεται μέσα σε νερό πυκνότητας ϱ_w. Όταν ο αέρας αφαιρεθεί εν μέρει από το επάνω μέρος τού σωλήνα, αποδείξτε ότι η πυκνότητα τού υγρού στην αριστερή πλευρά είναι $\varrho = (h_w/h)\varrho_w$.



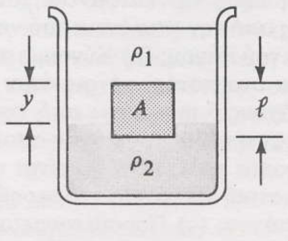
Σχήμα 15.37 (Πρόβλημα 59).

60. Μια δεξαμενή που έχει επίπεδο πυθμένα εμβαδού A και κατακόρυφα τοιχώματα περιέχει νερό μέχρι ύψος h. Στην ελεύθερη επιφάνεια τού νερού η πίεση είναι 1 atm. (a) Ποια είναι η ολική πίεση στον πυθμένα τής δεξαμενής; (b) Υποθέστε ότι ένα σώμα ολικής μάζας M (και μέσης πυκνότητας μικρότερης τής πυκνότητας τού νερού) τοποθετείται μέσα στη δεξαμενή και επιπλέει. Ποια είναι η προκαλούμενη αύξηση τής ολικής πίεσης στον πυθμένα τής δεξαμενής; (c) Υπολογίστε το αποτέλεσμά σας για μια πισίνα (h = 1.50 m, κυκλική δεξαμενή διαμέτρου 6 m). Αν δύο άνθρωποι με συνολική μάζα 150 kg πέσουν μέσα στην πισίνα και επιπλέουν ήσυχα, ποια θα είναι η αύξηση τής πίεσης στον πυθμένα τής πισίνας;

61. Το πραγματικό βάρος ενός σώματος είναι το βάρος του μετρημένο στο κενό, όπου δεν υπάρχουν δυνάμεις ανώσεως. Ένα σώμα όγκου V ζυγίζεται στον αέρα με μια ζυγαριά που χρησιμοποιεί σταθμά πυκνότητας ϱ. Αν η πυκνότητα τού αέρα είναι ϱ_a και η ζυγαριά δείχνει W', αποδείξτε ότι το πραγματικό βάρος W είναι

$$W = W' + \left(V - \frac{W'}{\varrho g}\right)\varrho_a g$$

62. Ένα σώμα εμβαδού διατομής A, ύψους ℓ και πυκνότητας ϱ ισορροπεί βυθισμένο μεταξύ δύο υγρών τα οποία έχουν πυκνότητες ϱ_1 και ϱ_2 (βλέπε Σχήμα 15.38), όπου $\varrho_1 < \varrho < \varrho_2$. Τα υγρά δεν αναμιγνύονται. (a) Να αποδείξετε ότι η άνωση στο σώμα είναι $B = [\varrho_1 g y + \varrho_2 g(\ell - y)]A$. (b) Αποδείξτε ότι η πυκνότητα τού σώματος είναι ίση με $\varrho = [\varrho_1 y + \varrho_2(\ell - y)]/\ell$.



Σχήμα 15.38 (Πρόβλημα 62).

63. Σε μια χαλύβδινη κοίλη σφαίρα έχει αφαιρεθεί ο αέρας η δε εξωτερική της διάμετρος είναι 10.0 cm. Η σφαίρα όταν τοποθετηθεί μέσα σε καθαρό νερό ισορροπεί και μόλις καλύπτεται από αυτό. Η πυκνότητα τού χάλυβα είναι 7.86×10^3 kg/m^3. Ποιο είναι το πάχος τών τοιχωμάτων τής σφαίρας;

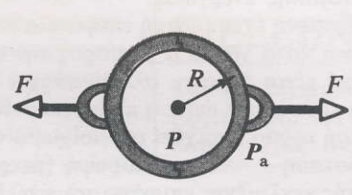
64. Ένας οριζόντιος σωλήνας ακτίνας 1 cm συνδέεται με έναν δεύτερο οριζόντιο σωλήνα ακτίνας 0.5 cm. Μεταξύ τών δύο σωλήνων υπάρχει μια διαφορά πίεσης 6 660 Pa. Ποιος όγκος νερού ρέει μέσα από τους σωλήνες ανά δευτερόλεπτο;

65. Αν ένα πυρηνικό όπλο 1 μεγατόννου εκραγεί στο έδαφος η μέγιστη υπερπίεση (δηλαδή η αύξηση τής πίεσης πάνω από την κανονική ατμοσφαιρική πίεση) θα είναι 0.2 atm σε απόσταση 6 km. Ποια δύναμη οφειλόμενη σε μια τέτοια έκρηξη θα ασκηθεί στον τοίχο ενός σπιτιού με διαστάσεις 4.5 m × 22 m;

66. Νερό ρέει με ρυθμό 2.0×10^{-4} m^3/s σε έναν σωλήνα διαμέτρου 3 cm. Μια μικρή ρωγμή (0.1 mm × 3 mm) δημιουργείται και η παροχή εκροής ελαττώνεται κατά 1%. (a) Ποια είναι η μέση ταχύτητα τού νερού που εκτοξεύεται από τη ρωγμή; (b) Ποια είναι η μέση ταχύτητα τού νερού που εκρέει από τον σωλήνα;

67. Σχετικά με το Σχήμα 15.8, αποδείξτε ότι η ολική ροπή που ασκείται από το νερό στο φράγμα ως προς τον άξονα που περνάει από το O είναι $\frac{1}{6}\varrho g w H^3$. Αποδείξτε ότι ο φορέας τής ολικής δύναμης που ασκείται από το νερό βρίσκεται σε απόσταση $\frac{1}{3}H$ πάνω από το O.

68. Το 1657 ο Otto von Guericke, εφευρέτης τής αεραντλίας, αφαίρεσε τον αέρα από μια σφαίρα που αποτελούνταν από δύο μπρούτζινα ημισφαίρια. Δύο ομάδες από οκτώ άλογα η καθεμιά τραβώντας με μεγάλη προσπάθεια μπόρεσαν να αποχωρίσουν τα ημισφαίρια (βλ. Σχήμα 15.39). (a) Αποδείξτε ότι η απαιτούμενη δύναμη F για να αποχωριστούν τα αερόκενα ημισφαίρια είναι $\pi R^2(P_a - P)$, όπου R είναι η ακτίνα τών ημισφαιρίων και P είναι η πίεση μέσα στα ημισφαίρια, η οποία είναι πολύ μικρότερη από την P_a. (b) Προσδιορίστε τη δύναμη αν $P = 0.1P_a$ και $R = 0.3$ m.



Σχήμα 15.39 (Πρόβλημα 68).

69. Βρείτε τη διάμετρο τού μεγαλύτερου αερόστατου που είναι γεμάτο με ήλιο και χρησιμοποιεί για να κρατηθεί στο έδαφος σχοινιά που κόβονται όταν η τάση ξεπεράσει τις 40 lb (178 newtons). Χρησιμοποιήστε για την πυκνότητα τού αέρα την τιμή 1.29 kg/m^3 και την πυκνότητα τού ηλίου 0.200 kg/m^3. Υποθέστε ότι το αερόστατο είναι σφαιρικό και ότι η μάζα τού περιβλήματός του αμελητέα. (*Υπόδειξη:* η τιμή τής πυκνότητας που δόθηκε εδώ για το ήλιο είναι μεγαλύτερη από την τιμή τού Πίνακα 15.1. Η πίεση μέσα στο αερόστατο έχει θεωρηθεί ότι είναι 10% περίπου πάνω από την ατμοσφαιρική πίεση).

70. Μια μεγάλη δεξαμενή νερού έχει μια τρύπα εμβαδού 1 cm^2 στην πλευρική επιφάνειά της σε ένα σημείο 2 m κάτω από την ελεύθερη επιφάνεια τού νερού. Ποιος είναι ο ρυθμός εκροής τής μάζας (σε kg/s) από την τρύπα;

71. Η παροχή τού ποταμού Columbia είναι 3 200 m^3/s περίπου. Ποια θα είναι η μέγιστη αποδιδόμενη ισχύς τών υδροστροβίλων σε ένα φράγμα αν το νερό πέφτει από κατακόρυφο ύψος 160 m;

72. Ως πρώτη προσέγγιση, οι ήπειροι τής Γης μπορεί να θεωρηθούν σαν μεγάλα κομμάτια από γρανίτη που επιπλέουν σε ένα πυκνότερο πέτρωμα (που ονομάζεται περιδοτίτης), με τον ίδιο τρόπο που επιπλέει ο πάγος στο νερό. (a) Αποδείξτε ότι ο τύπος που περιγράφει αυτό το φαινόμενο είναι

$$\varrho_g t = \varrho_p d,$$

όπου ϱ_g είναι η πυκνότητα τού γρανίτη (2800 kg/m^3), ϱ_p είναι η πυκνότητα τού περιδοτίτη (3 300 kg/m^3), t είναι το πάχος μιας ηπείρου και d είναι το βάθος στο οποίο επιπλέει μια ήπειρος μέσα στον περιδοτίτη. (b) Αν μια ήπειρος ανυψωθεί κατά 5 km πάνω από την επιφάνεια τού περιδοτίτη (αυτή η επιφάνεια μπορεί να θεωρηθεί ως πυθμένας ενός ωκεανού), ποιο είναι το πάχος τής ηπείρου;

73. Θεωρήστε μια σύνθετη «σχεδία» που αποτελείται από δύο τετράγωνες πλάκες, καθεμιά πλευράς s κολλημένες με δύο έδρες τους. Η μια πλάκα έχει πυκνότητα ϱ_1 και πάχος h_1, ενώ η άλλη έχει πυκνότητα $\varrho_2 > \varrho_1$ και πάχος h_2. (a) Βρείτε τη μέση πυκνότητα $\bar{\varrho}$ τής σχεδίας. (b) Υποθέστε ότι $\bar{\varrho} < \varrho_w$, ώστε η σχεδία να επιπλέει στο νερό. Η σχεδία τοποθετείται μέσα σε νερό με την πυκνότερη πλάκα προς τα κάτω. Βρείτε το βάθος, d, τής πιο κάτω επιφάνειας τής σχεδίας. (c) Αν η σχεδία τοποθετηθεί στο νερό με την πυκνότερη πλάκα προς τα *επάνω*, βρείτε το βάθος, d', τής πιο κάτω επιφάνειας τής σχεδίας. Σχολιάστε την απάντησή σας. (d) Για ποιον από τους προσανατολισμούς που περιγράφηκαν στα (b) και (c) η βαρυτική δυναμική ενέργεια τού συνολικού συστήματος (αποτελούμενου από τη σχεδία και το νερό στο οποίο επιπλέει) είναι μεγαλύτερη; Βρείτε τη διαφορά τής δυναμικής ενέργειας.

74. Μια δεξαμενή έχει κωνική επιφάνεια και κλίση προς τα επάνω κατά γωνία α (ως προς την οριζόντιο). Η δεξαμενή είναι γεμάτη, αλλά υπάρχει στην κορυφή της μια τρύπα έτσι ώστε η πίεση εκεί είναι 1 atm. Αν μια μικρή τρύπα ανοιχθεί στο τοίχωμα τής δεξαμενής σε απόσταση s από την κορυφή (μετρούμενη κατά μήκος τής κεκλιμένης επιφάνειας), η φλέβα τού νερού που σχηματίζεται ξαναπέφτει στην κεκλιμένη επιφάνεια σε μια απόσταση s' προς τα κάτω από την τρύπα. (Η συνολική απόσταση από την κορυφή τού σημείου στο οποίο πέφτει η φλέβα είναι συνεπώς $s + s'$). (a) Βρείτε το s' ως συνάρτηση τών s και α. (Μπορείτε να υποθέσετε ότι το διάνυσμα τής αρχικής ταχύτητας τής φλέβας τού νερού είναι κάθετο στην επιφάνεια τής δεξαμενής). (b) Υπολογίστε τον λόγο s'/s για $\alpha = 45°$. (c) Βρείτε την τιμή τού α για την οποία $s' = s$. (Δώστε την απάντησή σας σε ακτίνια και σε μοίρες).

75. Ένα καλώδιο πυκνότητας ϱ_c και διαμέτρου d απλώνεται κατακόρυφα προς τα κάτω κατά απόσταση h μέσα στο νερό και ένα σώμα μάζας M_b και πυκνότητας ϱ_b είναι δεμένο στο κάτω άκρο τού καλωδίου. Οι πυκνότητες ϱ_c και ϱ_b είναι και οι δύο μεγαλύτερες από την ϱ_w, την πυκνότητα τού νερού. Βρείτε (a) την τάση T_ℓ στο κάτω άκρο τού καλωδίου, (b) την τάση T_u στο επάνω άκρο τού καλωδίου και (c) τις τάσεις T_ℓ' και T_u' που θα υπήρχαν στο κάτω και επάνω άκρο τού καλωδίου αν η όλη διάταξη ήταν στον αέρα και όχι στο νερό (Αγνοήστε την άνωση που ασκεί ο αέρας). (d) Υπολογίστε τα T_ℓ, T_u, T_ℓ'και T_u' για την περίπτωση ενός καλωδίου από χάλυβα μήκους 100 m στο οποίο είναι δεμένο ένα τσιμεντένιο σώμα μάζας 2.00 μετρικών τόννων: $\varrho_c = 7.86 \times 10^3$ kg/m^3, $d = 2 \times 10^{-2}$ m, $h = 100$ m, $M_b = 2.00 \times 10^3$ kg και $\varrho_b = 2.38 \times 10^3$ kg/m^3.

76. Αποδείξτε ότι η μεταβολή τής ατμοσφαιρικής πίεσης συναρτήσει τού υψομέτρου δίνεται από τη σχέση $P = P_0 e^{-\alpha h}$, όπου $\alpha = \varrho_0 g/P_0$, P_0 είναι η ατμοσφαιρική πίεση σε ένα αυθαίρετο επίπεδο αναφοράς και ϱ_0 είναι η ατμοσφαιρική πυκνότητα σε αυτό το επίπεδο αναφοράς. Υποθέστε ότι η ελάττωση τής ατμοσφαιρικής πίεσης καθώς αυξάνεται το υψόμετρο δίνεται από την Εξίσωση 15.5 και ότι η πυκνότητα τού αέρα είναι ανάλογη προς την πίεση.

77. Ένας κύβος πάγου ακμής 20 mm επιπλέει σε ένα ποτήρι παγωμένο νερό με τη μία του επιφάνεια παράλληλη προς την επιφάνεια τού νερού. (a) Σε ποιο βάθος από την επιφάνεια τού νερού βρίσκεται η κάτω έδρα τού πάγου; (b) Χύνουμε προσεκτικά κρύο οινόπνευμα στο ποτήρι μέχρις ότου σχηματίσει ένα στρώμα πάχους 5 mm πάνω από την επιφάνεια τού νερού. Όταν ο κύβος τού πάγου αποκτήσει υδροστατική ισορροπία πάλι, ποια θα είναι η απόσταση από τη διαχωριστική επιφάνεια τού *νερού* μέχρι την κάτω έδρα τού πάγου; (c) Προσθέτουμε ακόμη παγωμένο οινόπνευμα στο ποτήρι μέχρις ότου η ελεύθερη επιφάνεια τού οινοπνεύματος συμπέσει με την επάνω έδρα τού κύβου τού πάγου (σε υδροστατική ισορροπία). Ποιο είναι το πάχος τού στρώματος τού οινοπνεύματος που απαιτείται;

ΔΟΚΙΜΙΟ

ΦΥΣΙΚΗ ΤΩΝ ΥΨΗΛΩΝ ΠΙΕΣΕΩΝ

Τού Α. Jayaraman
Εργαστήρια ATCT Bell
Murray Hill, N.J. ΗΠΑ

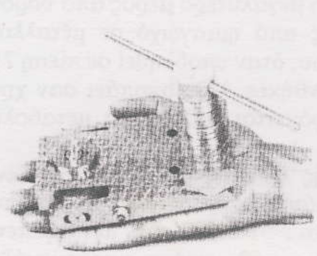
Πολλοί κλάδοι τής επιστήμης χρησιμοποιούν τη Φυσική τών υψηλών πιέσεων. Οι ειδικοί που εργάζονται στο πεδίο αυτό προσπαθούν συνεχώς να φτάσουν σε ολοένα και υψηλότερες πιέσεις. Τα τελευταία χρόνια κατασκευάστηκε μία νέα συσκευή παραγωγής υψηλών πιέσεων που λέγεται *το διαμαντένιο αμόνι*. Με τη συσκευή αυτή παράγεται στατική πίεση που υπερβαίνει τα 2 Mbar (2 εκατομμύρια bar). Χρησιμοποιούμε τον όρο *στατική πίεση* για να περιγράψουμε πιέσεις διαρκείας, σε αντιδιαστολή με τις δυναμικές πιέσεις, σαν αυτές που δημιουργούνται λ.χ. από κρουστικά κύματα και οι οποίες διαρκούν μόνο μερικά μικροδευτερόλεπτα (microseconds). Έχουν αναπτυχθεί διάφορες τεχνικές για τη μελέτη τής συμπεριφοράς τής ύλης υπό συνθήκες υψηλών πιέσεων. [Η πίεση είναι δύναμη ανά μονάδα επιφανείας και μονάδες της είναι το bar ή το Pascal, 1 bar = 10^5 Pascals, 1 kbar ή 1 kilobar = 10^3 bar, 10 kbar = 1 GPa (gigapascals), 1 Mbar ή megabar = 10^6 bars ή 100 GPa].

Ο P. W. Bridgman, καθηγητής στο πανεπιστήμιο Harvard, ήταν για μισόν αιώνα πρωτοπόρος στο πεδίο αυτό, μέχρι τον θάνατό του, το 1961. Μελέτησε τη συμπεριφορά ενός τεράστιου αριθμού υλικών υπό συνθήκες υψηλής πιέσεως και ανέπτυξε όλες τις γνωστές τεχνικές για την επίτευξη πιέσεων μέχρι 100 kbar. Για το έργο του στην άναπτυξη τεχνικών υψηλών πιέσεων καθώς και για την ανακάλυψη νέων φαινομένων υπό συνθήκες πιέσεως ο Bridgman βραβεύθηκε με το βραβείο Νομπέλ το 1946. Για να επιτύχει κανείς υψηλή πίεση χρησιμοποιεί την τεχνική τού πολλαπλασιασμού τής δύναμης. Μια δύναμη $\boldsymbol{F}$ που εφαρμόζεται πάνω σε μια επιφάνεια A_1 πολλαπλασιάζεται επί τον λόγο A_1/A_2 εάν η εφαρμογή της μεταφερθεί (χωρίς τριβές) πάνω σε μια μικρότερη επιφάνεια A_2. Ο λόγος αυτός ισούται συνήθως με 10 έως 1 000 στις περισσότερες συσκευές. Αυτή την τεχνική χρησιμοποίησε ο Bridgman για να κατασκευάσει συσκευές υψηλής πιέσεως.

Το διαμάντι αντέχει σε πολύ υψηλές πιέσεις, διότι είναι το σκληρότερο υλικό που γνωρίζουμε. Ένας άλλος λόγος που τό χρησιμοποιούμε βρίσκεται στο ότι είναι διαφανές στο οπτικό μέρος τού φάσματος και στις ακτίνες Χ. Έτσι μπορούμε να μελετήσουμε δείγματα που περικλείουμε με διαμάντι. Αν και αυτές οι ιδιότητες τού διαμαντιού ήταν γνωστές, το διαμαντένιο αμόνι κατασκευάστηκε για πρώτη φορά το 1959. Ένα διαμαντένιο αμόνι που μπορεί να αναπτύξει πίεση μισού εκατομμυρίου ατμόσφαιρες χωράει στην παλάμη σας, όπως βλέπετε στο Σχήμα 1(a) και 1(b). Έτσι μπορεί κανείς να πιέσει δείγματα και να τά μελετήσει με ένα μικροσκόπιο. Η αρχή βάσει τής οποίας λειτουργεί το διαμαντένιο αμόνι είναι απλή. Το δείγμα τοποθετείται στη μέγγενη που αποτελείται από δύο διαμαντένια αμόνια. Τα δύο αμόνια πιέζονται μεταξύ τους με πολύ μεγάλη δύναμη. Η επιφάνεια καθενός αμονιού είναι πάρα πολύ μικρή (≈ 0.1 mm^2). Έτσι υπάρχει ένας τεράστιος πολλαπλασιαστικός συντελεστής για την πίεση. Μια βασική συνθήκη που πρέπει να πληρούται είναι η εξής: τα αμόνια πρέπει να είναι παράλληλα και ευθυγραμμισμένα μεταξύ τους.

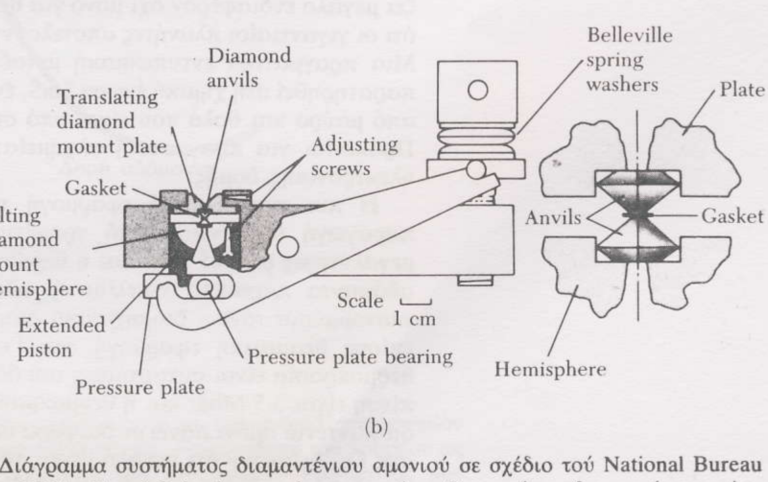
Τα διαμάντια που χρησιμοποιούνται για την κατασκευή τού αμονιού πρέπει να είναι τέλεια και μεγέθους $\frac{1}{3}$ έως $\frac{1}{2}$ καρατιών. Η πίεση μετριέται με την τεχνική που βασίζεται στη μέτρηση τής μετατόπισης τού φάσματος φωσφορισμού κρυστάλλων ρουμπινιών.

Διαμαντένια αμόνια χρησιμοποιούνται και για μελέτες σε χαμηλές θερμοκρασίες, ακόμη και σε θερμοκρασίες υγρού ηλίου. Χρησιμοποιούνται επίσης και σε πολύ



(a)

Σχήμα 1 (a) Φωτογραφία διαμαντένιου αμονιού που δημιουργεί πίεση $\frac{1}{2}$ Mbar.



(b)

Σχήμα 1 (b) Διάγραμμα συστήματος διαμαντένιου αμονιού σε σχέδιο τού National Bureau of Standards τών ΗΠΑ. Στο δεξιό μέρος φαίνεται αυτό καθ' εαυτό το διαμαντένιο αμόνι σε μεγένθυση.

υψηλές θερμοκρασίες. Το δείγμα θερμαίνεται πολύ γρήγορα (τόσο γρήγορα ώστε το αμόνι δεν έχει θερμανθεί καθόλου) σε θερμοκρασίες 4 000°C με ένα λέιζερ YAG. Η θερμοκρασία μετριέται φασματοσκοπικά ή πυρομετρικά. Τα διαμαντένια αμόνια τοποθετούνται σήμερα στις πηγές ακτινοβολίας συγχρότρων (κυκλικών επιταχυντών ηλεκτρονίων). Έτσι λαμβάνονται πολύ γρήγορα φάσματα περιθλάσεως ακτίνων X, ενώ τα δείγματα βρίσκονται υπό πολύ υψηλή πίεση.

Μια κλασική σπουδή που κάνει κανείς για να κατανοήσει τις ιδιότητες ενός στερεού είναι η μελέτη τής σχέσης πίεσης-όγκου. Συνήθως χρησιμοποιούνται μετρήσεις με ακτίνες X. Το μέτρο ελαστικότητας τού όγκου B (το αντίστροφο τής συμπιεστότητας) ενός στερεού, που είναι $B = V(\partial P/\partial V)T$, και η ως προς την πίεση παράγωγός της B΄ μπορούν να υπολογιστούν εάν βρούμε την καταστατική εξίσωση από τις πειραματικές μετρήσεις. Πολλές φορές, χρησιμοποιούμε την εξίσωση τού Murnaghan:

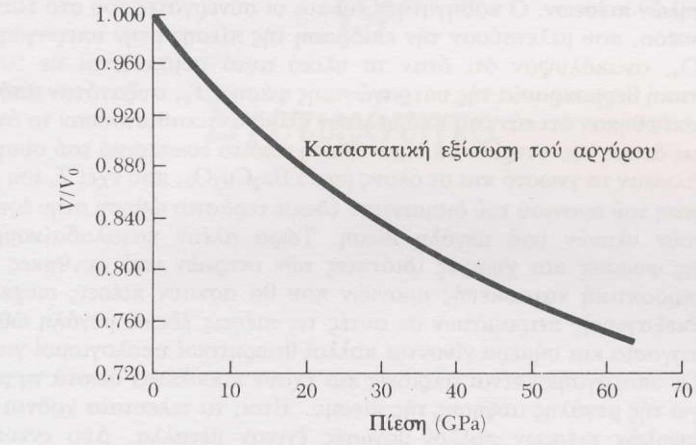
$$P = \frac{B}{B'}\left[\left(\frac{V_0}{V}\right)^{B'} - 1\right]$$

Στην καταστατική αυτή εξίσωση υποθέτουμε ότι η παράγωγος dB/dP είναι σταθερή. Πολλές φορές, όμως, η υπόθεση αυτή είναι εσφαλμένη. Τότε είμαστε υποχρεωμένοι να συμπεριλάβουμε μη γραμμικούς όρους στην καταστατική εξίσωση. Στο Σχήμα 2 βλέπετε τη γραφική παράσταση τής εξίσωσης τού Murnaghan για τον άργυρο. Η εξίσωση περιγράφει πιστά τις πειραματικές μετρήσεις.

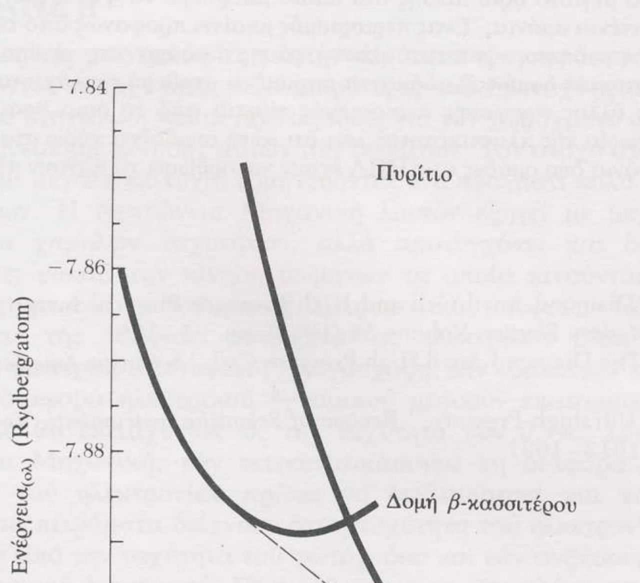
Το όνειρο κάθε ερευνητή υψηλών πιέσεων είναι να ανακαλύψει μεταβολή φάσης τής κατάστασης λόγω τής πίεσης. Όταν η ολική ενέργεια ενός συστήματος που βρίσκεται σε θερμοδυναμική ισορροπία έχει την ελάχιστη τιμή της, τότε η κατάσταση αυτή είναι *σταθερή κατάσταση* τού συστήματος. Όταν μειωθεί ο όγκος λόγω τής αύξησης τής πίεσης, τότε, όπως βλέπετε στο Σχήμα 3, μεταβάλλονται οι ενέργειες τών πιθανών καταστάσεων. Το σύστημα πρέπει να μειώσει την ολική ενέργειά του και έτσι αναγκάζεται να μεταβάλλει ή τη γεωμετρία του ή την ηλεκτρονική δομή του ή και τα δύο. Πολλές φορές, οι αλλαγές αυτές μεταβάλλουν σημαντικά τις φυσικές ιδιότητες τών υπό μελέτη στερεών. Στο Σχήμα 3 βλέπετε τη δομική σταθερότητα τού πυριτίου (Si), που είναι γνωστός ημιαγωγός, ο οποίος έχει την ατομική δομή τού αδάμαντα στις συνήθεις πιέσεις. Όταν όμως συμπιέζεται, η ενέργειά του μεταβάλλεται (βλ. Σχήμα 3) και περνάει από τη φάση τού αδάμαντα στη φάση τού β-κασσιτέρου όταν το V/V_0 φτάσει σε 0.82. Σε πίεση 10 GPa το πυρίτιο γίνεται μεταλλικός κασσίτερος και μεταβάλλεται πολύ η πυκνότητά του. Η φάση τού β-κασσιτέρου είναι μεταλλική και υπεραγώγιμη· πρόκειται πράγματι για θεαματική μεταβολή. Μια πολύ ενδιαφέρουσα πρόβλεψη τής θεωρίας τών στερεών είναι ότι το υδρογόνο γίνεται μέταλλο υπό πίεση 3 Mbar περίπου. Το υδρογόνο στερεοποιείται σε θερμοκρασία 298 K (κέλβιν) κάτω από πίεση 57 kbar και είναι πολύ καλός μονωτής. Αλλά όταν αυξηθεί η πίεση πάνω του, γίνεται μέταλλο. Η θεωρία τών στερεών προβλέπει ότι το μεταλλικό υδρογόνο είναι υπεραγώγιμο σε υψηλές θερμοκρασίες. Η συμπεριφορά λοιπόν τού υδρογόνου υπό υψηλές πιέσεις παρουσιάζει μεγάλο ενδιαφέρον όχι μόνο για θεωρητικούς λόγους, αλλά και διότι πιστεύεται ότι οι γιγαντιαίοι πλανήτες αποτελούνται κατά το μεγαλύτερο μέρος από υδρογόνο. Μια πραγματικά εντυπωσιακή μεταβολή φάσης από ημιαγωγό σε μέταλλο έχει παρατηρηθεί στη χημική ένωση SmS, ένα υλικό που, όταν υποβληθεί σε πίεση 7 kbar, από μαύρο και θολό που είναι υπό συνήθεις συνθήκες, λαμποκοπάει σαν χρυσός. Πρόκειται για πραγματική αλχημεία; Όχι! Πρόκειται απλώς για μεταβολή τής ηλεκτρονικής δομής.

Η πιο εντυπωσιακή εφαρμογή τής φυσικής τών υψηλών πιέσεων είναι η παραγωγή διαμαντιού από γραφίτη. Εάν ο άνθρακας συμπιεστεί σε πιέσεις μεγαλύτερες από 65 kbar και η θερμοκρασία είναι ~ 1 400°C τότε μετατρέπεται σε αδάμαντα παρουσία νικελίου ή σιδήρου. Έτσι, κάθε χρόνο κατασκευάζονται εκατομμύρια τόννοι βιομηχανικά διαμάντια. Η Φυσική τών υψηλών πιέσεων έχει επίσης θεαματική εφαρμογή στη Γεωφυσική. Και τούτο διότι η πίεση και η θερμοκρασία είναι συναρτήσεις τού βάθους. Υπολογίζεται ότι στο κέντρο τής Γης η πίεση είναι 3.5 Mbar και η θερμοκρασία 4 000°C. Πειράματα που έχουν γίνει με το διαμαντένιο αμόνι πάνω σε διάφορα υλικά πυριτίου, που είναι το πιο σύνηθες υλικό στη Γη, δείχνουν ότι μεγάλο μέρος τής δομής στο εσωτερικό τής Γης, οφείλεται σε μεταβολές φάσης τις οποίες προκάλεσαν οι υψηλές πιέσεις πάνω στα υλικά.

Αξίζει να σημειωθεί ότι η πρόσφατη ανακάλυψη τών λεγόμενων θερμών



Σχήμα 2 Η σχέση πίεσης-όγκου για τον άργυρο σύμφωνα με την καταστατική εξίσωση τού Murnaghan με $B_\beta = 118$ GPa και $B' = 3.8$. Η καμπύλη περιγράφει καλά τα πειραματικά δεδομένα.



Σχήμα 3 Καμπύλες ολικής ενέργειας, υπολογισμένες από τους Yin και Cohen τού Πανεπιστημίου τής California, στο Berkeley, για τις φάσεις δομής αδάμαντα και β-κασσιτέρου τού πυριτίου ως προς σχετικό όγκο. Η διακεκομένη γραμμή εφάπτεται τών δύο καμπυλών ενέργειας που αντιστοιχούν στις δύο φάσεις. Η κλίση τής εφαπτομένης δίνει την πίεση μεταβολής ($dE/dV = P$). Η μεταβολή φάσης τού πυριτίου από αδάμαντα σε β-κασσίτερο γίνεται γύρω στα 12 GPa.

υπεραγωγών, με τη χημική ένωση $YBa_2Cu_3O_7$ σε θερμοκρασία 92 K, άρχισε από ένα πείραμα υψηλών πιέσεων. Ο καθηγητής Chu και οι συνεργάτες του στο Πανεπιστήμιο τού Houston, που μελετούσαν την επίδραση τής πίεσης στην υπεραγωγιμότητα τού La_2CuO_4, ανακάλυψαν ότι όταν το υλικό αυτό συμπιέζεται σε 50 kbar η χαρακτηριστική θερμοκρασία τής υπεραγώγιμης φάσης, T_c, αυξανόταν από 30 K σε 50 K. Τότε σκέφθηκαν ότι εάν στο υπό μελέτην υλικό αντικαθιστούσαν το άτομο τού λανθανίου με άτομο τού υττρίου θα είχαν πίεση από το εσωτερικό τού συστήματος. Έτσι ανακάλυψαν το γνωστό πια σε όλους μας $YBa_2Cu_3O_7$, που έχει T_c ίση με 90°K.

Η εφεύρεση τού αμονιού τού διαμαντιού έδωσε τεράστια ώθηση στην έρευνα τών ιδιοτήτων τών υλικών υπό μεγάλη πίεση. Τώρα πλέον καταλαβαίνουμε πολύ καλύτερα τις φυσικές και χημικές ιδιότητες τών στερεών υπό συνθήκες μεγάλης πίεσης. Η προοπτική κατασκευής αμονιών που θα ασκούν πιέσεις megabar και, επομένως, διεξαγωγής πειραμάτων σε αυτές τις πιέσεις έδωσε μεγάλη ώθηση στη θεωρητική εργασία και σήμερα γίνονται πολλοί θεωρητικοί υπολογισμοί για τέτοιες συνθήκες. Οι υπολογισμοί είναι ακριβείς και έχουν προβλέψει σωστά τη μεταβολή φάσεως λόγω τής μεγάλης αύξησης τής πίεσης. Έτσι, τα τελευταία χρόνια υπό την επίδραση υψηλών πιέσεων πολλοί μονωτές έγιναν μέταλλα. Δύο εντυπωσιακά παραδείγματα είναι το στερεό ξένον (που υπό συνήθεις συνθήκες είναι ευγενές αέριο) και το CsI, που είναι πολύ καλός μονωτής υπό συνήθεις συνθήκες. Για τα δύο αυτά υλικά αποδείχθηκε πειραματικά, σε συμφωνία με τις θεωρητικές προβλέψεις, η μεταβολή φάσης από μονωτή σε μέταλλο κάτω από υψηλές πιέσεις. Τα πειράματα έγιναν σε πίεση 1.7 Mbar για το ξένον και 1.2 Mbar για το CsI, με τη χρήση ενός διαμαντένιου αμονιού. Οι οπτικές μετρήσεις που ακολούθησαν έδειξαν ότι τα υλικά αυτά είχαν γίνει μέταλλα.

Ποιο είναι το μέγιστο όριο πίεσης στο οποίο μπορούμε να φτάσουμε χρησιμοποιώντας διαμαντένια αμόνια; Ένας περιορισμός μπαίνει προφανώς από τη μέγιστη πίεση πέρα από την οποία υφίσταται αλλαγή φάσης ο αδάμαντας· οι υπολογισμοί δείχνουν ότι η ατομική δομή τού αδάμαντα παραμένει σταθερή τουλάχιστον έως τα 10 Mbar. Ένας άλλος προφανής περιορισμός τίθεται από το όριο θραύσης τού αδάμαντα. Η θεωρία τής πλαστικότητας λέει ότι αυτή συμβαίνει γύρω στα 5 Mbar. Τα τελευταία χρόνια δύο ομάδες στις ΗΠΑ έχουν κατορθώσει να κάνουν πειράματα στα 2.5 Mbar.

Βιβλιογραφία

JAYARAMAN, A., "Diamond Anvil Cell and High Pressure Physical Investigations," *Reviews of Modern Physics*, Volume 58 (1983), pp. 65–108.

JAYARAMAN, A., "The Diamond-Anvil High Pressure Cell," *Scientific American*, April 1984.

JAYARAMAN, A., "Ultrahigh Pressure," *Review of Scientific Instruments*, Volume 57 (1986), pp. 1013–1031.