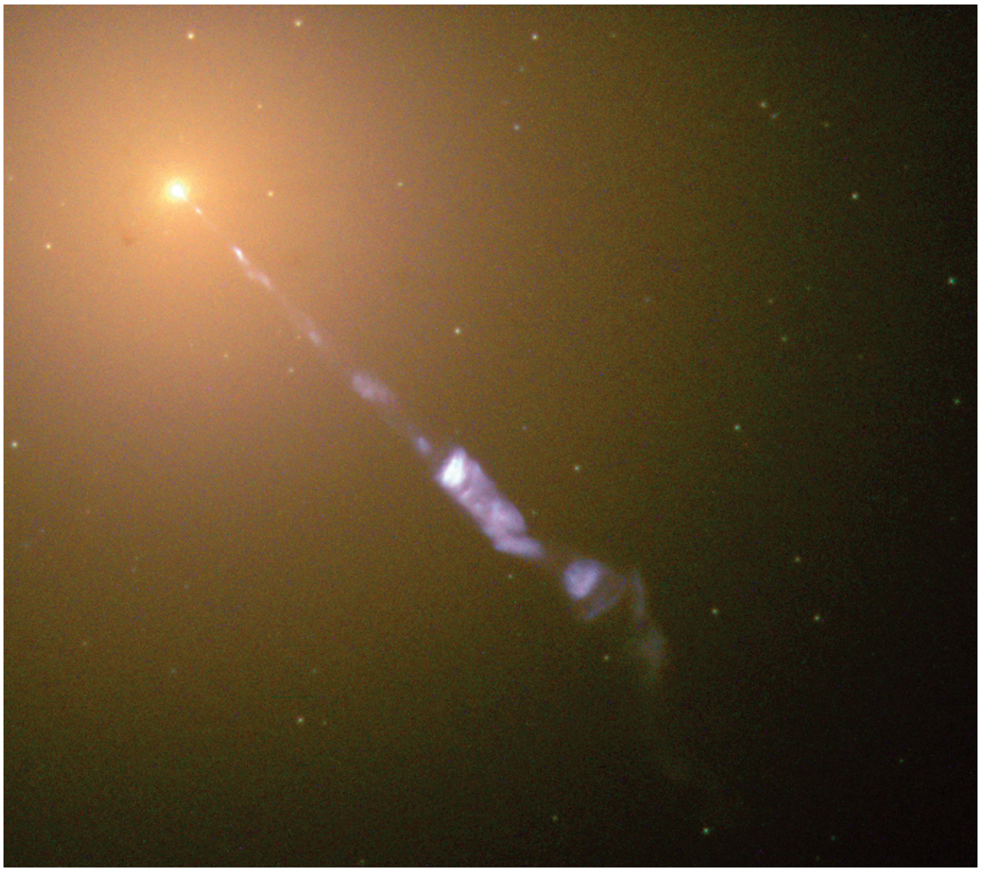
Σχετικότητα 37



Courtesy J. A. Biretta, et al., Hubble Heritage Team (STScI/AURA), NASA

Ένας πίδακας μήκους 5.000 ετών φωτός ξεπηδάει από το κέντρο του γαλαξία M87 (η έντονη κουκίδα στο πάνω αριστερό μέρος του πίδακα), ο οποίος βρίσκεται 5 x 10^7 έτη φωτός μακριά. Ο πίδακας αποτελείται από ηλεκτρόνια που κινούνται σχεδόν με την ταχύτητα του φωτός. Κάτι πολύ παράξενο πρέπει να συμβαίνει στο κέντρο του γαλαξία M87, προκειμένου τα ηλεκτρόνια να εκτοξεύονται από αυτόν με τόση μεγάλη ταχύτητα. Υπάρχει μήπως κάποιο «τέρας» εκεί; Δυστυχώς, ο M87 βρίσκεται πολύ μακριά από εμάς για να μπορέσουμε να δούμε τι κρύβεται στο κέντρο του.

Πώς μπορούμε να καταλάβουμε ποιο «τέρας» κρύβεται στο κέντρο του M87;

Η απάντηση βρίσκεται σ' αυτό το κεφάλαιο.

37-1 ΤΙ ΕΙΝΑΙ Η ΦΥΣΙΚΗ;

Ένα από τα κύρια αντικείμενα της φυσικής είναι η **σχετικότητα**. Στο πλαίσιο αυτού του πεδίου μελέτης της Φύσης εκτελούμε μετρήσεις για γεγονότα (συμβάντα τα οποία πραγματοποιούνται): δηλαδή πού και πότε αυτά συμβαίνουν καθώς και κατά πόσο δύο γεγονότα απέχουν μεταξύ τους στον χώρο και στον χρόνο. Επιπλέον η σχετικότητα ασχολείται με το πώς μετασχηματίζονται τέτοιες μετρήσεις ανάμεσα σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς τα οποία κινούνται το ένα σε σχέση με το άλλο. Από αυτό προέρχεται και το όνομα σχετικότητα.

Τα συστήματα αναφοράς για την κίνηση και οι μετασχηματισμοί ανάμεσά τους, όπως αυτά που μελετήσαμε στις παρ. 4-8 και 4-9 ήταν απόλυτα κατανοητά και θέμα ρουτίνας (συνηθισμένα) για τους φυσικούς το 1905. Τότε ο Albert Einstein (Σχ. 37-1) δημοσίευσε την **ειδική θεωρία της σχετικότητας**. Το πρόθεμα *ειδική* σημαίνει ότι η θεωρία ασχολείται μόνο με **αδρανειακά συστήματα αναφοράς**, τα οποία είναι συστήματα στα οποία ισχύουν οι νόμοι του Νεύτωνα. (Η *γενική θεωρία της σχετικότητας* του Einstein ασχολείται με το πολύ πιο απαιτητικό πρόβλημα των βαρυτικών επιταχύνσεων τις οποίες δέχονται σώματα συνδεδεμένα με συστήματα αναφοράς. Στο παρόν Κεφάλαιο ο όρος σχετικότητα θα αναφέρεται μόνο σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς.)

Ξεκινώντας από δύο φαινομενικά απλά αξιώματα ο Einstein εντυπωσίασε την επιστημονική κοινότητα αποδεικνύοντας ότι οι καθιερωμένες ιδέες για τη σχετικότητα ήταν λανθασμένες, παρά το γεγονός ότι όλοι ήταν τόσο εξοικειωμένοι με αυτές τις ιδέες ώστε είχαν φτάσει να αποτελούν αναμφισβήτητη κοινή λογική. Ωστόσο αυτή η κοινή λογική στηρίζονταν στην εμπειρία με σώματα τα οποία κινούνταν μάλλον αργά. Η σχετικότητα του Einstein η οποία αποδείχθηκε ότι είναι σωστή για όλες τις δυνατές ταχύτητες, προέβλεψε πολλά φαινόμενα τα οποία με πρώτη ματιά ήταν παράξενα, διότι μέχρι τότε ουδείς είχε παρατηρήσει.

Συγκεκριμένα, ο Einstein απόδειξε ότι ο χώρος και ο χρόνος είναι αλληλένδετοι, δηλαδή απόδειξε ότι ο χρόνος μεταξύ δύο γεγονότων εξαρτάται από το πόσο μακριά το ένα γεγονός συμβαίνει από το άλλο και αντιστρόφως. Επίσης η σύνδεση ανάμεσα στον χώρο και στον χρόνο είναι διαφορετική για παρατηρητές που κινούνται ο ένας ως προς τον άλλον, δηλαδή η σύνδεση αυτή εξαρτάται από τη σχετική ταχύτητα ανάμεσα στους δύο παρατηρητές. Χαρακτηριστικό αποτέλεσμα είναι ότι ο χρόνος δεν κυλάει για όλους με τον ίδιο ρυθμό σαν να χτυπά με μηχανική κανονικότητα ένα κεντρικό απόλυτο ρολόι, το οποίο ελέγχει όλο το Σύμπαν. Στην πραγματικότητα ο ρυθμός με τον οποίο κυλάει ο χρόνος είναι ρυθμιζόμενος: η σχετική κίνηση των παρατηρητών μπορεί να αλλάξει τον ρυθμό αυτό. Πριν το 1905 μόνο μερικοί με ισχυρή φαντασία θα μπορούσαν να είχαν σκεφτεί κάτι τέτοιο. Σήμερα, μηχανικοί και επιστήμονες το δέχονται ως δεδομένο, διότι η εμπειρία τους με την ειδική σχετικότητα έχει αλλάξει την κοινή αντίληψη. Για παράδειγμα κάθε μηχανικός που ασχολείται με το διεθνές σύστημα εντοπισμού (GPS) των δορυφόρων NAVSTAR πρέπει συνεχώς να χρησιμοποιεί τη θεωρία της σχετικότητας για να υπολογίζει το ρυθμό με τον οποίον κυλάει ο χρόνος στους δορυφόρους, διότι ο ρυθμός αυτός είναι διαφορετικός από τον ρυθμό που κυλάει ο χρόνος στην επιφάνεια της Γης.

ΣΧΗΜΑ 37-1 Ο Einstein ποζάρει, την εποχή που αρχίζει να γίνεται διάσημος. *(Corbis Images)*

Η ειδική θεωρία της σχετικότητας έχει τη φήμη ότι είναι δύσκολη. Στην πραγματικότητα δεν είναι δύσκολη, μαθηματικά τουλάχιστον, όσον αφορά αυτό το βιβλίο. Όμως η δυσκολία της έγκειται στο γεγονός ότι θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί σε σχέση με το *ποιος* μετρά *τι* σε ένα γεγονός και πώς αυτή η μέτρηση πραγματοποιείται. Η μελέτη της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας μπορεί να παρουσιάσει δυσκολίες διότι ακριβώς αντιβαίνει με την καθημερινή μας εμπειρία.

37-2 Τα Αξιώματα

Τώρα θα εξετάσουμε τα δύο αξιώματα της σχετικότητας πάνω στα οποία στηρίχθηκε η θεωρία του Einstein:

1. Το Αξίωμα της Σχετικότητας: Οι νόμοι της φυσικής είναι οι ίδιοι για όλους τους παρατηρητές σε αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Κανένα σύστημα αναφοράς δεν είναι προτιμητέο σε σχέση με κάποιο άλλο.

Ο Γαλιλαίος δέχτηκε ότι όλοι οι νόμοι της *Μηχανικής* είναι οι ίδιοι σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Ο Einstein διεύρυνε αυτή την ιδέα ώστε να περιληφθούν στο αξίωμα αυτό *όλοι* οι νόμοι της φυσικής, ιδιαίτερα αυτοί του Ηλεκτρομαγνητισμού και της Οπτικής. Το αξίωμα της σχετικότητας *δεν* υποστηρίζει ότι οι μετρήσιμες τιμές όλων των φυσικών μεγεθών είναι οι ίδιες για όλους τους αδρανειακούς παρατηρητές, για τους περισσότερους είναι διαφορετικές, αλλά οι *νόμοι* της Φυσικής, που συνδέουν αυτές τις μετρήσεις, είναι ίδιοι.

2. Το Αξίωμα της Ταχύτητας του Φωτός: Η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει την ίδια τιμή c σε όλες τις διευθύνσεις και σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Μπορούμε επίσης να διατυπώσουμε αυτό το αξίωμα λέγοντας πολύ απλά ότι στη φύση υπάρχει μια *απόλυτη ταχύτητα* c, που είναι η ίδια σε όλες τις διευθύνσεις και σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Το φως τυχαίνει να ταξιδεύει με αυτή την απόλυτη ταχύτητα. Όμως κανένα αντικείμενο το οποίο μεταφέρει ενέργεια ή πληροφορία δεν μπορεί να ξεπεράσει αυτό το όριο. Επιπλέον κανένα σωματίδιο το οποίο έχει μάζα δεν μπορεί στην πραγματικότητα να φτάσει το όριο αυτό, για όσο χρόνο και αν επιταχυνθεί ή όσο μεγάλη επιτάχυνση και αν έχει. (Δυστυχώς οι γρηγορότερες από το φως διαστρικές μηχανές (warp drive) οι οποίες χρησιμοποιούνται σε πολλές ιστορίες επιστημονικής φαντασίας φαίνεται ότι είναι ανέφικτες, λόγω της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.)

Και τα δύο αυτά αξιώματα έχουν για πολλά χρόνια ελεγχθεί διεξοδικά και καμία παραβίασή τους δεν έχει ποτέ παρατηρηθεί.

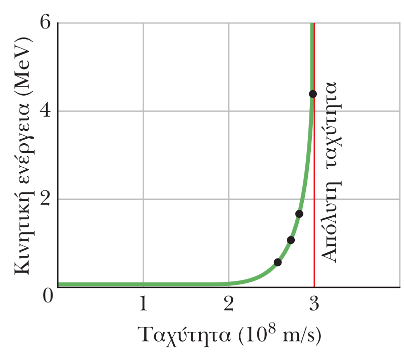
Η Απόλυτη Ταχύτητα

Η ύπαρξη ενός ορίου στην ταχύτητα που μπορούν να αποκτήσουν τα επιταχυνόμενα ηλεκτρόνια αποδείχτηκε πειραματικά το 1964 από τον W. Bertozzi, ο οποίος αφού επιτάχυνε ηλεκτρόνια, μέτρησε τις ταχύτητές τους και με μια ανεξάρτητη μέθοδο μέτρησε και την κινητική τους ενέργεια. Το αποτέλεσμα του πειράματος έδειξε ότι καθώς η δύναμη που ασκείται σε ένα πολύ γρήγορα κινούμενο ηλεκτρόνιο αυξάνεται, αν και η τιμή της κινητικής του ενέργειας που μετράμε αυξάνεται και παίρνει πολύ μεγάλες τιμές, η ταχύτητά του δεν αυξάνεται ανάλογα (Σχ. 37-2). Ηλεκτρόνια έχουν επιταχυνθεί στο εργαστήριο σε ταχύτητες που φτάνουν τις 0.999 999 999 95 φορές την ταχύτητα του φωτός, αλλά όσο κοντινή και να είναι αυτή η ταχύτητα σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός είναι πάντα μικρότερη από c.

Η απόλυτη ταχύτητα έχει οριστεί ότι είναι ακριβώς:

$$c = 299\,792\,458 \text{ m/s}. \tag{37-1}$$

Προσοχή: Μέχρι στιγμής σε αυτό το βιβλίο έχουμε προσεγγίσει την ταχύτατα φωτός c σαν 3.0×10^8 m/s, αλλά σε αυτό το κεφάλαιο θα χρησιμοποιούμε συχνά την ακριβή τιμή. Ίσως να θέλετε να αποθηκεύσετε την ακριβή τιμή της



ΣΧΗΜΑ 37-2 Οι τελείες παρουσιάζουν τις μετρημένες τιμές της κινητικής ενέργειας ενός ηλεκτρονίου σχεδιασμένες γραφικά ως προς τη μετρημένη ταχύτητά του. Όσο μεγάλο ποσό ενέργειας και αν προσφέρεται στο ηλεκτρόνιο (ή σε οποιοδήποτε άλλο σωματίδιο που έχει μάζα), η ταχύτητά του δεν μπορεί ποτέ να γίνει ίση ή να ξεπεράσει το απόλυτο όριο της ταχύτητας του φωτός c. (Η συνεχής καμπύλη που περνά από τις τελείες παρουσιάζει την πρόβλεψη της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας του Einstein για την κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου ως συνάρτηση της ταχύτητας.)

ταχύτητας του φωτός στη μνήμη του υπολογιστή τσέπης σας (αν δεν υπάρχει κιόλας) ώστε να τη χρησιμοποιήσετε όταν τη χρειαστείτε.

Ελέγχοντας το Αξίωμα της Ταχύτητας του Φωτός

Αν η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια για όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς, τότε η ταχύτητα του φωτός που εκπέμπεται από μια πηγή η οποία κινείται σε σχέση με το εργαστήριο θα πρέπει να είναι η ίδια με την ταχύτητα του φωτός η οποία εκπέμπεται από μια πηγή που βρίσκεται σε ηρεμία ως προς το εργαστήριο. Αυτή η υπόθεση έχει ελεγχθεί απευθείας σε ένα πείραμα πολύ μεγάλης ακρίβειας. Η «πηγή φωτός» ήταν ένα ουδέτερο *πιόνιο* (που συμβολίζεται με π^0), ένα ασταθές και με μικρό χρόνο ζωής σωματίδιο, το οποίο δημιουργείται από συγκρούσεις σε έναν επιταχυντή σωματιδίων. Το σωματίδιο αυτό διασπάται (μεταμορφώνεται) σε δύο ακτίνες γάμα μέσα από την αντίδραση

$$\pi^0 \rightarrow \gamma + \gamma. \tag{37-2}$$

Οι ακτίνες γάμα είναι το τμήμα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος με πολύ μεγάλες συχνότητες και συνεπώς υπακούουν στο αξίωμα της ταχύτητας του φωτός, όπως ακριβώς και το ορατό φως. (Στο κεφάλαιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε τον όρο φως για οποιαδήποτε είδος ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας ορατό ή όχι.)

Το 1964, οι φυσικοί στο CERN, στο ευρωπαϊκό εργαστήριο σωματιδιακής φυσικής κοντά στη Γενεύη, δημιούργησαν μια δέσμη πιονίων που κινούνταν με ταχύτητα $0.99975c$ ως προς το εργαστήριο. Κατόπιν οι πειραματιστές μέτρησαν την ταχύτητα των ακτίνων γάμα οι οποίες εκπέμφθησαν από τα ταχύτητα κινούμενα πιόνια. Το πείραμα έδειξε ότι η ταχύτητα του φωτός που εκπέμφθηκε από τα πιόνια κατά τη διάσπασή τους ήταν η ίδια με αυτή που θα είχε το φως αν τα πιόνια ήταν ακίνητα ως προς το εργαστήριο, δηλαδή c.

37-3 «Μέτρηση» ενός Γεγονότος

Ένα **γεγονός** είναι κάτι το οποίο συμβαίνει, και σε κάθε γεγονός μπορούμε να αντιστοιχίσουμε τρεις συντεταγμένες χώρου και μία συντεταγμένη χρόνου. Ανάμεσα στα πολλά πιθανά γεγονότα είναι 1) το άναμμα και το σβήσιμο ενός μικρού λαμπτήρα, 2) η σύγκρουση δύο σωματιδίων, 3) το πέρασμα ενός φωτεινού παλμού από συγκεκριμένο σημείο, 4) μια έκρηξη και 5) το πέρασμα του δείκτη του ρολογιού από ένα σημείο στην περιφέρεια του ρολογιού.

Παρατηρητής που βρίσκεται ακίνητος σε συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς μπορεί, για παράδειγμα, να αντιστοιχίσει σε ένα γεγονός A τις συντεταγμένες που δίνονται στον Πίνακα 37-1. Επειδή στη σχετικότητα ο χώρος και ο χρόνος είναι αλληλένδετοι, μπορούμε να περιγράψουμε αυτές τις συντεταγμένες συνολικά ως *συντεταγμένες του χωρόχρονου*. Το ίδιο το σύστημα των συντεταγμένων είναι τμήμα του συστήματος αναφοράς του παρατηρητή.

Ένα συγκεκριμένο γεγονός μπορεί να καταγραφεί από οποιοδήποτε αριθμό παρατηρητών, ο καθένας από τους οποίους βρίσκεται και σε διαφορετικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Γενικά διαφορετικοί παρατηρητές θα αντιστοιχίσουν διαφορετικές χωροχρονικές συντεταγμένες στο ίδιο γεγονός. Σημειώστε ότι ένα γεγονός δεν «ανήκει» σε κανένα συγκεκριμένο αδρανειακό σύστημα αναφοράς: ένα γεγονός είναι απλά κάτι που συμβαίνει, και ο οποιοσδήποτε στο δικό του σύστημα αναφοράς μπορεί να το παρατηρήσει και να αντιστοιχίσει χωροχρονικές συντεταγμένες ως προς αυτό το σύστημα.

ΠΙΝΑΚΑΣ 37-1

Καταγωγή γεγονότος *A*

Συντεταγμένη	Τιμή
x	3.58 m
y	1.29 m
z	0 m
t	34.5 s

Η διαδικασία μιας τέτοιας αντιστοίχισης μπορεί να γίνει αρκετά περίπλοκη εξαιτίας ενός πρακτικού προβλήματος. Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι ένα μπαλόνι εκρήγνυται 1 km στα δεξιά σας, ενώ μια φωτοβολίδα ανάβει 2 km στα αριστερά σας. Και τα δύο γεγονότα συμβαίνουν ακριβώς στις 9.00 π.μ. Παρόλα αυτά εσείς δεν παρατηρείτε κανένα γεγονός ακριβώς στις 9.00 π.μ., διότι εκείνη ακριβώς τη στιγμή δεν έχει φτάσει σε σας το φως από κανένα από τα δύο γεγονότα. Επειδή η φωτοβολίδα βρίσκεται πιο μακριά από σας απ' όσο το μπαλόνι, το φως το οποίο εκπέμπει η φωτοβολίδα φτάνει στα μάτια σας αργότερα απ' όσο το φως που εκπέμπει η έκρηξη του μπαλονιού. Επομένως σας δημιουργείται η εντύπωση ότι το γεγονός του ανάμματος της φωτοβολίδας συνέβη μετά την έκρηξη του μπαλονιού. Για να υπολογίσουμε τους ακριβείς χρόνους και για να αντιστοιχίσουμε τις 9.00 π.μ ως τον ακριβή χρόνο πραγματοποίησης των δύο γεγονότων, θα πρέπει να υπολογίσουμε τους χρόνους που χρειάστηκε το φως για να ταξιδέψει από τα σημεία στα οποία πραγματοποιήθηκαν τα γεγονότα μέχρι το σημείο παρατήρησης και στη συνέχεια να αφαίρεσουμε αυτούς τους χρόνους από τους χρόνους που παρατηρήθηκαν τα δύο γεγονότα.

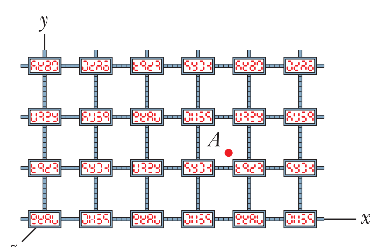
Η διαδικασία αυτή μπορεί να γίνει πολύπλοκη σε πιο απαιτητικές καταστάσεις. Χρειαζόμαστε λοιπόν μια ευκολότερη διαδικασία η οποία αυτόματα θα εκμηδενίζει κάθε ανησυχία αναφορικά με τον χρόνο ταξιδιού της πληροφορίας από ένα γεγονός σε έναν παρατηρητή. Για να δημιουργήσουμε μια τέτοια διαδικασία θα πρέπει να κατασκευάσουμε ένα φανταστικό πλέγμα από όργανα μέτρησης χώρου και χρόνου δηλαδή από ράβδους και ρολόγια σε όλο το αδρανειακό σύστημα αναφοράς του παρατηρητή. Το πλέγμα αυτό θα κινείται πάντα συνδεδεμένο με τον παρατηρητή. Αυτή η κατασκευή μπορεί να φαίνεται τεχνητή, αλλά μας γλιτώνει από την πολλή εξεζητημένη σύγχυση και ταυτόχρονα διευκολύνει τους υπολογισμούς διότι μας επιτρέπει να βρίσκουμε τις χωρικές συντεταγμένες, τη χρονική συντεταγμένη και τις χωροχρονικές συντεταγμένες σύμφωνα με την ακόλουθη διαδικασία:

1. ***Χωρικές Συντεταγμένες*:** Φανταζόμαστε ότι το αδρανειακό σύστημα αναφοράς του παρατηρητή είναι εξοπλισμένο με ένα τρισδιάστατο πλέγμα από ράβδους μέτρησης. Καθένα σύνολο αυτών των ράβδων είναι παράλληλο προς τον ένα άξονα συντεταγμένων. Αυτοί οι ράβδοι μας προσφέρουν έναν τρόπο για να ορίσουμε συντεταγμένες κατά μήκος των αξόνων. Με αυτό τον τρόπο αν ένα γεγονός είναι π.χ. το άναμμα ενός μικρού λαμπτήρα, ο παρατηρητής για να εντοπίσει χωρικά το γεγονός χρειάζεται να μετρήσει μόνο τις τρεις χωρικές συντεταγμένες στη θέση που βρίσκεται ο λαμπτήρας.

2. ***Χρονική Συντεταγμένη*:** Για τη χρονική συντεταγμένη φανταζόμαστε ότι σε κάθε σημείο συνάντησης των ράβδων του πλέγματος υπάρχει ένα πολύ μικρό ρολόι, το οποίο ο παρατηρητής μπορεί να το διαβάσει καθώς φωτίζεται από το φως που παράγεται από το γεγονός. Το Σχ. 37-3 παρουσιάζει ένα επίπεδο αυτού του πλέγματος των ρολογιών και των ράβδων μέτρησης που έχουμε περιγράψει.

   Τα ρολόγια του πλέγματος πρέπει να είναι κατάλληλα συγχρονισμένα μεταξύ τους. Δεν είναι αρκετό να μαζέψουμε ένα σύνολο από όμοια ρολόγια, να τα προγραμματίσουμε να δείχνουν τον ίδιο χρόνο και μετά να τα μετακινήσουμε στις προκαθορισμένες θέσεις τους. Για παράδειγμα δεν ξέρουμε αν η μετακίνηση των ρολογιών θα αλλάξει τον ρυθμό με τον οποίο μετράνε το χρόνο. (Στην πραγματικότητα θα τον αλλάξει.) Θα πρέπει λοιπόν πρώτα να τοποθετήσουμε τα ρολόγια στις προκαθορισμένες θέσεις τους και *μετά* να τα συγχρονίσουμε.

   Αν είχαμε μια μέθοδο για να μεταφέρουμε πληροφορία με άπειρη ταχύτητα, ο συγχρονισμός των ρολογιών θα ήταν πολύ απλή διαδικασία.



ΣΧΗΜΑ 37-3 Ένα τμήμα του τρισδιάστατου πλέγματος από ρολόγια και ράβδους μέτρησης, με το οποίο ένας παρατηρητής μπορεί να αντιστοιχίσει χωροχρονικές συντεταγμένες σε ένα γεγονός, όπως π.χ. τη λάμψη του φωτός στο σημείο A. Οι χωρικές συντεταγμένες αυτού του γεγονότος είναι κατά προσέγγιση, $x = 3.6$ μήκη ράβδου, $y = 1.3$ μήκη ράβδου και $z = 0$. Η χρονική συντεταγμένη είναι ο χρόνος που δείχνει το πλησιέστερο ρολόι στο σημείο A τη στιγμή της λάμψης.

Δυστυχώς καμία γνωστή μέθοδος μεταφοράς σήματος δεν έχει αυτή την ιδιότητα. Συνεπώς επιλέγουμε το φως (οποιοδήποτε τμήμα του ηλεκτρομαγνητικού φάσματος) για να στείλουμε τα συγχρονισμένα σήματά μας, επειδή στο κενό το φως κινείται με τη μέγιστη δυνατή ταχύτητα, το απόλυτο όριο της ταχύτητας c.

Ένας από τους πολλούς τρόπους με τους οποίους ένας παρατηρητής μπορεί να συγχρονίσει ένα πλέγμα από ρολόγια χρησιμοποιώντας φωτεινά σήματα είναι ο εξής: Ο παρατηρητής προσλαμβάνει ένα μεγάλο πλήθος προσωρινών βοηθών, έναν για κάθε ρολόι. Κατόπιν ο παρατηρητής στέκεται σε ένα σημείο, το οποίο έχει επιλέξει ως αρχή των αξόνων και από εκεί εκπέμπει έναν φωτεινό παλμό όταν το ρολόι του δείχνει $t = 0$. Όταν ο φωτεινός παλμός φτάνει στη θέση ενός βοηθού, ο βοηθός αυτός ρυθμίζει το ρολόι που βρίσκεται σε αυτή τη θέση ώστε να δείχνει $t = r/c$, όπου r η απόσταση ανάμεσα στον βοηθό και στην αρχή των αξόνων. Μετά από αυτή τη διαδικασία τα ρολόγια θεωρούνται συγχρονισμένα.

3. ***Χωροχρονικές Συντεταγμένες:*** Ο παρατηρητής μπορεί τώρα να αντιστοιχίσει χωροχρονικές συντεταγμένες σε κάθε γεγονός, καταγράφοντας απλώς τον χρόνο που δείχνει το ρολόι που βρίσκεται πλησιέστερα στο γεγονός και τη θέση όπως μετριέται πάνω στις ράβδους που βρίσκονται πλησιέστερα στο γεγονός. Αν υπάρχουν δύο γεγονότα, ο παρατηρητής υπολογίζει το χρονικό διάστημα μεταξύ τους από τη διαφορά που δείχνουν τα ρολόγια που είναι πλησιέστερα στο κάθε γεγονός και τη χωρική διαφορά τους από τη διαφορά στις συντεταγμένες των ράβδων μέτρησης που βρίσκονται πλησιέστερα στο κάθε γεγονός. Με αυτό τον τρόπο αποφεύγουμε το πρακτικό πρόβλημα του υπολογισμού του χρόνου ταξιδιού των σημάτων από τα γεγονότα στον παρατηρητή.

37-4 Η Σχετικότητα του Ταυτόχρονου

Ας υποθέσουμε ότι ένας παρατηρητής (ο Sam) παρατηρεί ότι δύο ανεξάρτητα γεγονότα (το Κόκκινο γεγονός και το Μπλε γεγονός) συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή. Ας υποθέσουμε τώρα ότι μια άλλη παρατηρήτρια (η Sally) που κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς τον Sam, επίσης καταγράφει τα δύο γεγονότα. Θα παρατηρήσει η Sally ότι τα δύο γεγονότα συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή;

Η απάντηση είναι ότι γενικά δεν θα παρατηρήσει ότι συμβαίνουν την ίδια χρονική στιγμή.

Αν δύο παρατηρητές βρίσκονται σε σχετική κίνηση, γενικά δεν θα συμφωνούν στο αν δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα. Αν ο ένας παρατηρητής μετρήσει δύο γεγονότα ως ταυτόχρονα, γενικά ο άλλος δεν θα συμφωνήσει μαζί του και θα παρατηρήσει ότι το ένα γεγονός προηγείται του άλλου.

Δεν μπορούμε να πούμε ότι ο ένας παρατηρητής είναι σωστός και ο άλλος παρατηρητής κάνει λάθος. Οι παρατηρήσεις και των δύο είναι ισοδύναμα σωστές και δεν υπάρχει φυσικός λόγος για να προτιμήσουμε τον έναν παρατηρητή από τον άλλο.

Η συνειδητοποίηση ότι δύο αντικρουόμενες δηλώσεις που σχετίζονται με το ίδιο φυσικό γεγονός μπορεί να είναι σωστές είναι ένα φαινομενικά παράξενο αποτέλεσμα της θεωρίας του Einstein. Παρόλα αυτά στο Κεφάλαιο 17 είδαμε έναν άλλο τρόπο με τον οποίο η κίνηση μπορεί να επηρεάσει τις μετρήσεις παράγοντας αντικρουόμενα αποτελέσματα. Στο φαινόμενο Doppler, η συχνότητα που μετράει ένας παρατηρητής για ένα ηχητικό κύμα εξαρτάται από τη σχετική κίνηση του παρατηρητή και της πηγής. Συνεπώς δύο παρατηρητές που κινούνται ο ένας ως προς τον άλλο, μετρούν διαφορετικές συχνότητες για το ίδιο κύμα, και όσο παράξενο και αν φαίνεται και οι δύο μετρήσεις τους είναι σωστές.

Τελικά καταλήγουμε στο εξής συμπέρασμα:

Το ταυτόχρονο δύο γεγονότων δεν είναι μια απόλυτη αντίληψη αλλά μάλλον μια σχετική καθώς εξαρτάται από την κίνηση του παρατηρητή.

Αν η σχετική ταχύτητα των παρατηρητών είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός c, τότε οι μετρούμενες αποκλίσεις από το ταυτόχρονο των δύο γεγονότων είναι τόσο μικρές που είναι μη παρατηρήσιμες. Αυτή είναι η περίπτωση όλων των εμπειριών της καθημερινής μας ζωής και αυτός είναι ο λόγος που η σχετικότητα του ταυτόχρονου μας είναι τόσο εξωπραγματική.

Μια πιο Κοντική Ματιά στην Έννοια του Ταυτόχρονου

Ας προσπαθήσουμε να ξεκαθαρίσουμε τη σχετικότητα του ταυτόχρονου με ένα παράδειγμα στηριγμένο στα αξιώματα της σχετικότητας. Στο παράδειγμα αυτό δεν θα αναφερθώ ούτε σε ρολόγια ούτε σε ράβδους μέτρησης. Το Σχ. 37-4 δείχνει δύο διαστημόπλοια μεγάλου μήκους (το SS Sally και το SS Sam) τα οποία μπορούν να θεωρηθούν αδρανειακά συστήματα αναφοράς για τους δύο παρατηρητές, τη Sally και τον Sam. Ενώ οι δύο παρατηρητές κάθονται ακίνητοι στο μέσον των διαστημοπλοίων τους, τα διαστημόπλοια κινούνται κατά μήκος του κοινού άξονά τους x με σχετική ταχύτητα του διαστημοπλοίου Sally ως προς το Sam, να είναι $\vec{v}$. Το Σχ. 37-4*α* δείχνει τα δύο διαστημόπλοια με τους δύο παρατηρητές να βρίσκονται στιγμιαία ο ένας απέναντι από τον άλλον.

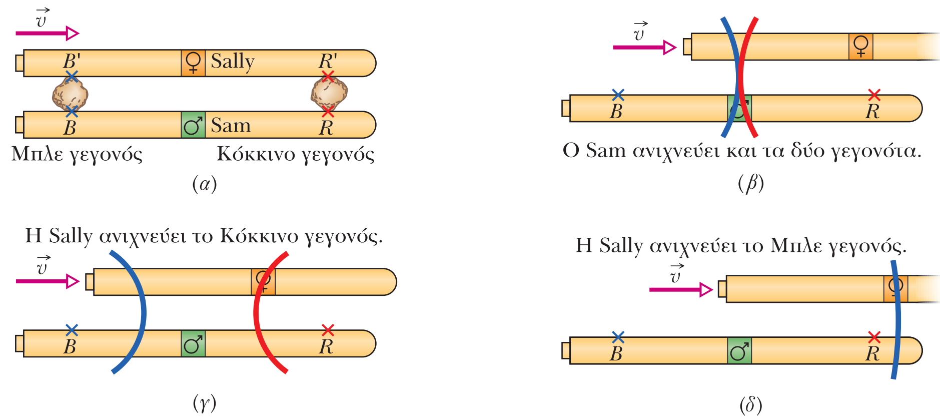
Δύο μεγάλοι μετεωρίτες χτυπάνε τα διαστημόπλοια, ο ένας παράγοντας μια κόκκινη λάμψη (Κόκκινο γεγονός) ενώ ο άλλος παράγοντας μια μπλε λάμψη (Μπλε γεγονός). Τα δύο γεγονότα της σύγκρουσης δεν είναι κατά ανάγκη ταυτόχρονα. Το κάθε γεγονός παράγει ένα μόνιμο σημάδι σε κάθε διαστημόπλοιο στις θέσεις R και R' και B και B'.

Ας υποθέσουμε ότι τα μέτωπα των κυμάτων που διαδίδονται από τα δύο γεγονότα φτάνουν στο Sam την ίδια χρονική στιγμή, όπως φαίνεται στο Σχ. 37-4*β*. Ας υποθέσουμε επίσης ότι μετά το γεγονός ο Sam βρίσκει, μετρώντας την απόσταση από τα σημάδια στο σκάφος του, ότι πράγματι βρισκόταν ακριβώς στο μέσον ανάμεσα στα σημάδια B και R τη στιγμή που συνέβησαν τα γεγονότα. Ο Sam καταλήγει στο συμπέρασμα:

Sam: Το φως από το Κόκκινο γεγονός και το φως από το Μπλε γεγονός έφτασαν στη θέση μου την ίδια χρονική στιγμή. Από τα σημάδια στο σκάφος μου βρίσκω ότι βρισκόμουν ακριβώς στη μέση ανάμεσα στις δύο πηγές. Συνεπώς το Κόκκινο γεγονός και το Μπλε γεγονός ήταν ταυτόχρονα γεγονότα.

Μελετώντας το Σχ. 37-4 βλέπουμε ότι η Sally και το μέτωπο του κύματος που διαδίδεται από το κόκκινο γεγονός κινούνται *αντίρροπα* (η Sally προς το μέτωπο του κύματος) σε αντίθεση με το μέτωπο του τρέχοντος κύματος από το Μπλε γεγονός το οποίο κινείται *ομόρροπα* με τη Sally. Συνεπώς το μέτωπο του κύματος από το Κόκκινο γεγονός θα φτάσει στη Sally πριν από το μέτωπο του κύματος από το Μπλε γεγονός. Η Sally καταλήγει στο συμπέρασμα:

Sallly: Το φως από το Κόκκινο γεγονός έφτασε στη θέση μου πριν από το φως από το Μπλε γεγονός. Από τα σημάδια στο σκάφος μου βρίσκω ότι και εγώ βρισκόμουν ακριβώς στη μέση ανάμεσα στις δύο πηγές. Συνεπώς το Κόκκινο γεγονός και το Μπλε γεγονός δεν ήταν ταυτόχρονα γεγονότα. Το Κόκκινο γεγονός συνέβη πρώτο και το Μπλε γεγονός συνέβη δεύτερο.



ΣΧΗΜΑ 37-4 Τα διαστημόπλοια της Sally και του Sam και η αλληλουχία των γεγονότων όπως τα παρατηρεί ο Sam. Το σκάφος της Sally κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα $\vec{v}$. (*α*) Το Κόκκινο γεγονός συμβαίνει στις θέσεις *R* και *R'* και το Μπλε γεγονός στις θέσεις *B* και *B'*. Το κάθε γεγονός εκπέμπει μια φωτεινή δέσμη. (*β*) Ο Sam ανιχνεύει ταυτόχρονα τα φωτεινά κύματα από το Μπλε και Κόκκινο γεγονός. (*γ*) Η Sally ανιχνεύει το κύμα από το Κόκκινο γεγονός. (*δ*) Η Sally ανιχνεύει το κύμα από το Μπλε γεγονός.

Οι δύο αυτές αναφορές δεν συμφωνούν μεταξύ τους. Παρόλα αυτά και οι δύο παρατηρητές είναι σωστοί ως προς τα συμπεράσματά τους.

Προσέξτε ότι υπάρχει μόνο ένα μέτωπο κύματος το οποίο διαδίδεται από το σημείο πρόσκρουσης κάθε μετεωρίτη και ότι αυτό το *μέτωπο κύματος ταξιδεύει με την ίδια ταχύτητα c και στα δύο συστήματα αναφοράς*, ακριβώς όπως το αξίωμα της ταχύτητας του φωτός απαιτεί.

Θα *μπορούσαν* οι δύο προσκρούσεις των μετεωριτών στα δύο σκάφη να είχαν συμβεί με τέτοιο τρόπο ώστε τα δύο γεγονότα να είχαν φανεί ταυτόχρονα στη Sally. Αν αυτό είχε συμβεί τότε ο Sam θα είχε δηλώσει ότι τα δύο γεγονότα δεν ήταν ταυτόχρονα.

37-5 Η Σχετικότητα του Χρόνου

Αν δύο παρατηρητές που κινούνται σχετικά ο ένας ως προς τον άλλον, μετράνε το χρονικό διάστημα (ή *χρονικό διαχωρισμό*) ανάμεσα σε δύο γεγονότα, γενικά θα βρουν διαφορετικά αποτελέσματα. Γιατί συμβαίνει αυτό; Ο λόγος είναι ότι η *χωρική διαφορά* ανάμεσα στα δύο γεγονότα μπορεί να επηρεάσει και τα *χρονικά διαστήματα* όπως μετριέται από τους παρατηρητές.

Το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο γεγονότα εξαρτάται από το πόσο απέχουν σε χώρο και χρόνο τα γεγονότα αυτά. Δηλαδή η χωρική και η χρονική τους απόσταση είναι αλληλένδετες.

Εδώ θα μελετήσουμε αυτή την αλληλεξάρτηση χρησιμοποιώντας ένα παράδειγμα. Το παράδειγμα αυτό όμως έχει έναν πολύ σοβαρό περιορισμό. *Για έναν από τους δύο παρατηρητές τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στο ίδιο σημείο του χώρου*. Δεν θα προχωρήσουμε σε πιο γενικά παραδείγματα μέχρι την Παρ. 37-7.

Το Σχ. 37-5*α* δείχνει τη βασική ιδέα ενός πειράματος που διεξάγει η Sally καθώς αυτή και ο εξοπλισμός της (μια φωτεινή πηγή, ένας καθρέφτης και ένα ρολόι) ταξιδεύουν με ένα τρένο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς ένα ακίνητο σταθμό. Ένας φωτεινός παλμός που εκπέμπεται από τη φωτεινή πηγή *B* (γεγονός 1) κινείται κατακόρυφα προς τα πάνω, ανακλάται κάθετα προς τα κάτω από τον καθρέφτη και τελικά συλλέγεται από την πηγή (γεγονός 2). Η Sally μετράει χρονικό διάστημα Δt_0 ανάμεσα στα δύο γεγονότα. Αυτό το χρονικό διάστημα συνδέεται με την απόσταση D της πηγής από τον καθρέφτη με τη σχέση:

$$\Delta t_0 = \frac{2D}{c} \quad \text{(Sally).} \tag{37-3}$$

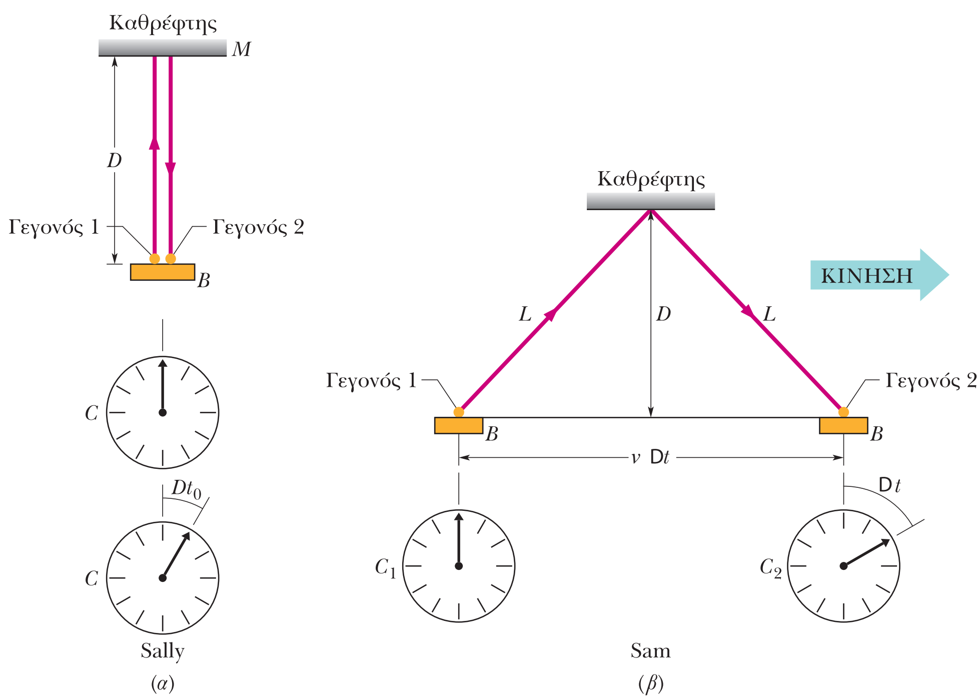
Τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση στο σύστημα αναφοράς της Sally, η οποία χρειάζεται μόνο ένα ρολόι C σε αυτή τη θέση για να μετρήσει το χρονικό διάστημα. Στο Σχ. 37-5*α* το ρολόι C φαίνεται δύο φορές: στην αρχή και στο τέλος του χρονικού διαστήματος.

Θα μελετήσουμε τώρα πώς, καθώς τα τρένα περνούν, ο Sam, που στέκεται πάνω στον σταθμό, «μετράει» αυτά τα δύο γεγονότα. Επειδή ο εξοπλισμός κινείται μαζί με το τρένο κατά τη διάρκεια που ο φωτεινός παλμός διαδίδεται, ο Sam παρατηρεί ότι η διαδρομή που ακολούθησε το φως είναι αυτή φαίνεται στο Σχ. 37-5*β*. Για αυτόν τα δύο γεγονότα συμβαίνουν σε διαφορετικά σημεία του συστήματος αναφοράς του και λόγω αυτού του γεγονότος για να μπορέσει να μετρήσει το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα θα πρέπει να χρησιμοποιήσει δύο συγχρονισμένα ρολόγια C_1 και C_2. Το καθένα από αυτά τα ρολόγια θα πρέπει να βρίσκεται στο σημείο του κάθε γεγονότος. Σύμφωνα με το αξίωμα της ταχύτητας του φωτός του Einstein το φως ταξιδεύει με την ίδια ταχύτητα c και για το Sam αλλά και για τη Sally. Όμως τώρα το φως ταξιδεύει απόσταση $2L$ ανάμεσα στα γεγονότα 1 και 2. Το χρονικό διάστημα που μετράει ο Sam ανάμεσα στα δύο γεγονότα είναι

$$\Delta t = \frac{2L}{c} \quad \text{(Sam),} \tag{37-4}$$

όπου

$$L = \sqrt{(\tfrac{1}{2}v\,\Delta t)^2 + D^2}. \tag{37-5}$$



ΣΧΗΜΑ 37-5 (*α*) Η Sally, που ταξιδεύει με το τρένο, για να μετρήσει το χρονικό διάστημα Δt_0 ανάμεσα στα γεγονότα 1 και 2, χρησιμοποιεί το ίδιο ρολόι. Το ρολόι αυτό παριστάνεται δύο φορές: την πρώτη φορά στο γεγονός 1 και τη δεύτερη στο γεγονός 2. (*β*) Ο Sam, που παρατηρεί το πείραμα από τον σταθμό, για να μετρήσει το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα χρειάζεται δύο συγχρονισμένα ρολόγια: το ρολόι C_1 για το γεγονός 1 και το ρολόι C_2 για το γεγονός 2. Το χρονικό διάστημα που μετράει είναι Δt.

Από την Εξ. 37-3 μπορούμε να γράψουμε το L ως

$$L = \sqrt{(\tfrac{1}{2}v\,\Delta t)^2 + (\tfrac{1}{2}c\,\Delta t_0)^2}. \tag{37-6}$$

Απαλείφοντας το L ανάμεσα στις Εξ. 37-4 και 37-6 και λύνοντας ως προς Δt καταλήγουμε στην:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \tag{37-7}$$

Η Εξ. 37-7 δηλώνει τη σχέση του χρονικού διαστήματος Δt που μετράει ο Sam ανάμεσα στα δύο γεγονότα με το χρονικό διάστημα Δt_0 που μετράει η Sally. Επειδή η ταχύτητα v πρέπει να είναι μικρότερη από c, ο παρονομαστής στην Εξ. 37-7 πρέπει να είναι μικρότερος από τη μονάδα. Συνεπώς το Δt πρέπει να είναι πάντα *μεγαλύτερο* από το Δt_0. Ο Sam λοιπόν μετράει μεγαλύτερο χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα από αυτό που μετράει η Sally. Ο Sam και η Sally μέτρησαν το χρονικό διάστημα ανάμεσα σε δύο *ίδια* γεγονότα, όμως λόγω της σχετικής κίνησής τους τα αποτελέσματα των μετρήσεών τους να είναι *διαφορετικά*. Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η σχετική κίνηση μπορεί να αλλάξει τον *ρυθμό* με τον οποίο κυλάει ο χρόνος ανάμεσα σε δύο γεγονότα; το κλειδί σε αυτό το φαινόμενο είναι το γεγονός ότι η ταχύτητα του φωτός είναι η ίδια και για τους δύο παρατηρητές.

Για να διακρίνουμε μεταξύ των μετρήσεων του Sam και της Sally χρησιμοποιούμε την παρακάτω ορολογία:

Όταν σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς δύο γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση, το χρονικό διάστημα ανάμεσά τους όπως αυτό μετράται στο συγκεκριμένο σύστημα αναφοράς ονομάζεται **ιδιοχρονικό διάστημα** ή **ιδιόχρονος**. Οι τιμές αυτού του χρονικού διαστήματος σε οποιοδήποτε άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς θα είναι πάντα μεγαλύτερες.

Συνεπώς η Sally μετρά το ίδιο χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα και ο Sam μετρά μεγαλύτερο χρονικό διάστημα. Το κατά πόσο ένα μετρούμενο χρονικό διάστημα είναι μεγαλύτερο από το αντίστοιχο ιδιοχρονικό, ονομάζεται **διαστολή του χρόνου**. (Για να διασταλεί κάτι θα πρέπει ή να εκταθεί ή να τεντωθεί: εδώ το χρονικό διάστημα έχει «εκταθεί» ή έχει «τεντωθεί»).

Συχνά ο αδιάστατος λόγος v/c στην Εξ. 37-7 αντικαθίσταται με το β, το οποίο ονομάζεται **παράμετρος της ταχύτητας**. Επίσης η αδιάστατη ποσότητα που ισούται με το αντίστροφο της τετραγωνικής ρίζας στην Εξ. 37-7 συχνά αντικαθίσταται με το γ, το οποίο ονομάζεται **συντελεστής Lorentz**.

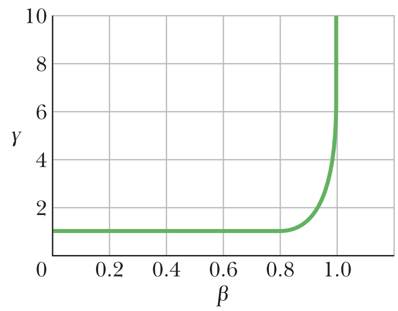
$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \tag{37-8}$$

Με αυτές τις δύο αντικαταστάσεις μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξ. 37-7 ως εξής:

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 \qquad \text{(διαστολή του χρόνου)}. \tag{37-9}$$

Η παράμετρος ταχύτητας β είναι πάντα μικρότερη από τη μονάδα και δεχόμενοι ότι η ταχύτητα v είναι διαφορετική από το μηδέν, το γ είναι πάντα μεγαλύτερο από τη μονάδα. Όμως η διαφορά ανάμεσα στο γ και στο 1 δεν είναι σημαντική εκτός αν $v > 0.1\,c$. Επομένως όταν $v < 0.1\,c$, γενικά η «παλιά σχετικότητα» του Γαλιλαίου λειτουργεί αρκετά καλά. Στις υπόλοιπες περιπτώσεις θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας. Όπως φαίνεται και στο Σχ. 37-6, το γ αυξάνεται ταχύτατα καθώς το β πλησιάζει το 1 (δηλαδή καθώς το v πλησιάζει το c). Αποτέλεσμα αυτού του γεγονότος είναι ότι όσο μεγαλύτερη είναι η σχετική ταχύτητα ανάμεσα στον Sam και στη Sally, τόσο μεγαλύτερη είναι χρονική διάρκεια που θα μετρήσει ο Sam, μέχρι η ταχύτητα να γίνει τόσο μεγάλη ώστε η χρονική διάρκεια να τείνει στο άπειρο, δηλαδή ο Sam να μη δει «ποτέ» το δεύτερο γεγονός.

Μπορεί να αναρωτιέστε τι λέει η Sally για το γεγονός ότι ο Sam μετράει μεγαλύτερο χρονικό διάστημα από ότι αυτή. Η μέτρησή του δεν την εκπλήσσει γιατί σύμφωνα με αυτήν ο Sam απέτυχε να συγχρονίσει τα ρολόγια του C_1 και C_2, παρά την επιμονή του ότι τα κατάφερε. Θυμηθείτε ότι οι παρατηρητές που κινούνται ο ένας σε σχέση με τον άλλον, γενικά δεν συμφωνούν στο θέμα του ταυτόχρονου δύο γεγονότων. Ο Sam επιμένει ότι τη στιγμή που συμβαίνει το γεγονός 1, ταυτόχρονα τα δύο ρολόγια του δείχνουν τον ίδιο χρόνο. Όμως για τη Sally το ρολόι του Sam C_2, είναι λανθασμένα ρυθμισμένο σε χρονική στιγμή μπροστά από αυτή που έπρεπε κατά τη διάρκεια της διαδικασίας συγχρονισμού. Επομένως όταν ο Sam διαβάζει τον χρόνο για το γεγονός 2 σ' αυτό το ρολόι, η Sally θεωρεί ότι ο Sam διαβάζει μια τιμή η οποία είναι μεγαλύτερη από την πραγματική, και αυτός είναι ο λόγος που το χρονικό διάστημα το οποίο ο Sam μέτρησε ανάμεσα στα δύο γεγονότα είναι μεγαλύτερο από το χρονικό διάστημα που μέτρησε αυτή.



ΣΧΗΜΑ 37-6 Γραφική παράσταση του συντελεστή Lorentz γ ως συνάρτηση της παραμέτρου ταχύτητας β ($= v/c$).

Δύο έλεγχοι της Διαστολής του Χρόνου

1. ***Μικροσκοπικά Ρολόγια:*** Τα υποατομικά σωματίδια που ονομάζονται *μιόνια* είναι ασταθή. Αυτό σημαίνει ότι, όταν ένα μιόνιο παράγεται, ζει για πολύ μικρό χρονικό διάστημα πριν *διασπαστεί* (δηλαδή πριν μετατραπεί σε σωματίδια άλλων τύπων). Ο *χρόνος ζωής* ενός μιονίου είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στη δημιουργία του (γεγονός 1) και στη διάσπασή του (γεγονός 2). Όταν τα μιόνια είναι ακίνητα και οι χρόνοι ζωής τους μετριούνται με ακίνητα ρολόγια (δηλαδή σε ένα εργαστήριο), ο μέσος χρόνος ζωής τους είναι 2.200 μs. Αυτό είναι το ιδιοχρονικό διάστημα, διότι για κάθε μιόνιο τα γεγονότα 1 και 2 συμβαίνουν στην ίδια θέση του συστήματος αναφοράς του μιονίου, που δεν είναι άλλο από το ίδιο το μιόνιο. Μπορούμε να συμβολίσουμε τον ιδιόχρονο αυτό με Δt_0. Επιπλέον μπορούμε να ονομάσουμε το σύστημα αναφοράς στο οποίο ο ιδιόχρονος αυτός έχει μετρηθεί *σύστημα ηρεμίας* του μιονίου.

   Αντιθέτως, αν τα μιόνια κινούνται, λόγου χάρη ως προς το εργαστήριο, τότε οι μετρήσεις των χρόνων ζωής τους που θα πραγματοποιούνται με ρολόγια που βρίσκονται στο εργαστήριο, θα δίνουν μέσες τιμές που θα είναι μεγαλύτερες από τον ιδιόχρονο ζωής τους (διεσταλμένος μέσος χρόνος ζωής). Για να ελεγχθεί αυτό το συμπέρασμα πραγματοποιήθηκαν μετρήσεις των μέσων χρόνων ζωής μιονίων, τα οποία κινούνταν με $v = 0.9994$ c σε σχέση με ρολόγια του εργαστηρίου. Από την Εξ. 37-8 με $\beta = 0.9994$ ο συντελεστής Lorentz για αυτή την ταχύτητα είναι

   $$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(0.9994)^2}} = 28.87.$$

   Η Εξ. 37-9 δίνει για τον διεσταλμένο μέσο χρόνο ζωής

   $$\Delta t = \gamma \Delta t_0 = (28.87)(2.200\ \mu\text{s}) = 63.51\ \mu\text{s}.$$

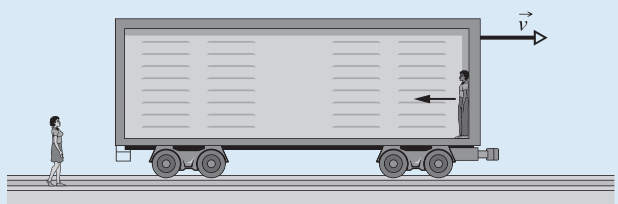
   Οι μετρήσεις που πραγματοποιήθηκαν συμφώνησαν με αυτό το αποτέλεσμα μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος.

2. ***Μακροσκοπικά Ρολόγια:*** Τον Οκτώβριο του 1997, οι Joseph Hafele και Richard Keating πραγματοποίησαν ένα όντως εξαντλητικό πείραμα. Πέταξαν με 4 φορητά

ατομικά ρολόγια δύο φορές γύρω από τη Γη μέσα σε επιβατηγά αεροπλάνα, κάθε φορά προς αντίθετη κατεύθυνση. Ο σκοπός τους ήταν να «επαληθεύσουν τη θεωρία της σχετικότητας του Einstein με μακροσκοπικά ρολόγια». Όπως έχουμε αναφέρει η πρόβλεψη της διαστολής του χρόνου της θεωρίας του Einstein επιβεβαιώθηκε στη μικροσκοπική κλίμακα, θα ήταν όμως μεγάλη ανακούφιση αν καταφέρναμε να την επιβεβαιώσουμε και με πραγματικά ρολόγια. Μακροσκοπικές μετρήσεις τόσο μεγάλης ακρίβειας έγιναν δυνατές μόνο εξαιτίας της πολύ μεγάλης ακρίβειας των σύγχρονων ατομικών ρολογιών. Οι Joseph Hafele και Richard Keating επιβεβαίωσαν τις προβλέψεις της θεωρίας της σχετικότητας με ένα πειραματικό σφάλμα της τάξης του 10%. (Η γενική θεωρία της σχετικότητας του Einstein η οποία προβλέπει ότι ο ρυθμός με τον οποίο κυλάει ο χρόνος σε ένα ρολόι επηρεάζεται από το βαρυτικό πεδίο στο οποίο βρίσκεται το ρολόι, επίσης παίζει σημαντικό ρόλο σε αυτό το πείραμα).

Μερικά χρόνια αργότερα, φυσικοί από το πανεπιστήμιο του Maryland πραγματοποίησαν παρόμοιο πείραμα μεγαλύτερης όμως ακρίβειας. Αυτοί πέταξαν με ένα ατομικό ρολόι πολλές φορές γύρω από το Chesapeake Bay σε πτήσεις που διαρκούσαν 15 ώρες. Οι μετρήσεις τους επιβεβαίωσαν την πρόβλεψη της διαστολής του χρόνου της θεωρίας της σχετικότητας με ακρίβεια μεγαλύτερη από 1%. Σήμερα όταν ατομικά μεταφέρονται ρολόγια από τον ένα τόπο σε ένα άλλο για ρύθμιση ή για άλλους σκοπούς, η διαστολή του χρόνου που οφείλεται στην κίνησή τους πάντοτε προσμετράται κατά τη ρύθμισή τους.

✔ **ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 1** Έστω ότι στεκόμαστε δίπλα στις σιδηροδρομικές γραμμές και ξαφνικά βλέπουμε ένα βαγόνι να περνάει από μπροστά μας με σχετικιστική ταχύτητα, όπως φαίνεται στο σχήμα. Μέσα στο βαγόνι βρίσκεται ένας καλά εξοπλισμένος κακοποιός ο οποίος πυροβολεί με όπλο λέιζερ προς το πίσω μέρος του βαγονιού. (α) Η τιμή της ταχύτητας του παλμού που εμείς μετράμε είναι μεγαλύτερη από, μικρότερη από ή ίση με αυτή που μετρά ο κακοποιός; (β) Η τιμή του χρόνου διάδοσης του παλμού που μετρά ο κακοποιός είναι ο ιδιόχρονός του; (γ) Η τιμή του χρόνου διάδοσης του παλμού την οποία μετρά ο κακοποιός και η αντίστοιχη τιμή που εμείς μετράμε συνδέονται μεταξύ τους μέσω της Εξ. 37-9;



Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-1

Το διαστημόπλοιό μας προσπερνά τη Γη με σχετική ταχύτητα 0.9990*c*. Στη συνέχεια αφού ταξιδέψουμε για 10 δικά μας χρόνια, σταματάμε στο φυλάκιο LP13, κάνουμε αναστροφή και επιστρέφουμε στη Γη, ταξιδεύοντας με την ίδια σχετική ταχύτητα. Το ταξίδι της επιστροφής διαρκεί και αυτό 10 δικά μας χρόνια. Πόσο διαρκεί το συνολικό ταξίδι μας για έναν παρατηρητή ο οποίος μετράει τον χρόνο πάνω στη Γη; (Θεωρούμε αμελητέα τα φαινόμενα που εμφανίζονται λόγω των επιταχύνσεων κατά τη διάρκεια της επιβράδυνσης στο LP13 και της επιτάχυνσης ξανά στην αρχική ταχύτητα.)

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Θα ξεκινήσουμε αναλύοντας το ταξίδι προς το φυλάκιο LP13:

1. Το πρόβλημα αναφέρεται σε μετρήσεις οι οποίες πραγματοποιούνται από δύο παρατηρητές που βρίσκονται σε δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Το ένα σύστημα είναι συνδεδεμένο με

τη Γη ενώ το δεύτερο (το δικό μας σύστημα αναφοράς) είναι συνδεδεμένο με το σκάφος μας.

2. Το ταξίδι προς το φυλάκιο καθορίζεται από δύο γεγονότα: το πρώτο είναι η εκκίνηση του ταξιδιού στη Γη ενώ το δεύτερο είναι το τέλος του ταξιδιού με την άφιξη του σκάφους στο φυλάκιο.
3. Η μέτρησή μας των 10 ετών για το ταξίδι προς το φυλάκιο είναι ο ιδιόχρονος Δt_0 ανάμεσα στα δύο αυτά γεγονότα, επειδή τα γεγονότα αυτά συμβαίνουν στην ίδια θέση στο δικό μας σύστημα αναφοράς που ταυτίζεται με το σκάφος μας.
4. Η μέτρηση του χρονικού διαστήματος Δt ανάμεσα στα δύο αυτά γεγονότα στο σύστημα αναφοράς της Γης θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη από τον ιδιόχρονο Δt_0, σύμφωνα με την Εξ. 37-9 ($\Delta t = \gamma\, \Delta t_0$) για τη διαστολή του χρόνου.

Υπολογισμοί: Εισάγοντας από την Εξ. 37-8 το γ στην Εξ. 37-9 βρίσκουμε ότι:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{10.0\text{ y}}{\sqrt{1-(0.9990c/c)^2}} = (22.37)(10.0\text{ y}) = 224\text{ y}.$$

Κατά το ταξίδι της επιστροφής έχουμε ακριβώς την ίδια κατάσταση και τα ίδια δεδομένα. Επομένως το συνολικό ταξίδι διαρκεί 20y δικά μας χρόνια αλλά

$$\Delta t_{\text{total}} = (2)(224\text{ y}) = 448\text{ y} \qquad \textit{(Απάντηση)}$$

γήινα χρόνια. Με άλλα λόγια εμείς έχουμε γεράσει μόνο 20 χρόνια ενώ η Γη έχει γεράσει 448 χρόνια. Αν και δεν μπορούμε να ταξιδέψουμε στο παρελθόν σύμφωνα με αυτά που γνωρίζουμε σήμερα, μπορούμε όμως να ταξιδέψουμε στο μέλλον της Γης χρησιμοποιώντας σχετική κίνηση με μεγάλη ταχύτητα ώστε να αλλάξουμε το ρυθμό με τον οποίο κυλάει ο δικός μας χρόνος σε σχέση με αυτόν της Γης.

Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-2 *Αναπτύξτε τις ικανότητές σας*

Το στοιχειώδες σωματίδιο γνωστό ως *θετικό καόνιο* (K^+) έχει κατά μέσο όρο χρόνο ζωής $0.1237\,\mu s$ όταν είναι ακίνητο (δηλαδή όταν ο χρόνος ζωής του μετριέται στο σύστημα ηρεμίας του καονίου). Αν ένα θετικό καόνιο τη στιγμή που παράγεται κινείται με ταχύτητα $0.990c$ σε σχέση με το σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου, πόσο μακριά μπορεί να ταξιδέψει σε αυτό το σύστημα αναφοράς σύμφωνα με τη *κλασική φυσική* (που είναι μια πολύ καλή προσέγγιση για ταχύτητες πολύ μικρότερες από c) και πόσο μακριά μπορεί να ταξιδέψει σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας (που είναι σωστή για όλες τις δυνατές ταχύτητες που μπορούμε να συναντήσουμε στη φύση);

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ:

1. Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται σε μετρήσεις οι οποίες πραγματοποιούνται από δύο παρατηρητές που βρίσκονται σε δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Το ένα από τα δύο αυτά συστήματα είναι συνδεδεμένο με το καόνιο ενώ το δεύτερο είναι συνδεδεμένο με το εργαστήριο.
2. Και αυτό το πρόβλημα αναφέρεται σε δύο γεγονότα: το πρώτο είναι η δημιουργία του καονίου και η αρχή του ταξιδιού του ενώ το δεύτερο είναι το τέλος του ταξιδιού με την καταστροφή του καονίου.
3. Η απόσταση την οποία ταξίδεψε το καόνιο ανάμεσα στα δύο αυτά γεγονότα συνδέεται με την ταχύτητα v και το χρονικό διάστημα που χρειάστηκε με τη σχέση

$$v = \frac{\text{απόσταση}}{\text{χρονικό διάστημα}}. \qquad (37.10)$$

Έχοντας αυτά κατά νου, θα λύσουμε το πρόβλημα για την απόσταση πρώτα σύμφωνα με τη κλασική φυσική και μετά σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας.

Κλασική Φυσική: Στην κλασική φυσική θα βρούμε την ίδια απόσταση και το ίδιο χρονικό διάστημα (στην Εξ. 37-10) είτε τα μετρήσουμε στο σύστημα του καονίου είτε στο σύστημα του εργαστηρίου. Επομένως δεν χρειάζεται να είμαστε ιδιαίτερα προσεκτικοί σε σχέση με το σύστημα στο οποίο πραγματοποιούνται οι μετρήσεις. Για να υπολογίσουμε την απόσταση d_{cp} την οποία ταξίδεψε το καόνιο σύμφωνα με την κλασική φυσική θα πρέπει να γράψουμε την Εξ. 37-10 ως εξής

$$d_{cp} = v\,\Delta t, \qquad (37\text{-}11)$$

όπου Δt είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα και ως προς τα δύο συστήματα αναφοράς. Στη συνέχεια αντικαθιστώντας στην Εξ. 37-11 με $0.990c$ για την ταχύτητα v και $0.1237\ \mu s$ για το Δt βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} d_{cp} &= (0.990c)\,\Delta t \\ &= (0.990)(299\,792\,458\text{ m/s})(0.1237\times10^{-6}\text{ s}) \\ &= 36.7\text{ m}. \qquad \textit{(Απάντηση)} \end{aligned}$$

Αυτή είναι η απόσταση στην οποία θα ταξίδευε το καόνιο, αν η κλασική φυσική ήταν σωστή ακόμα και σε ταχύτητες κοντά στην ταχύτητα του φωτός c.

Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας: Στην ειδική θεωρία της σχετικότητας θα πρέπει να είμαστε πολύ προσεκτικοί ώστε και η απόσταση αλλά και το χρονικό διάστημα στην Εξ. 37-10 να είναι μετρημένα στο *ίδιο* σύστημα αναφοράς –ειδικά όταν η ταχύτητα είναι κοντά στην ταχύτατη φωτός c– όπως στη συγκεκριμένη περίπτωση. Συνεπώς, για να υπολογίσουμε την πραγματική απόσταση d_{sr} που ταξίδεψε το καόνιο όπως αυτή *μετρήθηκε στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου*, ξαναγράφουμε σύμφωνα με την ειδική θεωρία της σχετικότητας την Εξ. 37-10 ως εξής:

$$d_{sr} = v\,\Delta t, \qquad (37\text{-}12)$$

όπου Δt είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα όπως *αυτό μετρήθηκε στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου*.

Πριν μπορέσουμε να υπολογίσουμε τη d_{sr} από την Εξ. 37-12, πρέπει πρώτα να υπολογίσουμε το Δt. Το χρονικό διάστημα των $0.1237\mu s$ είναι ο ιδιόχρονος επειδή τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στη ίδια θέση στο σύστημα αναφοράς του καονίου, δηλαδή στο ίδιο το καόνιο. Θα συμβολίσουμε με Δt_0 το ιδιοχρονικό διάστημα. Μπορούμε λοιπόν να χρησιμοποιήσουμε την Εξ. 37-9 ($\Delta t = \gamma\,\Delta t_0$) που δίνει τη διαστολή του χρόνου, για να βρούμε το χρονικό διάστημα Δt όπως αυτό μετριέται στο σύστημα του εργαστηρίου. Αντικαθιστώντας στην Εξ. 37-9 το γ από την Εξ. 37-8 καταλήγουμε στη:

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{0.1237 \times 10^{-6}\ \text{s}}{\sqrt{1-(0.990c/c)^2}} = 8.769 \times 10^{-7}\ \text{s}.$$

Η τιμή αυτή του χρονικού διαστήματος είναι περίπου 7 φορές μεγαλύτερη από τον ιδιόχρονο ζωής του καονίου. Αυτό σημαίνει ότι ο χρόνος ζωής του καονίου είναι περίπου 7 φορές μεγαλύτερος στο σύστημα του εργαστηρίου από όσο στο σύστημα αναφοράς του ίδιου του καονίου, δηλαδή ο χρόνος ζωής του καονίου έχει διασταλεί. Μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε την τιμή της απόστασης που ταξίδεψε το καόνιο d_{sr} στο σύστημα αναφοράς του εργαστηρίου από την Εξ. 37-12

$$\begin{aligned} d_{sr} &= v\,\Delta t = (0.990c)\,\Delta t \\ &= (0.990)(299\,792\,458\ \text{m/s})(8.769 \times 10^{-7}\ \text{s}) \\ &= 260\ \text{m}. \end{aligned} \qquad \textit{(Απάντηση)}$$

Η τιμή αυτή είναι περίπου 7 φορές μεγαλύτερη από την d_{cp}. Πειράματα που επαληθεύουν την ειδική θεωρία της σχετικότητας, σαν κι αυτό που περιγράψαμε αποτελούν ρουτίνα στα εργαστήρια φυσικής εδώ και δεκαετίες. Στον σχεδιασμό αλλά και στην κατασκευή οποιονδήποτε επιστημονικού ή ιατρικού εξοπλισμού ο οποίος περιλαμβάνει σωματίδια που κινούνται με μεγάλες ταχύτητες θα πρέπει να λαμβάνουμε υπόψη μας και τις σχετικιστικές διορθώσεις.

37-6 Η Σχετικότητα του Μήκους

Αν θέλεις να μετρήσεις το μήκος μιας ράβδου που ηρεμεί ως προς εσένα, θα πρέπει με την ησυχία σου να σημειώσεις τις ακραίες θέσεις της ράβδου πάνω σε ένα μακρύ χάρακα και μετά να αφαιρέσεις τη μια μέτρηση από την άλλη. Όμως αν η ράβδος κινείται, τότε πρέπει να σημειώσεις τις θέσεις των δύο άκρων της ράβδου πάνω στον χάρακα *ταυτόχρονα* (στο δικό σου σύστημα αναφοράς). Στην αντίθετη περίπτωση η μέτρησή σου δεν θα μπορεί να ονομαστεί μήκος. Το Σχ. 37-7 μας δείχνει τη δυσκολία της προσπάθειάς μας να μετρήσουμε το μήκος ενός κινούμενου πιγκουΐνου σημειώνοντας τη μπροστινή και την πίσω πλευρά του πιγκουΐνου σε διαφορετικούς χρόνους. Επειδή το ταυτόχρονο είναι σχετικό και συνδέεται με τις μετρήσεις του μήκους, το μήκος θα πρέπει επίσης να είναι σχετική ποσότητα. Και όντως έτσι είναι.

Έστω L_0 το μήκος μιας ράβδου το οποίο μετριέται όταν η ράβδος βρίσκεται σε ακινησία (που σημαίνει ότι εσύ και η ράβδος βρίσκεστε στο ίδιο σύστημα αναφοράς δηλαδή στο σύστημα ηρεμίας της ράβδου). Ωστόσο όταν *κατά μήκος του άξονα της ράβδου* υπάρχει σχετική ταχύτητα v μεταξύ της ράβδου και εσένα, τότε με ταυτόχρονες μετρήσεις θα καταλήξεις σε ένα μήκος της ράβδου L που θα δίνεται από

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} \qquad \text{(συστολή του μήκους)} \qquad (37\text{-}13)$$

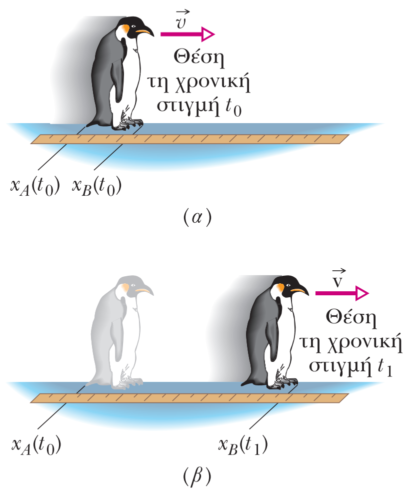
Όταν υπάρχει σχετική κίνηση ανάμεσα στα δύο συστήματα αναφοράς, επειδή ο συντελεστής Lorentz γ είναι πάντα μεγαλύτερος από τη μονάδα, το L θα είναι πάντα μικρότερο από το L_0. Η σχετική κίνηση προκαλεί *συστολή του μήκους* και το L θα ονομάζεται *συσταλμένο μήκος*. Όταν η ταχύτητα v αυξάνεται το γ επίσης αυξάνεται. Η συστολή του μήκους λοιπόν αυξάνεται με την ταχύτητα v.

Το μήκος L_0 ενός αντικειμένου το οποίο μετριέται στο σύστημα ηρεμίας του αντικειμένου είναι το *ιδιομήκος* ή το *μήκος ηρεμίας*. Οι μετρήσεις του μήκους που πραγματοποιούνται σε διαφορετικά συστήματα αναφοράς που βρίσκονται σε σχετική κίνηση παράλληλη με αυτό το μήκος θα δίνουν αποτελέσματα τα οποία θα είναι πάντα μικρότερα από το μήκος ηρεμίας.

Θα πρέπει όμως να είμαστε προσεκτικοί: η συστολή του μήκους εμφανίζεται μόνο κατά μήκος της διεύθυνσης της σχετικής κίνησης. Επίσης το μήκος που μετράμε, δεν χρειάζεται να είναι το μήκος ενός αντικειμένου, όπως μια ράβδος ή ένα δαχτυλίδι. Αντί γι' αυτό μπορεί να είναι το μήκος (ή η απόσταση) ανάμεσα σε δύο αντικείμενα στο ίδιο σύστημα ηρεμίας – για παράδειγμα ο Ήλιος και ένα κοντινό στον Ήλιο άστρο (τα οποία μπορεί να θεωρηθούν κατά προσέγγιση ότι βρίσκονται σε ηρεμία το ένα ως προς το άλλο).

Ένα κινούμενο αντικείμενο συστέλλεται *πραγματικά*; Επειδή η πραγματικότητα στηρίζεται πάνω σε παρατηρήσεις και μετρήσεις, αν τα αποτελέσματα είναι πάντα συνεπή και δεν έχει γίνει κανένα λάθος, τότε αυτό που παρατηρείται και μετριέται είναι πραγματικό. Με αυτή τη λογική τα αντικείμενα όντως συστέλλονται. Όμως μια περισσότερο ακριβής δήλωση είναι ότι το αντικείμενο στην *πραγματικότητα μετρήθηκε* να συστέλλεται – και καθώς η κίνηση επηρεάζει αυτή τη μέτρηση θα επηρεάζει και την πραγματικότητα.

Όταν, π.χ., μετράτε το συσταλμένο μήκος μιας ράβδου, τι σχολιάζει ένας παρατηρητής που κινείται μαζί με τη ράβδο για τη μέτρησή σας; Για αυτόν τον παρατηρητή εσύ δεν εντόπισες τα δύο άκρα της ράβδου ταυτόχρονα. (Θυμήσου ότι παρατηρητές που βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους δεν συμφωνούν για το ταυτόχρονο των γεγονότων). Για τον παρατηρητή στο σύστημα ηρεμίας της ράβδου, εσύ εντόπισες πρώτα το μπροστινό άκρο της ράβδου και μετά, έστω και λίγο αργότερα, το πίσω άκρο και αυτός είναι ο λόγος που το μήκος της ράβδου που μέτρησες είναι μικρότερο από το μήκος ηρεμίας της.



ΣΧΗΜΑ 37-7 Αν θέλεις να μετρήσεις το πάχος (από το μπροστινό μέρος μέχρι το πίσω) ενός πιγκουΐνου ενώ αυτός κινείται, θα πρέπει ταυτόχρονα στο δικό σου σύστημα αναφοράς να σημειώσεις τις θέσεις της μπροστινής και της πίσω πλευράς του όπως παρουσιάζεται στο (α), και όχι σε διαφορετικούς χρόνους όπως παρουσιάζεται στο (β).

Απόδειξη της Εξ. 37-13

Η συστολή του μήκους προκύπτει άμεσα από τη διαστολή του χρόνου. Ας θεωρήσουμε για άλλη μια φορά τους δύο παρατηρητές μας. Αυτή τη φορά και οι δύο, και η Sally που βρίσκεται στο τρένο το οποίο περνά με ταχύτητα v μέσα από ένα σταθμό αλλά και ο Sam που βρίσκεται στο σταθμό, θέλουν να μετρήσουν το μήκος του σταθμού. Ο Sam χρησιμοποιώντας μια μετροταινία, βρίσκει ότι το μήκος του σταθμού είναι L_0. Αυτό είναι το μήκος ηρεμίας του σταθμού καθώς ο σταθμός και ο Sam είναι ακίνητοι μεταξύ τους. Ο Sam παρατηρεί ότι η Sally που βρίσκεται πάνω στο τρένο, καλύπτει αυτό το μήκος σε ένα χρόνο $\Delta t = L_0/v$, όπου v είναι η ταχύτητα του τρένου, δηλαδή

$$L_0 = v\,\Delta t \qquad \text{(Sam)}. \qquad (37\text{-}14)$$

Το χρονικό διάστημα Δt δεν είναι ιδιοχρονικό διάστημα καθώς τα δύο γεγονότα που το προσδιορίζουν (το πέρασμα της Sally από το πίσω μέρος του σταθμού και το πέρασμά της από το μπροστινό μέρος του σταθμού) συμβαίνουν σε διαφορετικές θέσεις και κατά συνέπεια ο Sam θα πρέπει να χρησιμοποιήσει δύο συγχρονισμένα ρολόγια για να μετρήσει αυτό το χρονικό διάστημα Δt.

Όμως για τη Sally, αυτός ο οποίος κινείται καθώς την προσπερνά με ταχύτητα v είναι ο σταθμός. Η Sally παρατηρεί ότι τα δύο γεγονότα που μετρήθηκαν από τον Sam συμβαίνουν στην *ίδια θέση* στο δικό της σύστημα αναφοράς. Μπορεί να μετρήσει το χρονικό διάστημα μεταξύ τους με ένα μοναδικό ακίνητο ρολόι και κατά συνέπεια το διάστημα Δt_0 που μετράει με αυτόν τον τρόπο είναι ιδιοχρονικό διάστημα. Για αυτήν το μήκος L του σταθμού δίνεται από

$$L = v\,\Delta t_0 \qquad \text{(Sally).} \tag{37-15}$$

Αν διαιρέσουμε την Εξ. 37-15 με την Εξ. 37-14 και εφαρμόσουμε και την Εξ. 37-9 (την εξίσωση της διαστολής του χρόνου), καταλήγουμε στην

$$\frac{L}{L_0} = \frac{v\,\Delta t_0}{v\,\Delta t} = \frac{1}{\gamma},$$

ή

$$L = \frac{L_0}{\gamma}, \tag{37-16}$$

η οποία είναι η Εξ. 37-13, η εξίσωση της συστολής του μήκους.

Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-3

Στο Σχ. 37-8 η Sally (που βρίσκεται στο σημείο A) και το διαστημόπλοιο του Sam (με μήκος ηρεμίας $L_0 = 230$ m) προσπερνούν ο ένας τον άλλον με σταθερή σχετική ταχύτητα v. Η Sally μέτρα χρονικό διάστημα 3.57μs που χρειάζεται το διαστημόπλοιο για να την προσπεράσει (από τη στιγμή που την προσπερνάει το σημείο B μέχρι τη στιγμή που την προσπερνά το σημείο C). Πόση είναι η σχετική ταχύτητα v του διαστημόπλοιου ως προς τη Sally σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός c;

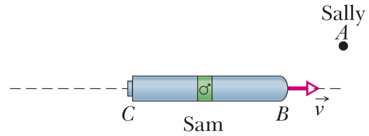
ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Ας υποθέσουμε ότι η ταχύτητα v έχει τιμή κοντά στην ταχύτητα του φωτός c. Τότε

1. Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται σε μετρήσεις οι οποίες πραγματοποιούνται από δύο παρατηρητές που βρίσκονται σε δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Το ένα από τα δύο αυτά συστήματα είναι συνδεδεμένο με το διαστημόπλοιο του Sam ενώ το δεύτερο είναι συνδεδεμένο με τη Sally.
2. Και το πρόβλημα αυτό αναφέρεται σε δύο γεγονότα: το πρώτο είναι το πέρασμα του σημείου B μπροστά από τη Sally ενώ το δεύτερο είναι το πέρασμα του σημείου C μπροστά από τη Sally.
3. Ως προς κάθε σύστημα αναφοράς, το άλλο σύστημα αναφοράς περνά με ταχύτητα v στο χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο γεγονότων και μετατοπίζεται κατά μία απόσταση που προκύπτει από τη σχέση

$$v = \frac{\text{απόσταση}}{\text{χρονικό διάστημα}} \tag{37-17}$$

Επειδή η ταχύτητα v με την οποία κινείται το ένα σύστημα αναφοράς ως προς το άλλο είναι κοντά στην ταχύτητα του φωτός θα πρέπει να είμαστε προσεκτικοί ώστε και η απόσταση και το χρονικό διάστημα στην Εξ. 37-17 να έχουν μετρηθεί στο ίδιο σύστημα αναφοράς.

Υπολογισμοί: Είμαστε ελεύθεροι να χρησιμοποιήσουμε οποιοδήποτε από τα δύο συστήματα αναφοράς για τις μετρήσεις μας. Επειδή ξέρουμε ότι το χρονικό διάστημα Δt ανάμεσα στα δύο γεγονότα που μετρήθηκε στο σύστημα αναφοράς της Sally είναι 3.57 μs, θα χρησιμοποιήσουμε την απόσταση L ανάμεσα στα δύο γεγονότα



ΣΧΗΜΑ 37-8 Η Sally, που βρίσκεται στο σημείο A, μετρά το χρόνο που χρειάζεται ένα διαστημόπλοιο στο οποίο βρίσκεται ο Sam για να την προσπεράσει.

όπως μετρήθηκε στο δικό της σύστημα αναφοράς. Η Εξ. 37-17 στην περίπτωση αυτή γράφεται

$$v = \frac{L}{\Delta t}. \tag{37-18}$$

Αν και δεν γνωρίζουμε το L, μπορούμε να το συσχετίσουμε με το μήκος ηρεμίας L_0 το οποίο μας δίνεται. Η απόσταση ανάμεσα στα δύο γεγονότα όπως αυτή μετριέται στο σύστημα αναφοράς του Sam είναι το μήκος ηρεμίας του διαστημόπλοιου L_0. Επομένως η απόσταση L όπως μετρήθηκε στο σύστημα αναφοράς της Sally θα πρέπει να είναι μικρότερη από το L_0, όπως δίνεται από την Εξ. 37-13 ($L = L_0/\gamma$) για τη συστολή του μήκους. Αντικαθιστώντας στην Εξ. 37-18 το L με το L_0/γ και το γ από την Εξ. 37-8 καταλήγουμε στην

$$v = \frac{L_0/\gamma}{\Delta t} = \frac{L_0\sqrt{(1-(v/c)^2}}{\Delta t}.$$

Λύνοντας την εξίσωση για ταχύτητα v (προσέξτε ότι η ταχύτητα βρίσκεται και στο αριστερό μέλος αλλά βρίσκεται και μέσα στον συντελεστή Lorentz στο δεξιό μέλος) καταλήγουμε στη σχέση

$$v = \frac{L_0 c}{\sqrt{(c\,\Delta t)^2 + L_0^2}}$$

$$= \frac{(230\text{ m})c}{\sqrt{(299\,792\,458\text{ m/s})^2(3.57\times 10^{-6}\text{ s})^2 + (230\text{ m})^2}}$$

$$= 0.210c. \qquad \textit{(Απάντηση)}$$

Κατά συνέπεια η σχετική ταχύτητα ανάμεσα στο διαστημόπλοιο του Sam και στη Sally είναι το 21% της ταχύτητας του φωτός. Προσέξτε ότι εδώ μας ενδιαφέρει μόνο η σχετική κίνηση ανάμεσα στους δύο παρατηρητές, στον Sam και τη Sally. Αν ένας από αυτούς είναι ακίνητος ή κινείται σε σχέση με ένα διαστημικό σταθμό είναι ένα γεγονός εντελώς άσχετο με τον υπολογισμό μας. Στο Σχ. 37-8 δεχτήκαμε ότι η Sally είναι ακίνητη, θα μπορούσαμε όμως το ίδιο εύκολα να έχουμε δεχτεί ότι το διαστημόπλοιο ένα ακίνητο και η Sally κινείται με ταχύτητα v προς τα αριστερά του. Μια τέτοια υπόθεση δεν θα άλλαζε σε τίποτα το τελικό μας αποτέλεσμα.

Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-4

Έχοντας αιφνιδιαστεί από μια έκρηξη κοντινού σουπερνόβα, αγωνίζεστε να ξεφύγετε με το διαστημόπλοιό σας, ελπίζοντας να ξεπεράσετε το υλικό που εκτοξεύτηκε με μεγάλη ταχύτητα προς εσάς. Ο συντελεστής σας Lorentz γ σε σχέση με το αδρανειακό σύστημα των τοπικών αστεριών είναι 22.4.

(α) Για να φτάσετε σε μια ασφαλή απόσταση υπολογίσατε ότι πρέπει να διανύσετε 9.00×10^{16} m. Αυτή η απόσταση έχει μετρηθεί στο αδρανειακό σύστημα των τοπικών αστεριών. Πόσο θα διαρκέσει η πτήση, αν το χρονικό διάστημα μετρηθεί σε αυτό το σύστημα αναφοράς;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Όπως κάναμε και στο Κεφάλαιο 2 μπορούμε από τον ορισμό της ταχύτητας να υπολογίσουμε τον χρόνο ο οποίος απαιτείται για να διανύσουμε μια συγκεκριμένη απόσταση με σταθερή ταχύτητα v:

$$v = \frac{\text{απόσταση}}{\text{χρονικό διάστημα}}. \tag{37-19}$$

Από το Σχ. 37-6 βλέπουμε ότι επειδή ο δικός σας συντελεστής Lorentz ως προς το σύστημα των τοπικών αστεριών είναι 22.4 (δηλαδή αρκετά μεγάλος), η σχετική σας ταχύτητα v είναι σχεδόν η ταχύτητα του φωτός c – τόσο που μπορούμε με ασφάλεια να την προσεγγίσουμε με την ταχύτητα του φωτός c. Στη συνέχεια για ταχύτητα $v \approx c$, θα πρέπει να προσέξουμε το γεγονός ότι και η απόσταση αλλά και το χρονικό διάστημα στην Εξ. 37-19 είναι μετρημένες στο ίδιο σύστημα αναφοράς.

Υπολογισμοί: Η συγκεκριμένη απόσταση που αντιστοιχεί στο μήκος της απόστασης που διανύσατε (9.00×10^{16}m) είναι μετρημένη στο σύστημα αναφοράς των αστεριών, επομένως και το χρονικό διάστημα Δt θα πρέπει να μετρηθεί στο ίδιο σύστημα αναφοράς. Κατά συνέπεια μπορούμε να γράψουμε

$$(\text{χρονικό διάστημα σε σχέση με το σύστημα των αστεριών}) = \frac{\text{απόσταση μετρημένη στο σύστημα των αστεριών}}{c}.$$

Στη συνέχεια αντικαθιστώντας την απόσταση που μας δίνεται, βρίσκουμε ότι

$$(\text{χρονικό διάστημα σε σχέση με το σύστημα των αστεριών}) = \frac{9.00\times10^{16}\text{ m}}{299\,792\,458\text{ m/s}}$$

$$= 3.00\times10^{8}\text{ s} = 9.51\text{ y}. \qquad \textit{(Απάντηση)}$$

(β) Πόσο θα διαρκέσει αυτή η πτήση σύμφωνα με σας (στο δικό σας σύστημα αναφοράς);

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ:

1. Τώρα ψάχνουμε το χρονικό διάστημα όπως μετρήθηκε σε ένα διαφορετικό σύστημα αναφοράς και συγκεκριμένα στο δικό σας σύστημα αναφοράς. Επομένως είναι απαραίτητο να μετατρέψουμε τα δεδομένα μας δίνονται από το σύστημα αναφοράς των αστεριών στο δικό σας σύστημα αναφοράς.

2. Η συγκεκριμένη απόσταση (9.00×10^{16} m) είναι το μήκος της απόστασης που διανύσατε μετρημένο στο σύστημα αναφοράς των αστεριών, δηλαδή είναι το μήκος ηρεμίας της απόστασης L_0 που διανύσατε καθώς τα δύο άκρα του δρόμου αυτού βρίσκονται σε ηρεμία σε αυτό το σύστημα αναφοράς. Όπως παρατηρείτε ως προς το δικό σας σύστημα αναφοράς, το σύστημα αναφοράς των αστεριών και συνεπώς και τα δύο άκρα της απόστασης της διαδρομής απομακρύνονται από σας με σχετική ταχύτητα $v \approx c$.

3. Εσείς, καθώς το σύστημα των αστεριών φεύγει μακριά σας, θα μετρήσετε το συσταλμένο μήκος L_0/γ για το διάστημα που διανύσατε και όχι το μήκος ηρεμίας L_0.

Υπολογισμοί: Μπορούμε τώρα να ξαναγράψουμε την Εξ. 37-19 ως εξής:

(χρονικό διάστημα σε σχέση με το δικό σας σύστημα) =

$$= \frac{\text{απόσταση μετρημένη στο δικό σας σύστημα}}{c} = \frac{L_0/\gamma}{c}.$$

Αντικαθιστώντας τα γνωστά δεδομένα καταλήγουμε στην

(χρονικό διάστημα σε σχέση με το δικό σας σύστημα) =

$$= \frac{(9.00 \times 10^{16}\ \text{m})/22.4}{299\ 792\ 458\ \text{m/s}}$$

$$= 1.340 \times 10^{7}\ \text{s} = 0.425\ \text{y}. \qquad \textit{(Απάντηση)}$$

Στην ερώτηση (α) υπολογίσαμε ότι η πτήση διαρκεί 9.51 y στο σύστημα αναφοράς των αστεριών. Όμως στο ερώτημα (β) βρήκαμε ότι στο δικό σας σύστημα αναφοράς θα χρειαστείτε μόνο 0.425 y για την πτήση σας, εξαιτίας της σχετικής κίνησης και του αποτελέσματος της που είναι η συστολή του μήκους το δρόμου που θα διανύσετε.

37-7 Οι Μετασχηματισμοί Lorentz

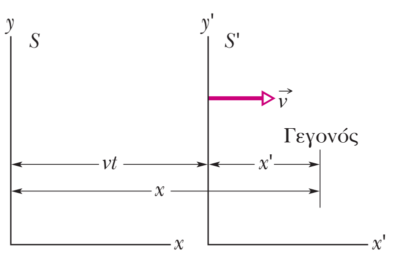
Στο Σχ. 37-9 παριστάνεται ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς S' το οποίο κινείται με ταχύτητα v, σε σχέση με το σύστημα αναφοράς S, κατά μήκος της κοινής θετικής διεύθυνσης των οριζόντιων αξόνων τους (που συμβολίζονται με x και x'). Ένας παρατηρητής στο S αναφέρει χωροχρονικές συντεταγμένες x, y, z, t για ένα γεγονός, ενώ ένας παρατηρητής στο S' αναφέρει χωροχρονικές συντεταγμένες x', y', z', t' για το ίδιο γεγονός. Πώς συνδέονται αυτές οι τετράδες των συντεταγμένων μεταξύ τους;

Από την αρχή θα υποστηρίξουμε, αν και στην πραγματικότητα αυτό χρειάζεται απόδειξη, ότι οι κάθετες στην κίνηση συντεταγμένες y και z δεν επηρεάζονται από την κίνηση, κατά συνέπεια $y' = y$ και $z' = z$. Το ενδιαφέρον μας λοιπόν περιορίζεται στις σχέσεις ανάμεσα στις x και x' και ανάμεσα στις t και t'.

Οι Εξισώσεις Μετασχηματισμού του Γαλιλαίου

Πριν από τη δημοσίευση της ειδικής θεωρίας σχετικότητας από τον Einstein, τα δύο ζευγάρια συντεταγμένων που μας ενδιαφέρουν συνδέονταν με τις εξισώσεις μετασχηματισμού του Γαλιλαίου:

$$x' = x - vt \qquad t' = t \qquad \text{(εξισώσεις μετασχηματισμού του Γαλιλαίου, οι οποίες ισχύουν κατά προσέγγιση σε χαμηλές ταχύτητες)} \qquad (37\text{-}20)$$



ΣΧΗΜΑ 37-9 Δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς: Το S' κινείται με σχετική ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς το S.

(Αυτές οι εξισώσεις έχουν γραφτεί με την υπόθεση ότι $t = t' = 0$ όταν οι αρχές των αξόνων των δύο συστημάτων S και S' συμπίπτουν.) Μπορείτε να επαληθεύσετε την πρώτη εξίσωση χρησιμοποιώντας το Σχ. 37-9. Η δεύτερη εξίσωση ουσιαστικά υποστηρίζει ότι ο χρόνος κυλάει με τον ίδιο ρυθμό για τους παρατηρητές που βρίσκονται και στα δύο συστήματα αναφοράς. Η αντίληψη αυτή ήταν τόσο προφανέστατα αληθινή για τους επιστήμονες πριν από τον Einstein ώστε δεν αναφερόταν καν. Όταν η ταχύτητα v είναι μικρή σε σύγκριση με την ταχύτητα φωτός c, οι Εξ. 37-20 γενικά δίνουν καλά αποτελέσματα.

Οι Εξισώσεις Μετασχηματισμού του Lorentz

Υποστηρίζουμε, αν και χωρίς απόδειξη, ότι οι σωστές εξισώσεις μετασχηματισμού οι οποίες ισχύουν για όλες τις ταχύτητες έως την ταχύτητα του φωτός μπορούν να εξαχθούν από τα αξιώματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας. Τα αποτελέσματα αυτά που ονομάζονται **εξισώσεις μετασχηματισμού του Lorentz*** ή μερικές φορές για ευκολία απλώς «μετασχηματισμοί Lorentz» είναι:

$$
\begin{aligned}
x' &= \gamma(x - vt),\\
y' &= y,\\
z' &= z,\\
t' &= \gamma(t - vx/c^2)
\end{aligned}
\qquad \text{(εξισώσεις μετασχηματισμού του Lorentz, ισχύουν για όλες τις φυσικά δυνατές ταχύτητες)} \qquad (37\text{-}21)
$$

(Και οι εξισώσεις αυτές είναι γραμμένες με την υπόθεση ότι $t = t' = 0$ όταν οι αρχές των αξόνων των δύο συστημάτων S και S' συμπίπτουν.) Προσέξτε ότι οι χωρικές συντεταγμένες x και οι χρονικές συντεταγμένες t είναι συνδεδεμένες μέσα από την πρώτη και την τέταρτη εξίσωση. Αυτή η αλληλεξάρτηση του χώρου και του χρόνου ήταν ένα βασικό μήνυμα στη θεωρία του Einstein, ένα μήνυμα το οποίο για καιρό απέρριπταν πολλοί από τους σύγχρονους συναδέλφους του.

Μια από τις θεμελιώδεις απαιτήσεις των εξισώσεων της ειδικής σχετικότητας είναι ότι θα πρέπει να εκφυλίζονται στις γνωστές κλασικές εξισώσεις όταν η τιμή της ταχύτητας του φωτός τείνει στο άπειρο. Αυτό σημαίνει ότι αν η ταχύτητα του φωτός έχει απείρως μεγάλη τιμή τότε όλες οι πεπερασμένες ταχύτητες θα είναι «χαμηλές» σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός και οι κλασικές εξισώσεις δεν θα αποτύχουν ποτέ. Αν επιτρέψουμε το $c \rightarrow \infty$ στις Εξ. 37-21 , τότε $\gamma \rightarrow 1$ και αυτές οι εξισώσεις εκφυλίζονται, ακριβώς όπως το περιμέναμε, στις εξισώσεις του Γαλιλαίου (Εξ. 37-20). Επαληθεύστε αυτούς τους υπολογισμούς.

Οι Εξ. 37-21 είναι γραμμένες με τέτοιο τρόπο ώστε όταν μας δίνεται το x και το t να μπορούμε εύκολα να υπολογίζουμε το x' και το t'. Όμως πολλές φορές είναι χρήσιμο να μπορούμε να δουλεύουμε και με τον αντίθετο τρόπο. Σε αυτή την περίπτωση αρκεί πολύ απλά να λύσουμε τις Εξ. 37-21 ως προς το x και το t. Τότε καταλήγουμε στις

$$x = \gamma(x' + vt') \quad \text{και} \quad t = \gamma(t' + vx'/c^2). \qquad (37\text{-}22)$$

Η σύγκριση δείχνει ότι ξεκινώντας από το ένα σύνολο των εξισώσεων, είτε τις Εξ. 37-21 είτε τις Εξ. 37-22, μπορούμε να γράψουμε το άλλο σύνολο απλά αντιστρέφοντας τις τονισμένες και τις μη τονισμένες ποσότητες και αλλάζοντας το πρόσημο της σχετικής ταχύτητας v.

Τα σύνολα των Εξ. 37-21 και 37-22 συνδέουν τις συντεταγμένες ενός μεμονωμένου γεγονότος όπως αυτές μετριούνται από δύο ανεξάρτητους παρατηρητές. Μερικές φορές θέλουμε να γνωρίζουμε όχι μόνο τις συντεταγμένες ενός απλού γεγονότος αλλά τις διαφορές ανάμεσα στις συντεταγμένες για ένα ζευγάρι γεγονότων. Αυτό σημαίνει ότι αν έχουμε δύο γεγονότα, έστω το γεγονός 1 και το γεγονός 2, εμείς μπορεί να θέλουμε να συνδέσουμε

$$\Delta x = x_2 - x_1 \quad \text{και} \quad \Delta t = t_2 - t_1,$$

---

* Ίσως να αναρωτηθείτε γιατί δεν ονομάζουμε αυτές τις εξισώσεις, εξισώσεις μετασχηματισμού του Einstein (όπως επίσης δεν ονομάζουμε και το γ συντελεστή Einstein). Ο H.A. Lorentz στην πραγματικότητα απόδειξε πρώτος αυτές τις εξισώσεις πριν τον Einstein, αλλά όπως ο ίδιος ο μεγάλος αυτός Ολλανδός φυσικός παραδέχτηκε, δεν προχώρησε στο παρακάτω τολμηρό βήμα να θεωρήσει ότι αυτές οι εξισώσεις περιγράφουν την πραγματική φύση του χώρου και του χρόνου. Πρώτος ο Einstein αντιλήφθηκε αυτό το γεγονός που αποτελεί τη βάση (την ουσία) της θεωρίας της σχετικότητας.

όπως τις μετράει ένας παρατηρητής στο σύστημα S, και

$$\Delta x' = x'_2 - x'_1 \quad \text{and} \quad \Delta t' = t'_2 - t'_1,$$

όπως τις μετράει ένας παρατηρητής στο σύστημα S'.

ΠΙΝΑΚΑΣ 37-2

Οι Εξισώσεις μετασχηματισμού του Lorentz για Ζευγάρια Γεγονότων

1. $\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\,\Delta t')$	1′. $\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\,\Delta t)$
2. $\Delta t = \gamma(\Delta t' + v\,\Delta x'/c^2)$	2′. $\Delta t' = \gamma(\Delta t - v\,\Delta x/c^2)$

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}}$$

Το σύστημα αναφοράς S' κινείται με σχετική ταχύτητα v ως προς το σύστημα S.

Ο Πίνακας 37-2 παρουσιάζει τις εξισώσεις μετασχηματισμού του Lorentz για τις διαφορές μεταξύ των συντεταγμένων, δηλαδή σε μορφή κατάλληλη για να αναλύσουμε ζεύγη γεγονότων. Οι εξισώσεις στον πίνακα προέκυψαν, αντικαθιστώντας απλά τις διαφορές των συντεταγμένων (δηλαδή όπως τις Δx και $\Delta x'$) στη θέση των τεσσάρων συντεταγμένων στα σύνολα των Εξ. 37-21 και 37-22.

Όμως θα πρέπει να είστε προσεκτικοί όταν αντικαθιστάτε τις διαφορές αυτές με αριθμητικές τιμές να είστε συνεπείς και να μην μπλέκετε τις τιμές των συντεταγμένων του πρώτου γεγονότος με τις τιμές των συντεταγμένων του δεύτερου γεγονότος. Επίσης αν για παράδειγμα το Δx είναι αρνητική ποσότητα, θα πρέπει να είστε σίγουροι ότι δεν ξεχάσατε να συμπεριλάβετε το αρνητικό πρόσημο κατά τις αντικαταστάσεις των τιμών στις σχέσεις.

ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 2 Στο Σχ. 37-9, το σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $0.90c$ σε σχέση με το σύστημα αναφοράς S'. Ένας παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς S' μετράει δύο γεγονότα τα οποία συμβαίνουν στις παρακάτω χωροχρονικές συντεταγμένες: το Κίτρινο γεγονός στις (5.0m, 20ns) και το Πράσινο γεγονός στις (−2.0m, 45ns). Ένας παρατηρητής στο σύστημα S θέλει να βρει τη χρονικό διάστημα $\Delta t_{GY} = t_G - t_Y$ ανάμεσα στα δύο γεγονότα. (α) Ποια εξίσωση από τον Πίνακα 37-2 θα χρησιμοποιηθεί; (β) Θα πρέπει να αντικαταστήσει την ταχύτητα v με την τιμή $+0.90c$ ή την τιμή $-0.90c$ στις παρενθέσεις στα δεξιά μέλη των εξισώσεων και στον συντελεστή Lorentz γ; (γ) Με ποια τιμή πρέπει να αντικατασταθεί ο πρώτος όρος μέσα στις παρενθέσεις και (δ) με ποια τιμή πρέπει να αντικατασταθεί ο δεύτερος όρος μέσα στις παρενθέσεις.

37-8 Μερικές Συνέπειες των Εξισώσεων Lorentz

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις του Πίνακα 37-2 για να επιβεβαιώσουμε κάποια συμπεράσματα στα οποία καταλήξαμε νωρίτερα χρησιμοποιώντας μόνο τα αξιώματα της ειδικής θεωρίας της σχετικότητας.

Ταυτόχρονο

Θεωρούμε την Εξ. 2 του Πίνακα 37-2

$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\,\Delta x'}{c^2}\right). \tag{37-23}$$

Αν δύο γεγονότα συμβαίνουν σε διαφορετικές θέσεις στο σύστημα αναφοράς S' του Σχ. 37-9, τότε το $\Delta x'$ σε αυτή την εξίσωση είναι μη μηδενικό. Συνεπώς ακόμα και αν τα δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα στο S' (δηλαδή $\Delta t' = 0$) δεν θα μπορούν να είναι ταυτόχρονα στο σύστημα αναφοράς S. (Το αποτέλεσμα αυτό συμφωνεί με το προηγούμενο συμπέρασμά μας στην Παρ. 37-4). Το χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο γεγονότων στο S θα είναι

$$\Delta t = \gamma\frac{v\,\Delta x'}{c^2} \qquad \text{(ταυτόχρονα γεγονότα στο } S'\text{).}$$

Διαστολή του Χρόνου

Έστω τώρα ότι δύο γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση στο σύστημα αναφοράς S' (συνεπώς $\Delta x' = 0$) αλλά σε διαφορετικούς χρόνους (συνεπώς $\Delta t' \neq 0$). Η Εξ. 37-23 τότε εκφυλίζεται στην

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t' \qquad \text{(γεγονότα στην ίδια θέση στο } S'\text{)} \tag{37-24}$$

Το αποτέλεσμα αυτό επιβεβαιώνει τη διαστολή του χρόνου ανάμεσα στα συστήματα αναφοράς S και S'. Επίσης επειδή τα δύο γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση στο S', το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ ανάμεσά τους μπορεί να μετρηθεί με ένα μόνο ρολόι, τοποθετημένο σε αυτή τη θέση. Κάτω από αυτές τις συνθήκες το μετρούμενο χρονικό διάστημα είναι ιδιοχρονικό διάστημα, και μπορούμε να το συμβολίσουμε με Δt_0, όπως έχουμε προηγουμένως συμβολίσει τους ιδιόχρονους. Επομένως με αυτό τον συμβολισμό η Εξ. 37-24 γράφεται σαν

$$\Delta t = \gamma\,\Delta t_0 \qquad \text{(διαστολή του χρόνου),}$$

που είναι ακριβώς η Εξ. 37-9, η εξίσωση διαστολής του χρόνου.

Συστολή του Μήκους

Θα θεωρήσουμε την Εξ. 1′ του Πίνακα 37-2,

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\,\Delta t). \tag{37-25}$$

Αν μια ράβδος κείτεται παράλληλα στους άξονες x και x' του Σχ. 37-9 και είναι σε ηρεμία στο σύστημα αναφοράς S', ένας παρατηρητής στο ίδιο σύστημα μπορεί να μετρήσει το μήκος της με την ησυχία του. Ένας τρόπος να το κάνει είναι να αφαιρέσει τις συντεταγμένες των ακραίων σημείων της ράβδου. Η τιμή του $\Delta x'$ που θα βρει θα είναι το μήκος ηρεμίας L_0 της ράβδου επειδή οι μετρήσεις πραγματοποιήθηκαν σε ένα σύστημα αναφοράς ως προς το οποίο η ράβδος βρίσκεται σε ηρεμία.

Έστω ότι η ράβδος κινείται στο σύστημα αναφοράς S. Αυτό σημαίνει ότι το Δx μπορεί να θεωρηθεί σαν το μήκος L της ράβδου στο σύστημα αναφοράς μόνο αν οι συντεταγμένες των ακραίων σημείων της ράβδου μετριούνται ταυτόχρονα, δηλαδή μόνο αν $\Delta t = 0$. Αν αντικαταστήσουμε τα $\Delta x' = L_0$, $\Delta t = L$ και $\Delta t = 0$ στην Εξ. 37-25 καταλήγουμε στην

$$L = \frac{L_0}{\gamma} \qquad \text{(συστολή του μήκους)} \tag{37-26}$$

που είναι ακριβώς η Εξ. 37-13, η εξίσωση της συστολής του μήκους.

Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-5

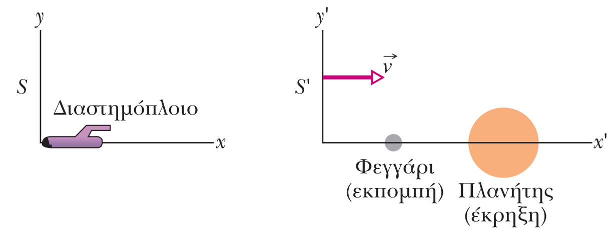
Ένα διαστημόπλοιο από τη Γη έχει αποστολή να ελέγξει ένα γήινο φυλάκιο στον πλανήτη P1407. Στο φεγγάρι αυτού του πλανήτη υπάρχει μια ομάδα μάχης των Ερπετοειδών, που πολύ συχνά γίνονται εχθρικοί. Καθώς το διαστημόπλοιο ακολουθεί ευθεία πορεία πρώτα προσπερνώντας τον πλανήτη και στη συνέχεια προσπερνώντας το φεγγάρι, ανιχνεύει μια δέσμη μικροκυμάτων υψηλής ενέργειας, που απέχει τη βάση των Ερπετοειδών. Κατόπιν μετά από 1.10s ανιχνεύει μια έκρηξη στο γήινο φυλάκιο, που απέχει 4.00×10^8 m από τη βάση των Ερπετοειδών, όπως αυτό μετριέται στο σύστημα αναφοράς του διαστημόπλοιου. Οι Ερπετοειδείς έχουν προφανώς επιτεθεί στο γήινο φυλάκιο και το διαστημόπλοιο αρχίζει να προετοιμάζεται για σύγκρουση μαζί τους.

(*α*) Η ταχύτητα του σκάφους σε σχέση με τον πλανήτη και το φεγγάρι του είναι 0.980*c*. Πόση είναι η απόσταση και το χρονικό διάστημα ανάμεσα στην εκπομπή της δέσμης και στην έκρηξη όπως αυτή μετρήθηκε στο σύστημα αναφοράς του πλανήτη - φεγγαριού (και φυσικά σύμφωνα με τους στρατιώτες των φυλακίων).

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ:

1. Το πρόβλημα αυτό αναφέρεται σε μετρήσεις οι οποίες πραγματοποιήθηκαν σε δύο συστήματα αναφοράς, στο σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού και στο σύστημα αναφοράς του διαστημόπλοιου.
2. Το πρόβλημα αναφέρεται σε δύο γεγονότα: στην εκπομπή της δέσμης μικροκυμάτων (γεγονός 1) και στην έκρηξη στο φυλάκιο (γεγονός 2).
3. Τα δεδομένα για τον χρόνο και την απόσταση ανάμεσα στα δύο γεγονότα όπως μετρήθηκαν στο σύστημα αναφοράς του διαστημόπλοιου χρειάζεται να τα μετατρέψουμε στα αντίστοιχα δεδομένα όπως αυτά μετρούνται στο σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού.

Σύστημα αναφοράς του διαστημόπλοιου: Πριν πραγματοποιήσουμε τον μετασχηματισμό θα πρέπει προσεκτικά να διαλέξουμε τους συμβολισμούς μας. Ξεκινάμε με μια σχηματική αναπαράσταση του προβλήματος όπως αυτή φαίνεται στο Σχ.37-10. Έχουμε επιλέξει το σύστημα αναφοράς του διαστημόπλοιου S να είναι ακίνητο και το σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού S' να κινείται με θετική ταχύτητα v (προς τα δεξιά). (Αυτό είναι τυχαία επιλογή· θα μπορούσαμε αντίθετα να έχουμε επιλέξει το σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού να είναι ακίνητο. Τότε στο Σχ. 37-10 θα συνδέαμε



ΣΧΗΜΑ 37-10 Ένας πλανήτης και το φεγγάρι του στο σύστημα αναφοράς S' κινούνται προς τα δεξιά με ταχύτητα v σε σχέση με το διαστημόπλοιο το οποίο βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς S.

την ταχύτητα $\vec{v}$ με το σύστημα αναφοράς S και η ταχύτητα θα αντιστοιχούσε σε κίνηση προς τα αριστερά. Σε αυτή την περίπτωση η ταχύτητα v θα ήταν αρνητική. Τα αποτελέσματα όμως τελικά θα ήταν τα ίδια.) Έστω ότι οι δείκτες e και b συμβολίζουν την έκρηξη και την εκπομπή της δέσμης αντίστοιχα. Τότε τα δεδομένα ως προς στο σύστημα αναφοράς του σκάφους (μη τονισμένο) θα είναι

$$\Delta x = x_e - x_b = +4.00 \times 10^8 \text{ m}$$

και

$$\Delta t = t_e - t_b = +1.10 \text{ s}.$$

όπου το Δx είναι μια θετική ποσότητα, διότι στην Εξ. 37-10 η συντεταγμένη x_e για την έκρηξη είναι μεγαλύτερη από τη συντεταγμένη x_b για την εκπομπή της δέσμης. Η ποσότητα Δt είναι επίσης θετική, διότι ο χρόνος t_e της έκρηξης είναι μεγαλύτερος (η έκρηξη συμβαίνει αργότερα) από τον χρόνο t_b εκπομπής της δέσμης.

Σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού: Ψάχνουμε τα $\Delta x'$ και $\Delta t'$, τα οποία θα πρέπει να υπολογίσουμε από τη μετατροπή των δεδομένων ως προς το σύστημα S στα αντίστοιχα δεδομένα ως προς το σύστημα S'. Επειδή μελετάμε ένα ζευγάρι γεγονότων θα επιλέξουμε το ένα σύνολο από τις εξισώσεις του Πίνακα 37-2 και συγκεκριμένα τις Εξ. 1 και 2.

$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - v\,\Delta t) \tag{37-27}$$

και

$$\Delta t' = \gamma\left(\Delta t - \frac{v\,\Delta x}{c^2}\right). \tag{37-28}$$

Εδώ, $v = +0.980c$ και ο συντελεστής Lorentz γ είναι

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-(+0.980c/c)^2}} = 5.0252.$$

Η Εξ. 37-27 μετατρέπεται στην

$$\Delta x' = (5.0252)[4.00 \times 10^8 \text{ m} - (+0.980\,c)(1.10 \text{ s})]$$
$$= 3.86 \times 10^8 \text{ m}, \qquad \text{(Απάντηση)}$$

και η Εξ. 37-28 μετατρέπεται στην

$$\Delta t' = (5.0252)\left[(1.10\,\text{s}) - \frac{(+0.980c)(4.00\times10^8\text{m})}{c^2}\right]$$
$$= -1.04\ \text{s}. \qquad \textit{(Απάντηση)}$$

(β) Ποιο είναι το φυσικό νόημα του αρνητικού πρόσημου στην τιμή του $\Delta t'$;

Συλλογισμός: Θα πρέπει να είμαστε συνεπείς με τον συμβολισμό που επιλέξαμε στο ερώτημα (α). Θυμηθείτε πώς αρχικά ορίσαμε το χρονικό διάστημα ανάμεσα στην εκπομπή και στην έκρηξη: $\Delta t = t_e - t_b = +1.10$ s. Για να παραμείνουμε συνεπείς με αυτή την επιλογή του συμβολισμού, ο ορισμός του $\Delta t'$ θα πρέπει να είναι $t'_e - t'_b$, επομένως έχουμε καταλήξει στο

$$\Delta t' = t'_e - t'_b = -1.04\ \text{s}.$$

Το αρνητικό πρόσημο σε αυτή τη σχέση μας δηλώνει ότι $t'_b > t'_e$, που σημαίνει ότι στο σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού η εκπομπή της δέσμης συνέβη 1.04 s *μετά* την έκρηξη, και όχι 1.10s *πριν* την έκρηξη όπως αυτό παρατηρήθηκε στο σύστημα αναφοράς του διαστημοπλοίου.

(γ) Οφείλεται η έκρηξη στην εκπομπή της δέσμης μικροκυμάτων ή το αντίθετο;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Η αλληλουχία των γεγονότων όπως αυτά μετριούνται στο σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού είναι αντίθετη από την αλληλουχία των γεγονότων όπως αυτά μετριούνται στο σύστημα αναφοράς του διαστημόπλοιου. Και στις δύο περιπτώσεις αν υπήρχε μια σχέση αιτίου – αποτελέσματος ανάμεσα στα δύο γεγονότα η πληροφορία θα έπρεπε να ταξιδέψει από τη θέση του ενός γεγονότος στη θέση του άλλου γεγονότος για να το δημιουργήσει.

Ελέγχοντας την ταχύτητα: Ας ελέγξουμε τώρα την ταχύτητα διάδοσης της πληροφορίας που απαιτείται στο συγκεκριμένο πρόβλημα. Στο σύστημα αναφοράς του διαστημοπλοίου η ταχύτητα αυτή είναι

$$v_{\text{info}} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{4.00\times10^8\ \text{m}}{1.10\ \text{s}} = 3.64\times10^8\ \text{m/s},$$

αλλά αυτή η ταχύτητα είναι αδύνατη επειδή ξεπερνά την ταχύτητα c του φωτός. Στο σύστημα αναφοράς του πλανήτη-φεγγαριού, η ταχύτητα διάδοση S της πληροφορίας υπολογίζεται ότι είναι 3.70×10^8 m/s, που επίσης είναι αδύνατη. Κατά συνέπεια κανένα από τα δύο γεγονότα δεν θα μπορούσε να είναι η αιτία του άλλου, που σημαίνει ότι τα δύο γεγονότα είναι άσχετα μεταξύ τους. Επομένως το διαστημόπλοιο δεν πρέπει να αντιμετώπισε με τους Ερπετοειδείς.

37-9 Η Σχετικότητα των Ταχυτήτων

Εδώ θα χρησιμοποιήσουμε τις εξισώσεις μετασχηματισμού του Lorentz για να συγκρίνουμε τις ταχύτητες τις οποίες θα μετρήσουν δύο ανεξάρτητοι παρατηρητές σε δύο διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς S και S' για το ίδιο κινούμενο σωματίδιο. Έστω ότι το S' κινείται με ταχύτητα v ως προς το S.

Θα θεωρήσουμε ότι το σωματίδιο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα παράλληλη στους άξονες x και x' όπως φαίνεται στο Σχ. 37-11, εκπέμπει δύο σήματα καθώς κινείται. Ο κάθε παρατηρητής μέτρα το χρονικό διάστημα και τη χωρική διαφορά ανάμεσα σε αυτά τα δύο γεγονότα. Αυτές οι τέσσερις μετρήσεις σχετίζονται με τις Εξ. 1 και 2 του Πίνακα 37-2,

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + v\,\Delta t')$$

και

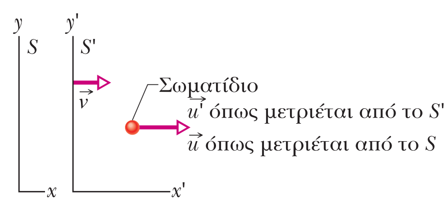
$$\Delta t = \gamma\left(\Delta t' + \frac{v\,\Delta x'}{c^2}\right).$$

Αν διαιρέσουμε την πρώτη από αυτές τις εξισώσεις με τη δεύτερη θα καταλήξουμε στην

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x' + v\,\Delta t'}{\Delta t' + v\,\Delta x'/c^2}.$$

Διαιρώντας τον αριθμητή και τον παρονομαστή της δεξιάς πλευράς με $\Delta t'$ βρίσκουμε ότι

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{\Delta x'/\Delta t' + v}{1 + v(\Delta x'/\Delta t')/c^2}.$$



ΣΧΗΜΑ 37-11 Το σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ ως προς το σύστημα αναφοράς S. Ένα σωματίδιο έχει ταχύτητα $\vec{u}'$ ως προς το σύστημα αναφοράς S' και ταχύτητα $\vec{u}$ ως προς το σύστημα αναφοράς S'.

Όμως στο διαφορικό όριο το $\Delta x/\Delta t$ είναι u, δηλαδή η ταχύτητα του σωματιδίου όπως αυτή μετριέται στο σύστημα αναφοράς S, και το $\Delta x'/\Delta t'$ είναι u', δηλαδή η ταχύτητα του σωματιδίου όπως αυτή μετριέται στο σύστημα αναφοράς S'. Τελικά καταλήγουμε στη σχέση

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \qquad \text{(σχετικιστικός μετασχηματισμός ταχυτήτων)} \qquad (37\text{-}29)$$

που είναι η εξίσωση του σχετικιστικού μετασχηματισμού ταχυτήτων. Όταν εφαρμόσουμε τον καθιερωμένο έλεγχο θέτοντας την ταχύτητα του φωτός $c \rightarrow \infty$ η εξίσωση αυτή εκφυλίζεται στην κλασική, ή αλλιώς Γαλιλαϊκή, εξίσωση μετασχηματισμού ταχυτήτων του Γαλιλαίου

$$u = u' + v \qquad \text{(κλασική εξίσωση μετασχηματισμού),} \qquad (37\text{-}30)$$

Με άλλα λόγια η Εξ. 37-29 ισχύει για όλες τις φυσικά δυνατές ταχύτητες, ενώ η Εξ. 37-30 ισχύει προσεγγιστικά για όλες τις ταχύτητες οι οποίες είναι σημαντικά μικρότερες από την ταχύτητα του φωτός c.

37-10 Το Φαινόμενο Doppler για το Φως

Στην Παρ. 17-9 μελετήσαμε το φαινόμενο Doppler (το οποίο σχετίζεται με μια αλλαγή στην παρατηρούμενη συχνότητα) για ηχητικά κύματα που ταξιδεύουν στον αέρα. Για αυτά τα κύματα το φαινόμενο Doppler εξαρτάται από δύο ταχύτητες: από την ταχύτητα της πηγής και την ταχύτητα του παρατηρητή ως προς τον αέρα. Ο αέρας είναι το μέσο στο οποίο διαδίδονται τα κύματα αυτά.

Η κατάσταση για τα φωτεινά κύματα είναι εντελώς διαφορετική, καθώς αυτά αλλά και τα υπόλοιπα ηλεκτρομαγνητικά κύματα δεν χρειάζονται μέσο για να διαδοθούν. Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα μπορούν και διαδίδονται χωρίς κανένα πρόβλημα ακόμα και στο κενό. Επομένως το φαινόμενο Doppler για τα φωτεινά κύματα εξαρτάται από μία μόνο ταχύτητα, τη σχετική ταχύτητα $\vec{v}$ ανάμεσα στον παρατηρητή και στην πηγή, όπως αυτή μετριέται στο σύστημα αναφοράς του ενός από τους δύο. Ας συμβολίσουμε με f_0 την **ιδιοσυχνότητα** της πηγής, δηλαδή τη συχνότητα η οποία μετριέται από έναν παρατηρητή ο οποίος βρίσκεται στο σύστημα ηρεμίας της πηγής. Έστω f η συχνότητα η οποία παρατηρείται από έναν παρατηρητή, ο οποίος κινείται με ταχύτητα $\vec{v}$ σε σχέση με αυτό το σύστημα ηρεμίας. Σε αυτή την περίπτωση αν η $\vec{v}$ αντιστοιχεί σε απομάκρυνση του σώματος από την πηγή, η f θα δίνεται από

$$f = f_0\sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}} \qquad \text{(η πηγή και ο παρατηρητής απομακρύνονται μεταξύ τους)} \qquad (37\text{-}31)$$

όπου $\beta = v/c$. Όταν η $\vec{v}$ αντιστοιχεί σε κίνηση του παρατηρητή προς την πηγή, στην Εξ. 37-31 θα πρέπει να αλλάξουμε τα πρόσημα μπροστά και στα δύο β.

Χαμηλής Ταχύτητας Φαινόμενο Doppler

Για ταχύτητες χαμηλές σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός ($\beta \ll 1$) η Εξ. 37-31 μπορεί να αναπτυχθεί σε σειρά ως προς το β και να προσεγγισθεί ως εξής

$$f = f_0(1 - \beta + \tfrac{1}{2}\beta^2) \qquad \text{(η πηγή και ο παρατηρητής απομακρύνονται μεταξύ τους, } \beta \ll 1\text{).} \qquad (37\text{-}32)$$

Η αντίστοιχη εξίσωση για το φαινόμενο Doppler των ηχητικών κυμάτων (ή για κάθε είδους κυμάτων εκτός από τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα) για χαμηλές ταχύτητες έχει τους ίδιους δύο πρώτους όρους αλλά διαφορετικό συντελεστή στο τρίτο όρο. Επομένως τα σχετικιστικά αποτελέσματα για πηγές φωτεινών κυμάτων (αλλά και παρατηρητές) που κινούνται με χαμηλές ταχύτητες εμφανίζονται μόνο στον όρο που περιέχει το β^2.

Η συσκευή ραντάρ της αστυνομίας χρησιμοποιεί το φαινόμενο Doppler με μικροκύματα για να μετρήσει την ταχύτητα v ενός αυτοκινήτου. Μια πηγή στη συσκευή του ραντάρ εκπέμπει μια δέσμη μικροκυμάτων συγκεκριμένης (ίδιο) συχνότητας f_0 κατά μήκος του δρόμου. Ένα αυτοκίνητο το οποίο κινείται προς το ραντάρ αναχαιτίζει τη δέσμη αλλά η συχνότητά της είναι λίγο μεγαλύτερη από τη f_0 λόγω της σχετικής κίνησης του αυτοκινήτου ως προς την πηγή και του φαινόμενου Doppler. Το αυτοκίνητο ανακλά τη δέσμη προς τη μονάδα του ραντάρ. Ένας δέκτης στη συσκευή του ραντάρ δέχεται την ανακλώμενη δέσμη αλλά επειδή το αυτοκίνητο κινείται ως προς το ραντάρ, η συχνότητα της δέσμης είναι ακόμα πιο μεγάλη. Η συσκευή του ραντάρ συγκρίνει την παρατηρούμενη συχνότητα με την ιδιοσυχνότητα f_0 και έτσι υπολογίζει την ταχύτητα του αυτοκινήτου.

Αστρονομικό Φαινόμενο Doppler

Σε αστρονομικές παρατηρήσεις αστέρων, γαλαξιών και άλλων πηγών φωτός, μπορούμε μετρώντας τη *μετατόπιση Doppler* του φωτός να υπολογίσουμε πόσο γρήγορα οι πηγές αυτές κινούνται, κατευθυνόμενες προς εμάς ή απομακρυνόμενες από μας. Αν ένα συγκεκριμένο άστρο βρίσκεται σε ηρεμία σε σχέση μ' εμάς, το φως το οποίο θα λάβουμε από αυτό, θα έχει μια συγκεκριμένη ιδιοσυχνότητα f_0. Όμως αν το άστρο κινείται απομακρυνόμενο από εμάς ή κατευθυνόμενο προς εμάς, τότε το φως το οποίο θα ανιχνεύσουμε θα έχει μια συχνότητα f η οποία θα είναι μετατοπισμένη ως προς τη f_0 εξαιτίας του φαινόμενου Doppler. Αυτή η μετατόπιση Doppler οφείλεται μόνο στην *ακτινική* κίνηση του άστρου (δηλαδή στην κίνησή του κατευθείαν προς εμάς ή κατευθείαν μακριά από εμάς). Μετρώντας λοιπόν αυτή τη μετατόπιση Doppler μπορούμε να υπολογίσουμε μόνο την *ακτινική ταχύτητα* v του άστρου, δηλαδή μόνο την ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας του άστρου ως προς εμάς.

Ας υποθέσουμε ότι ένα άστρο (ή οποιαδήποτε άλλη φωτεινή πηγή) απομακρύνεται από εμάς με ακτινική ταχύτητα v η οποία είναι αρκετά μικρή (δηλαδή το β είναι αρκετά μικρό) ώστε στην Εξ. 37-32 να θεωρήσουμε τον όρο β^2 αμελητέο. Τότε θα έχουμε

$$f = f_0(1 - \beta). \tag{37-33}$$

Επειδή οι αστρονομικές μετρήσεις που σχετίζονται με το φως πραγματοποιούνται με μήκη κύματος αντί για συχνότητες θα αντικαταστήσουμε τη συχνότητα f με τον όρο c/λ, και τη συχνότητα f_0 με τον όρο c/λ_0, όπου λ είναι το μετρούμενο μήκος κύματος και λ_0 είναι το ίδιο μήκος κύματος (δηλαδή το μήκος κύματος, το οποίο σχετίζεται με τη συχνότητα f_0). Από αυτά θα έχουμε

$$\frac{c}{\lambda} = \frac{c}{\lambda_0}(1 - \beta),$$

ή

$$\lambda = \lambda_0(1 - \beta)^{-1}. \tag{37-34}$$

Επειδή θεωρήσαμε ότι το β είναι μικρό, μπορούμε να αναπτύξουμε την παράσταση $(1 - \beta)^{-1}$ σε δυναμοσειρά, και να κρατήσουμε μόνο τον όρο στον οποίο το β είναι στην πρώτη δύναμη. Στην περίπτωση αυτή θα έχουμε

$$\lambda = \lambda_0(1 + \beta),$$

ή

$$\beta = \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}. \tag{37-35}$$

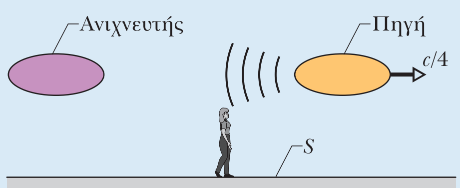
Αντικαθιστώντας το β με v/c και το $\lambda - \lambda_0$ με $|\Delta\lambda|$ οδηγούμαστε στην

$$v = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0} c \quad \text{(ακτινική ταχύτητα μιας φωτεινής πηγής, } v \ll c\text{).} \qquad (37\text{-}36)$$

Η διαφορά $\Delta\lambda$ ονομάζεται *μετατόπιση Doppler* του μήκος κύματος της φωτεινής πηγής. Υπολογίζουμε την απόλυτη τιμή της ώστε να έχουμε πάντα το μέτρο της μετατόπισης Doppler του μήκους κύματος.

Η Εξ. 37-36 είναι μια προσέγγιση που μπορεί να χρησιμοποιηθεί μόνο όταν $v \ll c$. Με αυτή την προϋπόθεση η Εξ. 37-36 μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στις δύο περιπτώσεις, είτε όταν η πηγή πλησιάζει είτε όταν απομακρύνεται από εμάς. Αν η πηγή απομακρύνεται από εμάς τότε το παρατηρούμενο λ είναι μεγαλύτερο από το λ_0, και συνεπώς το $\Delta\lambda$ είναι θετικό. Στην περίπτωση αυτή η μετατόπιση Doppler ονομάζεται *ερυθρά μετατόπιση*. (Ο όρος *ερυθρά* δεν σημαίνει ότι το παρατηρούμενο φως είναι κόκκινο ή ακόμα και ορατό. Απλά χρησιμοποιείται ως μνημονικός κανόνας, διότι το κόκκινο χρώμα έχει το *μεγαλύτερο* μήκος κύματος από όλα τα χρώματα του ορατού φάσματος. Επομένως το λ είναι μεγαλύτερο από το λ_0). Αν η φωτεινή πηγή μάς πλησιάζει, το λ είναι μικρότερο από το λ_0 και το $\Delta\lambda$ είναι αρνητικό. Στην περίπτωση αυτή η μετατόπιση Doppler ονομάζεται *κυανή μετατόπιση*.

ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 3 Το σχήμα δείχνει μια πηγή φωτός η οποία εκπέμπει φως ιδιοσυχνότητας f_0 ενώ κινείται, προς τα δεξιά, με ταχύτητα $c/4$ όπως αυτή μετριέται στο σύστημα αναφοράς. Το σχήμα επίσης δείχνει έναν ανιχνευτή φωτός ο οποίος μετρά τη συχνότητα του εκπεμπόμενου φωτός f, με $f > f_0$. (α) Ο ανιχνευτής κινείται προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά; (β) Η ταχύτητα του ανιχνευτή όπως αυτή μετριέται στο σύστημα αναφοράς S είναι μεγαλύτερη από $c/4$, μικρότερη από $c/4$ ή ίση με $c/4$;



Εγκάρσιο Φαινόμενο Doppler

Μέχρι στιγμής έχουμε μελετήσει το φαινόμενο Doppler και εδώ αλλά και στο κεφάλαιο 17, μόνο για την περίπτωση που η πηγή και ο παρατηρητής κινούνται πάνω στην ευθεία που τους συνδέει, είτε πλησιάζουν είτε απομακρύνονται. Στο Σχ. 37-12 παρουσιάζεται η περίπτωση ενός διαφορετικού προβλήματος, όπου η πηγή προσπερνάει έναν παρατηρητή D. Όταν η πηγή φτάσει στο σημείο P, η ταχύτητά της είναι κάθετη στην ευθεία που συνδέει τα P και D. Εκείνη ακριβώς τη στιγμή η πηγή ούτε απομακρύνεται αλλά ούτε και πλησιάζει τον παρατηρητή. Αν η πηγή εκπέμπει ηχητικά κύματα συχνότητας f_0 τότε για τα κύματα τα οποία εκπέμφθηκαν από το σημείο P ανιχνεύει ο παρατηρητής D αυτή τη συχνότητα (δηλαδή δεν υπάρχει φαινόμενο Doppler). Όμως αν η πηγή εκπέμπει φωτεινά κύματα, τότε ακόμα και σ' αυτή την περίπτωση υπάρχει φαινόμενο Doppler, το οποίο ονομάζεται **εγκάρσιο φαινόμενο Doppler**. Όταν η πηγή βρίσκεται στο σημείο P, η συχνότητα του φωτός που ανιχνεύεται είναι

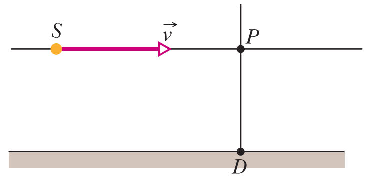
$$f = f_0 \sqrt{1 - \beta^2} \quad \text{(εγκάρσιο φαινόμενο Doppler)} \qquad (37\text{-}37)$$

Για χαμηλές ταχύτητες ($\beta \ll 1$) η Εξ. 37-37 μπορεί να αναπτυχθεί σε δυναμοσειρά του β και να προσεγγισθεί ως εξής:

$$f = f_0(1 - \tfrac{1}{2}\beta^2) \quad \text{(χαμηλές ταχύτητες)} \qquad (37\text{-}38)$$

Σε αυτή την εξίσωση ο πρώτος όρος είναι αυτός που θα περιμέναμε για τα ηχητικά κύματα. Και σε αυτή την περίπτωση οι σχετικιστικές διορθώσεις για τη συχνότητα μιας κινούμενης με χαμηλή ταχύτητα ($v \ll c$) φωτεινής πηγής ή ενός κινούμενου με χαμηλή ταχύτητα παρατηρητή εμφανίζονται στον όρο β^2.

Θεωρητικά ένα ραντάρ της αστυνομίας μπορεί να υπολογίσει την ταχύτητα ενός αυτοκίνητου ακόμα και στην περίπτωση που η δέσμη του ραντάρ είναι κάθετη στην τροχιά του αυτοκινήτου. Όμως η Εξ. 37-38 μας δηλώνει ότι επειδή το β είναι πολύ μικρό ακόμα και για ένα γρήγορο αυτοκίνητο, ο σχετικιστικός όρος $\beta^2/2$ στο εγκάρσιο φαινόμενο Doppler είναι εξαιρετικά μικρός. Επομένως μέσα στα όρια του πειραματικού σφάλματος $f \approx f_0$, και το ραντάρ υπολογίζει μηδενική ταχύτητα. Αυτός είναι ο λόγος για τον οποίο οι αστυνομικοί προσπαθούν πάντα να κατευθύνουν τη δέσμη του ραντάρ κατά μήκος της πορείας του αυτοκινήτου ώστε να μετρήσουν μια σημαντική μετατόπιση Doppler από την οποία θα υπολογίσουν την πραγματική ταχύτητα του αυτοκινήτου. Οποιαδήποτε απόκλιση από αυτόν τον προσανατολισμό ευνοεί τον οδηγό του αυτοκινήτου γιατί μειώνει τη μετρούμενη ταχύτητα.



ΣΧΗΜΑ 37-12 Μια φωτεινή πηγή κινείται με ταχύτητα καθώς προσπερνά έναν ανιχνευτή στο D. Η ειδική θεωρία της σχετικότητας προβλέπει εγκάρσιο φαινόμενο Doppler καθώς η πηγή περνά από το σημείο P, όπου η διεύθυνση της ταχύτητας είναι κάθετη στην ευθεία που ενώνει τα P και D. Αντίθετα η κλασική θεωρία δεν προβλέπει τέτοιο φαινόμενο.

Το εγκάρσιο φαινόμενο Doppler είναι στην πραγματικότητα ακόμα ένας έλεγχος της διαστολής του χρόνου. Αν ξαναγράψουμε την Εξ. 37-37 αντικαθιστώντας τη συχνότητα με την περίοδο της ταλάντωσης του εκπεμπόμενου φωτεινού κύματος από τη σχέση $T = 1/f$ θα έχουμε ότι

$$T = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \beta^2}} = \gamma T_0, \tag{37-39}$$

στην οποία T_0 $(= 1/f_0)$ είναι ή ιδιοπερίοδος της πηγής. Η σύγκριση των Εξ. 37-9 και 37-37 μας δείχνει ότι η Εξ. 37-37 είναι στην πραγματικότητα η εξίσωση της διαστολής του χρόνου καθώς η περίοδος δεν είναι τίποτα άλλο παρά η χρονική διάρκεια.

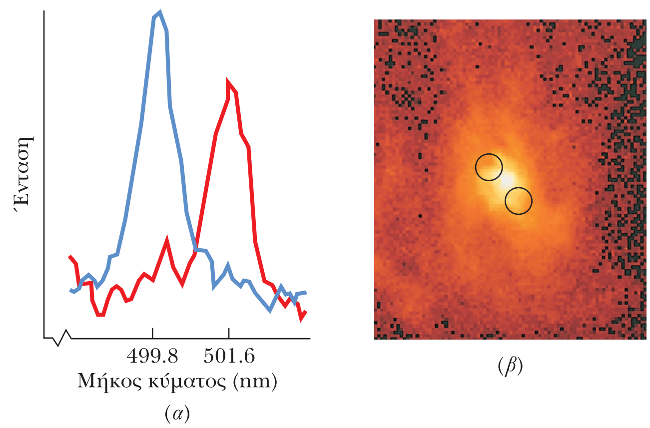
Το Σύστημα Εντοπισμού Θέσης NAVSTAR

Κάθε δορυφόρος NAVSTAR που συμμετέχει στο παγκόσμιο σύστημα εντοπισμού (GPS) συνεχώς ανακοινώνει τη θέση του εκπέμποντας ηλεκτρομαγνητικά σήματα σε συγκεκριμένη συχνότητα η οποία ρυθμίζεται από ένα ατομικό ρολόι ακριβείας. Όταν το σήμα αυτό συλλαμβάνεται από έναν δέκτη GPS, λόγου χάρη από ένα επιβατηγό αεροσκάφος, η συχνότητα του σήματος έχει μετατοπιστεί εξαιτίας του φαινόμενου Doppler λόγω της σχετικής κίνησης ανάμεσα στον δορυφόρο και στον δέκτη. Ο δέκτης ανιχνεύοντας ταυτόχρονα τα σήματα από αρκετούς διαφορετικούς δορυφόρους NAVSTAR, υπολογίζει τη διεύθυνση στην οποία βρίσκεται ο καθένας από αυτούς αλλά και τη διεύθυνση της ταχύτητάς τους. Από τη μετατόπιση Doppler του σήματος ο δέκτης υπολογίζει και την ταχύτητα του αεροσκάφους.

Αν και λόγω του φαινόμενου Doppler η σχετικιστική διόρθωση στη μετατόπιση της συχνότητας είναι εξαιρετικά μικρή (περίπου μόνο 4.5×10^{-10} της μετατόπισης οφείλεται στην ειδική θεωρία της σχετικότητας που μελετάμε σε αυτό το κεφάλαιο), οι μηχανικοί πρέπει να υπολογίσουν αυτή τη μετατόπιση, αν θέλουν τα αποτελέσματα του συστήματος NAVSTAR να είναι ακριβή. Επίσης θα πρέπει να λάβουν υπόψη τους τα αποτελέσματα της γενικής θεωρίας της σχετικότητας του Einstein καθώς η επιτάχυνση της βαρύτητας στο ύψος στο οποίο κινούνται οι δορυφόροι είναι διαφορετική από αυτήν ενός δέκτη που βρίσκεται στην επιφάνεια της Γης. Η ειδική και η γενική θεωρία της σχετικότητας του Einstein θεωρούνταν περίεργες για μεγάλο χρονικό διάστημα αφότου δημοσιεύτηκαν. Τώρα είναι αναντικατάστατες στο παγκόσμιο σύστημα εντοπισμού θέσης και μακράς πλοήγηση εμβέλειας .

Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-6

Το Σχ. 37-13*α* παρουσιάζει γραφικές παραστάσεις της έντασης ακτινοβολίας ως προς το μήκος κύματος του φωτός που φτάνει στη Γη από δύο περιοχές διαστρικού αερίου που βρίσκονται στα αντίθετα άκρα του γαλαξία M87 (Σχ. 37-13*β*). Η μία καμπύλη παρουσιάζει κορυφή στα 499.8 nm ενώ η δεύτερη καμπύλη στα 501.6 nm. Καθώς το αέριο περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του γαλαξία με ακτίνα $r = 100$ έτη φωτός, η μια άκρη του αερίου πλησιάζει προς εμάς ενώ την ίδια στιγμή η άλλη άκρη του απομακρύνεται από εμάς.



ΣΧΗΜΑ 37-13 (*α*) Οι γραφικές παραστάσεις της έντασης του φωτός ως προς το μήκος κύματος όπως παρατηρούνται στη Γη για φως το οποίο έχει εκπεμφθεί από τις αντίθετες άκρες του γαλαξία M87. (*β*) Η κεντρική περιοχή του Γαλαξία M87. Οι δύο κύκλοι δείχνουν τις θέσεις του αερίου του οποίου η ένταση του εκπεμπόμενου φωτός παρουσιάζεται στο (*α*). Ο πυρήνας του M87 είναι στο κέντρο ανάμεσα στους δύο κύκλους (*Η φωτογραφία είναι ευγενική προσφορά της NASA*).

(*α*) Ποια από τις δύο καμπύλες αντιστοιχεί στην περιοχή του αερίου που πλησιάζει προς εμάς; Πόση είναι η ταχύτητα του αερίου ως προς εμάς; (Αυτή είναι και η σχετική ταχύτητα του αερίου ως προς το κέντρο του γαλαξία.)

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ:

1. Αν το αέριο ήταν ακίνητο τότε το λαμβανόμενο και από τις δύο περιοχές φως του, θα είχε το ίδιο μήκος κύματος.
2. Η κίνηση του αερίου αλλάζει το παρατηρούμενο μήκος κύματος εξαιτίας του φαινόμενου Doppler. Έτσι η περιοχή του αερίου, που απομακρύνεται από μας εμφανίζεται να εκπέμπει φως αυξημένου μήκους κύματος, ενώ η περιοχή η οποία μας πλησιάζει εμφανίζεται να εκπέμπει φως μειωμένου μήκους κύματος.

Επομένως η καμπύλη η οποία παρουσιάζει μια κορυφή στα 501.6 nm απεικονίζει την ένταση του φωτός ως προς το μήκος κύματος για το φως το οποίο εκπέμφθηκε από την περιοχή του αερίου, που απομακρύνεται από μας, ενώ καμπύλη η οποία παρουσιάζει μια κορυφή στα 499.8 nm απεικονίζει την ένταση του φωτός ως προς το μήκος κύματος για το φως που εκπέμφθηκε από την περιοχή του αερίου, που πλησιάζει προς εμάς.

Υπολογισμοί: Ας υποθέσουμε ότι η αύξηση και η ελάττωση στο μήκος κύματος εξαιτίας της κίνησης του αερίου είναι ίσες κατά μέτρο. Επομένως το μη μετατοπισμένο μήκος κύματος το οποίο θα το θεωρήσουμε σαν το ίδιο μήκος κύματος λ_0, θα πρέπει να είναι ο μέσος όρος των δύο κορυφών των μετατοπισμένων μηκών κύματος:

$$\lambda_0 = \frac{501.6\text{ nm} + 499.8\text{ nm}}{2} = 500.7\text{ nm}.$$

Η μετατόπιση Doppler $\Delta\lambda$ για το φως που προέρχεται από την περιοχή του αερίου η οποία απομακρύνεται από μας είναι τότε

$$\Delta\lambda = |\lambda - \lambda_0| = 501.6\text{ nm} - 500.7\text{ nm} = 0.90\text{ nm}.$$

Αντικαθιστώντας αυτό το αποτέλεσμα και την τιμή $\lambda_0 = 500.7$ nm στην Εξ. 37-36, υπολογίζουμε ότι η ταχύτητα του αερίου είναι:

$$v = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} c = \frac{0.90\text{ nm}}{500.7\text{ nm}} 299\,792\,458\text{ m/s}$$

$$= 5.39 \times 10^5\text{ m/s}. \qquad \textit{(Απάντηση)}$$

(*β*) Το αέριο περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του γαλαξία εξαιτίας της βαρυτικής δύναμης που δέχονται τα μόριά του από τη μάζα M του κέντρου του γαλαξία. Πόσες φορές αυτή η μάζα είναι μεγαλύτερη από τη μάζα του Ήλιου M_S ($= 1.99 \times 10^{30}$ kg);

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ:

1. Από την Εξ. 13-1, το μέτρο F της βαρυτικής δύναμης που ασκείται σε ένα περιστρεφόμενο στοιχείο του αερίου μάζας m σε ακτίνα r είναι:
$$F = \frac{GMm}{r^2}.$$
2. Αν το στοιχείο του αερίου περιστρέφεται γύρω από το κέντρο του γαλαξία σε κυκλική τροχιά, τότε θα πρέπει να έχει μια κεντρομόλο επιτάχυνση μέτρου $a = v^2/r$, η οποία να κατευθύνεται κατευθείαν προς το κέντρο του γαλαξία.
3. Ο δεύτερος νόμος του Newton γραμμένος για ακτι-

νικό άξονα που ξεκινά από το κέντρο του γαλαξία μέχρι το στοιχείο του αερίου είναι $F = ma$.

Υπολογισμοί: Συνδυάζοντας τις τρεις προηγούμενες ιδέες καταλήγουμε στην εξίσωση:

$$\frac{GMm}{r^2} = m\frac{v^2}{r}.$$

Λύνοντας αυτή την εξίσωση ως προς τη μάζα M και αντικαθιστώντας τα δεδομένα που ξέρουμε βρίσκουμε ότι

$$\begin{aligned} M &= \frac{v^2 r}{G} \\ &= \frac{(5.39 \times 10^5\ \mathrm{m/s})^2(100\ \mathrm{ly})(9.46 \times 10^{15}\ \mathrm{m/ly})}{6.67 \times 10^{-11}\ \mathrm{N \cdot m^2/kg^2}} \\ &= 4.12 \times 10^{39}\ \mathrm{kg} = (2.1 \times 10^9)M_S. \qquad \textit{(Απάντηση)} \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα αυτό, που σε πρώτη ανάγνωση μας πληροφορεί ότι μάζα ισοδύναμη με δύο δισεκατομμύρια ήλιους έχει συμπιεστεί στο κέντρο αυτού του γαλαξία, μας δημιουργεί την έντονη υποψία ότι στο κέντρο αυτού του γαλαξία βρίσκεται μια πολύ μεγάλης μάζας μαύρη τρύπα.

Το τέρας του M87: Η μαύρη τρύπα που βρίσκεται στο κέντρο του γαλαξία M87 είναι περίπου χίλιες φορές μεγαλύτερη από την υπερμεγέθη μαύρη τρύπα που βρίσκεται στο κέντρο του γαλαξία μας (Ενδεικτικό Πρόβλημα 13-7) και είναι στην πραγματικότητα ένα τέρας. Περιστρέφεται γύρω από έναν άξονα και καθώς υλικό (άστρα και σκόνη) πέφτει μέσα της, το υλικό αυτό δημιουργεί ισχυρές ηλεκτρομαγνητικές δυνάμεις οι οποίες εκτοξεύουν κατά μήκος του άξονα περιστροφής της ηλεκτρόνια μακριά όχι μόνο από τη μαύρη τρύπα αλλά και από τον ίδιο το γαλαξία M87. Οι δυνάμεις αυτές είναι τόσο ισχυρές ώστε τελικά τα ηλεκτρόνια καταλήγουν να απομακρύνονται από τη μαύρη τρύπα με ταχύτητες σχεδόν ίσες με την ταχύτητα του φωτός. Η εικόνα στην αρχή του κεφαλαίου δείχνει τον πίδακα που είναι στραμμένος προς τη μεριά μας, ο πίδακας της απέναντι πλευράς είναι αόρατος.

37-11 Μια Νέα Ματιά στην Ορμή

Έστω ότι ένας αριθμός παρατηρητών, που ο καθένας βρίσκεται και σε διαφορετικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς παρατηρεί μια απομονωμένη σύγκρουση ανάμεσα σε δύο σωματίδια. Στην κλασική μηχανική έχουμε δει ότι –αν και οι παρατηρητές μετρούν διαφορετικές ταχύτητες για τα συγκρουόμενα σωματίδια– όλοι συμφωνούν ότι ο νόμος της διατήρησης της ορμής ισχύει. Αυτό σημαίνει ότι κάθε παρατηρητής μετρώντας την ολική ορμή του συστήματος των σωματιδίων μετά την κρούση βρίσκει ότι είναι η ίδια με την ολική ορμή του συστήματος των σωματιδίων πριν την κρούση.

Πώς αυτό το αποτέλεσμα επηρεάζεται από τη σχετικότητα; Βρίσκουμε ότι αν συνεχίσουμε να ορίζουμε την ορμή $\vec{p}$ ενός σωματίδιου σαν $m\vec{v}$, δηλαδή το γινόμενο της μάζας του επί την ταχύτητά του, η ολική ορμή δεν διατηρείται για τους παρατηρητές που ανήκουν σε διαφορετικά αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Στην περίπτωση αυτή έχουμε μόνο δύο επιλογές: 1) να δεχτούμε ότι ο νόμος διατήρησης της ορμής δεν ισχύει ή 2) να βρούμε έναν τρόπο ώστε να αλλάξουμε τον ορισμό της ορμής έτσι ώστε να εξακολουθεί να ισχύει ο νόμος της διατήρησής της. Η σωστή επιλογή είναι η δεύτερη.

Θα θεωρήσουμε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα v κατά τη θετική διεύθυνση του άξονα x. Στην κλασική μηχανική η ορμή του έχει μέτρο:

$$p = mv = m\frac{\Delta x}{\Delta t} \qquad \text{(κλασική μηχανική)} \tag{37-40}$$

στην οποία Δx είναι η απόσταση την οποία έχει διανύσει το σωματίδιο σε χρόνο Δt. Για να βρούμε μια σχετικιστική έκφραση για την ορμή θα ξεκινήσουμε από τον νέο ορισμό

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0}.$$

Εδώ όπως και πριν Δx είναι η απόσταση την οποία έχει διανύσει το σωματίδιο όπως αυτή μετριέται από έναν παρατηρητή που παρακολουθεί το σωματίδιο. Όμως ο χρόνος Δt_0 είναι ο χρόνος που απαιτείται για να διανυθεί αυτή η απόσταση, όχι όμως μετρημένος από τον παρατηρητή που έβλεπε το σωματίδιο αλλά από έναν άλλο παρατηρητή ο οποίος κινείται μαζί με το σωματίδιο. Το σωματίδιο βρίσκεται σε ηρεμία ως προς το δεύτερο παρατηρητή, επομένως αυτός ο μετρούμενος χρόνος είναι ο ιδιόχρονος της κίνησης.

Χρησιμοποιώντας την εξίσωση για τη διαστολή του χρόνου $\Delta t = \gamma\,\Delta t_0$ (Εξ. 37-9) μπορούμε να γράψουμε

$$p = m\frac{\Delta x}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\frac{\Delta t}{\Delta t_0} = m\frac{\Delta x}{\Delta t}\gamma.$$

Όμως επειδή $\Delta x/\Delta t$ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου v, έχουμε ότι

$$p = \gamma m v \qquad \text{(σχετικιστική ορμή)} \qquad (37\text{-}41)$$

Σημειώστε ότι αυτή η εξίσωση διαφέρει από τον κλασικό ορισμό της ορμής (Εξ. 37-40) μόνο κατά τον συντελεστή Lorentz γ. Όμως η διαφορά αυτή είναι πολύ σημαντική. Αντίθετα από την κλασική ορμή, η σχετικιστική ορμή τείνει στο άπειρο όταν η ταχύτητα v τείνει στην ταχύτητα του φωτός c.

Μπορούμε να γενικεύσουμε τον ορισμό της Εξ. 37-41, γράφοντάς τον σε διανυσματική μορφή

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} \qquad \text{(σχετικιστική ορμή)} \qquad (37\text{-}42)$$

Η εξίσωση αυτή δίνει τον σωστό ορισμό της ορμής για όλες τις ταχύτητες που είναι δυνατό να υπάρξουν στη φύση. Για ταχύτητα της οποίας το μέτρο είναι πολύ μικρότερο από την ταχύτητα του φωτός c, η Εξ. 37-42 εκφυλίζεται στον κλασικό ορισμό της ορμής ($\vec{p} = m\vec{v}$).

37-12 Μια Νέα Ματιά στην Ενέργεια

Ενέργεια Μάζας

Η επιστήμη της χημείας αρχικά αναπτύχθηκε στηριζόμενη στην αντίληψη ότι στις χημικές αντιδράσεις η μάζα και η ενέργεια διατηρούνται χωριστά. Το 1905, ο Einstein απέδειξε ότι από τη θεωρία του για την ειδική σχετικότητα προκύπτει ότι η μάζα μπορεί να θεωρηθεί μορφή ενέργειας. Συνεπώς ο νόμος διατήρησης της ενέργειας είναι στην πραγματικότητα ο νόμος διατήρησης της μάζας-ενέργειας.

Σε μια *χημική αντίδραση* (μια διαδικασία κατά την οποία άτομα ή μόρια αλληλεπιδρούν) το ποσό της μάζας το οποίο μετατρέπεται σε άλλα είδη ενέργειας (ή το αντίθετο) είναι ένα τόσο πολύ μικρό ποσοστό της συνολικής μάζας που λαμβάνει μέρος στην αντίδραση που δεν υπάρχει καμία περίπτωση να το μετρήσουμε ακόμα και με τις καλύτερες εργαστηριακές ζυγαριές. Η μάζα και η ενέργεια πραγματικά μοιάζουν να διατηρούνται ξεχωριστά. Όμως σε μια *πυρηνική αντίδραση*, (στην οποία οι πυρήνες των ατόμων ή τα στοιχειώδη σωματίδια αλληλεπιδρούν), η ενέργεια που απελευθερώνεται είναι σε πολλές περιπτώσεις περίπου ένα εκατομμύριο φορές μεγαλύτερη από την ενέργεια που απελευθερώνεται σε μια χημική αντίδραση, και κατά συνέπεια η αλλαγή στις μάζες μπορεί εύκολα να μετρηθεί. Εδώ και καιρό αποτελεί πια ρουτίνα ο υπολογισμός της συνεισφοράς της μετατροπής της μάζας σε ενέργεια και το αντίθετο στις πυρηνικές αντιδράσεις.

Η μάζα m ενός αντικειμένου και η ισοδύναμη ενέργειά του E_0 συνδέονται με τη σχέση

$$E_0 = mc^2. \tag{37-43}$$

Η σχέση αυτή χωρίς τον δείκτη 0 στην ενέργεια είναι η πιο γνωστή επιστημονική εξίσωση όλων των εποχών. Αυτή η ενέργεια η οποία συνδέεται με τη μάζα ενός αντικειμένου ονομάζεται **ενέργεια μάζας** ή **ενέργεια ηρεμίας**. Το δεύτερο όνομα υποδηλώνει ότι η E_0 είναι η ενέργεια την οποία έχει το αντικείμενο ακόμα και όταν βρίσκεται σε ηρεμία, εξαιτίας του γεγονότος πως έχει μάζα. (Αν συνεχίστε τη μελέτη της φυσικής και πέρα από αυτό το βιβλίο, θα συναντήσετε πολύ περισσότερες και πολύ πιο αναλυτικές συζητήσεις για τη σχέση ανάμεσα στη μάζα και στην ενέργεια. Μπορεί ακόμα να συναντήσετε και διαφωνίες για το τι ακριβώς είναι αυτή η σχέση και τι σημαίνει.)

Ο Πίνακας 37-3 μας δίνει (κατά προσέγγιση) τις τιμές της ενέργειας ηρεμίας ή ενέργειας μάζας μερικών αντικειμένων. Η ενέργεια ηρεμίας ενός σεντ του αμερικανικού δολαρίου είναι τεράστια, το ισοδύναμο ποσό ηλεκτρικής ενεργείας θα μπορούσε να κοστίσει περισσότερο από ένα εκατομμύριο δολάρια. Από την άλλη πλευρά η συνολική ηλεκτρική ενέργεια την οποία παράγουν σε ένα χρόνο οι Ηνωμένες Πολιτείες της Αμερικής αντιστοιχεί σε μια μάζα μόνο μερικών εκατοντάδων χιλιογράμμων ύλης (πέτρες, σουβλάκια ή οτιδήποτε άλλο).

Στην πράξη οι μονάδες του διεθνούς συστήματος SI σπάνια χρησιμοποιούνται στους υπολογισμούς της Εξ. 37-43, γιατί είναι τόσο μεγάλες που καταντούν άβολες. Οι μάζες συνήθως μετρώνται σε ατομικές μονάδες μάζας

$$1 \text{ u} = 1.660\,538\,86 \times 10^{-27} \text{ kg}, \tag{37-44}$$

και οι ενέργειες σε ηλεκτρονιοβόλτ ή σε πολλαπλάσιά του

$$1 \text{ eV} = 1.602\,176\,462 \times 10^{-19} \text{ J}. \tag{37-45}$$

Στις μονάδες των Εξ. 37-44 και 37-45, ο πολλαπλασιαστικός παράγοντας c^2 έχει τις τιμές:

$$\begin{aligned} c^2 &= 9.314\,940\,13 \times 10^8 \text{ eV/u} = 9.314\,940\,13 \times 10^5 \text{ keV/u} \\ &= 931.494\,013 \text{ MeV/u}. \end{aligned} \tag{37-46}$$

Ολική Ενέργεια

Η Εξ. 37-43, υπολογίζει για κάθε αντικείμενο την ενέργεια ηρεμίας E_0 η οποία αντιστοιχεί στη μάζα του αντικειμένου m, ανεξάρτητα αν το αντικείμενο αυτό είναι ακίνητο ή κινείται. Αν το αντικείμενο κινείται, τότε έχει επιπλέον ενέργεια με τη μορφή της

ΠΙΝΑΚΑΣ 37-3

Τα Ενεργειακά Ισοδύναμα Μερικών Αντικειμένων

Αντικείμενο	Μάζα (kg)	Ενεργειακό Ισοδύναμο	
Ηλεκτρόνιο	$\approx 9.11 \times 10^{-31}$	$\approx 8.19 \times 10^{-14}$ J	($\approx$ 511 keV)
Πρωτόνιο	$\approx 1.67 \times 10^{-27}$	$\approx 1.50 \times 10^{-10}$ J	($\approx$ 938 MeV)
Άτομο ουρανίου	$\approx 3.95 \times 10^{-25}$	$\approx 3.55 \times 10^{-8}$ J	($\approx$ 225 GeV)
Σωμάτιο σκόνης	$\approx 1 \times 10^{-13}$	$\approx 1 \times 10^{4}$ J	($\approx$ 2 kcal)
Σεντ αμερικανικού δολαρίου	$\approx 3.1 \times 10^{-3}$	$\approx 2.8 \times 10^{14}$ J	($\approx$ 78 GW·h)

κινητικής ενέργειας K. Αν υποθέσουμε ότι η δυναμική ενέργεια του αντικειμένου είναι μηδενική τότε η ολική ενέργειά του E θα είναι το άθροισμα της ενέργειας ηρεμίας του και της κινητικής ενέργειάς του.

$$E = E_0 + K = mc^2 + K. \tag{37-47}$$

Η ολική ενέργεια ενός αντικειμένου σε κίνηση μπορεί να γραφτεί ως εξής (σχέση χωρίς απόδειξη):

$$E = \gamma mc^2, \tag{37-48}$$

όπου γ είναι ο συντελεστής Lorentz τις κίνησης του σώματος.

Από το Κεφ. 7 και στη συνέχεια, έχουμε μελετήσει πολλά παραδείγματα στα οποία παρουσιάζονται αλλαγές στην ολική ενέργεια ενός σωματιδίου ή ενός συστήματος σωμάτων. Όμως στις αναλύσεις αυτές δεν συμπεριλάβαμε την ενέργεια μάζας γιατί σε αυτές τις περιπτώσεις οι μεταβολές της ενέργειας μάζας ήταν είτε μηδενικές, είτε πολύ μικρές ώστε να μετρηθούν και κατά συνέπεια μπορούσαμε να τις αγνοήσουμε. Ο νόμος της διατήρησης της *ολικής ενέργειας* ισχύει και στην περίπτωση κατά την οποία οι μεταβολές της ενέργειας μάζας είναι σημαντικές. Επομένως ανεξάρτητα από το τι συμβαίνει στην ενέργεια μάζας, ο παρακάτω νόμος που διατυπώθηκε και στην Παρ. 8-8 ισχύει ακόμα:

Η ολική ενέργεια E ενός *μονωμένου συστήματος* δεν μπορεί να αλλάξει.

Για παράδειγμα, αν η ολική ενέργεια μάζας δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων σε μονωμένο σύστημα μειώνεται, κάποιο άλλο είδος ενέργειας στο σύστημα θα πρέπει να αυξάνεται διότι η ολική ενέργεια του συστήματος δεν μπορεί να αλλάξει.

Σε ένα σύστημα στο οποίο εξελίσσεται μια χημική ή μια πυρηνική αντίδραση, η αλλαγή στην ολική ενέργεια μάζας του συστήματος εξαιτίας της αντίδρασης, συνήθως συμβολίζεται με το Q. Η τιμή του Q στην αντίδραση υπολογίζεται από τη σχέση:

$$\begin{pmatrix} \text{αρχική ολική ενέργεια} \\ \text{μάζας του συστήματος} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{τελική ολική ενέργεια} \\ \text{μάζας του συστήματος} \end{pmatrix} + Q$$

ή

$$E_{0i} = E_{0f} + Q. \tag{37-49}$$

Χρησιμοποιώντας την Εξ. 37-43 ($E_0 = mc^2$), μπορούμε να ξαναγράψουμε την Εξ. 37-49 ως προς την αρχική ολική ενέργεια μάζας M_i και την τελική ολική ενέργεια μάζας M_f ως εξής:

$$M_i c^2 = M_f c^2 + Q$$

ή

$$Q = M_i c^2 - M_f c^2 = -\Delta M\, c^2, \tag{37-50}$$

όπου η μεταβολή της μάζας εξαιτίας της αντίδρασης είναι $\Delta M = M_f - M_i$.

Αν το αποτέλεσμα μιας αντίδρασης είναι η μετατροπή ενός ποσού ενέργειας από ενέργεια μάζας των αντιδρώντων σε κινητική ενέργεια των προϊόντων της αντίδρασης, η ολική ενέργεια μάζας του συστήματος E_0 (επομένως και η ολική μάζα του συστήματος) μειώνεται και το Q είναι θετικό. Αν αντίθετα, μια αντίδραση για να πραγματοποιηθεί απαιτεί ότι ενέργεια θα πρέπει να μετατραπεί από μια άλλη μορφή σε ενέργεια μάζας, τότε η ολική ενέργεια μάζας του συστήματος E_0 (επομένως και η ολική μάζα του συστήματος) αυξάνεται και το Q είναι αρνητικό.

Για παράδειγμα ας υποθέσουμε ότι δύο πυρήνες υδρογόνου συμμετέχουν σε μια *αντίδραση σύντηξης*, κατά την οποία ενώνονται για να δημιουργήσουν ένα μόνο πυρήνα με ταυτόχρονη απελευθέρωση δύο σωματιδίων. Η ολική ενέργεια μάζας (και επομένως και η ολική μάζα) του παραγόμενου πυρήνα και των δύο απελευθερωμένων σωματιδίων είναι μικρότερη από την ολική ενέργεια μάζας (και την ολική μάζα) των δύο αρχικών πυρήνων υδρογόνου. Επομένως το Q της αντίδρασης σύντηξης είναι θετικό και τότε αναφερόμαστε σε ενέργεια που *απελευθερώνεται* (δηλαδή ενέργεια που μετατρέπεται από ενέργεια μάζας σε άλλη μορφή ενέργειας) κατά την αντίδραση. Αυτή η απελευθέρωση ενέργειας είναι σημαντική για μας, διότι η σύντηξη των πυρήνων υδρογόνου στον Ήλιο είναι μέρος της διαδικασίας που έχει τελικό αποτέλεσμα η ηλιακή ακτινοβολία να φτάνει στη Γη καθιστώντας δυνατή την ύπαρξη ζωής.

Κινητική Ενέργεια

Στο Κεφάλαιο 7 ορίσαμε την κινητική ενέργεια K ενός σώματος μάζας m που κινείται με ταχύτητα v η οποία είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός c ως εξής:

$$K = \tfrac{1}{2}mv^2. \tag{37-51}$$

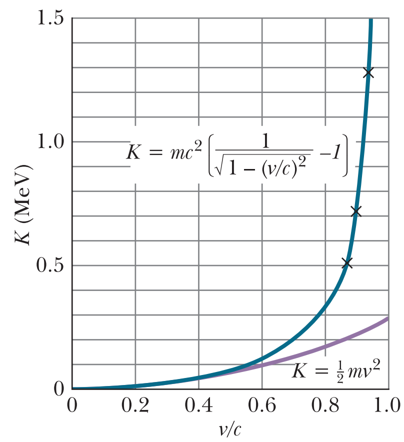
Όμως αυτή η εξίσωση της κλασικής φυσικής είναι απλώς μια προσέγγιση η οποία δίνει ικανοποιητικά αποτελέσματα μόνο όταν η ταχύτητα του σώματος είναι πολύ μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε μια σχέση για τη κινητική ενέργεια η οποία να είναι σωστή για *όλες* τις ταχύτητες που είναι δυνατό να πραγματοποιηθούν στη φύση, ακόμα και για ταχύτητες που είναι πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός c. Λύνοντας την Εξ. 37-47 για την κινητική ενέργεια K και μετά αντικαθιστώντας από την Εξ. 37-48 το E καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} K &= E - mc^2 = \gamma mc^2 - mc^2 \\ &= mc^2(\gamma - 1) \qquad \text{(κινητική ενέργεια)}. \end{aligned} \tag{37-52}$$

όπου $\gamma\,(= 1/\sqrt{1-(v/c)^2})$ είναι ο συντελεστής Lorentz για την κίνηση του σώματος.

Στο Σχ. 37-14 παρουσιάζονται γραφικές παραστάσεις της κινητικής ενέργειας ενός ηλεκτρονίου. Αυτές οι παραστάσεις σχεδιάστηκαν χρησιμοποιώντας τον σωστό ορισμό (Εξ. 37-52) αλλά και με την κλασική προσέγγιση (Εξ. 37-51), ως συνάρτηση του πηλίκου v/c, της ταχύτητας του σώματος ως προς την ταχύτητα του φωτός. Παρατηρήστε ότι στην αριστερή πλευρά του γραφήματος –στην περιοχή των χαμηλών ταχυτήτων σε σχέση με την ταχύτητα του φωτός– οι δύο γραφικές παραστάσεις συμπίπτουν. Στα προηγούμενα κεφάλαια δουλεύαμε πάντα σε αυτή την περιοχή. Σ' αυτή τη γραφική παράσταση η σύμπτωση των δύο καμπύλων στην περιοχή όπου οι τιμές του β είναι μικρές δικαιολογεί το γεγονός ότι μέχρι τώρα υπολογίζαμε την κινητική ενέργεια χρησιμοποιώντας την κλασική προσέγγιση της Εξ. 37-51 . Όμως στη δεξιά περιοχή του γραφήματος οι δύο γραφικές παραστάσεις διαφέρουν σημαντικά. Καθώς το πηλίκο v/c πλησιάζει την τιμή 1.0, οι τιμές της κινητικής ενέργειας που υπολογίζονται με τον κλασικό ορισμό αυξάνονται αρκετά αλλά η κινητική ενέργεια δεν απειρίζεται, ενώ οι τιμές της κινητικής ενέργειας που υπολογίζονται με τον σωστό ορισμό της κινητικής ενέργειας αυξάνονται δραματικά και η κινητική ενέργεια τείνει να απειριστεί όταν το πηλίκο v/c πλησιάζει την τιμή 1.0. Επομένως όταν το μέτρο της ταχύτητας ενός αντικειμένου πλησιάζει το μέτρο της ταχύτητας του φωτός c, *πρέπει απαραίτητα* να χρησιμοποιούμε την Εξ. 37-52 κατά τον υπολογισμό της κινητικής ενέργειας του σώματος.



ΣΧΗΜΑ 37-14 Απεικονίζεται η σχετικιστική (Εξ. 37-52) και η κλασική (Εξ. 37-51) εξίσωση ορισμού της κινητικής ενέργειας ενός ηλεκτρονίου ως συνάρτηση του πηλίκου v/c, δηλαδή της ταχύτητας του ηλεκτρονίου (v) προς την ταχύτητα του φωτός (c). Προσέξτε ότι οι δύο καμπύλες ταυτίζονται στην περιοχή όπου οι ταχύτητες είναι μικρές συγκριτικά με την ταχύτητα του φωτός, ενώ αποκλίνουν έντονα στην περιοχή όπου η ταχύτητα του σωματιδίου πλησιάζει στην ταχύτητα του φωτός. Η ίδια γραφική παράσταση δείχνει και πειραματικά δεδομένα της κινητικής ενέργειας σε σχέση με το v/c (αυτά τα σημεία σημειώνονται με x). Τα πειραματικά αυτά δεδομένα ταυτίζονται απόλυτα στην περιοχή των υψηλών ταχυτήτων με τη σχετικιστική καμπύλη, ενώ διαφέρουν σημαντικά στην ίδια περιοχή με την κλασική καμπύλη.

Το Σχ. 37-14 επίσης μας δίνει μια πληροφορία που σχετίζεται με το έργο που πρέπει να καταναλώσουμε σε ένα αντικείμενο για να αυξηθεί το μέτρο της ταχύτητάς του έστω κατά 1%. Το απαιτούμενο έργο W είναι ίσο με τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας ΔΚ του σώματος. Αν η μεταβολή αυτή συντελεσθεί στην αριστερή πλευρά του Σχ. 37-14, δηλαδή στην περιοχή των ταχυτήτων όπου το β παίρνει μικρές τιμές, το έργο που απαιτείται για αυτή τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας είναι σχετικά μικρό. Όμως αν η μεταβολή αυτή συντελεσθεί στην περιοχή των ταχυτήτων όπου το β παίρνει μεγάλες τιμές, δηλαδή στη δεξιά πλευρά του Σχ. 37-14, τότε το έργο που απαιτείται για αυτή τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας μπορεί να είναι τεράστιο, διότι όταν η ταχύτητα v του σώματος αυξάνεται, η κινητική ενέργεια K αυξάνεται πολύ γρήγορα. Για να επιταχύνουμε ένα σώμα μη μηδενικής ενέργειας ηρεμίας μέχρι την ταχύτητα του φωτός c θα πρέπει σύμφωνα με τη θεωρία της σχετικότητας να του προσφέρουμε άπειρη ποσότητα ενέργειας, κάτι που είναι αδύνατο.

Οι τιμές των κινητικών ενεργειών των ηλεκτρονίων, των πρωτονίων αλλά και των άλλων σωματιδίων συχνά μετριούνται σε ηλεκτρονιοβόλτ (eV) και στα πολλαπλάσιά του. Για παράδειγμα ένα ηλεκτρόνιο που έχει κινητική ενέργεια 20 MeV μπορεί να περιγραφεί σαν ένα 20 MeV ηλεκτρόνιο.

Ορμή και Κινητική Ενέργεια

Στην κλασική μηχανική η ορμή ενός σώματος p ορίζεται ως mv και η κινητική του ενέργεια ως $K = \frac{1}{2}mv^2$. Αν από τις δύο αυτές εξισώσεις απαλείψουμε την ταχύτητα του σωματιδίου v, βρίσκουμε μια απευθείας σχέση ανάμεσα στην ορμή και στην κινητική ενέργεια

$$p^2 = 2Km \qquad \text{(κλασική μηχανική).} \tag{37-53}$$

Και στη σχετικότητα μπορούμε να βρούμε μια παρόμοια σχέση, απαλείφοντας την ταχύτητα του σώματος v από την εξίσωση ορισμού της σχετικιστικής ορμής (Εξ. 37-41) και την εξίσωση ορισμού της σχετικιστικής κινητικής ενέργειας (Εξ. 37-52). Μετά την απαλοιφή και κάποιες αλγεβρικές πράξεις καταλήγουμε στην

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2. \tag{37-54}$$

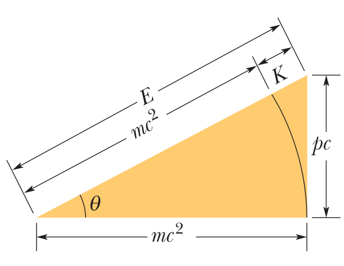
Με τη βοήθεια της Εξ. 37-47, μπορούμε να μετασχηματίσουμε την Εξ. 37-54 σε μια σχέση ανάμεσα στην ορμή p και στην ολική ενεργεία E ενός σωματιδίου:

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \tag{37-55}$$

Η εξίσωση αυτή μας θυμίζει το Πυθαγόρειο θεώρημα. Το ορθογώνιο τρίγωνο που αντιστοιχεί στο Σχ. 37-15 μπορεί να σε βοηθήσει να θυμάσαι εύκολα αυτές τις πολύ χρήσιμες σχέσεις. Μπορείς επίσης να αποδείξεις ότι σ' αυτό το τρίγωνο ισχύουν τα

$$\sin\theta = \beta \quad \text{και} \quad \cos\theta = 1/\gamma. \tag{37-56}$$

Από την Εξ. 37-55 παρατηρούμε ότι το γινόμενο pc έχει τις ίδιες μονάδες με την ενέργεια E. Επομένως μπορούμε να εκφράζουμε τη μονάδα της ορμής p ως μονάδα ενέργειας διαιρεμένης με την ταχύτητα του φωτός ή, συνήθως στη φυσική των στοιχειωδών σωματιδίων ως MeV/c ή GeV/c.



ΣΧΗΜΑ 37-15 Ένα χρήσιμο μνημονικό διάγραμμα για τις σχετικιστικές εξισώσεις ανάμεσα στην ολική ενέργεια E, την ενέργεια ηρεμίας ή ενέργεια μάζας mc^2, την κινητική ενέργεια K και το μέτρο της ορμής p.

ΣΗΜΕΙΟ ΚΑΤΑΝΟΗΣΗΣ 4 (α) Η κινητική ενέργεια και (β) η ολική ενέργεια ηλεκτρονίου 1GeV είναι μικρότερη, μεγαλύτερη ή ίση από την αντίστοιχη ενέργεια πρωτονίου 1 GeV;

Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-7

(α) Πόση είναι η ολική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου 2.53 MeV;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Από την Εξ. 37-47 η ολική ενέργεια ενός ηλεκτρονίου E είναι το άθροισμα της ενέργειας μάζας του (ή ενέργειας ηρεμίας) mc^2 και της κινητικής του ενέργειας:

$$E = mc^2 + K. \qquad (37\text{-}57)$$

Υπολογισμοί: Ο χαρακτηρισμός «2.53 MeV» στην εκφώνηση του προβλήματος σημαίνει ότι η κινητική ενέργεια του ηλεκτρονίου είναι 2.53 MeV. Για να υπολογίσουμε την ενέργεια μάζας του ηλεκτρονίου mc^2, αντικαθιστούμε τη μάζα του ηλεκτρονίου m από το Παράρτημα Β,

$$\begin{aligned} mc^2 &= (9.109 \times 10^{-31}\ \text{kg})(299\,792\,458\ \text{m/s})^2 \\ &= 8.187 \times 10^{-14}\ \text{J}. \end{aligned}$$

Στη συνέχεια διαιρώντας αυτό το αποτέλεσμα με το 1.602×10^{-13} J/MeV καταλήγουμε στη γνωστή τιμή των 0.511 MeV για την ενέργεια που αντιστοιχεί στη μάζα των ηλεκτρονίων (σε συμφωνία με τις τιμές του Πίνακα 37-3). Στη συνέχεια η Εξ. 37-57 μας δίνει:

$$E = 0.511\ \text{MeV} + 2.53\ \text{MeV} = 3.04\ \text{MeV}. \qquad \textit{(Απάντηση)}$$

(β) Πόσο είναι το μέτρο της ορμής p των ηλεκτρονίων, μετρημένο σε μονάδες MeV/c;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ: Μπορούμε να υπολογίσουμε το μέτρο της ορμής p από την ολική ενέργεια E και την ενέργεια μάζας mc^2 από την Εξ. 37-55.

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2.$$

Υπολογισμοί: Λύνοντας την εξίσωση αυτή ως προς pc βρίσκουμε ότι:

$$\begin{aligned} pc &= \sqrt{E^2 - (mc^2)^2} \\ &= \sqrt{(3.04\ \text{MeV})^2 - (0.511\ \text{MeV})^2} = 3.00\ \text{MeV}. \end{aligned}$$

Τελικά, διαιρώντας και τα δύο μέλη με την ταχύτητα του φωτός c καταλήγουμε στην:

$$p = 3.00\ \text{MeV}/c. \qquad \textit{(Απάντηση)}$$

Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-8

Το μεγαλύτερης ενέργειας πρωτόνιο που έχει ποτέ ανιχνευθεί στις κοσμικές ακτίνες που φθάνουν στη Γη από το διάστημα είχε την εκπληκτικά μεγάλη κινητική ενέργεια 3.0×10^{20} eV (το ποσό αυτό της ενέργειας είναι αρκετό για να ζεσταθεί ένα κουταλάκι νερού κατά μερικούς βαθμούς).

(α) Πόσος ήταν ο συντελεστής Lorentz γ του πρωτονίου και πόση ήταν η ταχύτητα του v, (και τα δύο μετρημένα ως προς έναν ακίνητο παρατηρητή στο έδαφος);

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ:

1. Ο συντελεστής Lorentz γ του πρωτονίου συσχετίζει την ολική ενέργειά του E με την ενέργεια μάζας του mc^2 μέσω της Εξ. 37-48 ($E = \gamma mc^2$).
2. Η ολική ενέργεια του πρωτονίου είναι το άθροισμα της ενέργειας μάζας του mc^2 και της δοσμένης κινητικής ενέργειάς του K.

Υπολογισμοί: Από τις δύο παραπάνω ιδέες έχουμε ότι:

$$\gamma = \frac{E}{mc^2} = \frac{mc^2 + K}{mc^2} = 1 + \frac{K}{mc^2}. \qquad (37\text{-}58)$$

Μπορούμε να υπολογίσουμε την ενέργεια μάζας του πρωτονίου mc^2 από τη μάζα του η οποία δίνεται στο Παράρτημα B, όπως κάναμε και για την περίπτωση του ηλεκτρονίου στο Ενδεικτικό Πρόβλημα 37-7α. Με αυτό τον τρόπο βρίσκουμε ότι η ενέργεια μάζας του πρωτονίου είναι 938 MeV (σε συμφωνία με την τιμή που δίνεται στον Πίνακα 37-3). Αντικαθιστώντας αυτήν την τιμή και τη δοσμένη κινητική ενέργεια στην Εξ. 37-58 καταλήγουμε στην

$$\begin{aligned} \gamma &= 1 + \frac{3.0 \times 10^{20}\ \text{eV}}{938 \times 10^{6}\ \text{eV}} \\ &= 3.198 \times 10^{11} \approx 3.2 \times 10^{11}. \qquad \textit{(Απάντηση)} \end{aligned}$$

Η τιμή αυτή στην οποία καταλήξαμε για το γ είναι τόσο μεγάλη ώστε δεν μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε τον ορισμό του γ (Εξ. 37-8) για να υπολογίσουμε την ταχύτητα v των σωματιδίων. Δοκιμάστε το αν θέλετε. Ο υπολογιστής τσέπης θα σας πει ότι το β είναι πρακτικά ίσο με το 1 και συνεπώς η v είναι πρακτικά ίση με ταχύτητα του φωτός c. Στην πραγματικότητα η v είναι σχεδόν ίση με την ταχύτητα του φωτός c, αλλά εμείς θέλουμε μια απάντηση μεγαλύτερης ακρίβειας, την οποία μπορούμε να έχουμε αν λύσουμε την Εξ. 37-8 πρώτα ως προς το $1 - \beta$. Στη συνέχεια μπορούμε να γράψουμε

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\beta^2}} = \frac{1}{\sqrt{(1-\beta)(1+\beta)}} \approx \frac{1}{\sqrt{2(1-\beta)}},$$

όπου χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι το β είναι τόσο κοντά στη μονάδα ώστε το $1 + \beta$ μπορεί πρακτικά να θεωρηθεί ότι είναι ίσο με το 2. Το μέτρο της ταχύτητας το οποίο ψάχνουμε βρίσκεται μέσα στον όρο $1 - \beta$. Λύνοντας ως προς τον όρο αυτό έχουμε

$$1 - \beta = \frac{1}{2\gamma^2} = \frac{1}{(2)(3.198 \times 10^{11})^2}$$
$$= 4.9 \times 10^{-24} \approx 5 \times 10^{-24}.$$

επομένως $\qquad \beta = 1 - 5 \times 10^{-24}$

και επειδή $v = \beta c$, το μέτρο της ταχύτητας του πρωτονίου θα είναι

$$v \approx 0.999\,999\,999\,999\,999\,999\,999\,995c. \qquad \textit{(Απάντηση)}$$

(β) Ας υποθέσουμε ότι το πρωτόνιο ταξιδεύει κατά μήκος μιας διαμέτρου (9.8×10^4 έτη φωτός) του Γαλαξία μας. Πόσο χρόνο κατά προσέγγιση χρειάστηκε το πρωτόνιο για να διανύσει αυτή τη διάμετρο του γαλαξία, όπως αυτός μετρήθηκε στο κοινό σύστημα αναφοράς της Γης και του Γαλαξία;

Λογική: Από το προηγούμενο ερώτημα είδαμε ότι αυτό το *υπερσχετικιστικό* πρωτόνιο ταξιδεύει με ταχύτητα η οποία είναι ελάχιστα μικρότερη από την ταχύτητα του φωτός c. Από τον ορισμό του έτους φωτός, το φως χρειάζεται ένα χρόνο για να ταξιδέψει απόσταση ίση με ένα έτος φωτός. Επομένως το φως χρειάζεται 9.8×10^4 έτη για να καλύψει ολόκληρη τη διάμετρο του Γαλαξία που έχει μήκος 9.8×10^4 έτη φωτός. Επειδή η ταχύτητα του πρωτονίου είναι πολύ κοντά στην ταχύτητα του φωτός c το πρωτόνιο στο κοινό σύστημα αναφοράς του Γαλαξία και της Γης θα χρειαστεί σχεδόν τον ίδιο χρόνο με το φως. Συνεπώς στο σύστημα αναφοράς της Γης και του γαλαξία ο χρόνος ταξιδιού του πρωτονίου θα είναι

$$\Delta t = 9.8 \times 10^4 \text{ y}. \qquad \textit{(Απάντηση)}$$

(γ) Πόσο χρόνο διαρκεί το ταξίδι του πρωτονίου όπως αυτός μετριέται στο σύστημα αναφοράς του πρωτονίου;

ΒΑΣΙΚΗ ΙΔΕΑ:

1. Το πρόβλημα περιέχει μετρήσεις που πραγματοποιούνται σε δύο αδρανειακά συστήματα αναφοράς: το ένα είναι το σύστημα αναφοράς Γης-Γαλαξία, ενώ το άλλο είναι ένα σύστημα αναφοράς συνδεδεμένο με το πρωτόνιο.
2. Το πρόβλημα αναφέρεται και σε δύο γεγονότα: το πρώτο γεγονός είναι το πέρασμα του πρωτονίου από τη μια άκρη της διαμέτρου του Γαλαξία ενώ το δεύτερο είναι το πέρασμα του πρωτονίου από την αντίθετη άκρη της διαμέτρου του Γαλαξία.
3. Το χρονικό διάστημα για τα δύο αυτά γεγονότα μετρημένο στο σύστημα αναφοράς του πρωτονίου είναι το ιδιοχρονικό διάστημα Δt_0, επειδή τα δύο γεγονότα πραγματοποιούνται στο ίδιο σημείο του συστήματος αναφοράς, που είναι το πρωτόνιο.
4. Μπορούμε να υπολογίσουμε το ιδιοχρονικό διάστημα Δt_0 αντικαθιστώντας το χρονικό διάστημα Δt που μετρήθηκε στο σύστημα αναφοράς Γης-Γαλαξία στην Εξ. 37-9 ($\Delta t = \gamma \Delta t_0$) για τη διαστολή του χρόνου.

Υπολογισμοί: Λύνοντας την Εξ. 37-9 για Δt_0 και αντικαθιστώντας το γ από το ερώτημα (α) και το Δt από το ερώτημα (β) καταλήγουμε στην

$$\Delta t_0 = \frac{\Delta t}{\gamma} = \frac{9.8 \times 10^4 \text{ y}}{3.198 \times 10^{11}}$$
$$= 3.06 \times 10^{-7} \text{ y} = 9.7 \text{ s}. \qquad \textit{(Απάντηση)}$$

Στο σύστημα αναφοράς μας, το ταξίδι του πρωτονίου διαρκεί 98000 χρόνια. Στο σύστημα αναφοράς του πρωτονίου το ταξίδι του διαρκεί 9.7 s. Όπως δηλώσαμε στην αρχή αυτού κεφαλαίου, η σχετική κίνηση μπορεί να αλλάξει τον ρυθμό με τον οποίο κυλάει ο χρόνος και το συγκεκριμένο πρόβλημα είναι ένα από τα πιο ακραία παραδείγματα αυτού του φαινομένου.

ΑΝΑΣΚΟΠΗΣΗ ΚΑΙ ΣΥΝΟΨΗ

Τα Αξιώματα Η **ειδική θεωρία της σχετικότητας** του Einstein βασίζεται στα παρακάτω δύο αξιώματα:

1. Οι νόμοι της φυσικής είναι οι ίδιοι για τους παρατηρητές που βρίσκονται σε οποιοδήποτε αδρανειακό σύστημα αναφοράς. Κανένα σύστημα αναφοράς δεν είναι προτιμητέο σε σχέση με κάποιο άλλο σύστημα αναφοράς.
2. Η ταχύτητα του φωτός στο κενό έχει την ίδια τιμή c σε όλες τις διευθύνσεις και σε όλα τα αδρανειακά συστήματα αναφοράς.

Η ταχύτητα του φωτός c στο κενό είναι ένα ανώτατο όριο ταχύτητας που δεν μπορεί να ξεπεραστεί από κανένα σώμα το οποίο μεταφέρει ενέργεια ή πληροφορία.

Συντεταγμένες ενός Γεγονότος Ένα **γεγονός** καθορίζεται από τρεις συντεταγμένες χώρου και μια συντεταγμένη χρόνου. Ένας στόχος της θεωρίας της ειδικής σχετικότητας είναι να συσχετίσει αυτές τις συντεταγμένες όπως αυτές ορίζονται από δύο παρατηρητές που βρίσκονται σε σχετική κίνηση ο ένας ως προς τον άλλο.

Ταυτόχρονα Γεγονότα Αν δύο παρατηρητές βρίσκονται σε σχετική κίνηση ο ένας ως προς τον άλλο, τότε γενικά δεν θα συμφωνούν αν δύο γεγονότα είναι ταυτόχρονα ή όχι. Αν ο ένας παρατηρητής βρίσκει ότι δύο γεγονότα που εξελίσσονται σε διαφορετικές θέσεις είναι ταυτόχρονα ο άλλος θα βρίσκει ότι δεν είναι, και αντιστρόφως. Το ταυτόχρονο δύο γεγονότων δεν είναι απόλυτη αντίληψη αλλά σχετική: εξαρτάται από την κίνηση του παρατηρητή. Η σχετικότητα του ταυτόχρονου είναι ένα επακόλουθο του πεπερασμένου της ταχύτητας του φωτός c.

Διαστολή του Χρόνου Αν δύο διαδοχικά γεγονότα συμβαίνουν στην ίδια θέση σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς, το χρονικό διάστημα Δt_0 ανάμεσά τους, το οποίο μετριέται από ένα μόνο ρολόι, που βρίσκεται στη θέση στην οποία αυτά τα γεγονότα συμβαίνουν, ονομάζεται **ιδιόχρονος**. *Παρατηρητές που βρίσκονται σε συστήματα αναφοράς τα οποία κινούνται σε σχέση με το σύστημα αναφοράς του ιδιόχρονου θα μετρήσουν μεγαλύτερη τιμή για το χρονικό διάστημα ανάμεσα σ' αυτά τα γεγονότα.* Για έναν παρατηρητή ο οποίος κινείται με σχετική ταχύτητα v, το χρονικό διάστημα που μετράει δίνεται από

$$\Delta t = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{\Delta t_0}{\sqrt{1-\beta^2}} = \gamma\,\Delta t_0 \quad \text{(διαστολή του χρόνου)} \quad (37\text{-}7 \text{ έως } 37\text{-}9)$$

Εδώ $\beta = v/c$ είναι η **παράμετρος ταχύτητας** και $\gamma = 1/\sqrt{1-\beta^2}$ είναι ο **συντελεστής Lorentz**. Σημαντικό αποτέλεσμα της διαστολής του χρόνου είναι ότι τα ρολόγια τα οποία κινούνται σε σχέση με έναν παρατηρητή δείχνουν ότι καθυστερούν σε σχέση με τα ρολόγια που ηρεμούν ως προς τον παρατηρητή.

Συστολή του Μήκους Το μήκος L_0 ενός αντικειμένου όπως αυτό μετριέται από έναν παρατηρητή που βρίσκεται σε αδρανειακό σύστημα αναφοράς στο οποίο το αντικείμενο ηρεμεί, ονομάζεται **ιδιομήκος**. *Παρατηρητές που βρίσκονται σε συστήματα αναφοράς τα οποία κινούνται σε σχέση με αυτό το σύστημα αναφοράς του ιδιομήκους και παράλληλα με αυτό το μήκος θα μετρήσουν μια μικρότερη τιμή για αυτό το μήκος.* Για έναν παρατηρητή ο οποίος κινείται με σχετική ταχύτητα v, το μήκος που μετράει δίνεται από

$$L = L_0\sqrt{1-\beta^2} = \frac{L_0}{\gamma} \quad \text{(συστολή του μήκους)} \quad (37\text{-}13)$$

Μετασχηματισμοί του Lorentz Οι *μετασχηματισμοί του Lorentz* συνδέουν τις χωροχρονικές συντεταγμένες ενός γεγονότος, όπως αυτές παρατηρούνται από παρατηρητές σε δύο αδρανειακά συστήματα S και S', όπου το S' κινείται ως προς το S με ταχύτητα v στη θετική κατεύθυνση του άξονα xx'. Οι τέσσερις συντεταγμένες συνδέονται μέσω των σχέσεων:

$$\begin{aligned} x' &= \gamma(x - vt), \\ y' &= y, \\ z' &= z, \\ t' &= \gamma(t - vx/c^2) \end{aligned} \qquad (37\text{-}21)$$

Η Σχετικότητα των Ταχυτήτων Όταν σε ένα αδρανειακό σύστημα αναφοράς ένα σωματίδιο κινείται με ταχύτητα u' κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα x' και το S' επίσης κινείται με ταχύτητα v παράλληλα με την κατεύθυνση x ενός δεύτερου συστήματος αναφοράς S, τότε η ταχύτητα u του σωματιδίου όπως μετριέται στο σύστημα αναφοράς S είναι

$$u = \frac{u' + v}{1 + u'v/c^2} \quad \text{(σχετικιστική πρόσθεση ταχυτήτων)} \quad (37\text{-}29)$$

Σχετικιστικό Φαινόμενο Doppler Αν μια πηγή εκπέμπει φωτεινά κύματα συχνότητας f_0 και απομακρύνεται από έναν παρατηρητή με σχετική ακτινική ταχύτητα v (και παράμετρο ταχύτητας $\beta = v/c$), η συχνότητα f την οποία μετράει ο παρατηρητής είναι

$$f = f_0\sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}. \qquad (37\text{-}31)$$

Αν η πηγή πλησιάζει κατευθείαν τον παρατηρητή, τα πρόσημα στην Εξ. 37-31 αντιστρέφονται.

Στην περίπτωση των αστρονομικών παρατηρήσεων, το φαινόμενο Doppler μετριέται σε μήκη κύματος. Για ταχύτητες πολύ μικρότερες από την ταχύτητα c του φωτός, η Εξ. 37-31 μετατρέπεται στην

$$v = \frac{|\Delta\lambda|}{\lambda_0}c, \qquad (37\text{-}36)$$

όπου $\Delta\lambda (= \lambda - \lambda_0)$ είναι η *μετατόπιση Doppler* στο μήκος κύματος εξαιτίας της κίνησης.

Εγκάρσιο Φαινόμενο Doppler Αν η σχετική κίνηση της φωτεινής πηγής είναι κάθετη στην ευθεία που συνδέει την πηγή και τον παρατηρητή, η συχνότητα Doppler δίνεται από τη σχέση

$$f = f_0\sqrt{1-\beta^2}. \qquad (37\text{-}37)$$

Το **εγκάρσιο φαινόμενο Doppler** οφείλεται στη διαστολή του χρόνου.

Ορμή και Ενέργεια Οι παρακάτω ορισμοί της γραμμικής ορμής $\vec{p}$, της κινητικής ενέργειας K, και της ολικής ενέργειας E για ένα σωματίδιο μάζας m ισχύουν για όλες τις ταχύτητες που είναι δυνατό να αποκτήσει ένα σώμα στη φύση:

$$\vec{p} = \gamma m\vec{v} \quad \text{(ορμή)}, \quad (37\text{-}42)$$

$$E = mc^2 + K = \gamma mc^2 \quad \text{(ολική ενέργεια)}, \quad (37\text{-}47, 37\text{-}48)$$

$$K = mc^2(\gamma - 1) \quad \text{(κινητική ενέργεια)} \quad (37\text{-}52)$$

Εδώ το γ είναι ο συντελεστής Lorentz για την κίνηση του σωματιδίου και mc^2 είναι η *ενέργεια μάζας* ή *ενέργεια ηρεμίας* που συνδέεται με τη μάζα του σωματιδίου. Αυτές οι εξισώσεις οδηγούν στις σχέσεις

$$(pc)^2 = K^2 + 2Kmc^2, \tag{37-54}$$

και

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2. \tag{37-55}$$

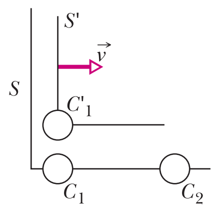
Όταν ένα σύστημα σωματιδίων συμμετέχει σε μια χημική ή σε μια πυρηνική αντίδραση, τότε το Q της αντίδρασης είναι το αντίθετο της μεταβολής της ολικής ενέργειας μάζας του συστήματος:

$$Q = M_i c^2 - M_f c^2 = -\Delta M\, c^2, \tag{37-50}$$

όπου M_i είναι η ολική μάζα του συστήματος πριν από την αντίδραση και M_f είναι η ολική μάζα του συστήματος μετά την αντίδραση.

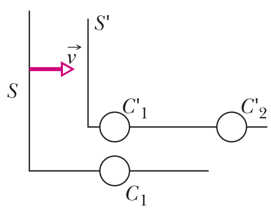
ΕΡΩΤΗΣΕΙΣ

1 Το Σχ. 37-16 παρουσιάζει δύο ρολόγια στο ακίνητο σύστημα αναφοράς S (τα οποία είναι σύγχρονισμένα σε αυτό το σύστημα αναφοράς) και ένα ρολόι στο κινούμενο σύστημα αναφοράς S'. Τα ρολόγια C_1 και C_1' δείχνουν μηδέν τη στιγμή που το ένα προσπερνάει το άλλο. Όταν τα ρολόγια C_1' και C_2 προσπερνούν το ένα το άλλο (α) ποιο από τα δύο ρολόγια δείχνει το μικρότερο χρόνο και (β) ποιο από τα δύο ρολόγια μετράει τον ιδιόχρονο;



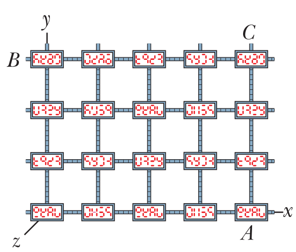
ΣΧΗΜΑ 37-16 Ερώτηση 1.

2 Το Σχ. 37-17 παρουσιάζει δύο ρολόγια στο ακίνητο σύστημα αναφοράς (τα οποία είναι συγχρονισμένα σε αυτό το σύστημα αναφοράς) και ένα ρολόι στο κινούμενο σύστημα αναφοράς. Τα ρολόγια C_1 και C_1' δείχνουν μηδέν τη στιγμή που το ένα προσπερνάει το άλλο. Όταν τα ρολόγια C_1 και C_2' προσπερνούν το ένα το άλλο (α) ποιο από τα δύο ρολόγια δείχνει το μικρότερο χρόνο και (β) ποιο από τα δύο ρολόγια μετράει τον ιδιόχρονο;



ΣΧΗΜΑ 37-17 Ερώτηση 2.

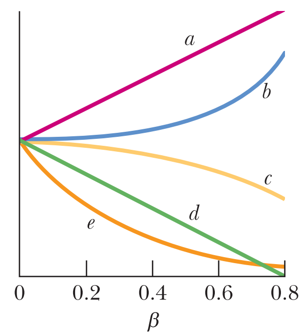
3 Το επίπεδο των ρολογιών και των ράβδων μέτρησης που παρουσιάζεται στο Σχ. 37-18 είναι παρόμοιο με αυτό του Σχ. 37-3. Τα ρολόγια κατά μήκος του άξονα x απέχουν (κέντρο με κέντρο) μεταξύ τους ένα δευτερόλεπτο φωτός, όπως και τα ρολόγια κατά μήκος του άξονα y. Όλα τα ρολόγια είναι συγχρονισμένα μέσω της διαδικασίας που περιγράφεται στην Παρ. 37-3. Όταν το αρχικό σήμα συγχρονισμού για $t = 0$ που έχει ξεκινήσει από την αρχή των αξόνων φθάνει (α) στο ρολόι A, (β) στο ρολόι B και (γ) στο ρολόι C σε ποια τιμή συγχρονίζονται αυτά τα ρολόγια; Ένα γεγονός συμβαίνει στο ρολόι A όταν αυτό δείχνει 10 s. (δ) Πόσο χρόνο χρειάστηκε το σήμα απ' αυτό το γεγονός για να ταξιδέψει σε έναν παρατηρητή που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων; (ε) Ποιο χρόνο θα αντιστοιχίσει ο παρατηρητής αυτός σε αυτό το γεγονός;



ΣΧΗΜΑ 37-18 Ερώτηση 3.

4 Ο Sam φεύγει από την Αφροδίτη με διαστημόπλοιο και καθώς κατευθύνεται προς τον Άρη προσπερνάει τη Sally η οποία βρίσκεται στη Γη με σχετική ταχύτητα 0.5 c. (α) Κάθε παρατηρητής μετρά τη χρονική διάρκεια του ταξιδιού Αφροδίτης-Άρη. Ποιος από τους δύο μετράει τον ιδιόχρονο του ταξιδιού; Ο Sam, η Sally ή μήπως κανείς από τους δύο; (β) Κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του ο Sam εκπέμπει ένα φωτεινό παλμό προς τον Άρη. Ο κάθε παρατηρητής μέτρα τη χρονική διάρκεια του ταξιδιού του φωτεινού παλμού από το διαστημόπλοιο μέχρι τον Άρη. Ποιος από τους δύο μετράει τον ιδιόχρονο του ταξιδιού του παλμού;

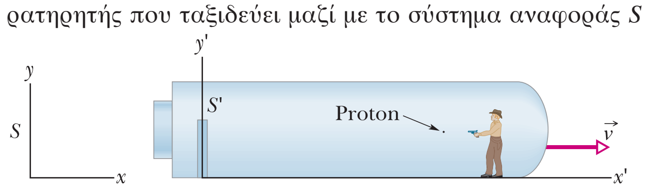
5 Μια ράβδος κινείται με σταθερή ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα x του συστήματος αναφοράς S. Η ράβδος είναι προσανατολισμένη με τέτοιο τρόπο ώστε το μήκος της να είναι παράλληλο στον άξονα x. Ένας παρατηρητής στο σύστημα S μετράει το μήκος L της ράβδου. Ποια από τις γραφικές παραστάσεις που παρουσιάζονται στο Σχ. 37-19 απεικονίζει καλύτερα το μήκος L (κατακόρυφος άξονας της γραφικής παράστασης) σε σχέση με την παράμετρο ταχύτητας β;



ΣΧΗΜΑ 37-19 Ερωτήσεις 5 και 7.

6 Το Σχ. 37-20 παρουσιάζει ένα διαστημόπλοιο (συνδεδεμένο με το σύστημα αναφοράς S') το οποίο μας προσπερνάει (καθώς στεκόμαστε στο σύστημα αναφοράς S). Ένα πρωτόνιο εκτοξεύεται με σχεδόν την ταχύτητα του φωτός κατά μήκος του διαστημόπλοιου, από το πίσω μέρος στο μπροστινό του. (α) Η χωρική διαφορά $\Delta x'$ ανάμεσα στο σημείο από όπου εκτοξεύτηκε το πρωτόνιο έως το σημείο που χτύπησε το πίσω τοίχωμα του σκάφους είναι θετική ή αρνητική; β) Η χρονική διαφορά $\Delta t'$ ανάμεσα στα δύο αυτά γεγονότα είναι θετική ή αρνητική;

7 Το σύστημα αναφοράς S' προσπερνά το σύστημα αναφοράς S με ταχύτητα v κατά μήκος της κοινής διεύθυνσης των αξόνων τους x' και x, όπως δείχνει το Σχ. 37-9. Ένας παρατηρητής που ταξιδεύει μαζί με το σύστημα αναφοράς S'

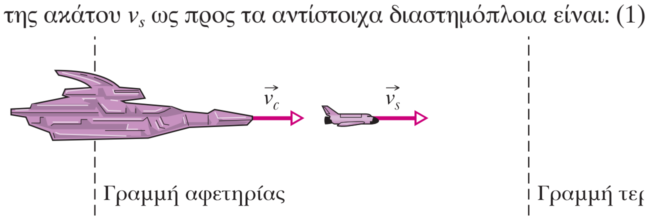


ΣΧΗΜΑ 37-20 Ερώτηση 6 και Πρόβλημα 64.

μετράει στο ρολόι χειρός του 25 s. Ποια από τις καμπύλες που φαίνονται στο Σχ. 37- 19 απεικονίζει καλύτερα το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt (κατακόρυφος άξονας της παράστασης) η οποία μετριέται από έναν παρατηρητή συνδεδεμένο με το σύστημα αναφοράς S, ως προς την παράμετρο ταχύτητας β;

8 Ενώ ταξιδεύετε με διαστημόπλοιο συλλαμβάνετε τα σήματα από 4 ακάτους που ταξιδεύουν στην ίδια διεύθυνση με το σκάφος σας και είτε κινούνται προς είτε μακριά από σας. Τα σήματα έχουν την ίδια κανονική συχνότητα f_0. Η ταχύτητα και η κατεύθυνση της κίνησης των ακάτων σε σχέση με σας είναι (α) 0.3 c προς εσάς, (β) 0.6 c προς εσάς (γ) 0.3 c μακριά από σας και (δ) 0.6 c μακριά από σας. Κατατάξτε τις ακάτους ανάλογα με τη συχνότητα των σημάτων τους με φθίνουσα σειρά.

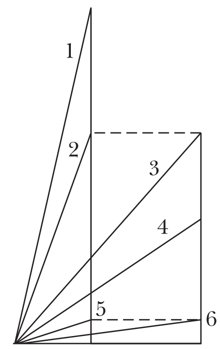
9 Το Σχ. 37-21 δείχνει ένα από τέσσερα διαστημόπλοια που συμμετέχουν σε αγώνα ταχύτητας. Καθώς το κάθε διαστημόπλοιο περνάει τη γραμμή εκκίνησης, μια διαστημική άκατος ξεκινά από το σκάφος και τρέχει προς τη γραμμή τερματισμού. Εσείς, ένας από τους κριτές του αγώνα, είστε ακίνητος σε σχέση με τη γραμμή εκκίνησης και τη γραμμή τερματισμού. Οι ταχύτητες v_c των διαστημοπλοίων ως προς εσάς και της ακάτου v_s ως προς τα αντίστοιχα διαστημόπλοια είναι: (1) 0.70 c, 0.40 c (2) 0.40 c, 0.70 c (3) 0.20 c, 0.90 c, (4) 0.50 c, 0.60 c. (α) Χωρίς να εκτελέσετε κανέναν γραπτό υπολογισμό, κατατάξτε τις ακάτους ανάλογα με τις ταχύτητές τους ως προς εσάς με φθίνουσα σειρά. (β) Επίσης χωρίς γραπτό υπολογισμό, κατατάξτε τις ακάτους σύμφωνα με την απόσταση ανάμεσα στη γραμμή εκκίνησης και στη γραμμή τερματισμού, όπως τη μετρούν οι πιλότοι τους, με φθίνουσα σειρά επίσης. (γ) Κάθε διαστημόπλοιο στέλνει ένα σήμα στην άκατό του με συγκεκριμένη συχνότητα f_0 όπως αυτή μετριέται από το διαστημόπλοιο. Επίσης χωρίς γραπτό υπολογισμό, κατατάξτε τις ακάτους ως προς τη συχνότητα την οποία ανιχνεύουν, με φθίνουσα σειρά επίσης.



ΣΧΗΜΑ 37-21 Ερώτηση 9.

10 Η ενέργεια ηρεμίας και η ολική ενέργεια, αντίστοιχα, τριών σωματιδίων, που εκφράζονται με τη βοήθεια μιας βασικής ποσότητας A, είναι: (1) A, $2A$, (2) A, $3A$ (3) $3A$, $4A$. Χωρίς να πραγματοποιήσετε κανένα γραπτό υπολογισμό κατατάξτε τα σωματίδια με φθίνουσα σειρά ως προς (α) τη μάζα τους, (β) την κινητική τους ενέργεια, (γ) τον συντελεστή Lorentz, και (δ) το μέτρο της ταχύτητάς τους.

11 Το Σχ. 37-22 παρουσιάζει το τρίγωνο του Σχ. 37-15 για έξι σωματίδια: οι πλάγιες γραμμές 2 και 4 έχουν το ίδιο μήκος. Κατατάξτε τα σωματίδια με φθίνουσα σειρά ως προς (α) τη μάζα τους, (β) το μέτρο της ορμής τους και (γ) τον συντελεστή Lorentz. (δ) Αναγνωρίστε ποια δύο σωματίδια έχουν την ίδια ολική ενέργεια. (ε) Κατατάξτε τα τρία χαμηλότερης ενέργειας σωματίδια ως προς την κινητική τους ενέργεια με φθίνουσα σειρά



ΣΧΗΜΑ 37-22 Ερώτηση 11.

ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΑ

• – ••• Το πλήθος των κουκκίδων δηλώνει το επίπεδο δυσκολίας του προβλήματος.

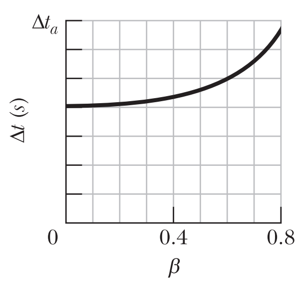
Παρ. 37-5 Η Σχετικότητα του Χρόνου

•1 Ο μέσος χρόνος ζωής ενός ακίνητου μιονίου έχει μετρηθεί ότι είναι 2.200 **μs**. Ο μέσος χρόνος ζωής ενός υψηλής ενέργειας μιονίου που ανιχνεύεται σε μια δέσμη κοσμικών ακτίνων όπως αυτές παρατηρούνται από τη Γη έχει μετρηθεί ότι είναι 16.000 **μs**. Να υπολογίσετε με πέντε σημαντικά ψηφία, την παράμετρο ταχύτητας β αυτών των μιονίων των κοσμικών ακτίνων σε σχέση με τη Γη.

•2 Να υπολογίσετε με οκτώ σημαντικά ψηφία την παράμετρο ταχύτητας β αν ο συντελεστής Lorentz γ είναι: (α) 1.0100000, (β) 10.000000, (γ) 100.00000 και (δ) 1000.0000.

••3 Ασταθές υψηλής ενέργειας σωματίδιο, εισέρχεται σε ανιχνευτή και αφήνει ίχνος μήκους 1.05 mm πριν διασπαστεί. Η ταχύτητά του ως προς τον ανιχνευτή ήταν 0.992c. Πόσος είναι ο ιδιόχρονός του; Δηλαδή για πόσο χρόνο θα υπήρχε το σωματίδιο πριν διασπαστεί μέσα στον ανιχνευτή αν το σωματίδιο ήταν ακίνητο ως προς τον ανιχνευτή;

••4 Το σύστημα αναφοράς ετοιμάζεται να προσπεράσει με ταχύτητα v το σύστημα αναφοράς S' κατά μήκος της κοινής διεύθυνσης των αξόνων τους x και x', όπως φαίνεται και στο Σχ. 37-9. Παρατηρητής που κινείται μαζί με το σύστημα αναφοράς S' σκοπεύει να μετρήσει ένα συγκεκριμένο χρονικό διάστημα με ρολόι χειρός. Το αντίστοιχο χρονικό διάστημα Δt θα μετρηθεί επίσης από παρατηρητή που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς. Στο Σχ. 37-23 παρουσιάζεται το Δt ως προς την παράμετρο ταχύτητας β για μεγάλο εύρος τιμών του β. Η κλίμακα του κατακόρυφου άξονα προσδιορίζεται με την τιμή $\Delta t_a = 14.0$ s. Πόσο είναι το χρονικό διάστημα Δt, αν η ταχύτητα είναι $v = 0.98c$;



ΣΧΗΜΑ 37-23 Πρόβλημα 4.

••5 Η υπόθεση του βιβλίου και των ταινιών της σειράς *Ο Πλανήτης των Πιθήκων* είναι ότι αστροναύτες ταξιδεύουν στο απώτερο μέλλον της Γης, σε μια εποχή όπου ο ανθρώπινος πολιτισμός έχει αντικατασταθεί με έναν πολιτισμό των πιθήκων. Δεχόμενοι μόνο τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας να υπολογίσετε πόσο μακριά στο μέλλον της Γης ένας αστροναύτης θα μπορούσε να φτάσει αν παρέμενε σε χειμέρια νάρκη 120 χρόνια ενώ ταξίδευε με σχετική ταχύτητα $v = 0.9990c$ ως προς τη Γη, αρχικά απομακρυνόμενος από τη Γη και στη συνέχεια πλησιάζοντας προς αυτή.

••6 *Επιστροφή στο μέλλον*: Υποθέστε ότι ένας πατέρας είναι 20.00 για χρόνια μεγαλύτερος από την κόρη του. Ο πατέρας αυτός θέλει να ταξιδέψει απομακρυνόμενος από τη Γη 2.000 χρόνια και μετά για να επιστρέψει προς τη Γη άλλα 2.000 χρόνια (και οι δύο χρονικές διαφορές όπως μετριούνται απ' αυτόν) έτσι ώστε όταν γυρίσει στη Γη να είναι 20.00 χρόνια *νεότερος* από την κόρη του. Με τι παράμετρο ταχύτητας β (ως προς τη Γη) θα πρέπει να ταξιδεύει για να το πετύχει;

••7 Θέλετε να πραγματοποιήσετε ένα ταξίδι μετ' επιστροφής στη Γη, ταξιδεύοντας σε ευθεία γραμμή με σταθερή ταχύτητα για ακριβώς έξι μήνες (χρονικό διάστημα όπως το μετράτε εσείς) και στη συνέχεια να επιστρέψετε στη Γη με την ίδια σταθερή ταχύτητα. Επίσης κατά την επιστροφή σας θέλετε να βρείτε τη Γη όπως θα είναι ακριβώς 1000 χρόνια μετά την αναχώρησή σας. (α) Να υπολογίσετε με οκτώ σημαντικά ψηφία, πόση θα πρέπει να είναι η παράμετρος ταχύτητας β κατά τη διάρκεια του ταξιδιού σας. (β) Το αποτέλεσμα εξαρτάται από το αν ταξιδεύετε σε ευθεία γραμμή;

Παρ. 37-6 Η Σχετικότητα του Μήκους

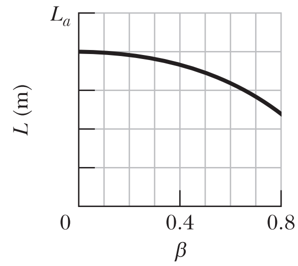
•8 Ράβδος μήκους ενός μέτρου που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς S' σχηματίζει γωνία 30° με τον άξονα x'. Αν αυτό το σύστημα αναφοράς κινείται παράλληλα στον άξονα x του συστήματος αναφοράς S με ταχύτητα $v = 0.90c$ ως προς το σύστημα αναφοράς S, ποιο είναι το μήκος της ράβδου που μετριέται στο S;

•9 Μια ράβδος κείτεται παράλληλα προς τον άξονα x του συστήματος αναφοράς S και κινείται κατά μήκος αυτού του άξονα με ταχύτητα $v = 0.630c$. Το μήκος ηρεμίας της ράβδου είναι 1.70 m. Πόσο είναι το μήκος της όπως αυτό μετριέται στο σύστημα αναφοράς S';

•10 Ηλεκτρόνιο με $\beta = 0.999987$ κινείται κατά μήκος του άξονα ενός κενού σωλήνα μήκους 3.00 m, όπως το μετράει ένας ακίνητος ως προς το εργαστήριο παρατηρητής S που βρίσκεται σε ηρεμία ως προς τον σωλήνα. Αντίθετα ένας παρατηρητής S' ακίνητος ως προς το ηλεκτρόνιο βλέπει ότι ο σωλήνας κινείται με ταχύτητα v ($= \beta c$). Πόσο θα είναι το μήκος του σωλήνα που μετρά ο παρατηρητής S';

•11 Διαστημόπλοιο μήκους ηρεμίας 130 m προσπερνά ένα σταθμό μέτρησης χρόνου με ταχύτητα $v = 0.740c$. (α) Πόσο είναι το μήκος του διαστημόπλοιου όπως αυτό μετριέται από έναν παρατηρητή στο σταθμό; (β) Πόσο χρονικό διάστημα μετρά το ρολόι του σταθμού ανάμεσα στο πέρασμα του μπροστινού και του πίσω άκρου του σκάφους από το σταθμό;

••12 Ράβδος κινείται με σταθερή ταχύτητα v κατά μήκος του άξονα x του συστήματος αναφοράς S. Ο άξονας της ράβδου είναι παράλληλος στον άξονα της κίνησης. Ένας παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς θέλει να μετρήσει το μήκος L της ράβδου. Το Σχ. 37-24 παρουσιάζει το μήκος L ως προς την παράμετρο ταχύτητας β για μεγάλο εύρος τιμών του β. Η κλίμακα του κατακόρυφου άξονα προσδιορίζεται από την τιμή $L_a = 1.0$ m. Αν $v = 0.95c$, πόσο είναι το μήκος L;



ΣΧΗΜΑ 37-24 Πρόβλημα 12.

••13 Το κέντρο του Γαλαξία μας βρίσκεται σε απόσταση περίπου 23000 έτη φωτός. α) Υπολογίστε με οκτώ σημαντικά ψηφία πόση πρέπει να είναι η παράμετρος ταχύτητας β για ένα σκάφος το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα και το οποίο σε ακριβώς 30 χρόνια (μετρημένα στο σύστημα αναφοράς του σκάφους) πρέπει να ταξιδέψει ακριβώς 23000 έτη φωτός (μετρημένα στο σύστημα αναφοράς του Γαλαξία). β) Πόσο διάστημα (σε έτη φωτός) διανύει το σκάφος κατά τη διάρκεια του ταξιδιού του, όπως θα το μετρήσει ένας παρατηρητής πάνω στο σκάφος;

••14 Αφού μετρηθεί το μήκος ενός διαστημόπλοιου, προκύπτει ότι είναι ακριβώς ίσο με το μισό του μήκους ηρεμίας του. (α) Να υπολογίσετε με τρία σημαντικά ψηφία πόση είναι η παράμετρος ταχύτητας β του διαστημόπλοιου σε σχέση με τον παρατηρητή που πραγματοποιεί τη μέτρηση. (β) Κατά ποιον παράγοντα τα ρολόγια του διαστημόπλοιου καθυστερούν σε σχέση με τα ρολόγια του συστήματος αναφοράς του παρατηρητή;

••15 Διαστημικός ταξιδιώτης απογειώνεται από τη Γη και κινείται με μια σταθερή ταχύτητα $v = 0.990c$ προς το άστρο Βέγα, το οποίο βρίσκεται 26.00 έτη φωτός μακριά. Πόσος χρόνος θα έχει περάσει σύμφωνα με τα ρολόγια της Γης όταν (α) ο ταξιδιώτης φτάσει στον Βέγα και (β) όταν οι παρατηρητές στη Γη λάβουν το μήνυμα του ταξιδιώτη ότι έφτασε στον Βέγα. (γ) Πόσο γερασμένος θα υπολογίσουν οι παρατηρητές στη Γη ότι είναι ο ταξιδιώτης (χρόνος μετρημένος στο σύστημα αναφοράς του) όταν αυτός θα φτάσει στον Βέγα σε σχέση με την ηλικία που είχε όταν ξεκίνησε το ταξίδι του;

Παρ. 37-8 Μερικές Συνέπειες των Εξισώσεων Lorentz

•16 Το αδρανειακό σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $v = 0.60c$ ως προς το σύστημα αναφοράς S (Σχ. 37-9). Επίσης δεχόμαστε ότι $x = x' = 0$ για $t = t' = 0$. Δύο γεγονότα καταγράφονται. Στο σύστημα αναφοράς το γεγονός 1 συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 0$ στην αρχή των αξόνων, ενώ το γεγονός 2 συμβαίνει τη χρονική στιγμή $t = 4.0\mu s$ σε ένα σημείο του άξονα x με συντεταγμένη $x = 3.0$ km. Σύμφωνα με τον παρατηρητή που βρίσκεται στο σύστημα S', πόσος είναι ο χρόνος στον οποίο συμβαίνουν (α) το γεγονός 1 και (β) το γεγονός 2; (γ) Οι δύο παρατηρητές αντιλαμβάνονται με την ίδια αλληλουχία τα δύο γεγονότα ή με αντίθετη;

•17 Ένας πειραματιστής κανονίζει ώστε να ανάψουν δύο φακοί ταυτόχρονα, παράγοντας μια μεγάλη λάμψη στην αρχή των αξόνων του συστήματος αναφοράς και μια μικρή λάμψη στη θέση $x = 30.0$ km. Ένας παρατηρητής που κινείται με ταχύτητα $0.250c$ κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα των x παρατηρεί τις λάμψεις. (α) Πόσο είναι η χρονικό διάστημα μεταξύ των δύο λάμψεων όπως το αντιλαμβάνεται ο κινούμενος παρατηρητής; (β) Ποια λάμψη βλέπει αυτός πρώτη;

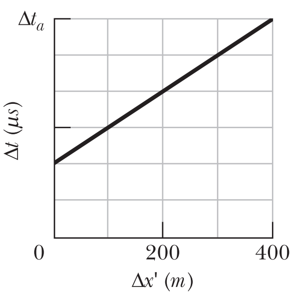
•18 Παρατηρητής S αναφέρει ότι ένα γεγονός συμβαίνει στον άξονα των x στο σύστημα αναφοράς του σε συντεταγμένες $x = 3.00 \times 10^8$ m και $t = 2.50$ s. Δεύτερος παρατηρητής S' βρίσκεται πάνω σε σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται κατά τη θετική κατεύθυνση του άξονα των x με ταχύτητα $v = 0.400c$. Επίσης όταν $t = t' = 0$, ισχύει $x = x' = 0$. Ποια είναι (α) χωρική και (β) χρονική συντεταγμένη του γεγονότος ως προς το σύστημα S'. Αν το σύστημα S' κινιόταν προς την *αρνητική* κατεύθυνση του άξονα των x, πόση θα ήταν τότε η (β) χωρική και (γ) χρονική συντεταγμένη του γεγονότος στο σύστημα αυτό;

•19 Στο Σχ. 37-9 οι αρχές των συντεταγμένων των δύο συστημάτων αναφοράς συμπίπτουν με $t = t' = 0$. Η σχετική ταχύτητα v ανάμεσα στα δύο συστήματα είναι $0.950c$. Δύο μικρομετεωρίτες συγκρούονται στις συντεταγμένες $x = 100$ km και $t = 200$ μs σύμφωνα με έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο σύστημα S. Ποιες είναι η (α) χωρική και (β) χρονική συντεταγμένη της σύγκρουσης στο σύστημα S';

••20 Ο τάρανδος Στριφτοκέρατος που είναι συνδεδεμένος με το αδρανειακό σύστημα S' σας προσπερνάει (ενώ εσείς είστε συνδεδεμένος με το σύστημα αναφοράς S) κινούμενος κατά μήκος της κοινής διεύθυνσης των αξόνων x και x' όπως φαίνεται στο Σχ. 37-9. Ο Στριφτοκέρατος μεταφέρει τρεις ράβδους μήκους ενός μέτρου η καθεμιά. Η πρώτη ράβδος είναι παράλληλη στον άξονα x', η δεύτερη είναι παράλληλη στον άξονα y' και η τρίτη είναι παράλληλη στον άξονα των z'. Με το ρολόι του μετράει 15.0 s τα οποία αντιστοιχούν σε 30.0 s δικά σας. Κατά τη διάρκεια της προσπέρασης συμβαίνουν δύο γεγονότα. Σύμφωνα με εσάς το πρώτο γεγονός συμβαίνει στις συντεταγμένες $x_1 = 33.0$ m και $t_1 = 22.0$ ns, ενώ το δεύτερο γεγονός συμβαίνει στις συντεταγμένες $x_2 = 53.0$ m και $t_2 = 62.0$ ns. Σύμφωνα με τις δικές σας μετρήσεις πόσο είναι το μήκος (α) της ράβδου 1, (β) της ράβδου 2 και (γ) της ράβδου 3; Σύμφωνα με τον Στριφτοκέρατο πόση είναι (δ) η χωρική απόσταση και (ε) το χρονικό διάστημα μεταξύ των 1 και 2 γεγονότων και ($\sigma\tau$) ποιο γεγονός συμβαίνει πρώτο;

••21 Ένα ρολόι κινείται κατά μήκος του άξονα των x με μια ταχύτητα $v = 0.600c$ και δείχνει $t = 0$ όταν περνά την αρχή των αξόνων. (α) Να υπολογιστεί ο συντελεστής Lorentz του ρολογιού και (β) η ένδειξή του καθώς το ρολόι περνά από τη συντεταγμένη $x = 180$ m.

••22 Όπως φαίνεται στο Σχ. 37-9 το σύστημα αναφοράς S', προσπερνά το σύστημα αναφοράς S με σταθερή ταχύτητα. Το χρονικό διάστημα μεταξύ των γεγονότων 1 και 2 είναι $\Delta t'$, όπως μετριέται από έναν παρατηρητή στο S'. Όμως, η απόστασή τους $\Delta x'$ δεν έχει προσδιοριστεί ακόμα. Στο Σχ. 37-25 φαίνεται το χρονικό διάστημα Δt μεταξύ των δύο γεγονότων στο σύστημα αναφοράς S ως συνάρτηση της $\Delta x'$ για ένα μεγάλο εύρος τιμών της $\Delta x'$. Η κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα προσδιορίζεται από την τιμή $\Delta t_a = 6.00$ μs. Ποιο είναι το $\Delta t'$;



ΣΧΗΜΑ 37-25 Πρόβλημα 22.

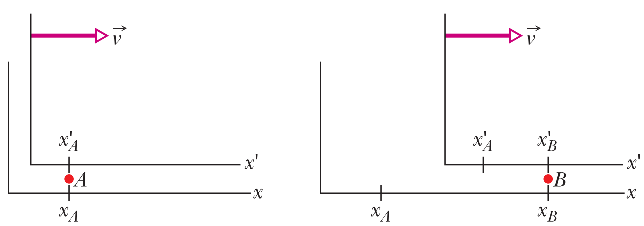
••23 Στο Σχ. 37-9 ένας παρατηρητής στο S ανιχνεύει δύο λάμψεις φωτός. Μια μεγάλη λάμψη φωτός συμβαίνει στο $x_1 = 1200$ m και 5.00 μs αργότερα μια δεύτερη λάμψη εμφανίζεται στο $x_2 = 480$ m. Ένας παρατηρητής στο S' βλέπει τις δύο λάμψεις να συμβαίνουν στο ίδιο σημείο με συντεταγμένη x'. (α) Πόση είναι η παράμετρος ταχύτητας β του παρατηρητή στο S'; (β) το S' κινείται προς τη θετική κατεύθυνση ή προς την αρνητική κατεύθυνση του άξονα x; (γ) Για τον παρατηρητή S' ποια από τις δύο λάμψεις συμβαίνει πρώτη; (δ) Πόσο είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στις λάμψεις;

••24 Στο Σχ. 37-9 ένας παρατηρητής στο S ανιχνεύει δύο λάμψεις φωτός. Μια μεγάλη λάμψη φωτός συμβαίνει στο $x_1 = 1200$ m και λίγο αργότερα μια δεύτερη λάμψη εμφανίζεται στο $x_2 = 480$ m. Το χρονικό διάστημα ανάμεσα στις δύο λάμψεις είναι $\Delta t = t_2 - t_1$. Πόση είναι η μικρότερη τιμή του Δt ώστε για έναν παρατηρητή στο S' οι δύο λάμψεις να συμβαίνουν στην ίδια συντεταγμένη x';

••25 *Σχετικιστική αντιστροφή των γεγονότων*. Στα Σχ. 37-26α και 37-26β παρουσιάζεται η συνήθης κατάσταση κατά την οποία ένα τονισμένο σύστημα αναφοράς προσπερνά ένα μη τονισμένο σύστημα αναφοράς, κατά μήκος της κοινής θετικής διεύθυνσης των αξόνων τους x και x', με σταθερή σχετική ταχύτητα μέτρου v. Βρισκόμαστε σε ηρεμία στο μη τονισμένο σύστημα αναφοράς ενώ ο Στριφτοκέρατος, που είναι ένας πανέξυπνος σπουδαστής της σχετικότητας, παρά το γεγονός ότι μεγάλωσε με κινούμενα σχέδια, βρίσκεται σε ηρεμία στο τονισμένο σύστημα αναφοράς. Στα σχήματα επίσης παρουσιάζονται τα γεγονότα A και B που συμβαίνουν στις παρακάτω χωροχρονικές συντεταγμένες όπως αυτές μετριούνται στο δικό μας μη τονισμένο σύστημα αναφοράς καθώς και στο τονισμένο σύστημα αναφοράς του Στριφτοκέρατου:

Γεγονός	Μη Τονισμένο Σύστημα	Τονισμένο Σύστημα
A	(x_A, t_A)	(x'_A, t'_A)
B	(x_B, t_B)	(x'_B, t'_B)

Στο σύστημα αναφοράς μας το γεγονός A συμβαίνει πριν από το γεγονός B, σε χρονικό διάστημα $\Delta t = t_B - t_A = 1.00$ μs και σε απόσταση μεταξύ τους $\Delta x = x_B - x_A = 400$ m. Έστω ότι $\Delta t'$ είναι το χρονικό διάστημα των γεγονότων όπως αυτά μετρούνται στο σύστημα του Στριφτοκέρατου. (α) Να βρείτε μια έκφραση για το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ ως συνάρτηση της παραμέτρου ταχύτητας β ($\beta = v/c$) και των



(α) Γεγονός A (β) Γεγονός B

ΣΧΗΜΑ 37-26 Προβλήματα 25, 26, 62 και 63.

δεδομένων στοιχείων. Να σχεδιάσετε το $\Delta t'$ ως συνάρτηση του β για τις παρακάτω δύο περιοχές τιμών του β:

(β) 0 έως 0.01 (η ταχύτητα v θεωρείται χαμηλή για την περιοχή από 0 έως 0.01 c)

(γ) 0.1 έως 1 (η ταχύτητα v θεωρείται υψηλή για την περιοχή από 0.1c έως το όριο ταχυτήτων c)

(δ) Για ποια τιμή του β είναι $\Delta t' = 0$; Για ποιες περιοχές τιμών του β είναι η αλληλουχία των γεγονότων A και B όπως την παρατηρεί ο Στριφτοκέρατος

(ε) ίδια με τη δική μας

($\sigma\tau$) αντίθετη από τη δική μας.

(ζ) Μπορεί το γεγονός A να είναι η αιτία του γεγονότος B ή το αντίθετο; Εξηγήστε την άποψή σας.

••26 Για τα κινούμενα συστήματα αναφοράς στο Σχ. 37-26, τα γεγονότα A και B συμβαίνουν στις παρακάτω χωροχρονικές συντεταγμένες: για το μη τονισμένο σύστημα αναφοράς στις (x_A, t_A) και (x_B, t_B) ενώ για το τονισμένο σύστημα αναφοράς στις (x'_A, t'_A) και (x'_B, t'_B). Στο μη τονισμένο σύστημα αναφοράς παρατηρούμε ότι $\Delta t = t_B - t_A = 1.00\ \mu s$ και $\Delta x = x_B - x_A = 400$ m. (α) Να βρεθεί μια έκφραση για το χρονικό διάστημα $\Delta x'$ ως συνάρτηση της παραμέτρου ταχύτητας β και των δεδομένων στοιχείων. Να σχεδιάσετε το $\Delta x'$ ως συνάρτηση του β για τις παρακάτω δύο περιοχές τιμών του β. (β) 0 έως 0.01 (γ) 0.1 έως 1. (δ) Για ποια τιμή της παραμέτρου ταχύτητας β η $\Delta x'$ είναι ελάχιστη και (ε) πόση είναι η ελάχιστη αυτή τιμή;

Παρ. 37-9 Η Σχετικότητα των Ταχυτήτων

•27 Μετρήθηκε ότι ο γαλαξίας A απομακρύνεται από εμάς με ταχύτητα $v = 0.35c$. Ο γαλαξίας B, που βρίσκεται ακριβώς στην αντίθετη διεύθυνση από τον A, επίσης μετρήθηκε ότι απομακρύνεται από εμάς με την ίδια ταχύτητα. Ένας παρατηρητής βρίσκεται σε ηρεμία στον γαλαξία A και μετράει την ταχύτητα σε μονάδες της ταχύτητας του φωτός c. Με πόση ταχύτητα μετράει (α) ότι ο δικός μας γαλαξίας απομακρύνεται από αυτόν και (β) ότι ο γαλαξίας B απομακρύνεται από αυτόν;

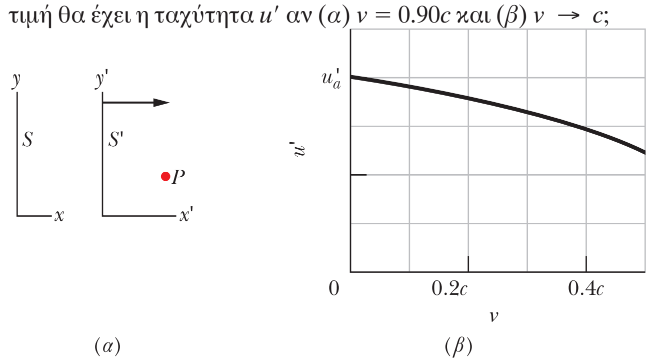
•28 Το αστρικό σύστημα Q_1 μετρήθηκε να απομακρύνεται από εμάς με ταχύτητα μέτρου $v_1 = 0.800c$. Το αστρικό σύστημα Q_2, το οποίο βρίσκεται στην ίδια κατεύθυνση αλλά πλησιέστερα από το Q_1 απομακρύνεται από εμάς με ταχύτητα $v_2 = 0.400c$. Πόση είναι η ταχύτητα του αστρικού συστήματος Q_2 σε μονάδες της ταχύτητας του φωτός c, όπως μετριέται από έναν παρατηρητή που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς του Q_1;

•29 Σωματίδιο κινείται κατά μήκος του άξονα των x' στο σύστημα αναφοράς S' με μια ταχύτητα $v = 0.40c$. Το σύστημα αναφοράς S' κινείται με ταχύτητα $u = 0.60c$ ως προς το σύστημα αναφοράς S. Πόση είναι η ταχύτητα του σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς S;

•30 Στο Σχ. 37-11, το σύστημα αναφοράς S' κινείται ως προς το σύστημα αναφοράς S, με ταχύτητα $v = 0.47c\hat{i}$, ενώ ένα σωματίδιο κινείται κατά μήκος των κοινών αξόνων x και x'. Παρατηρητής ο οποίος βρίσκεται συνδεδεμένος στο σύστημα αναφοράς S', μετρά ότι η ταχύτητα του σωματιδίου είναι $v_2 = 0.47c\hat{i}$. Πόση είναι η ταχύτητα του σωματιδίου, μετρημένη σε μονάδες της ταχύτητας του φωτός c, την οποία μετράει ένα παρατηρητής που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς S σύμφωνα (α) με τον σχετικιστικό και (β) με τον κλασικό μετασχηματισμό ταχυτήτων; Κατόπιν θεωρήστε ότι ο παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς S' μετρά ότι η ταχύτητα του σωματιδίου είναι $v_2 = -0.47c\hat{i}$. Σ' αυτή την περίπτωση πόση ταχύτητα μετράει ο παρατηρητής στο σύστημα αναφοράς S σύμφωνα (γ) με τον σχετικιστικό και (δ) με τον κλασικό μετασχηματισμό ταχυτήτων;

••31 Ένας στόλος από διαστημόπλοια που έχει μήκος 1.00 έτος φωτός (στο σύστημα ηρεμίας του) κινείται με ταχύτητα $u = 0.800c$ σε σχέση με έναν ακίνητο πλανητικό σταθμό στο σύστημα αναφοράς S. Ένας ταχυδρόμος ταξιδεύει από το πίσω μέρος του στόλου στο μπροστινό πηγαίνει με ταχύτητα $v = 0.950c$ μετρημένη στο σύστημα αναφοράς S. Πόσο διαρκεί το ταξίδι του ταχυδρόμου όπως αυτό μετριέται (α) στο σύστημα ηρεμίας του ταχυδρόμου (β) στο σύστημα ηρεμίας του στόλου και (γ) στο σύστημα του πλανητικού σταθμού S;

••32 Στο Σχ. 37-27α, το σωματίδιο P κινείται παράλληλα στους άξονες x και x' των συστημάτων αναφοράς S και S', με μια σταθερή ταχύτητα ως προς το σύστημα αναφοράς S. Το σύστημα αναφοράς S', κινείται παράλληλα στον άξονα x του συστήματος αναφοράς S με ταχύτητα v. Στο Σχ. 37-27β φαίνεται η ταχύτητα u' του σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς S' για μια περιοχή τιμών του v. Η κλίμακα στον κατακόρυφο άξονα προσδιορίζεται με την τιμή $u'_a = 0.800c$. Ποια τιμή θα έχει η ταχύτητα u' αν (α) $v = 0.90c$ και (β) $v \rightarrow c$;



ΣΧΗΜΑ 37-27 Πρόβλημα 32.

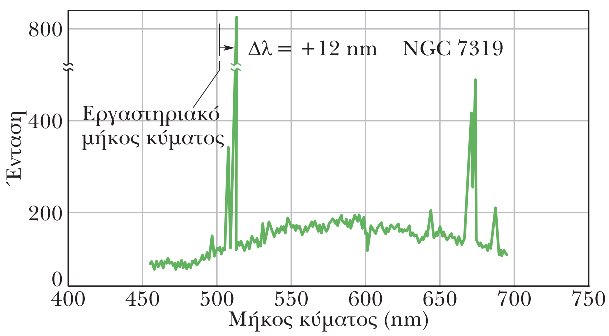
••33 Διαστημόπλοιο του οποίου το μήκος ηρεμίας είναι 350 m κινείται με ταχύτητα $v = 0.82c$ ως προς ορισμένο σύστημα αναφοράς. Μικρομετεωρίτης, που έχει επίσης την ίδια ταχύτητα v σε αυτό το σύστημα αναφοράς, προσπερνάει το διαστημόπλοιο κινούμενος με αντίθετη φορά. Πόσο χρόνο χρειάζεται αυτό το αντικείμενο για να προσπεράσει το σκάφος μετρημένο στο σύστημα αναφοράς του σκάφους;

Παρ. 37-10 Το Φαινόμενο Doppler για το Φως

•34 Μήκη κύματος στο φάσμα του φωτός που φτάνει σε εμάς από έναν γαλαξία που βρίσκεται στον αστερισμό της Παρθένου μετριούνται κατά 0.4% μεγαλύτερα από τα αντίστοιχα μήκη κύματος που παράγονται από γήινες πηγές. (α) Πόση είναι η ακτινική ταχύτητα του γαλαξία αυτού σε σχέση με τη Γη; (β) Πλησιάζει ή απομακρύνεται ο γαλαξίας αυτός από τη Γη;

•35 Δεχόμενοι ότι η Εξ. 37-36 ισχύει, να υπολογίσετε πόσο γρήγορα πρέπει να περάσετε με κόκκινο σε ένα φωτεινό σηματοδότη για να είναι πράσινος. Δεχτείτε ότι το μήκος κύματος του κόκκινου φωτός είναι 620 nm ενώ ότι το μήκος κύματος του πράσινου φωτός είναι 540 nm.

•36 Στο Σχ. 37-28 παρουσιάζεται η γραφική παράσταση της έντασης της ακτινοβολίας που φτάνει στη Γη από τον γαλαξία NGC7319 που βρίσκεται σε απόσταση περίπου 3×10^8 έτη φωτός μακριά μας ως προς το μήκος κύματός της. Η ακτινοβολία με τη μεγαλύτερη ένταση εκπέμπεται από το οξυγόνο που βρίσκεται στον γαλαξία αυτό. Στο εργαστήριο η εκπομπή αυτή πραγματοποιείται σε μήκος κύματος $\lambda = 513$ nm, αλλά στην ακτινοβολία που λαμβάνεται από τον γαλαξία NGC7319, έχει μετατοπιστεί σε μήκος κύματος $\lambda = 525$ nm λόγω του φαινόμενου Doppler (όλες οι εκπομπές από τον γαλαξία NGC7319 έχουν μετατοπιστεί λόγω του φαινόμενου αυτού). (α) Πόση είναι η ακτινική ταχύτητα του γαλαξία NGC7319 ως προς τη Γη; (β) Πλησιάζει ή απομακρύνεται ο γαλαξίας αυτός από τη Γη;



ΣΧΗΜΑ 37-28 Πρόβλημα 36.

•37 Ένα διαστημόπλοιο καθώς απομακρύνεται από τη Γη κινούμενο με ταχύτητα $v = 0.900c$, επικοινωνεί με τον πύργο ελέγχου εκπέμποντας σήματα με σταθερή συχνότητα (μετρημένη στο σύστημα αναφοράς του σκάφους) $f_0 = 100$ MHz. Σε ποια συχνότητα θα πρέπει να συντονιστούν οι γήινοι δέκτες ώστε να λάβουν τα σήματα του σκάφους;

•38 Φωτεινή πηγή νατρίου κινείται σε οριζόντιο κύκλο με σταθερή ταχύτητα μέτρου $v = 0.100c$, ενώ ταυτόχρονα εκπέμπει φως με ίδιο μήκος κύματος $\lambda_0 = 589.00$ nm. Το μήκος κύματος λ ανιχνεύεται από έναν δέκτη ο οποίος είναι ακίνητος στο κέντρο του κύκλου. Πόση είναι η μετατόπιση του μήκους κύματος $\lambda - \lambda_0$;

••39 Διαστημόπλοιο απομακρύνεται από τη Γη κινούμενο με ταχύτητα $v = 0.20c$. Φωτεινή πηγή στο πίσω μέρος του σκάφους εκπέμπει φως μήκους κύματος $\lambda = 450$ nm, όπως το μετράει ένας παρατηρητής που βρίσκεται επάνω στο σκάφος. (α) Πόσο μήκος κύματος και (β) ποιο χρώμα (μπλε, πράσινο, κίτρινο ή κόκκινο) ανιχνεύει ένας παρατηρητής που παρακολουθεί το σκάφος από τη Γη;

Παρ. 37-12 Μια Νέα Ματιά στην Ενέργεια

•40 Ποια είναι η ελάχιστη ενέργεια που απαιτείται για να διασπαστεί ο πυρήνας του ^{12}C (μάζας 11.99671 u) σε τρεις πυρήνες ^{4}He (μάζας 4.00151 u ο καθένας);

•41 Πόσο έργο απαιτείται να εκτελεσθεί για να αυξηθεί η ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου (α) από $0.18c$ σε $0.19c$ και (β) από $0.98c$ σε $0.99c$; Προσέξτε ότι και στις δύο περιπτώσεις η ταχύτητα του ηλεκτρονίου αυξήθηκε κατά $0.01c$.

•42 Στην αντίδραση $p + {}^{19}F \rightarrow \alpha + {}^{16}O$, οι μάζες είναι:

$m(p) = 1.007825$ u, $m(\alpha) = 4.002603$ u,
$m(F) = 18.998405$ u, $m(O) = 15.994915$ u.

Υπολογίστε την τιμή του Q για την αντίδραση αυτή.

•43 Η μάζα ενός ηλεκτρονίου είναι $9.109\,381\,88 \times 10^{-31}$ kg. Να υπολογίσετε με έξι σημαντικά ψηφία (α) τον συντελεστή Lorentz γ και (β) την παράμετρο ταχύτητας β για ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια $K = 100.000$ MeV.

•44 Πόσο έργο απαιτείται να εκτελεσθεί για να αυξηθεί η ταχύτητα ενός ηλεκτρονίου από την ηρεμία σε (α) $0.500c$, (β) $0.990c$, και (γ) $0.9990c$;

••45 Πόση πρέπει να είναι η ορμή ενός σωματιδίου με μάζα m ώστε η ολική ενέργειά του να είναι ακριβώς 3.00 φορές μεγαλύτερη από την ενέργεια ηρεμίας του;

••46 Η μάζα ενός ηλεκτρονίου είναι $9.109\,381\,88 \times 10^{-31}$ kg. Να υπολογίσετε με οκτώ σημαντικά ψηφία: (α) τον συντελεστή Lorentz γ και (β) την παράμετρο ταχύτητας β για ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια $K = 1.000\,000\,0$ keV, (γ) το γ (δ) και το β για ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια $K = 1.000\,000\,0$ MeV, (ε) το γ και ($\sigma\tau$) το β για ένα ηλεκτρόνιο με κινητική ενέργεια $K = 1.000\,000\,0$ GeV.

••47 Καθώς διαβάζετε αυτή τη σελίδα (σε χαρτί ή στην οθόνη ενός υπολογιστή) ένα πρωτόνιο κοσμικής ακτινοβολίας διαπερνά τη σελίδα από τα αριστερά προς τα δεξιά με σχετική ταχύτητα v και μια ολική ενέργεια $E = 14.24$ nJ. Σύμφωνα με τις μετρήσεις σας το πλάτος της σελίδας από τα αριστερά στα δεξιά είναι 21.0 cm. (α) Πόσο είναι το πλάτος της σελίδας στο σύστημα αναφοράς του πρωτονίου; Πόσο χρόνο χρειάστηκε το πρωτόνιο για να περάσει τη σελίδα στο (β) δικό σας σύστημα αναφοράς και (γ) στο σύστημα αναφοράς του πρωτονίου;

••48 (α) Η ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την έκρηξη ενός 1.00 mol TNT είναι 3.40 MJ. Η γραμμομοριακή μάζα της TNT είναι 0.227 kg/mol. Πόση μάζα από TNT απαιτείται για να απελευθερωθεί με έκρηξη ενέργεια $1{,}80 \times 10^{14}$ J; (β) Μπορείτε να μεταφέρετε αυτή την ποσότητα σε ένα σακίδιο ή είναι απαραίτητο φορτηγό ή τρένο; (γ) Υποθέστε ότι κατά την έκρηξη μιας ατομικής βόμβας σχάσης, το 0.080% της σχάσιμης μάζας μετατρέπεται σε ενέργεια που απελευθερώνεται. Πόση μάζα από σχάσιμο υλικό απαιτείται για να απελευθερωθεί με έκρηξη ενέργεια $1{,}80 \times 10^{14}$ J (δ) Μπορείτε να μεταφέρετε αυτή την ποσότητα σε ένα σακίδιο ή είναι απαραίτητο φορτηγό ή τρένο;

••49 Σωματίδιο μάζας m έχει ορμή μέτρου mc. Πόσο είναι τα (α) β, (β) γ και (γ) ο λόγος K/E_0;

••50 Πόσο είναι το β για ένα σωματίδιο με (α) $K = 2.00E_0$, και για (β) $E = 2.00E_0$;

••51 Τα κβάζαρς θεωρούνται ότι είναι πυρήνες ενεργών γαλαξιών κατά τα πρώτα στάδια του σχηματισμού τους. Ένα συνηθισμένο κβάζαρ ακτινοβολεί ενέργεια με ρυθμό 10^{41} W.

Με ποιο ρυθμό μειώνεται η μάζα του ώστε να διατηρείται σταθερή η παραγωγή της ακτινοβολίας; Η απάντησή σας να δοθεί σε ηλιακές μάζες ανά έτος, όπου μια ηλιακή μάζα (1 smu = 2.0×10^{30} kg) είναι η μάζα του ήλιου μας.

••52 (α) Αν m είναι η μάζα ενός σωματιδίου, p το μέτρο της ορμής του, και K η κινητική του ενέργεια να αποδείξετε ότι

$$m = \frac{(pc)^2 - K^2}{2Kc^2}.$$

(β) Για την περιοχή χαμηλών ταχυτήτων να αποδείξετε ότι το δεξιό μέρος της εξίσωσης εκφυλίζεται σε m. (γ) Αν ένα σωματίδιο έχει K = 55.0 MeV και p = 121 MeV/c, πόσος είναι ο λόγος m/m_e, δηλαδή της μάζας του σωματιδίου προς τη μάζα ενός ηλεκτρονίου;

••53 Ένα δισκίο ασπιρίνης 5.00 κόκκων έχει μάζα 320 mg. Για πόσα χιλιόμετρα μπορεί η ενέργεια η οποία αντιστοιχεί σε αυτή τη μάζα να κινεί ένα αυτοκίνητο; Δεχτείτε ότι το αυτοκίνητο καταναλώνει ένα L βενζίνης για κάθε 12.75 km, και ότι η ενέργεια που απελευθερώνεται κατά την καύση της βενζίνης που κινεί το αυτοκίνητο είναι 3.65×10^7 J/L.

••54 Όταν η κινητική ενέργεια είναι K = 10.00 MeV, υπολογίσετε με τέσσερα σημαντικά ψηφία (α) τον συντελεστή Lorentz γ και (β) την παράμετρο ταχύτητας β για ένα ηλεκτρόνιο (E_0 = 0.510998 MeV), (γ) το γ και (δ) το β για ένα πρωτόνιο E_0 = 0.510998 MeV) και (E_0 = 938.272 MeV), (ε) το γ και ($\sigma\tau$) το β για ένα σωματίδιο α (E_0 = 3.727.40MeV).

••55 Στην Παρ. 28-6, δείξαμε ότι ένα σωματίδιο με φορτίο q και μάζα m κινείται σε ένα κύκλο ακτίνας $r = mv/|q|B$, όταν η ταχύτητά του $\vec{v}$ είναι κάθετη σε ομογενές μαγνητικό πεδίο $\vec{B}$. Αποδείξαμε επίσης ότι η περίοδος T της κίνησης είναι ανεξάρτητη του μέτρου της ταχύτητας v. Αυτά τα δύο αποτελέσματα είναι κατά προσέγγιση σωστά, όταν $v \ll c$. Για σχετικιστικές ταχύτητες θα πρέπει να χρησιμοποιήσουμε τη σωστή εξίσωση για την ακτίνα που είναι:

$$r = \frac{p}{|q|B} = \frac{\gamma m v}{|q|B}.$$

(α) Χρησιμοποιώντας την παραπάνω εξίσωση και τον ορισμό της περιόδου ($T = 2\pi r/v$), να βρείτε τη σωστή σχέση για την περίοδο. (β) Είναι σε αυτή την περίπτωση η περίοδος T ανεξάρτητη του μέτρου της ταχύτητας v; Αν ένα ηλεκτρόνιο 10 MeV κινείται σε κυκλική τροχιά μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο έντασης 2.20 T, πόση είναι (γ) η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς σύμφωνα με τη σχέση του Κεφ. 28, (δ) πόση είναι η ακριβής τιμή της ακτίνας, (ε) πόση είναι η περίοδος της κυκλικής τροχιάς σύμφωνα με τη σχέση του Κεφ. 28 και $\sigma\tau$) πόση είναι η ακριβής τιμή της περιόδου;

••56 Η μάζα ενός μιονίου είναι 207 φορές μεγαλύτερη από τη μάζα του ηλεκτρονίου. Ο μέσος χρόνος ζωής ενός μιονίου όταν το μίονιο βρίσκεται σε ηρεμία είναι 2.20 μs. Σε ένα πείραμα μιόνια τα οποία κινούνται στο εσωτερικό ενός εργαστηρίου μετρήθηκαν να έχουν μέσο χρόνο ζωής 6.90 μs. Για τα κινούμενα μιόνια να υπολογιστούν (α) το β, (β) η K και (γ) η p (σε MeV/c).

••57 Από τη σύγκρουση υψηλής ενέργειας ανάμεσα σε ένα σωματίδιο κοσμικών ακτίνων και ένα άλλο σωματίδιο από τα ανώτερα ατμοσφαιρικά στρώματα της Γης (ετερόσφαιρα) 120 km από την επιφάνεια της θάλασσας, παράγεται ένα πιόνιο. Το πιόνιο έχει ολική ενέργεια $E = 1.35 \times 10^5$ MeV και ταξιδεύει κατακόρυφα προς την επιφάνεια της Γης. Στο σύστημα ηρεμίας του πιονίου, το πιόνιο διασπάται 35.0ns μετά τη δημιουργία του. Σε ποιο υψόμετρο πάνω από την επιφάνεια της θάλασσας, όπως μετριέται στο σύστημα αναφοράς της Γης συμβαίνει η διάσπαση του πιονίου; Η ενέργεια ηρεμίας του πιονίου είναι 139.6 MeV.

••58 Να εφαρμόσετε το διωνυμικό θεώρημα (Παράρτημα E) στο τελευταίο μέρος της Εξ. 37-52 για την κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου. (α) Κρατήσετε τους πρώτους δύο όρους της ανάπτυξης για να αποδείξετε ότι η κινητική ενέργεια μπορεί να γραφτεί ως εξής:

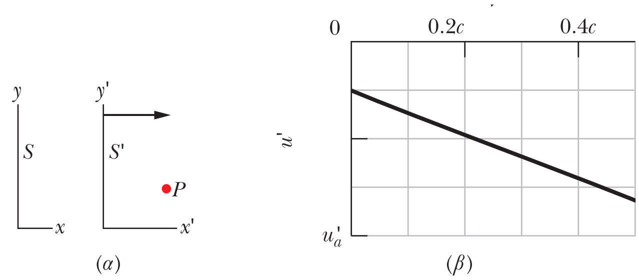
$$K = (\text{πρώτος όρος}) + (\text{δεύτερος όρος}).$$

Ο πρώτος όρος είναι η κλασική έκφραση για την κινητική ενέργεια. Ο δεύτερος όρος είναι η πρώτης τάξης διόρθωση στην κλασική εξίσωση. Ας υποθέσουμε ότι μελετάμε ένα ηλεκτρόνιο. Αν η ταχύτητά του είναι $c/20$ πόση είναι η τιμή της κινητικής ενέργειάς του (β) σύμφωνα με την κλασική εξίσωση και (γ) πόση είναι αυτή η τιμή αν συνυπολογίσουμε τη διόρθωση πρώτης τάξης. Αν η ταχύτητα του ηλεκτρονίου είναι $0.80c$, πόση είναι η τιμή της κινητικής ενέργειας (δ) σύμφωνα με την κλασική εξίσωση και (ε) πόση είναι αυτή η τιμή, αν συνυπολογίσουμε τη διόρθωση πρώτης τάξης; ($\sigma\tau$) Σε ποια τιμή της παραμέτρου ταχύτητας β η διόρθωση πρώτης τάξης της κινητικής ενέργειας φθάνει το 10% της κλασικής τιμής;

•••59 Σωματίδιο α με κινητική ενέργεια 7.70 MeV συγκρούεται με έναν πυρήνα ^{14}N που ηρεμεί. Από τη σύγκρουση παράγονται ένας πυρήνας ^{17}O και ένα πρωτόνιο. Το πρωτόνιο εκπέμπεται υπό γωνία 90° ως προς την κατεύθυνση του προσπίπτοντος σωματιδίου α και έχει κινητική ενέργεια 4.44 MeV. Οι μάζες των σωματιδίων είναι m(p) = 1.007825 u , m(^{14}N) = 14.00307 u, m(α) = 4.00260 u, m(^{17}O) = 16.99914 u. Να υπολογισθούν σε MeV (α) η κινητική ενέργεια του πυρήνα του οξυγόνου και (β) η τιμή του Q της αντίδρασης. (*Υπόδειξη*: τα μέτρα των ταχυτήτων των σωματιδίων είναι πολύ μικρότερα από την ταχύτητα του φωτός c).

Συμπληρωματικά Προβλήματα

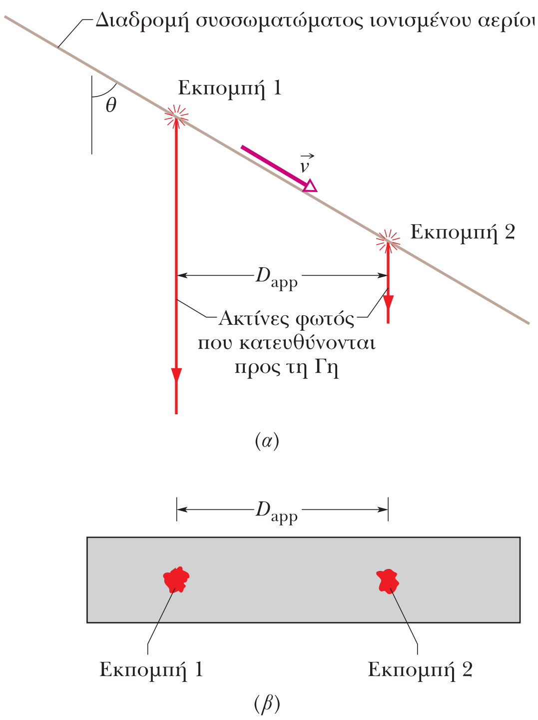
60 Στο Σχ. 37-29α το σωματίδιο P κινείται παράλληλα στους άξονες x και x' των συστημάτων αναφοράς S και S' με σταθερή ταχύτητα ως προς το σύστημα αναφοράς S. Το σύστημα αναφοράς S' κινείται παράλληλα προς τον άξονα x του συστήματος αναφοράς S με ταχύτητα v. Στο Σχ. 37-29β φαίνεται η ταχύτητα u' του σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς S' για μια περιοχή τιμών της v. Η κλίμακα στον κατακόρυφο



ΣΧΗΜΑ 37-29 Πρόβλημα 60.

άξονα προσδιορίζεται από την τιμή $u'_a = -0.800c$. Ποια τιμή θα έχει η u' αν (*α*) $v = 0.80c$ και (*β*) $v \rightarrow c$;

61 *Υπερφωτονικοί πίδακες.* Στο Σχ. 37-30*α* παρουσιάζεται η τροχιά την οποία ακολουθεί ένα συσσωμάτωμα σε πίδακα ιονισμένου αερίου το οποίο έχει εκτοξευθεί από ένα γαλαξία. Το συσσωμάτωμα ταξιδεύει με ταχύτητα $\vec{v}$ υπό γωνία θ ως προς την κατεύθυνση της Γης. Το συσσωμάτωμα κατά περιόδους εκπέμπει μια δέσμη φωτός η οποία τελικά ανιχνεύεται από έναν παρατηρητή στη Γη. Δύο από αυτές τις δέσμες παρουσιάζονται στο Σχ. 37-30*α*. Το χρονικό διάστημα ανάμεσα στις δύο δέσμες είναι t όπως αυτό μετριέται από ένα ακίνητο σύστημα αναφοράς κοντά στις εκπομπές αυτές. Το Σχ. 37-30*β* παρουσιάζει τις εκπομπές αυτές όπως θα ήταν αν είχαν φωτογραφηθεί στο ίδιο κομμάτι φιλμ, πρώτα όταν το φως από τη δέσμη 1 έφθασε στη Γη και μετά, αργότερα, όταν το φως από τη δέσμη 2 έφθασε στη Γη. Η φαινόμενη απόσταση D_{app} την οποία διανύει το συσσωμάτωμα μεταξύ δύο εκπομπών είναι η απόσταση κατά μήκος της διαδρομής του συσσωματώματος από την άποψη ενός γήινου παρατηρητή. Ο φαινόμενος χρόνος T_{app} ανάμεσα στις εκπομπές των δύο δεσμών είναι η διαφορά μεταξύ των χρονικών στιγμών που φθάνουν στη Γη οι δύο δέσμες. Η φαινόμενη ταχύτητα του σωματιδίου είναι τότε $V_{app} = D_{app}/T_{app}$. Να υπολογιστούν σε συνάρτηση με τα v, t και θ (*α*) η D_{app} (*β*) ο T_{app}. (*γ*) Να υπολογισθεί η V_{app} για $v = 0.980c$ και $\theta = 30.0°$. Όταν υπερφωτονικοί (που φαινομενικά κινούνται με ταχύτητα μεγαλύτερη από την ταχύτητα του φωτός) πίδακες παρατηρήθηκαν για πρώτη φορά, θεωρήθηκε ότι παραβιάζουν τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας, τουλάχιστον μέχρι τη στιγμή που η γεωμετρία (Σχ. 37-30*α*) του προβλήματος κατανοήθηκε πλήρως.



ΣΧΗΜΑ 37-30 Πρόβλημα 61.

62 *Χρονικό διάστημα μεταξύ δύο γεγονότων.* Τα γεγονότα *A* και *B* συμβαίνουν στις ακόλουθες χωροχρονικές συντεταγμένες στα συστήματα αναφοράς του Σχ. 37-26: ως προς το μη τονισμένο σύστημα αναφοράς έχουν συντεγμένες (x_A, t_A) και (x_B, t_B), ενώ ως προς το τονισμένο σύστημα αναφοράς έχουν συντεταγμένες (x'_A, t'_A) και (x'_B, t'_B). Στο μη τονισμένο σύστημα αναφοράς ισχύει ότι $\Delta t = t_B - t_A = 1.00\ \mu s$ και $\Delta x = x_B - x_A = 240$ m. (*α*) Να βρεθεί μια έκφραση για το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ ως συνάρτηση της παραμέτρου ταχύτητας β ($\beta = v/c$) και των δεδομένων στοιχείων. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του $\Delta t'$ ως προς το β για τις παρακάτω δύο περιοχές τιμών του β. (*β*) 0 έως 0.01 (*γ*) 0.1 έως 1. (*δ*) Για ποια τιμή του β το $\Delta t'$ είναι ελάχιστο και (*ε*) ποια είναι η ελάχιστη αυτή τιμή; (*στ*) Μπορεί ένα από αυτά τα γεγονότα να είναι η αιτία του δεύτερου; Εξηγήστε την απάντησή σας.

63 *Χωρική διαφορά δύο γεγονότων.* Τα γεγονότα *A* και *B* έχουν τις ακόλουθες χωροχρονικές συντεταγμένες στα συστήματα αναφοράς του Σχ. 37-26: ως προς το μη τονισμένο σύστημα αναφοράς έχουν συντεταγμένες (x_A, t_A) και (x_B, t_B), ενώ ως προς το τονισμένο σύστημα αναφοράς τις (x'_A, t'_A) και (x'_B, t'_B). Στο μη τονισμένο σύστημα αναφοράς ισχύει ότι $\Delta t = t_B - t_A = 1.00\ \mu s$ και $\Delta x = x_B - x_A = 240$ m. (*α*) Να βρεθεί μια έκφραση για το $\Delta x'$ ως συνάρτηση της παραμέτρου ταχύτητας β ($\beta = v/c$) και των δεδομένων στοιχείων. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του $\Delta x'$ ως συνάρτηση του β για τις παρακάτω δύο περιοχές τιμών του β. (*β*) 0 έως 0.01 (*γ*) 0.1 έως 1. (*δ*) Για ποια τιμή του β είναι η $\Delta x' = 0$;

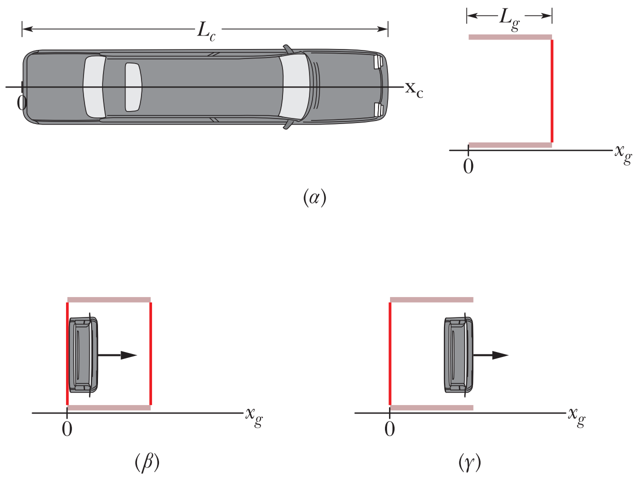
64 Στο Σχ. 37-20 φαίνεται ένα διαστημόπλοιο (το οποίο είναι συνδεδεμένο στο σύστημα αναφοράς S') που μας προσπερνά (καθώς στεκόμαστε ακίνητοι σε σχέση με το σύστημα αναφοράς S) με ταχύτητα $\vec{v} = 0.950c\hat{\mathrm{i}}$. Ένα πρωτόνιο εκτοξεύεται με ταχύτητα $0.980c$ ως προς το διαστημόπλοιο, από το μπροστινό μέρος του σκάφους προς το πίσω μέρος. Το μήκος ηρεμίας του σκάφους είναι 760 m. Πόσο είναι το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα σύμφωνα με (*α*) έναν επιβάτη μέσα στο σκάφος και (*β*) με εμάς. Στη συνέχεια θεωρήστε ότι ένα δεύτερο πρωτόνιο εκτοξεύεται με την ίδια ταχύτητα από πίσω μέρος του σκάφους προς το μπροστινό. Πόσο θα είναι τότε το χρονικό διάστημα ανάμεσα στα δύο γεγονότα της εκτόξευσης του πρωτονίου από την πρύμνη και της άφιξης του πρωτόνιου στην πλώρη σύμφωνα με (*γ*) έναν επιβάτη μέσα στο σκάφος και *δ*) με εμάς.

65 *Το πρόβλημα του αυτοκινήτου στο γκαράζ.* Ο Αυτοκινητάκης έχει μόλις αγοράσει τη μακρύτερη λιμουζίνα που υπάρχει στον κόσμο, που έχει μήκος ηρεμίας $L_c = 30.5$ m. Στο Σχ. 37-31*α*, φαίνεται παρκαρισμένη μπροστά σε γκαράζ μήκους ηρεμίας $L_g = 6.00$ m. Το γκαράζ έχει μια μπροστινή πόρτα (στο σχήμα φαίνεται ότι είναι ανοιχτή) και μια πίσω πόρτα (στο σχήμα φαίνεται κλειστή). Η λιμουζίνα είναι προφανώς μακρύτερη από το γκαράζ. Παρόλα αυτά ο Γκαραζάκης, στον οποίον ανήκει το γκαράζ, και γνωρίζει για τη σχετικιστική συστολή του μήκους, βάζει ένα στοίχημα με τον Αυτοκινητάκη, ο οποίος είχε εγκαταλείψει τις σπουδές του στη φυσική πριν φτάσει στο μάθημα της ειδικής σχετικότητας. Ο Γκαραζάκης υποστηρίζει ότι η λιμουζίνα μπορεί να χωρέσει στο γκαράζ και με τις δύο πόρτες κλειστές ενώ ο Αυτοκινητάκης υποστηρίζει ότι κάτι τέτοιο είναι αδύνατο εξαρχής.

Για να μελετήσουμε τη στρατηγική του Γκαραζάκη συνδέουμε ένα σύστημα αναφοράς με τη λιμουζίνα ώστε ο άξονας του x_c να είναι παράλληλος προς το μήκος της λιμουζίνας και θέτουμε $x_c = 0$ στο πίσω μέρος της. Επίσης συνδέουμε ένα σύστημα αναφοράς με το γκαράζ ώστε ο άξονας x_g να είναι παράλληλος με το μήκος του γκαράζ και θέτουμε $x_g = 0$ στην αρχικά ανοιχτή μπροστινή πόρτα του. Στη συνέχεια ο Αυτοκινητάκης θα βάλει το αυτοκίνητο μέσα από τη μπροστινή πόρτα με ταχύτητα $v = 0.9980c$ (κάτι που είναι τεχνικά άκαι οικονομικά αδύνατο). Ο Αυτοκινητάκης είναι ακίνητος στο σύστημα αναφοράς x_c, ενώ ο Γκαραζάκης είναι ακίνητος στο σύστημα αναφοράς x_g.

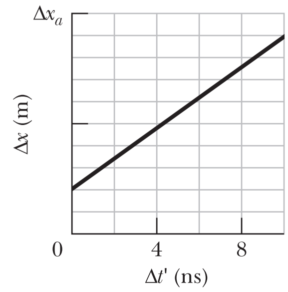
Θα πρέπει να μελετήσουμε δύο γεγονότα. *Γεγονός 1*: Όταν το πίσω μέρος του αυτοκινήτου περάσει από τη μπροστινή πόρτα, αυτή κλείνει αυτόματα. Έστω ότι ο χρόνος που μετρούν και οι δύο παρατηρητές για αυτό το γεγονός είναι μηδέν: $t_{g1} = t_{c1} = 0$. Το γεγονός αυτό συμβαίνει στη συντεταγμένη $x_c = x_g = 0$. Στο Σχ. 37-31β παρουσιάζεται το γεγονός 1 στο σύστημα αναφοράς x_g. *Γεγονός 2*: Όταν το μπροστινό μέρος του αυτοκινήτου φτάνει στην πίσω πόρτα, αυτή ανοίγει αυτόματα. Στο Σχ. 37-31γ παρουσιάζεται το γεγονός 2 στο x_g σύστημα αναφοράς.

Σύμφωνα με τον Γκαραζάκη (α) πόσο είναι το μήκος της λιμουζίνας και ποιες είναι οι χωροχρονικές συντεταγμένες (β) x_{g2} και (γ) t_{g2} του γεγονότος 2; (δ) Για πόσο χρόνο η λιμουζίνα είναι προσωρινά «εγκλωβισμένη» μέσα στο γκαράζ και με τις δύο πόρτες κλειστές; Στη συνέχεια θα μελετήσουμε το φαινόμενο σε σχέση με το σύστημα αναφοράς x_c. Σ' αυτό το σύστημα αναφοράς το γκαράζ κινείται προς τη λιμουζίνα με ταχύτητα $-0.9980c$. Σύμφωνα με τον Αυτοκινητάκη (ε) πόσο είναι το μήκος του γκαράζ, καθώς τον προσπερνάει και ποιες είναι οι οι χωροχρονικές συντεταγμένες ($\sigma\tau$) x_{c2} και (ζ) t_{c2} του γεγονότος 2; (η) Ήταν ποτέ η λιμουζίνα μέσα στο γκαράζ και με τις δύο πόρτες κλειστές; (θ) Ποιο γεγονός συμβαίνει πρώτο; (ι) Σχεδίασε τα γεγονότα 1 και 2 όπως τα παρατηρεί ο Αυτοκινητάκης. (κ) Είναι τα δύο γεγονότα αιτιοκρατικά συνδεδεμένα, δηλαδή είναι το ένα γεγονός η αιτία του άλλου; ($\iota\kappa$) Τελικά ποιος κέρδισε το στοίχημα;



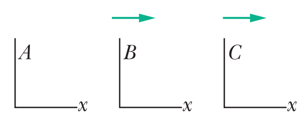
ΣΧΗΜΑ 37-31 Πρόβλημα 65.

66 Το σύστημα αναφοράς S' προσπερνά το σύστημα αναφοράς S με σταθερή ταχύτητα όπως φαίνεται στο Σχ. 37-9. Τα γεγονότα 1 και 2 απέχουν μεταξύ τους κατά $\Delta t'$, όπως μετριέται από έναν παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς S'. Όμως το χρονικό διάστημα $\Delta t'$ μεταξύ τους σύμφωνα με αυτόν τον παρατηρητή δεν έχει ορισθεί ακόμα. Στο Σχ. 37-32 φαίνεται η απόσταση Δx μεταξύ τους σύμφωνα με έναν παρατηρητή στο σύστημα αναφοράς S, ως συνάρτηση της $\Delta t'$ για συγκεκριμένη περιοχή τιμών του $\Delta t'$. Η κλίμακα του κατακόρυφου άξονα προσδιορίζεται από την τιμή $\Delta x_a = 10.0$ m. Πόση είναι η $\Delta x'$;



ΣΧΗΜΑ 37-32 Πρόβλημα 66.

67 *Μια άλλη προσέγγιση στους μετασχηματισμούς ταχυτήτων.* Στο Σχ. 37-33 φαίνονται τα συστήματα αναφοράς B και C να προσπερνούν το σύστημα αναφοράς A, κατά μήκος της διεύθυνσης του κοινού τους άξονά x. Θα χαρακτηρίσουμε τη συνιστώσα x της ταχύτητας του ενός συστήματος αναφοράς σε σχέση με το άλλο χρησιμοποιώντας δείκτη δύο γράμματων. Λόγου χάρη v_{AB} είναι η συνιστώσα x της ταχύτητας του συστήματος αναφοράς A ως προς το B. Ομοίως θα χαρακτηρίσουμε τις παραμέτρους ταχύτητας με δείκτες δύο γραμμάτων. Λόγου χάρη β_{AB} $(= v_{AB}/c)$ είναι η x συνιστώσα της παραμέτρου ταχύτητας που αντιστοιχεί στην v_{AB}. (α) Να δείξετε ότι



ΣΧΗΜΑ 37-33 Προβλήματα 67, 68 και 69.

$$\beta_{AC} = \frac{\beta_{AB} + \beta_{BC}}{1 + \beta_{AB}\beta_{BC}}.$$

Έστω ότι με M_{AB} συμβολίζουμε τον λόγο $(1 - \beta_{AB})/(1 + \beta_{AB})$. Οι ποσότητες M_{BC} και M_{AC} αντιστοιχούν με παρόμοιους λόγους. (β) Από τη σχέση

$$M_{AC} = M_{AB}M_{BC}$$

αποδείξτε τη σχέση του ερωτήματος (α) και με αυτό τον τρόπο επιβεβαιώσετε ότι η σχέση αυτή είναι αληθής .

68 *Συνέχεια του Προβλήματος 67.* Χρησιμοποιήστε το αποτέλεσμα της ερώτησης (β) του Προβλήματος 67 για την κίνηση κατά μήκος ενός κοινού άξονα στην παρακάτω περίπτωση. Το σύστημα αναφοράς A στο Σχ. 37-33 είναι συνδεδεμένο με ένα σωματίδιο το οποίο, καθώς προσπερνά το σύστημα αναφοράς B, κινείται με ταχύτητα $+0.500c$. Επίσης το σύστημα αναφοράς B κινείται με ταχύτητα $+0.500c$ ως προς το σύστημα αναφοράς C. Πόσο είναι (α) το M_{AC} (β) το β_{AC} και (γ) η ταχύτητα του σωματιδίου ως προς το σύστημα αναφοράς C;

69 *Συνέχεια του Προβλήματος 67.* Έστω ότι το σύστημα αναφοράς C του Σχ. 37-33 προσπερνά ένα τέταρτο σύστημα αναφοράς D το οποίο δεν φαίνεται στο σχήμα. (α) Να αποδειχθεί η σχέση

$$M_{AD} = M_{AB}M_{BC}M_{CD}.$$

(β) Εφαρμόστε αυτή τη γενική σχέση στην εξής περίπτωση: τρία σωματίδια κινούνται παράλληλα με έναν άξονα ως προς τον οποίο είναι ακίνητος ένας παρατηρητής. Έστω ότι το θετικό και το αρνητικό πρόσημο ορίζουν τις κατευθύνσεις της κίνησης κατά μήκος αυτού του άξονα. Το σωματίδιο A προσπερνά το σωματίδιο B με $\beta_{AB} = +0.20$. Το σωματίδιο B προσπερνά το σωματίδιο C με $\beta_{BC} = -0.40$. Το σωματίδιο C προσπερνά τον παρατηρητή D με $\beta_{CD} = +0.60$. Πόση είναι η ταχύτητα του σωματιδίου A ως προς τον παρατηρητή D; (Η λύση με αυτή την τεχνική είναι πολύ γρηγορότερη από όσο αν χρησιμοποιούσατε την Εξ. 37-29.)

70 Η ολική ενέργεια ενός πρωτονίου καθώς αυτό περνά μέσα από μια εργαστηριακή συσκευή είναι 10.611nJ. Πόση είναι η παράμετρος ταχύτητάς του β; Να χρησιμοποιήσετε τη μάζα του πρωτονίου η οποία δίνεται στο Παράρτημα B κάτω από τη στήλη «καλύτερη τιμή» και όχι τη στρογγυλοποιημένη προσεγγιστική τιμή που συνήθως χρησιμοποιούμε.

71 Έστω ένα ηλεκτρόνιο ολικής ενέργειας 1533 MeV το οποίο ξεκινάει από τον Βέγα, ένα άστρο που βρίσκεται σε απόσταση 26 έτη φωτός (ly) από εμάς, και φθάνει στη Γη. Πόση απόσταση μετρημένη σε έτη φωτός (ly) διάνυσε το ηλεκτρόνιο στο σύστημα αναφοράς του;

72 Ένα πιόνιο δημιουργείται στα ανώτερα ατμοσφαιρικά στρώματα της Γης, όταν ένα υψηλής ενέργειας σωματίδιο των κοσμικών ακτίνων προσπίπτει πάνω σε έναν ατομικό πυρήνα. Το πιόνιο που παράγεται κινείται προς την επιφάνεια της Γης με ταχύτητα 0.99c. Στο σύστημα ηρεμίας των πιονίων, αυτά διασπώνται με μέσο χρόνο ζωής 26 ns. Πόση απόσταση κατά μέσο όρο θα διανύσει ένα τέτοιο πιόνιο κατά την κάθοδό του προς τη Γη, μέσα από την ατμόσφαιρα, πριν διασπαστεί, όπως μετριέται στο σύστημα αναφοράς της Γης;

73 Πόση είναι η ορμή σε MeV/c ενός ηλεκτρονίου που έχει κινητική ενέργεια 2.00 MeV;

74 Να βρείτε την παράμετρο ταχύτητας ενός σωματιδίου που χρειάζεται 2.0 χρόνια περισσότερο από όσο χρειάζεται το φως για να διανύσει μια απόσταση 6.0 ετών φωτός.

75 Πόσο έργο απαιτείται για να επιταχυνθεί ένα πρωτόνιο από την ταχύτητα $v_1 = 0.9850c$ σε μια ταχύτητα $v_2 = 0.9860c$;

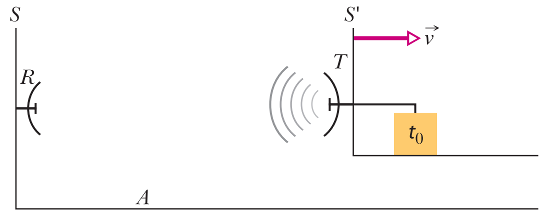
76 Αεροπλάνο μήκους ηρεμίας 40.0 m κινείται ως προς τη Γη με σταθερή ταχύτητα $v = 630$m/s. α) Κατά πόσο ποσοστό μικρότερο από το μήκος ηρεμίας του το παρατηρεί ένας παρατηρητής που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς της Γης; β) Πόσος χρόνος θα περάσει σύμφωνα με τα γήινα ρολόγια για να μείνει πίσω το ρολόι του αεροπλάνου κατά 1.00 μs; (Να χρησιμοποιήσετε τη θεωρία της ειδικής σχετικότητας στους υπολογισμούς σας.)

77 Δορυφόρος σε χαμηλή τροχιά, για να εκτελέσει κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη πρέπει να έχει ταχύτητα $v = 2.7 \times 10^4$ km/h. Υποθέστε ότι δύο τέτοιοι δορυφόροι εκτελούν κυκλική τροχιά γύρω από τη Γη προς αντίθετες κατευθύνσεις. (α) Πόση είναι η σχετική τους ταχύτητα τη στιγμή που συναντιώνται σύμφωνα με την κλασική φυσική (μετασχηματισμοί Γαλιλαίου); (β) Ποιο είναι το ποσοστιαίο λάθος που κάνετε στο ερώτημα (α) μη χρησιμοποιώντας τη σωστή σχετικιστική έκφραση;

78 Ένας πομπός ραντάρ T είναι συνδεδεμένος με ένα σύστημα αναφοράς S', το οποίο κινείται προς τα δεξιά με ταχύτητα v ως προς ένα σύστημα αναφοράς S (Σχ. 37-34). Στο σύστημα αναφοράς ένα μηχανικό χρονόμετρο (βασικά ένα ρολόι) που έχει περίοδο τ_0 (μετρημένη στο σύστημα αναφοράς S') υποχρεώνει τον πομπό T να εκπέμπει παλμούς ραντάρ, οι οποίοι λαμβάνονται από έναν δέκτη R, που είναι συνδεδεμένος στο σύστημα αναφοράς S'. (α) Πόση είναι η περίοδος τ του χρονομέτρου όπως αυτή μετριέται από έναν παρατηρητή A που βρίσκεται στο σύστημα αναφοράς S; (β) Να δείξετε ότι στον δέκτη R, το χρονικό διάστημα με την οποία λαμβάνονται τα σήματα από τον πομπό T δεν είναι τ ή τ_0, αλλά δίνονται από τη σχέση:

$$\tau_R = \tau_0\sqrt{\frac{c+v}{c-v}}.$$

(γ) Να εξηγήσετε γιατί ο δέκτης R αλλά και ο παρατηρητής A που βρίσκονται στο ίδιο σύστημα αναφοράς μετρούν διαφορετική περίοδο για τον πομπό. (*Υπόδειξη*: Ένα ρολόι και ένας παλμός ραντάρ δεν είναι το ίδιο πράγμα)



ΣΧΗΜΑ 37-34 Πρόβλημα 78.

79 Σωματίδιο μάζας m κινείται με μια ταχύτητα $c/2$ ως προς το αδρανειακό σύστημα αναφοράς S. Το σωματίδιο αυτό συγκρούεται με ένα ακριβώς όμοιο σωματίδιο που βρίσκεται σε ηρεμία στο σύστημα αναφοράς S. Σε ένα άλλο σύστημα αναφοράς S' η ολική ορμή αυτών των σωματιδίων είναι μηδέν. Αυτό το σύστημα αναφοράς ονομάζεται *σύστημα αναφοράς του κέντρου της ορμής*. Πόση είναι η ταχύτητα του συστήματος αναφοράς S' ως προς το S;

80 Στοιχειώδες σωματίδιο που παράγεται σε εργαστηριακό πείραμα στο εργαστήριο διανύει απόσταση 0.230 mm κατά μήκος του εργαστηρίου με σχετική ταχύτητα $0.960c$ πριν διασπαστεί (και μετατραπεί σε άλλο σωματίδιο). (α) Πόσος είναι ο ιδιόχρονος ζωής του σωματιδίου; (β) Πόση απόσταση μετρημένη στο σύστημα ηρεμίας του διανύει το σωματίδιο;

81 Για ένα πρωτόνιο που κινείται με ταχύτητα $v = 0.990c$ να υπολογιστεί (α) η K (β) η E και (γ) η p (σε GeV/c). Για ένα ηλεκτρόνιο που κινείται με την ίδια ταχύτητα $v = 0.990c$ να υπολογιστεί (δ) η K (ε) η E και ($\sigma\tau$) η p (σε MeV/c).

82 Στο σύστημα του εργαστηρίου μια ακτινοβολία έχει μήκος κύματος 434 nm. Όταν αυτή η ακτινοβολία φτάνει σ' εμάς από έναν μακρινό γαλαξία, λόγω ερυθράς μετατόπισης εμφανίζει μήκος κύματος 462 nm. (α) Πόση είναι η ακτινική ταχύτητα του γαλαξία ως προς τη Γη; (β) Πλησιάζει ή απομακρύνεται ο γαλαξίας αυτός από τη Γη;

83 (α) Πόση διαφορά δυναμικού θα επιτάχυνε ένα ηλεκτρόνιο σε ταχύτητα ίση με την ταχύτητα του φωτός c σύμφωνα με την κλασική φυσική; (β) Με αυτή τη διαφορά δυναμικού είναι η ταχύτητα που τελικά θα αποκτήσει το ηλεκτρόνιο;

84 Η ακτίνα της Γης είναι 6370 km και η γραμμική της ταχύτητα γύρω από τον Ήλιο είναι 30 km/s. Υποθέστε ότι η Γη προσπερνάει έναν παρατηρητή με αυτή την ταχύτητα. Για τον παρατηρητή αυτόν, πόσο θα συσταλεί η διάμετρος της Γης κατά τη διεύθυνση της κίνησης;

85 Ένα διαστημόπλοιο που βρίσκεται σε ηρεμία ως προς το σύστημα αναφοράς S, ξαφνικά αποκτά ταχύτητα $0.50c$. Κατόπιν σε σχέση με το νέο σύστημα ηρεμίας του η ταχύτητά του αυξάνεται κατά $0.50c$. Η διαδικασία αυτή συνεχίζεται μέχρι η ταχύτητά του σε σχέση με το αρχικό σύστημα αναφοράς S να ξεπεράσει την τιμή $0.999c$. Πόσες επιταχύνσεις απαιτεί η διαδικασία αυτή;

86 Ένα καταδρομικό των Foron καταδιώκει μια ανιχνευτική άκατο των Ερπετοειδών, πάνω στην ευθεία που συνδέει τα δύο σκάφη, εκτοξεύει ένα παραπλανητικό ομοίωμα σκάφους προς την κατεύθυνση της ακάτου. Σε σχέση με την άκατο το ομοίωμα ταξιδεύει με μια ταχύτητα $0.980c$, ενώ το καταδρομικό κινείται με ταχύτητα $0.900c$. Πόση είναι η ταχύτητα του ομοιώματος σε σχέση με το καταδρομικό;

87 Σωματίδιο κοσμικών ακτίνων πλησιάζει τη Γη κατά μήκος του άξονα Βορρά-Νότου της Γης με ταχύτητα $0.80c$ κινούμενο προς το γεωγραφικό βόρειο πόλο. Ένα δεύτερο παρόμοιο σωματίδιο πλησιάζει τη Γη με ταχύτητα $0.60c$ κινούμενο προς τον γεωγραφικό νότιο πόλο (Σχ. 37-35). Πόση είναι η σχετική ταχύτητα με την οποία το ένα σωματίδιο πλησιάζει το άλλο;

88 (α) Πόση ενέργεια απελευθερώνεται κατά την έκρηξη μιας πυρηνικής βόμβας σχάσης που περιέχει 3.0 kg σχάσιμο υλικό; Να υποθέσετε ότι το 0.10% της μάζας του σχάσιμου υλικού μετατρέπεται σε ενέργεια που απελευθερώνεται. (β) Πόση μάζα TNT θα πρέπει να εκραγεί για να μας προμηθεύσει το ίδιο ποσό ενέργειας; Να υποθέσετε ότι το ένα γραμμομόριο TNT απελευθερώνει 3.4 MJ ενέργειας κατά την έκρηξή του. Η γραμμομοριακή μάζα της TNT είναι 0.227 kg/mol. (γ) Για την ίδια μάζα εκρηκτικών πόσος είναι ο λόγος της ενέργειας που απελευθερώνεται σε μια πυρηνική έκρηξη ως προς την ενέργεια που απελευθερώνεται σε μιά έκρηξη από TNT;

ΣΧΗΜΑ 37-35 Πρόβλημα 87.