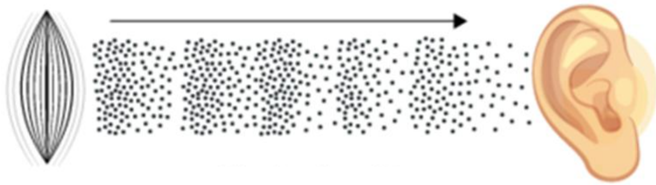
ΚΥΜΑΤΙΚΗ
Ι. Μ**ηχανικά κύματα**

- Ηχητικά κύματα
- Ταχύτητα του ήχου
- Τρέχοντα ηχητικά κύματα
- Συμβολή
- Διακροτήματα

Ήχος

Τα πιο σημαντικά μηχανικά κύματα στη καθημερινή μας ζωή είναι τα ηχητικά κύματα, που είναι **διαμήκη κύματα διαδιδόμενα σε ένα μέσο** (αέριο, υγρό ή στερεό). Υπενθυμίζεται ότι στα διαμήκη κύματα η μετατόπιση ενός στοιχειώδους τμήματος του μέσου λόγω της διαταραχής είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης της διαταραχής (του κύματος).



Θα ασχοληθούμε κυρίως με ηχητικά κύματα στον αέρα.

Τα απλούστερα ηχητικά κύματα είναι τα ημιτονοειδή, που έχουν συγκεκριμένη συχνότητα, πλάτος και μήκος κύματος.

Τα ηχητικά κύματα διαδίδονται συνήθως από τη πηγή προς τα έξω προς όλες τις διευθύνσεις, με πλάτος που εξαρτάται από την απόσταση από τη πηγή και μπορεί να εξαρτάται και από τη κατεύθυνση διάδοσης.

Το ανθρώπινο αυτί είναι ευαίσθητο σε κύματα με συχνότητα από 20 - 20 000 Hz → **Ακουστική περιοχή**

- Μεγαλύτερες συχνότητες → υπέρηχοι
- Μικρότερες συχνότητας → υπόηχοι

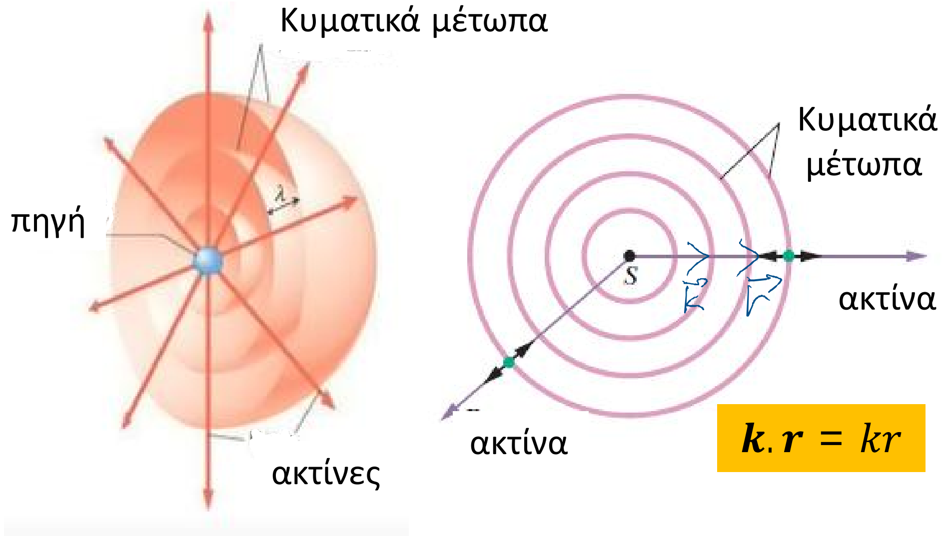
Κυματικά μέτωπα

Οι έννοιες που ακολουθούν ισχύουν για όλα τα κύματα, όχι μόνο τα ηχητικά. Στα προηγούμενα μαθήματα ασχοληθήκαμε με μονοδιάστατα κύματα. Τα ηχητικά κύματα μας δίνουν την ευκαιρία να γενικεύσουμε σε τρισδιάστατα κύματα.

Έστω ένα (εδώ) ηχητικό κύμα το οποίο προέρχεται από μία σημειακή πηγή S και διαδίδεται στον χώρο, προς όλες τις κατευθύνσεις.

Οι λεγόμενες ***ισοφασικές*** επιφάνειες στις οποίες όλα τα σημεία του μέσου έχουν την ίδια φάση (δηλ. έχουν την ίδια απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας και την ίδια ταχύτητα) , λέγονται **κυματικά μέτωπα**.

Ας υποθέσουμε ότι η διάδοση της διαταραχής γίνεται με την ίδια ταχύτητα σε όλες τις κατευθύνσεις, δηλ**. ισότροπα**, **τότε τα κυματικά μέτωπα είναι ομόκεντρες σφαίρες**, με το κέντρο τους στο S. Συνήθως σχεδιάζουμε τη προβολή τους στο επίπεδο (ομόκεντροι κύκλοι). Οι ευθείες που είναι κάθετες σε όλα τα κυματικά μέτωπα λέγονται **ακτίνες**.



Σε ένα ισοτροπικό μέσο, τα κυματικά μέτωπα του ήχου σχηματίζουν σφαίρες που έχουν το κέντρο τους στη πηγή.

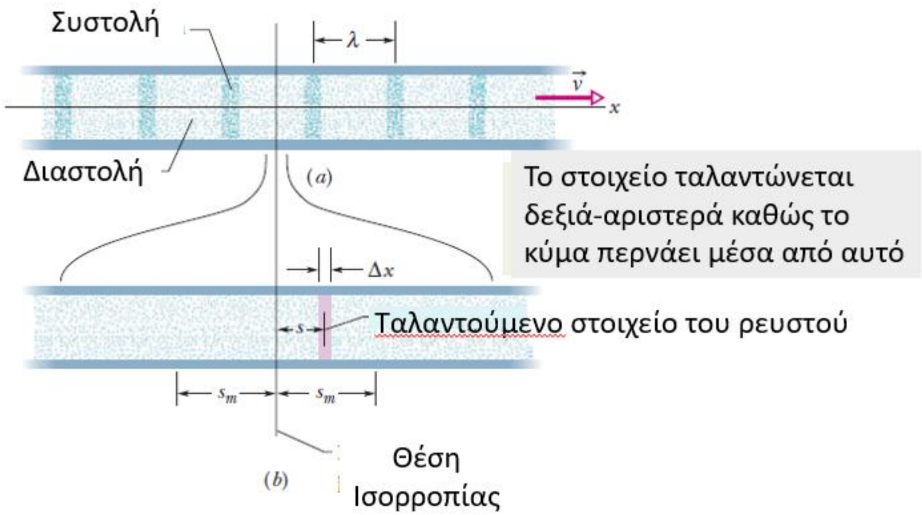
Τα μικρά μαύρα διπλά βέλη υποδεικνύουν ότι τα στοιχεία του μέσου ταλαντώνονται γύρω από τη θέση ισορροπίας τους, παράλληλα προς τη κατεύθυνση διάδοσης του κύματος.

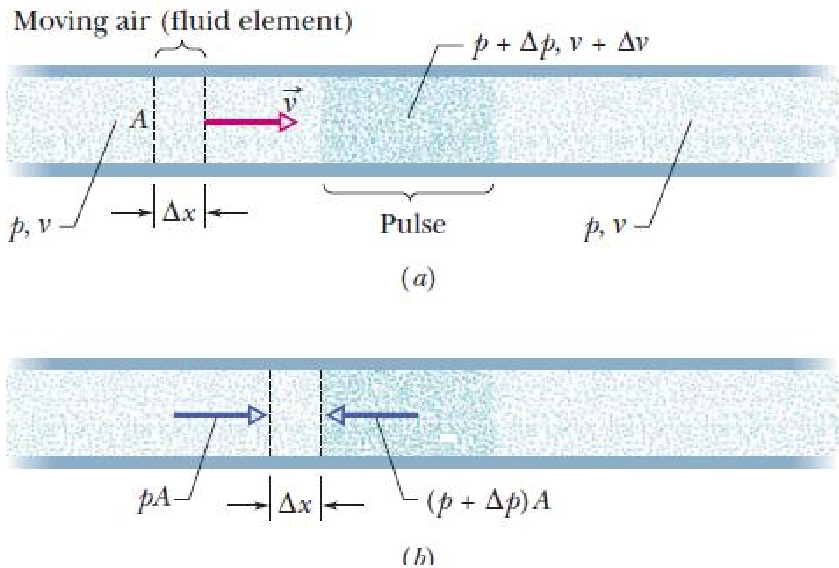
Τα διαδοχικά μέτωπα απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με το μήκος κύματος

Τα ηχητικά κύματα ως διακυμάνσεις της πίεσης

Μπορούμε να περιγράψουμε τα ηχητικά κύματα συναρτήσει **των μεταβολών της πίεσης** στα διάφορα σημεία του χώρου (η απόδειξη ακολουθεί στις επόμενες διαφάνειες).

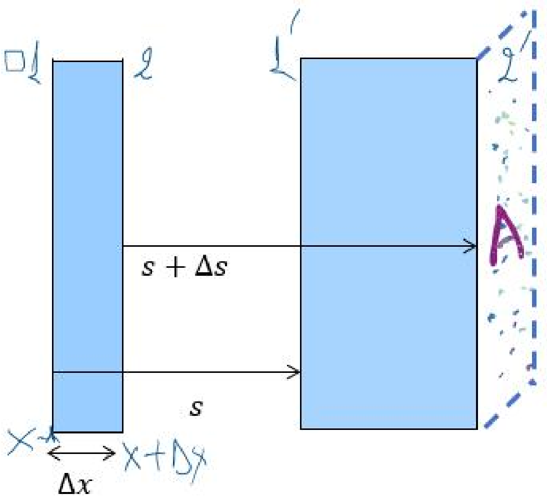
Για ένα ημιτονοειδές ηχητικό κύμα, η πίεση ταλαντώνεται γύρω από την ατμοσφαιρική τιμή P_a με μια ημιτονοειδή μεταβολή που έχει την ίδια συχνότητα με τις κινήσεις των σωματιδίων του αέρα.





Το ανθρώπινο αυτί λειτουργεί ως αισθητήρας τέτοιων μεταβολών της πίεσης. Ένα ηχητικό κύμα που εισέρχεται στον ακουστικό πόρο, ασκεί μεταβαλλόμενη πίεση στο τύμπανο, στην άλλη πλευρά του οποίου η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση. Η διαφορά στη πίεση ασκεί (μεταβαλλόμενη) δύναμη στο τύμπανο το οποίο εξαναγκάζεται σε ταλάντωση

Ταχύτητα διάδοσης ηχητικών κυμάτων



Θεωρούμε ένα σωλήνα μέσα στον οποίο υπάρχει ιδανικό αέριο για το οποίο ισχύει η γνωστή καταστατική εξίσωση

$$PV = Nk_BT \qquad (1)$$

όπου P η πίεση, V ο όγκος και T η θερμοκρασία.

Ας υποθέσουμε ότι μία διαταραχή (ηχητικό κύμα) διαδίδεται μέσα στο σωλήνα.

Στα αριστερά του σχήματος βλέπουμε ένα στοιχειώδες τμήμα του αέρα μέσα στον σωλήνα, με πάχος Δx και διατομή A (η διατομή είναι κάθετα στο σχήμα).

Καθώς διέρχεται η διαταραχή, η πλευρά 1 του στοιχειώδους τμήματος μετατοπίζεται κατά s (στη θέση 1') και η πλευρά 2 κατά $s + \Delta s$ (θέση 2'). Αυτό φαίνεται στα δεξιά του σχήματος.

Ο όγκος του στοιχειώδους τμήματος του αερίου έχει μεταβληθεί (στο παράδειγμα αυτό έχει αυξηθεί).

Αρχικά ήταν $V_0 = A\Delta x$ (2).

Στο δεξιό στιγμιότυπο έχει ο όγκος είναι $V = A[x + \Delta x + s + \Delta s - (x + s)] = A(\Delta x + \Delta s)$

Δηλ. $\Delta V = A\Delta s$ (3) , άρα η διαστολή που έχει υποστεί το στοιχειώδες τμήμα είναι $\delta = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{A\Delta s}{A\Delta x} \xrightarrow[\Delta x \to 0]{} \frac{\partial s}{\partial x}$ (4)

Στο στοιχειώδες τμήμα του αερίου, με όγκο V_0, του προηγούμενου σχήματος, η πίεση που ασκείται στην πλευρά 1 (στο x) είναι $P(x)$, ενώ η πίεση στη πλευρά 2 (στη θέση $x + \mathrm{d}x$), είναι $P(x + \mathrm{d}x)$.
Θυμόμαστε ότι η δύναμη (που ασκείται κάθετα στην επιφάνεια) ισούται με τη πίεση επί το εμβαδόν της επιφάνειας.
Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο αέριο όγκου V_0 είναι

$F_x = AP(x) - AP(x + dx) = -\mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}dx = -\mathrm{A}\frac{\partial \Delta \mathrm{P}}{\partial x}dx$ (5) (διότι $P = P_0 + \Delta\mathrm{P}$, P_0 σταθερο)

Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι $F_x = ma_x$ (6)

Αλλά $m = \rho_0 \mathrm{V}_0 = \rho \mathrm{A} \mathrm{d}x$ (7) και $a_x = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ (8)

Από (5), (6), (7) και (8) προκύπτει ότι $F_x = \mathrm{A}\rho_0 dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$ (9)

Ανακαλούμε τώρα το ορισμό του **μέτρου συμπιεστότητας όγκου** (B, bulk modulus)

$B = -V\frac{\partial P}{\partial V} \Rightarrow B \simeq -V_0 \frac{\Delta \mathrm{P}}{\Delta \mathrm{V}}$ (10)

Από τη (10) και την (4) βρίσκουμε ότι $\Delta \mathrm{P} = -\mathrm{B}\delta = -\mathrm{B}\frac{\partial s}{\partial x}$ (11)

Από (5) και (9) προκύπτει ότι $-\mathrm{A}\frac{\partial \mathrm{P}}{\partial x}dx = \mathrm{A}\rho_0 dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \underset{(11)}{\Longrightarrow} \boxed{B\frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}}$ (12)

και $\boxed{c_{\eta\chi o\upsilon}^2 = \frac{B}{\rho_0}}$ (13)

Βρήκαμε (εξ. (13) ότι η ταχύτητα ήχου δίνεται από τη σχέση $c_{\eta\chi o \upsilon} = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$

Αν θεωρήσουμε ότι η διάδοση του ήχου είναι **αδιαβατική διαδικασία**, δηλ. αν PV^{γ} = σταθερό (14), τότε στη ταχύτητα του ήχου υπεισέρχεται το αδιαβατικό bulk modulus (και όχι το ισόθερμο) που είναι $B_{ad} = \gamma P$.

Απόδειξη:

$$P = \frac{\sigma\tau\alpha\theta.}{V^{\gamma}} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial V} = -\gamma \frac{\sigma\tau\alpha\theta.}{V^{\gamma+1}}$$

οπότε $B = -V\frac{\partial P}{\partial V} = \gamma \frac{\sigma\tau\alpha\theta.}{V^{\gamma}} = \gamma P$

και σε αυτή τη περίπτωση $c_{\eta\chi o \upsilon} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$

$\gamma \cong 1.4$ για διατομικό αέριο, $P = 1atm = 1.013\times 10^5 \ \mathrm{N}m^{-2}$, $\rho = 1.2kgm^{-3}$ (σε συνθήκες δωματίου) , οπότε η ταχύτητα του ήχου προκύπτει ότι είναι ίση με

$$\boxed{c_{\eta\chi o \upsilon} \cong \sqrt{\frac{1.4 \times 10^5 \mathrm{N}m^{-2}}{1.2kgm^{-3}}} = 343\mathrm{m}s^{-1}}$$

Άσκηση 1

Έστω ηχητικό κύμα που διαδίδεται μέσα σε ένα μακρύ σωλήνα γεμάτο αέρα. Ας υποθέσουμε ότι η οριζόντια μετατόπιση ενός τυχαίου στοιχείου περιγράφεται από τη συνάρτηση $s(x,t) = s_m \cos(kx - \omega t)$. Βρείτε τη συνάρτηση που περιγράφει τη μεταβολή της πίεσης ως προς τη θέση x και το χρόνο t.

Βλ. σχήμα στη 5η διαφάνεια

$$\left.\begin{array}{l}\Delta V = A\,\Delta s. \\ \Delta P = -B\dfrac{\Delta V}{V}.\end{array}\right\} \Delta P = -B\frac{\Delta s}{\Delta x} = -B\frac{\partial s}{\partial x}.$$

$$s(x,t) = s_m \cos(kx - \omega t).$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x}[s_m \cos(kx - \omega t)] = -ks_m \sin(kx - \omega t).$$

$$\downarrow$$

$$\Delta P(x,t) = Bks_m \sin(kx - \omega t)$$

$$\downarrow$$

$$\Delta P(x,t) = \Delta P_m \sin(kx - \omega t)$$

$$\downarrow$$

$$\Delta P_m = Bk\,s_m \xRightarrow[\varepsilon\xi.14]{} \Delta P_m = \rho c_{\eta\chi o\upsilon}^2\,k\,s_m$$

$$\boxed{k = \omega / c_{\eta\chi o\upsilon}} \longrightarrow \quad \downarrow$$

$$\Delta P_m = \rho\omega c_{\eta\chi o\upsilon}\,s_m$$

Άσκηση 2

Το μέγιστο πλάτος πίεσης που ανέχεται το ανθρώπινο αυτί είναι 28Pa (υπενθυμίζεται ότι η 1 atm= 10^5Pa). Πόσο είναι το πλάτος μετατόπισης για ένα τέτοιο ήχο συχνότητας 1000Hz, διαδιδόμενο με ταχύτητα 343m/s σε αέρα πυκνότητας 1.21kg/m^3;

Είδαμε προηγουμένως ότι

$$\Delta P_m = \rho \omega c_{\eta\chi o\upsilon}\, s_m \Rightarrow$$

$$s_m = \frac{\Delta P_m}{\rho \omega c_{\eta\chi o\upsilon}} = \frac{\Delta P_m}{\rho 2\pi f\, c_{\eta\chi o\upsilon}} \Rightarrow s_m = \frac{28\mathrm{Pa}}{(343\mathrm{m/s})(1.21\mathrm{kg/m^3})(2\pi)(1000\mathrm{Hz})} = 1.1 \times 10^{-5}\mathrm{m} = 11\mu\mathrm{m}$$

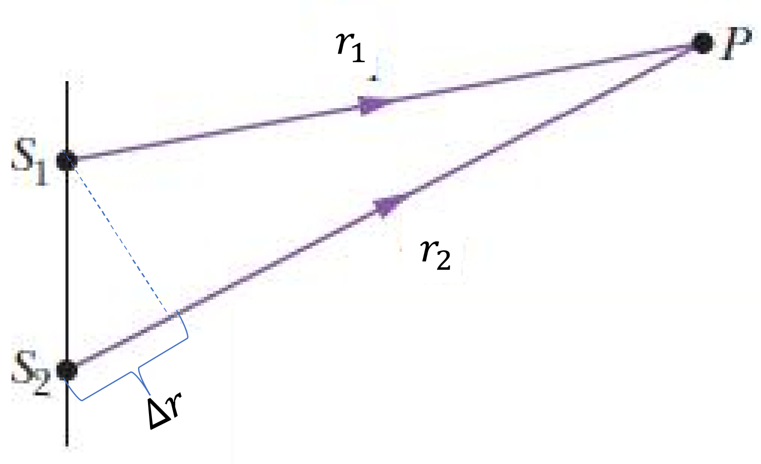
Το αυτί μπορεί να ακούσει σε αυτή τη συχνότητα μέχρι 2.8×10^{-5}Pa, που αντιστοιχεί σε

$s_m = 1.1 \times 10^{-11}\mathrm{m} = 11\mathrm{pm}$

Συμβολή δύο σφαιρικών ηχητικών κυμάτων

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε δυο σημειακές ηχητικές πηγές S_1 και S_2, που εκπέμπουν **σφαιρικά** ημιτονοειδή ηχητικά κύματα ίδιας συχνότητας (θα υποθέσουμε ότι δεν έχουν αρχική διαφορά φάσης μεταξύ τους).

Παρατηρούμε τη συμβολή των δύο κυμάτων στο σημείο P. Κατά τη διάδοση των κυμάτων, γενικά, προκύπτει διαφορά φάσης ανάμεσα στα δύο συμβάλλοντα κύματα, που εξαρτάται από τη διαφορετική απόσταση που έχουν διανύσει στο μέσο διάδοσης. Επίσης, μειώνεται το πλάτος σε σχέση με το πλάτος στη πηγή (βλ. διαφάνειες 12 & 13). Συμβολίζουμε τα αντίστοιχα πλάτη στο σημείο P ως $s_{1m,P}$ και $s_{2m,P}$



$$s_1(r_1,t) = s_{1m,P}e^{i(kr_1-\omega t)}$$

$$s_2(r_2,t) = s_{2m,P}e^{i(kr_2-\omega t)}$$

$$s' = s_1 + s_2 = s_{1m,P}e^{i(kr_1-\omega t)} + s_{2m,P}e^{i(kr_2-\omega t)}$$

$$r_2 = r_1 + \Delta r$$

$$s' = \left(s_{1m,P} + s_{2m,P}e^{ik\Delta r}\right)e^{i(kr_1-\omega t)}$$

Τα ίδια ισχύουν για οποιαδήποτε σφαιρικά κύματα, είτε εγκάρσια είτε διαμήκη, είτε μηχανικά είτε ηλεκτρομαγνητικά

Αλλά μπορούμε να γράψουμε:

$$\left(s_{1m,P} + s_{2m,P} e^{ik\Delta r}\right) = s'_m\, e^{i\theta}$$

όπου (βλ. μάθημα 7),

$$s'_m = \sqrt{s_{1m,P}^2 + s_{2m,P}^2 + 2 s_{1m,P} s_{2m,P} cos\varphi}$$ και η φάση θα είναι

$$tan\theta = \frac{s_{2m,P} \sin\varphi}{(s_{1m,P} + s_{2m,P}\cos\varphi)},$$ όπου $\varphi = k\Delta r$

Όταν cos$\varphi = 1$, δηλ. $\varphi = 2\pi m, m = 0,1,2, \ldots$, το s'_m μεγιστοποιείται και γίνεται ίσο με $s_{1m,P} + s_{2m,P}$

Αυτή είναι η περίπτωση της ενισχυτικής συμβολής.

Άρα έχουμε ενισχυτική συμβολή όταν $k\Delta r = 2\pi m \Rightarrow \boldsymbol{\Delta r = m\lambda, m = 0, 1, 2, ..}$

Όταν cos$\varphi = -1$, δηλ. $\varphi = (2m+1)\pi, m = 0,1,2, \ldots$, το s'_m ελαχιστοποιείται και γίνεται ίσο με $s_{1m} - s_{2m}$

Αυτή είναι η περίπτωση της καταστρεπτικής συμβολής

$k\Delta r = (2m+1)\pi \Rightarrow \boldsymbol{\Delta r = (2m+1)\,{}^{\lambda}/_{2}, m = 0, 1, 2, \ldots}$

Ένταση και επίπεδο του ήχου

Είχαμε δει για την διάδοση εγκάρσιου κύματος σε τεντωμένη χορδή ότι η μέση ισχύς δίνεται από τη σχέση

$$\mathrm{P}_{average} = \frac{1}{2}\mu\upsilon\omega^2\, y_m^2$$

Ομοίως, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε (άσκηση) ότι για τα ηχητικά κύματα έχουμε

$$\mathrm{P}_{average} = \frac{1}{2}\mathrm{A}\rho c_{\eta\chi}\omega^2\, s_m^2$$

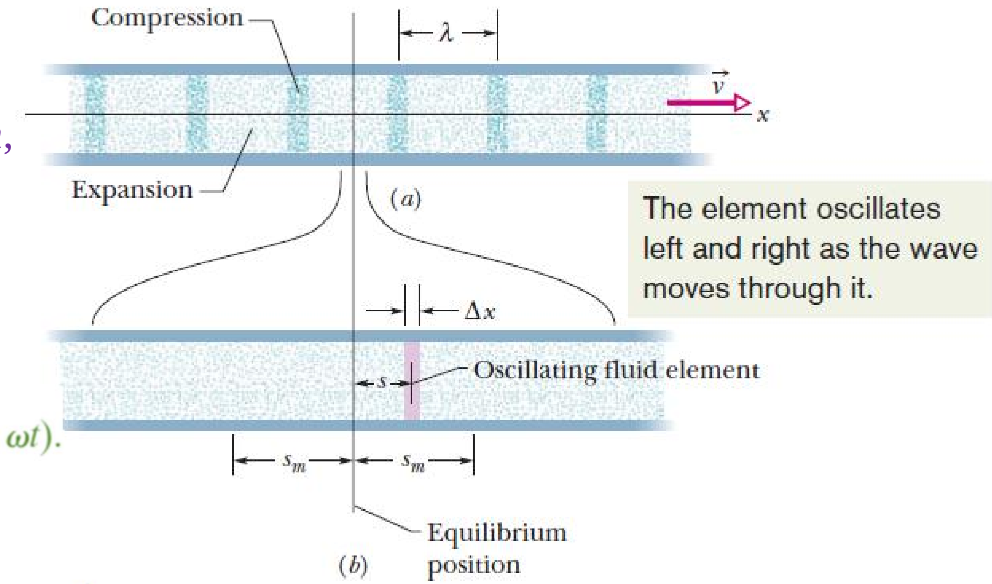
Ορίζουμε ως ένταση των ηχητικών κυμάτων (τις ίδιες έννοιες θα συναντήσουμε και στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα) τη μέσο ρυθμό με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από το κύμα δια μέσου ή επί της επιφάνειας:

$$I = \frac{\mathrm{P}_{average}}{A} = \frac{1}{2}\rho c_{\eta\chi}\omega^2\, s_m^2$$

Η ακουστότητα του ήχου είναι ανάλογη της έντασης του ήχου, αλλά εξαρτάται και από τη συχνότητα.

17.6: Intensity and Sound Level

Consider a thin slice of air of thickness dx, area A, and mass dm, oscillating back and forth as the sound wave passes through it.
The kinetic energy dK of the slice of air is $dK = \frac{1}{2} dm\, v_s^2$.



But, $v_s = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \sin(kx - \omega t).$

Therefore,

$$dK = \tfrac{1}{2}(\rho A\, dx)(-\omega s_m)^2 \sin^2(kx - \omega t).$$

And, $\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2}\rho A v \omega^2 s_m^2 \sin^2(kx - \omega t).$

Then the average rate at which kinetic energy is transported is

$$\left(\frac{dK}{dt}\right)_{\text{avg}} = \tfrac{1}{2}\rho A v \omega^2 s_m^2 [\sin^2(kx - \omega t)]_{\text{avg}}$$
$$= \tfrac{1}{4}\rho A v \omega^2 s_m^2.$$

If the potential energy is carried along with the wave at this same average rate, then the wave intensity I, the average rate per unit area at which energy of both kinds is transmitted by the wave, is

$$\boxed{I = \frac{2(dK/dt)_{\text{avg}}}{A} = \tfrac{1}{2}\rho v \omega^2 s_m^2.}$$

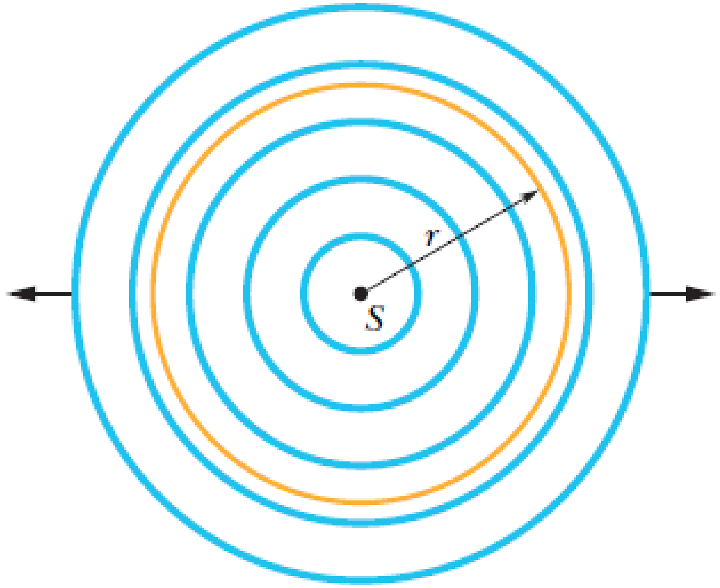
Η μεταβολή της έντασης του ήχου με την απόσταση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια σημειακή πηγή S που εκπέμπει ισοτροπικά, δηλ. εκπέμπει σφαιρικά κύματα. Η μέση ισχύς της πηγής είναι P_s

Υποθέτουμε ότι δεν έχουμε απώλειες ενέργειας κατά τη διάδοση του κύματος.

Ας θεωρήσουμε μία σφαιρική επιφάνεια με κέντρο τη πηγή και ακτίνα r. Η ένταση του ήχου σε ένα οποιοδήποτε σημείο της σφαίρας είναι

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2}$$



Εξάρτηση του πλάτους από την απόσταση από τη πηγή (για σφαιρικά κύματα)

Ας θεωρήσουμε την ένταση του ήχου σε δύο διαφορετικές αποστάσεις από τη πηγή r_1 και r_2.

Τότε $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P_S}{4\pi {r_1}^2}}{\frac{P_S}{4\pi {r_2}^2}} = \frac{{r_2}^2}{{r_1}^2}$

Επίσης, $\frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2}\rho c_{\eta\chi}\omega^2\ s_{m1}^2}{\frac{1}{2}\rho c_{\eta\chi}\omega^2\ s_{m2}^2} = \frac{s_{m1}^2}{s_{m2}^2}$

$\frac{s_{m1}^2}{s_{m2}^2} = \frac{{r_2}^2}{{r_1}^2} \Rightarrow r_1 s_{m1} = r_2 s_{m2}$ Δηλ. το πλάτος είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης από τη πηγή.

Παράδειγμα

Ας θεωρήσουμε ένα ηλεκτρικό σπινθήρα που ξεσπά κατά μήκος ευθείας γραμμής μήκους L=10m, εκπέμποντας ηχητικό παλμό που διαδίδεται ακτινικά από τον σπινθήρα προς τα έξω. Η ισχύς εκπομπής είναι $P_{s,avg} = 1.6 \times 10^4 W$. Πόση είναι η ένταση του ήχου σε απόσταση r=12m από τον σπινθήρα;

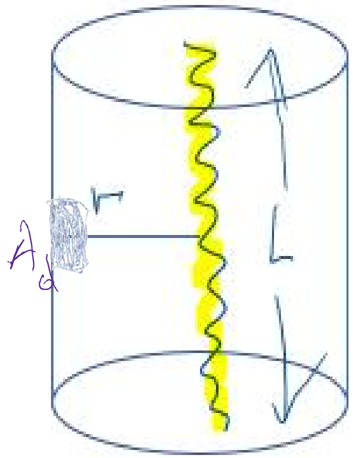
Εδώ έχουμε ένα παράδειγμα ήχου που δεν προέρχεται από σημειακή πηγή αλλά από μία εκτεταμένη γραμμική πηγή. Αν θεωρήσουμε ότι το μήκος της πηγής είναι μεγάλο, τα κυματικά μέτωπα είναι ομοαξονικοί κύλινδροι.

$I = \frac{P_s}{A} = \frac{P_s}{2\pi r L}$, όπου $2\pi r L$είναι το εμβαδόν της παράπλευρης επιφάνειας του κυλίνδρου με ύψος L και ακτίνα r.

οπότε $I = \frac{1.6\times 10^4 W}{2\pi(12m)(10m)} = 21.2W/m^2$

Αν τοποθετήσουμε ένα ακουστικό ανιχνευτή επιφάνειας $A_d = 2cm^2$ εκεί από το σπινθήρα, ο ρυθμός συλλογής ηχητικής ενέργειας από τον ανιχνευτή θα είναι

$P_{\mathrm{d}} = I\, A_d = 21.2W/m^2 \times 2 \times 10^{-4}\, m^2 = 4.2mW$



Το επίπεδο του ήχου και η κλίμακα decibel

Το πλάτος μετατόπισης του τύμπανου του αυτιού καλύπτει 6 τάξεις μεγέθους από 10^{-5}m έως 10^{-11}m.

Για αυτό είναι πρακτικό να χρησιμοποιήσουμε λογαριθμική κλίμακα για τη μέτρηση της έντασης του ήχου.

Επίπεδο ήχου: $\beta \equiv (10DB)\log\frac{I}{I_0}$, *DB*: decibel

όπου

$I_0 = 10^{-12}\text{W/m}^2$

$I = I_0 \quad \Rightarrow \beta = 0$

$I = 10^{-11}\text{W/m}^2 \Rightarrow \beta = 10DB$

Παράδειγμα

Αν μία ωτασπίδα μειώνει το επίπεδο του ήχου κατά 20DB πόσος είναι ο λόγος της τελικής I_f προς την αρχική έντασηI_i;

$$\beta_f = (10DB)\log\frac{I_f}{I_0}$$

$$\beta_i = (10DB)\log\frac{I_i}{I_0}$$

$$-20DB = \beta_f - \beta_i = (10DB)\left(\log\frac{I_f}{I_0} - \log\frac{I_i}{I_0}\right) \Rightarrow -2 = log\frac{I_f}{I_i} \Rightarrow \quad \frac{I_f}{I_i} = 10^{-2}$$

Πηγές μουσικών ήχων – μουσικά όργανα

Μουσικά όργανα

- Ταλαντούμενες χορδές (κιθάρα, πιάνο , βιολί, κλπ)
- Ταλαντούμενες μεμβράνες (τύμπανα, κλπ)
- Ταλαντούμενες στήλες αέρα (φλάουτο, όμποε, κλπ)
- Ξυλάκια, μεταβλητές ράβδοι (ξυλόφωνο, μεταλλόφωνο)

Τα περισσότερα μουσικά όργανα περιλαμβάνουν περισσότερα από ένα ταλαντούμενα μέρη.

Ας θεωρήσουμε την περίπτωση μίας ταλαντούμενης χορδής με σταθερά άκρα. Από την υπέρθεση των ανακλώμενων στα άκρα της χορδής κυμάτων, για κατάλληλο ταίριασμα μεταξύ μήκους κύματος και μήκους της χορδής, προκύπτουν στάσιμα κύματα με χαρακτηριστικές συχνότητες (κανονικοί τρόποι ταλάντωσης - βλ. Μάθημα 7). Η χορδή ταλαντώνεται με μεγάλο και σταθερό πλάτος, σπρώχνοντας τον αέρα και δημιουργώντας ηχητικά κύματα ίδιας συχνότητας.

Παρόμοια, μπορούμε να δημιουργήσουμε στάσιμα κύματα σε ένα σωλήνα με αέρα (βλ. παράδειγμα που ακολουθεί). Ένα κλειστό άκρο του σωλήνα είναι το αντίστοιχο του στερεωμένου άκρου μιας χορδής.

Παράδειγμα

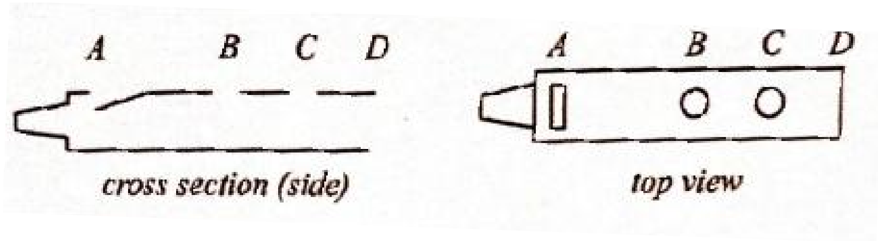
Ένα απλό «φλάουτο» όπως φαίνεται στην εικόνα είναι ανοικτό στο D. Υπάρχει επίσης ένα μεγάλο άνοιγμα στο A (κοντά στο στόμιο) και υπάρχουν δύο τρύπες στο B και C (AB=BD, BC=CD). Η απόσταση AD είναι ~37cm. Η ταχύτητα του ήχου είναι ~340m/s. Ποια συχνότητα περιμένετε να ακούσετε όταν φυσούν και έχουμε

(a) Και τις δύο τρύπες στο B και C κλειστές

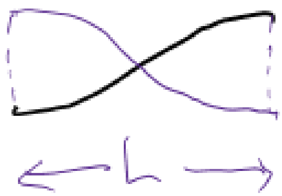
(b) Μόνο τη τρύπα στο C κλειστή

(c) Μόνο τη τρύπα στο B κλειστή

(d) Και τις δύο τρύπες στο B και C ανοικτές



Υποθέστε ότι θα ακούσετε κυρίως την θεμελιώδη αρμονική.



(a) Σωλήνας με δύο ανοικτά άκρα και μήκος $L = AD = 37cm$.

Θεμελιώδης τρόπος ταλάντωσης $\lambda = 2L = 74cm \Rightarrow f = \frac{c_{\eta\chi}}{\lambda} = 446\text{Hz}$

b) Εάν οι τρύπες είναι αρκετά μεγάλες είναι σαν να έχουμε ένα σωλήνα μήκους 18.5cm (ανοικτό στα δύο άκρα) οπότε $\lambda = 2\text{AB} = 37cm \Rightarrow f = \frac{c_{\eta\chi}}{\lambda} = 892\text{Hz}$

c) $\lambda = 2\text{AC} = 2\left(18.5 + \frac{18.5}{2}\right)\text{cm} = 55.5\text{cm} \Rightarrow \text{f} = \frac{c_{\eta\chi}}{\lambda} = 612\text{Hz}$

d) Τότε είναι σαν να έχουμε τη περίπτωση (b).

Σημείωση

Συνήθως η θεμελιώδης και οι περισσότερες αρμονικές παράγονται ταυτόχρονα, με διαφορετικά πλάτη, και υπερτίθενται. Αυτό που ακούμε είναι το συνολικό κύμα.

Γενικά οι υψηλότερες αρμονικές παράγονται με διαφορετικές εντάσεις από διαφορετικά όργανα, οπότε η κυματομορφή που δείχνουμε πιο πάνω για την ίδια νότα, θα είναι διαφορετική για διαφορετικά όργανα.

Διακροτήματα (beats) - βλ. Κεφάλαιο ταλαντώσεων στη ΦΙ – Α΄εξάμηνο

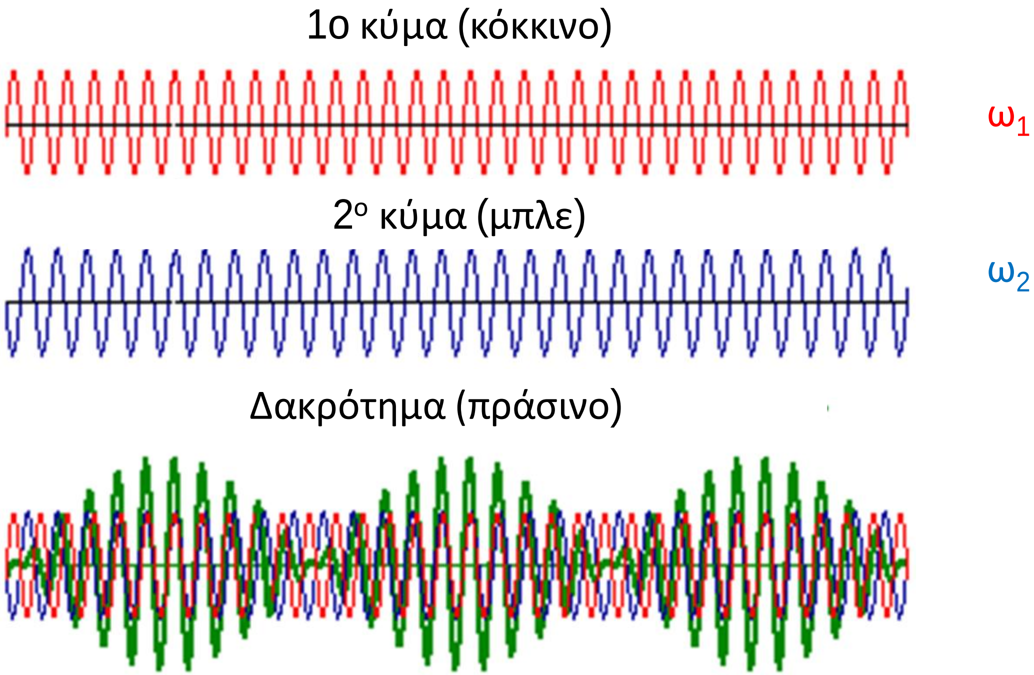
Τί γίνεται όταν ακούμε ταυτόχρονα δύο ήχους ίδιου πλάτους και παρόμοιων συχνοτήτων; Έστω ότι βρισκόμαστε σε μία συγκεκριμένη θέση. Έστω ότι οι μετατοπίσεις στη θέση αυτή ως προς το χρόνο περιγράφονται από τις σχέσεις:

$s_1 = s_m \cos\omega_1 t$ και $s_2 = s_m \cos\omega_2 t$

Από την υπέρθεση των δυο κυμάτων προκύπτει κύμα με μετατόπιση s:

$$
\begin{aligned}
s &= s_m(\cos\omega_1 t + \cos\omega_2 t) = \\
&= 2s_m \cos\left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t\right) \cos\left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t\right) \\
&= 2s_m \cos\omega' t \cos\omega t, \;\; \acute{o}\pi o\upsilon \;\; \omega' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \qquad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}
\end{aligned}
$$

Το $|2s_m \cos\omega' t|$ είναι το πλάτος του διακροτήματος, που γίνεται μέγιστο δύο φορές μέσα σε μία περίοδο, όταν $\cos\omega' t = \pm 1$. Άρα η κυκλική συχνότητα του διακροτήματος είναι $\omega_{\text{beat}} = 2\omega' = \omega_1 - \omega_2$ και η αντίστοιχη συχνότητα $f_{\text{beat}} = f_1 - f_2$



Εφαρμογή: το κούρδισμα των μουσικών οργάνων → ρύθμιση μέχρι να εξαφανιστεί το «τρεμούλιασμα» στην ένταση του ήχου, που οφείλεται στο διακρότημα (που δημιουργείται από τη διαφορά μεταξύ ω_1 και ω_2)

Παράδειγμα 1

Η χορδή της νότας λα ενός βιολιού είναι τεντωμένη λίγο περισσότερο από ότι πρέπει. Όταν η χορδή ηχεί ταυτόχρονα με ένα διαπασών που ταλαντώνεται ακριβώς στη νότα λα (440Hz) ακούγονται 4 διακροτήματα το δευτερόλεπτο. Ποια είναι η περίοδος ταλάντωσης της χορδής του βιολιού;

Έστω T_β η περίοδος ταλάντωσης της χορδής του βιολιού. Η αντίστοιχη συχνότητα θα είναι $f_\beta = 1/\mathrm{T}_\beta$.

Δίνεται ότι $f_{beat} = 4s^{-1}$

Αλλά, $f_{\text{beat}} = f_1 - f_2 = f_\beta - f_{\delta\iota\alpha\pi\alpha\sigma\omega\nu} \Rightarrow$

$4s^{-1} = 1/\mathrm{T}_\beta - 440s^{-1} \Rightarrow \mathrm{T}_\beta = \left(\frac{1}{444}\right) s = 2.25 \times 10^{-3} s$

Παράδειγμα 2

Δύο πανομοιότυπες χορδές πιάνου έχουν θεμελιώδη συχνότητα 600Hz. Ποια κλασματική αύξηση της τάσης της μιας χορδής θα οδηγήσει στην εμφάνιση 6 διακροτημάτων το δευτερόλεπτο, όταν οι δύο χορδές ταλαντώνονται ταυτόχρονα.

Κάθε χορδή ταλαντώνεται στη θεμελιώδη συχνότητα με $L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L$ (1)

$f = \frac{\upsilon}{\lambda}$ (2)

$\upsilon = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mu}}$ (3)

Από (1), (2), και (3) προκύπτει ότι $f = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mu}}$

Έστω $f_1 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mu}}$ και $f_2 = \frac{1}{2L}\sqrt{\frac{\mathrm{F}+\Delta\mathrm{F}}{\mu}}$

Τότε $\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{\mathrm{F}+\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}}}$

Για $\Delta F << F$, $\frac{f_2}{f_1} = \sqrt{1 + \frac{\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}}} \cong 1 + \frac{1}{2}\frac{\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}} \Rightarrow$, $f_{\text{beat}} = f_2 - f_1 = \frac{1}{2}\frac{\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}} f_1 \Rightarrow$

$6\text{Hz} = \frac{1}{2}\frac{\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}} 600\text{Hz} \Rightarrow \frac{\Delta\mathrm{F}}{\mathrm{F}} = 0.02$