

Γεωμετρική Οπτική Λεπτοί Φακοί

Απεικόνιση από λεπτούς φακούς
Σύστημα λεπτών φακών

Περίληψη τύπων για είδωλα από διάθλαση για σφαιρικές διεπιφάνειες μεταξύ δύο μέσων με διαφορετικούς δείκτες διάθλασης

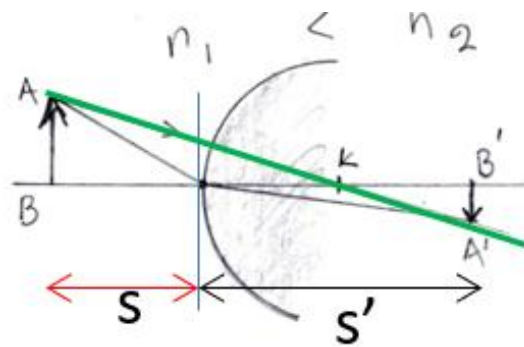
- Κοινός τύπος για διάθλαση από κοίλες ή κυρτές σφαιρικές επιφάνειες, για παραξονικές ακτίνες

$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

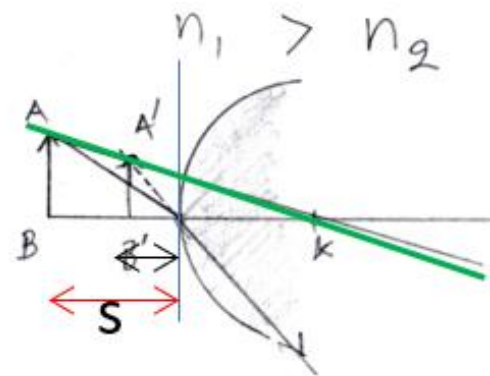
- Προσοχή, πραγματικά ($s' > 0$) είναι τα είδωλα που σχηματίζονται στην **αντίθετη πλευρά της διαθλαστικής επιφάνειας** από αυτή που βρίσκεται το αντικείμενο
- Προσοχή! Για να ισχύει ο παραπάνω τύπος, **η ακτίνα καμπυλότητας είναι θετική όταν ένα αντικείμενο αντικρίζει μία κυρτή διαθλαστική επιφάνεια**. Το αντίθετο ισχύει για μία κοίλη επιφάνεια.

- Κατακόρυφη μεγέθυνση ειδώλου

$$m = \frac{h_i}{h_o} = - \frac{n_1 s'}{n_2 s}$$

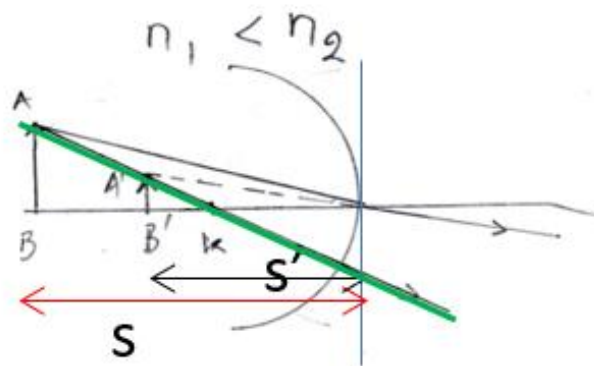


$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

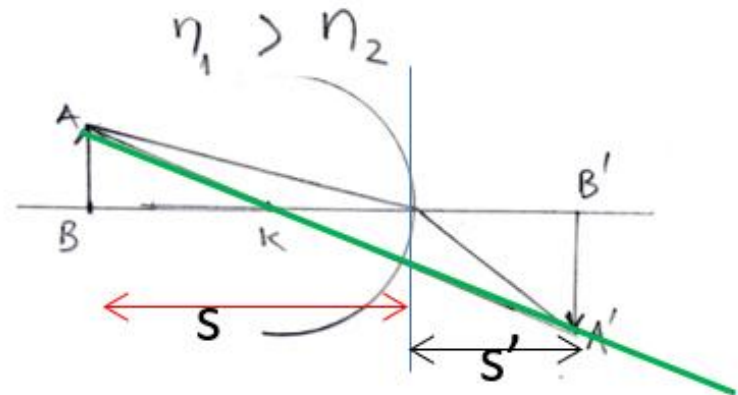


$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{(-s')} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

ΚΟΙΛΟ ΔΙΟΠΤΡΟ



$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{(-s')} = \frac{n_2 - n_1}{(-R)}$$



$$\frac{n_1}{s} + \frac{n_2}{s'} = \frac{n_2 - n_1}{(-R)}$$

Φακοί με σφαιρικές επιφάνειες

Στα επόμενα υποθέτουμε ότι:

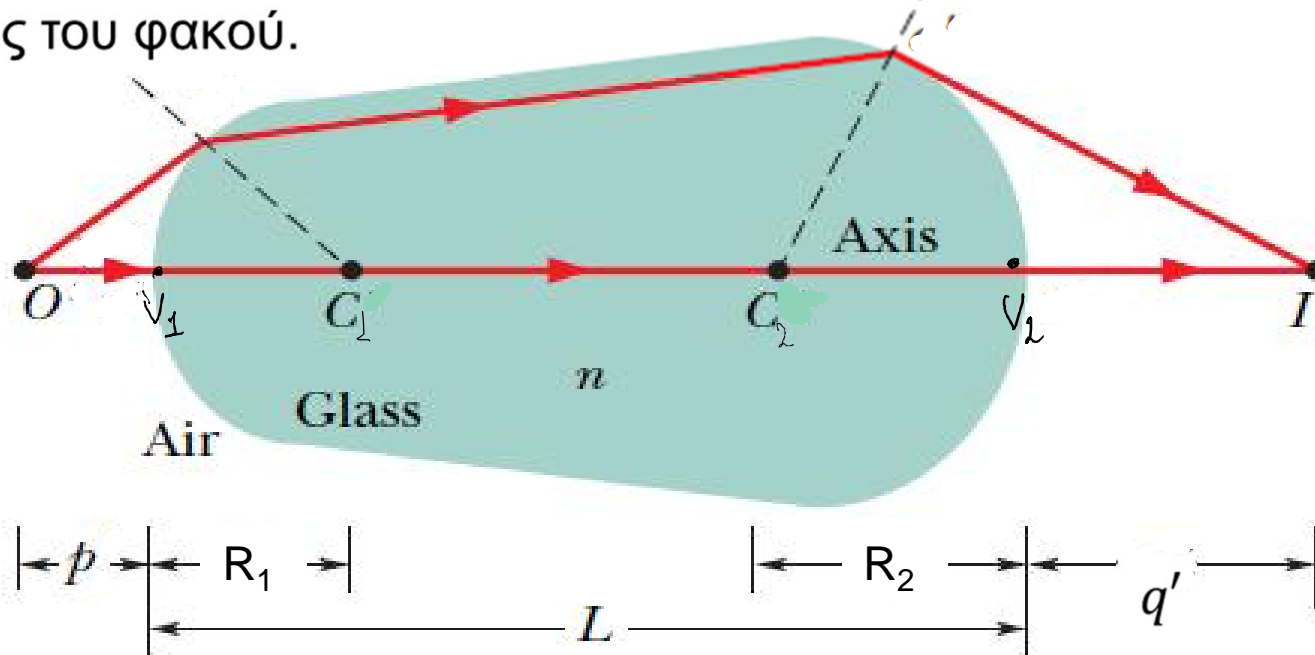
- Οι δύο επιφάνειες που ορίζουν τον φακό είναι κοίλες ή κυρτές σφαιρικές επιφάνειες, με γενικά διαφορετικές ακτίνες καμπυλότητας R_1 και R_2 .
- Οι ακτίνες που θα θεωρήσουμε είναι παραξονικές.
- Το πάχος του φακού είναι πολύ μικρό (λεπτός φακός)

Θα υποθέσουμε στα επόμενα ότι ο φακός είναι τοποθετημένος στον αέρα, όπου ο δείκτης διάθλασης είναι περίπου $=1$.

Έστω ότι ο δείκτης διάθλασης του υλικού του φακού είναι n .



Εδώ, σχεδιάζουμε τον φακό με μεγάλο πάχος, για να φαίνεται καλά η μεθοδολογία. L είναι το πάχος του φακού.

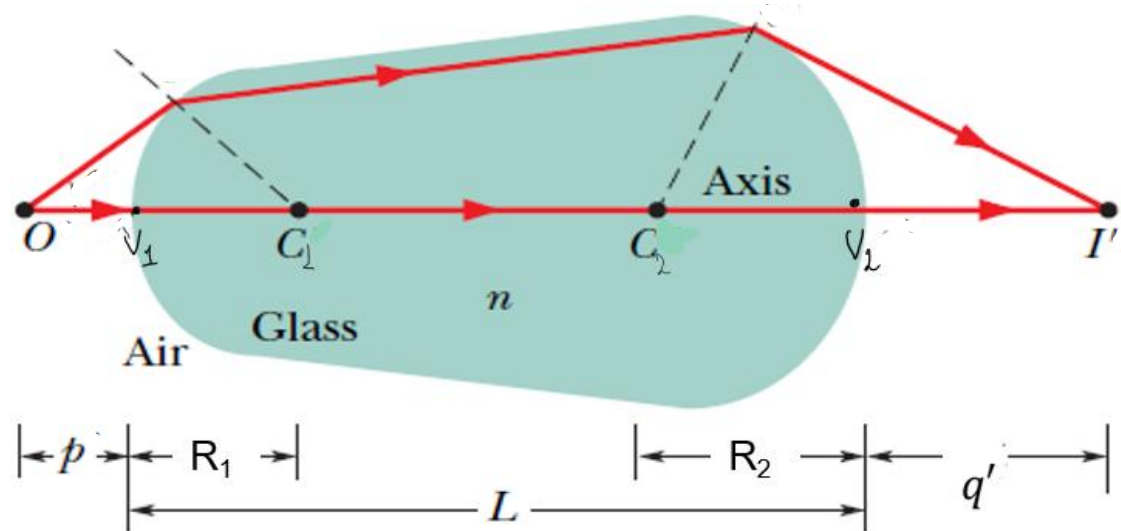


Έστω ότι τα κέντρα καμπυλότητας των δύο επιφανειών είναι C_1 και C_2 και οι αντίστοιχες ακτίνες καμπυλότητας R_1 και R_2 .

Η απόσταση του αντικειμένου O από τη κορυφή της πρώτης επιφάνειας OV_1 συμβολίζεται με p .

Η απόσταση του ειδώλου που σχηματίζεται από τον φακό, I' , από τη κορυφή της δεύτερης επιφάνειας είναι $I'V_2 = q'$.

Θέλουμε να βρούμε πως μπορούμε να υπολογίσουμε την απόσταση q' όπου σχηματίζεται το είδωλο.



1^ο βήμα: Βρίσκουμε τη θέση του ειδώλου που σχηματίζεται από την πρώτη επιφάνεια.

2^ο βήμα: Το είδωλο από την πρώτη επιφάνεια, αποτελεί το αντικείμενο για τη δεύτερη επιφάνεια. Το τελικό είδωλο, είναι το είδωλο που σχηματίζεται από τη δεύτερη επιφάνεια.

Διάθλαση στη πρώτη επιφάνεια.

Έστω μία ακτίνα από το αντικείμενο O το οποίο φτάνει στη σφαιρική διαχωριστική επιφάνεια στο σημείο A . Το είδωλο σχηματίζεται σε απόσταση q από τη κορυφή V_1 , σύμφωνα με τη σχέση

$$\frac{n_1}{p} + \frac{n_2}{(-q)} = \frac{n_2 - n_1}{(+R_1)} \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{n}{q} = \frac{n-1}{R_1} \quad (1)$$

όπου έχουμε βάλει πρόσημο $-$ στο q διότι το είδωλο είναι φανταστικό.

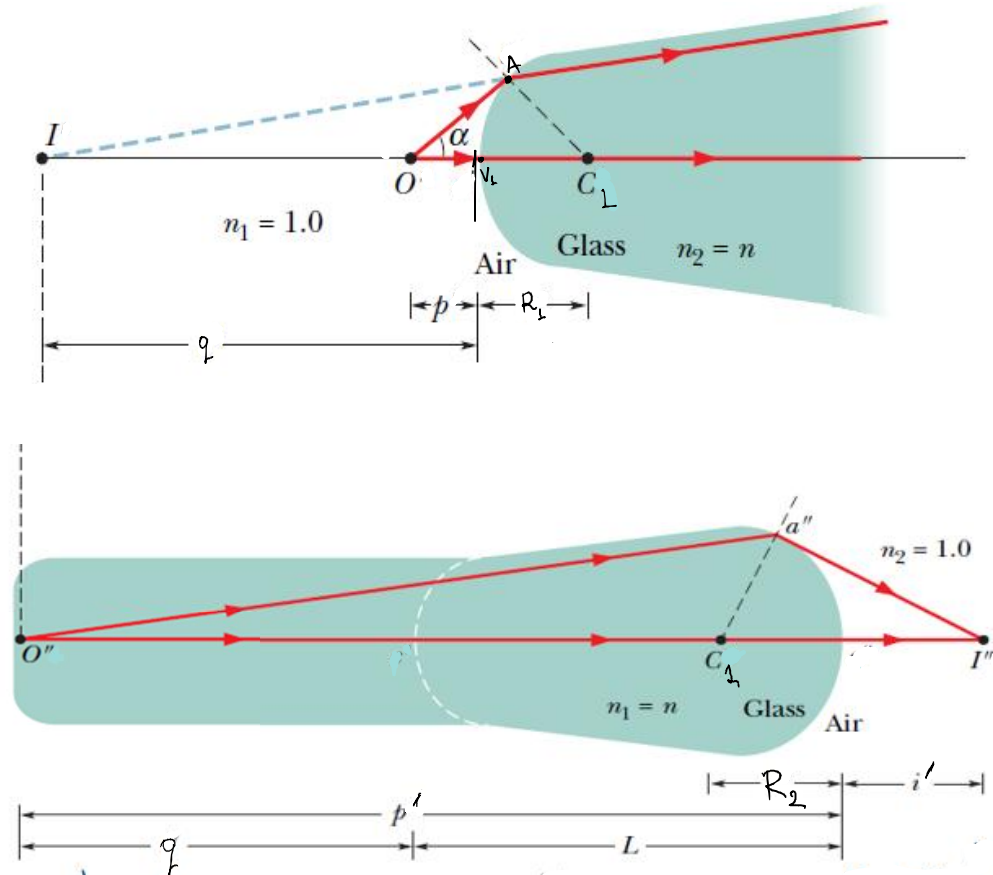
Επίσης, εδώ, $n_1 = 1$ και $n_2 = n$

Διάθλαση στη δεύτερη επιφάνεια

Το αντικείμενο για τη 2^η διάθλαση είναι το είδωλο $I \equiv O'$. Η απόσταση του O' από τη κορυφή V_2 είναι ίση με $p' = q + L$

$$\frac{n}{q+L} + \frac{1}{q'} = \frac{n_2 - n_1}{R_2} = \frac{1-n}{R_2} \quad (2)$$

Προσόν: εδώ n_1 είναι θετικό



Από τις σχέσεις (1) και (2), υποθέτοντας επίσης ότι το πάχος του φακού είναι πολύ μικρό ($L \rightarrow 0$) βρίσκουμε:

$$(1) \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{n}{q} = \frac{n-1}{R_1} \Rightarrow \frac{n}{q} = \frac{1}{p} - \frac{n-1}{R_1} \quad (3)$$

$$(2) \ \& \ (3) \Rightarrow \frac{1}{p} - \frac{n-1}{R_1} + \frac{1}{q'} = \frac{1-n}{R_2} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = \frac{1-n}{R_2} + \frac{n-1}{R_1} \Rightarrow$$

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q'} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (4)$$

Αν το αντικείμενο είναι στο άπειρο, τότε το είδωλο σχηματίζεται στην λεγόμενη εστία του φακού, και το q' είναι η εστιακή απόσταση f .

Άρα, από την (4) προκύπτει ότι:

$$\frac{1}{f} = (n-1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right) \quad (5)$$

Όλη η παραπάνω διαδικασία μπορεί να επαναληφθεί με το αντικείμενο

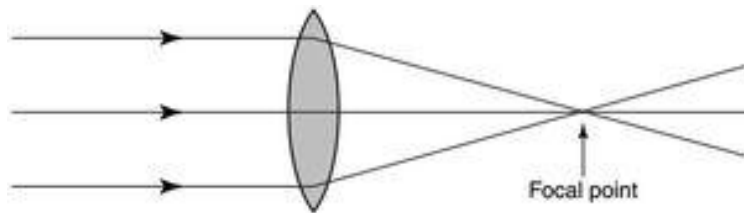
Μπορούμε να ξαναγράψουμε τη σχέση (4) χρησιμοποιώντας την έννοια της εστιακής απόστασης (επίσης ο τόνος στο q είναι περιττός).

Οπότε καταλήγουμε στον λεγόμενο τύπο των κατασκευαστών των (λεπτών) φακών:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f} \quad \text{ή}$$

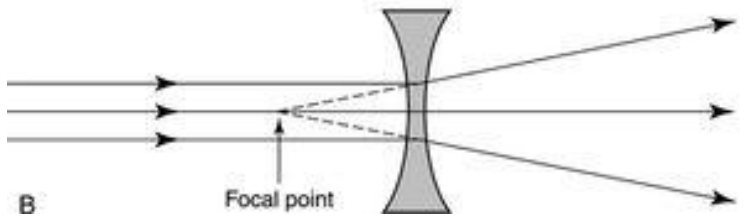
$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{1}{f}$$

$$\frac{1}{f} = (n - 1) \left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2} \right)$$



A

Συγκλίνων φακός $\rightarrow f > 0$
($n > 1, R_1 > 0, R_2 < 0$)



B

Αποκλίνων φακός $\rightarrow f < 0$
($n > 1, R_1 < 0, R_2 > 0$)

Αν ο φακός είναι από υλικό με μικρότερο δείκτη διάθλασης από το περιβάλλον μέσο, τότε το κάτω σχήμα θα δώσει συγκλίνοντα φακό και το πάνω αποκλίνοντα!

Είδωλο μικρού αντικειμένου από λεπτό φακό

Ακολουθούμε την ίδια διαδικασία όπως και για την εύρεση ειδώλων από κάτοπτρα ή δίοπτρα.

Σημειώνουμε τις θέσεις των εστιών και τη θέση του αντικειμένου. Στη συνέχεια σχεδιάζουμε την πορεία δύο ακτίνων από το πάνω άκρο του αντικειμένου, π.χ.

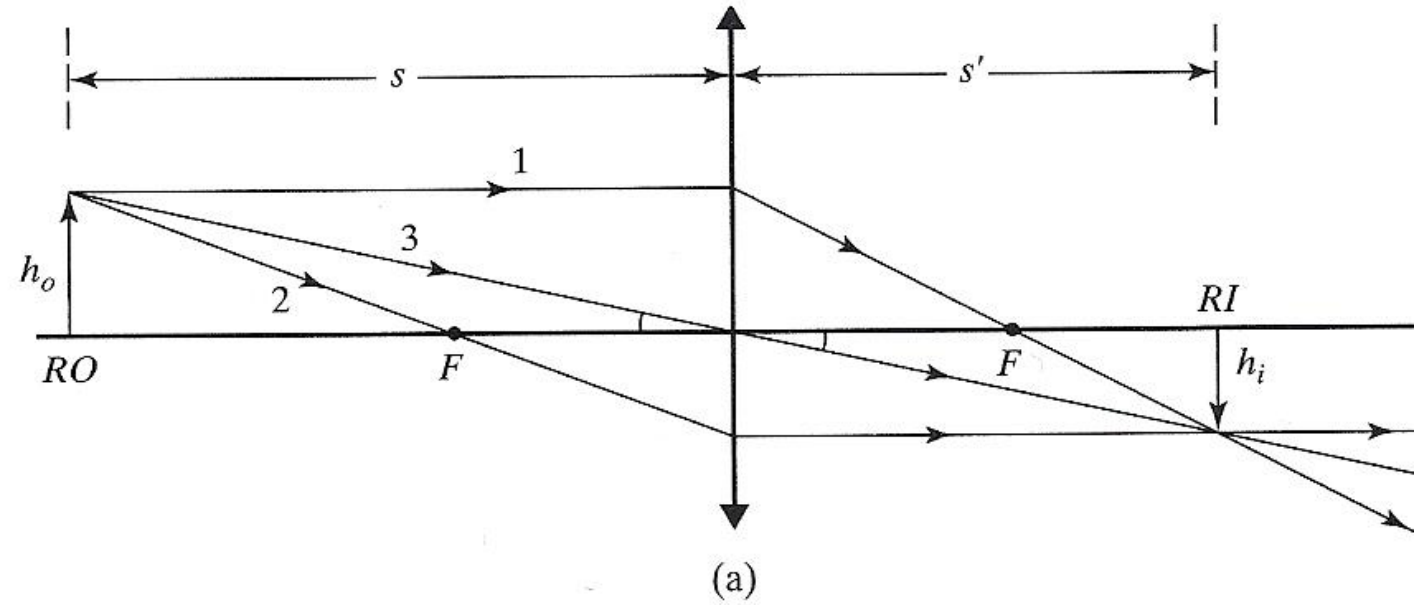
(i) Μίας παράλληλης προς τον άξονα, που αφού περάσει από τον φακό θα πρέπει να περάσει από την εστία.

(ii) Μίας που να περνά από το κέντρο του φακού. Αυτή διέρχεται χωρίς να αλλάξει διεύθυνση (σκεφτείτε γιατί;)

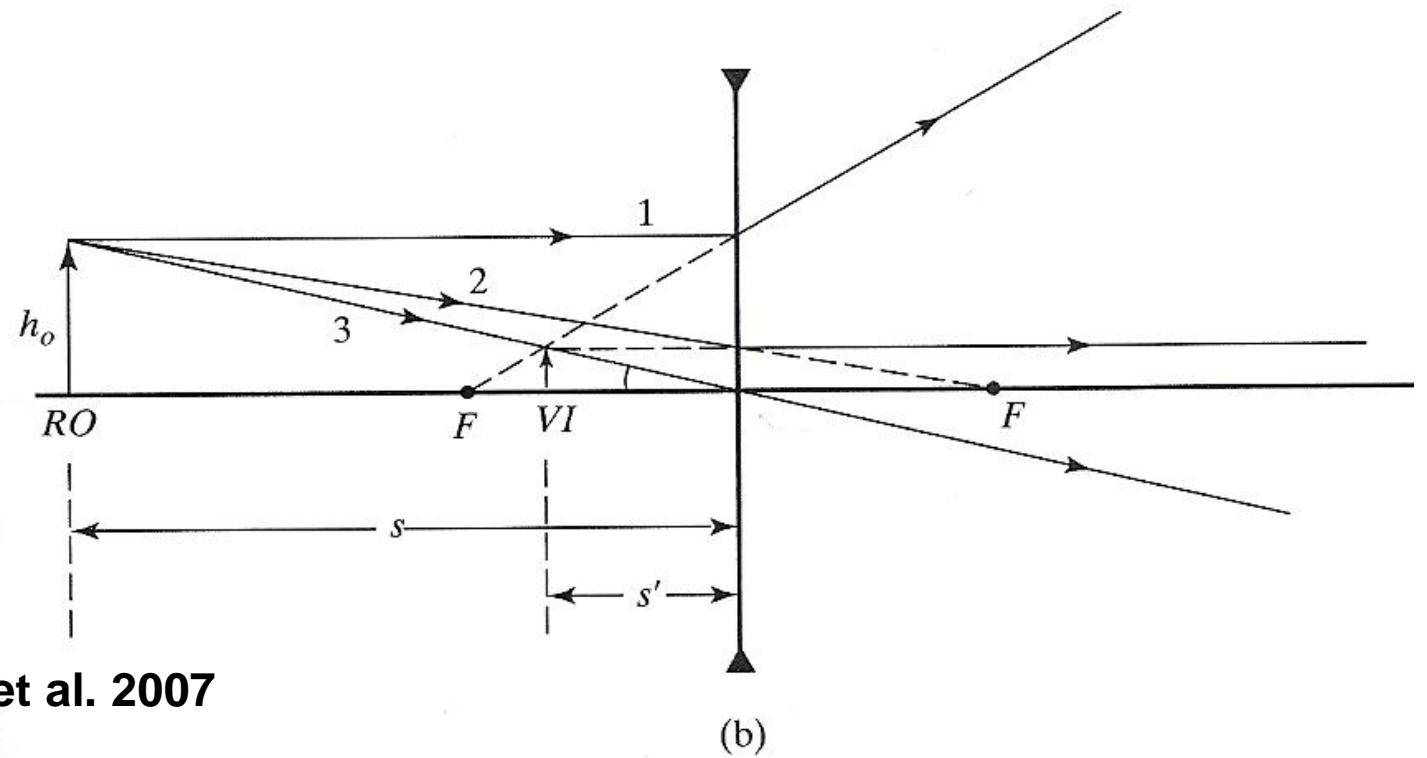
Στο σημείο όπου τέμνονται οι δύο ακτίνες ή οι προεκτάσεις τους φέρνουμε κάθετο προς τον άξονα και σχηματίζουμε το είδωλο.

Προσοχή: ο τύπος των κατασκευαστών των φακών ισχύει για λεπτούς φακούς και παραξονικές ακτίνες

συγκλίνων



αποκλίνων



Σχήματα από Pedrotti et al. 2007

Χαρακτηρισμός του ειδώλου

Πραγματικά είδωλα (s' ή $q > 0$) σχηματίζονται στην αντίθετη πλευρά του φακού από αυτή που βρίσκεται το αντικείμενο και **φανταστικά** είδωλα (s' ή $q < 0$) στη πλευρά όπου βρίσκεται το αντικείμενο.

Μεγέθυνση – ορθά και αντεστραμμένα είδωλα

$$m = -\frac{s'}{s} \left(= -\frac{q}{p} \right)$$

(απόδειξη: $m = m_1 m_2$ m_1 : από τη 1^η διάθλαση, m_2 από τη 2^η)

$$m_1 = -\frac{n_1 q}{n_2 p} = -\frac{1 \cdot (-q)}{n p} = \frac{q}{n p}$$

$$m_2 = -\frac{n q'}{1 \cdot q}$$

$$m = m_1 \cdot m_2 = -\frac{q}{n p} \cdot \frac{n q'}{q} = -\frac{q'}{p}$$

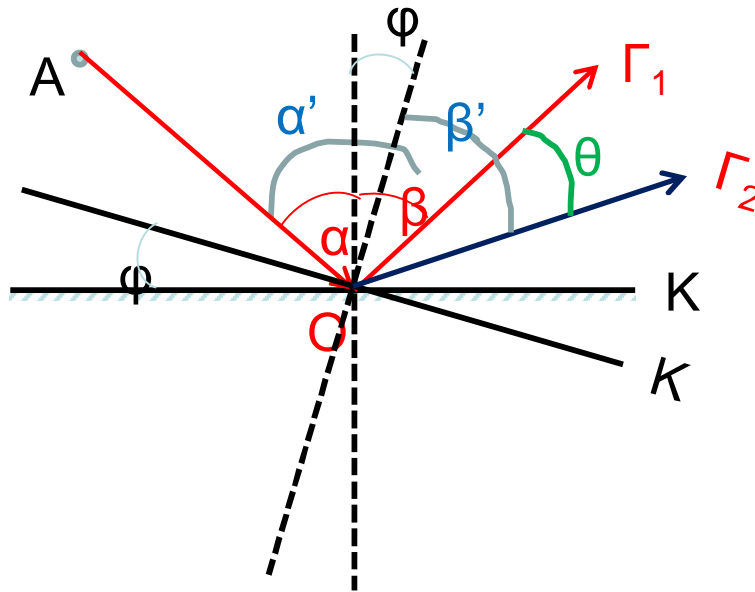
(“πελάμε” τον εἶσο ὅσο
στρωῶ τῆσο)

Όταν το $m < 0$ το είδωλο είναι αντεστραμμένο, όταν $m > 0$, είναι ορθό.

**Ανάκλαση – Διάθλαση –
Κάτοπτρα- Φακοί – Ασκήσεις**

Άσκηση 1

Όταν επίπεδο κάτοπτρο στραφεί κατά γωνία φ περί άξονα κάθετο στο επίπεδό του τότε η ανακλώμενη ακτίνα στρέφεται κατά γωνία 2φ



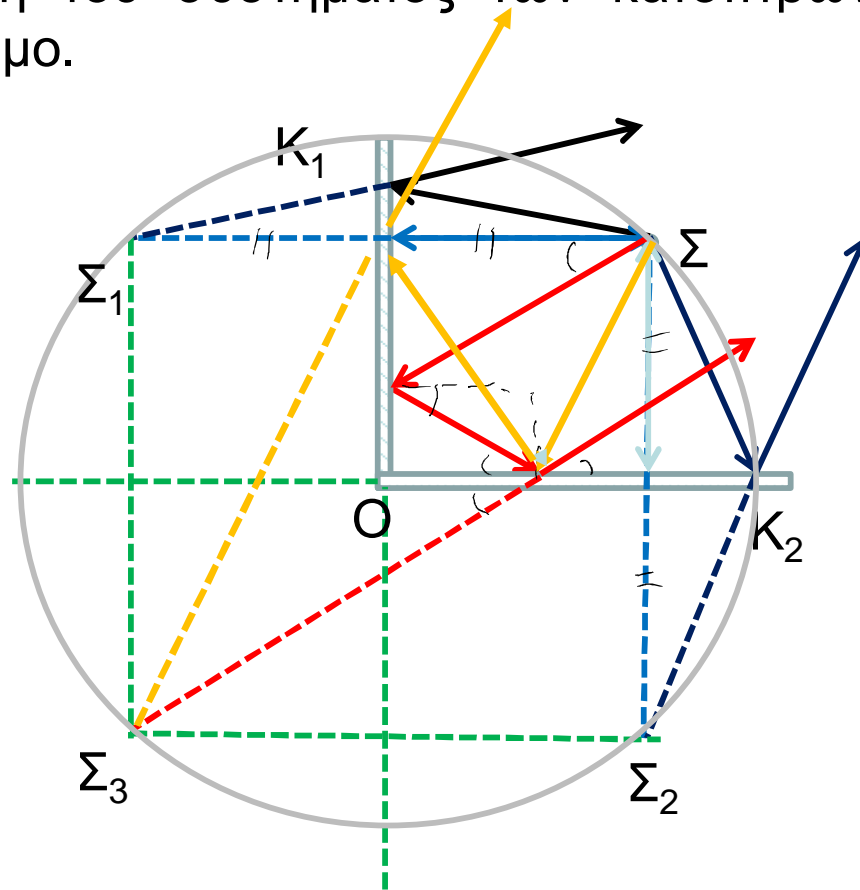
Λύση:

$$\left. \begin{aligned} \theta &= \beta' - (\beta - \varphi) = \beta' - \beta + \varphi \\ \text{Αλλά } \alpha' &= \beta' \ \& \ \alpha = \beta \end{aligned} \right\} \Rightarrow$$

$$\theta = \alpha' - \alpha + \varphi = \varphi + \varphi = 2\varphi$$

Άσκηση 2

Σχηματισμός ειδώλου φωτεινού σημείου μέσω συστήματος δύο καθέτων επιπέδων κατόπτρων. Στο σχήμα που ακολουθεί φαίνεται η κάτοψη του συστήματος των κατόπτρων. Η πηγή Σ βρίσκεται στη διχοτόμο.



Σ_1 το είδωλο της Σ από το K_1

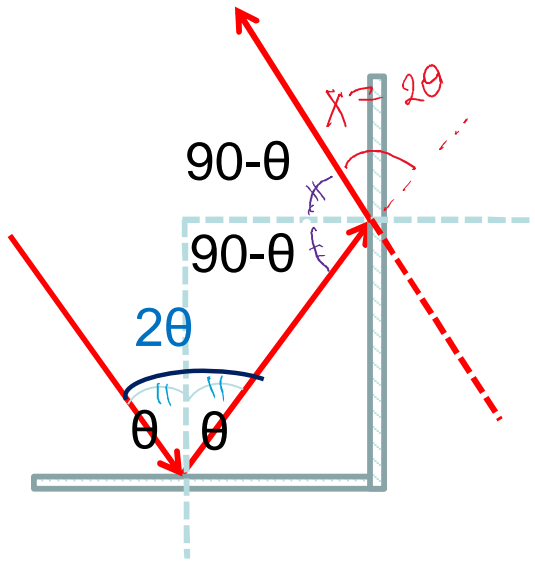
Σ_2 το είδωλο της Σ από το K_2

Σ_3 σχηματίζεται από ανάκλαση πρώτα στο K_1 και ακολούθως στο K_2 και αντίστροφα

- Διαπιστώστε ότι τα σημεία Σ , Σ_1 , Σ_2 & Σ_3 βρίσκονται στην περιφέρεια κύκλου ακτίνας OS .

Άσκηση 3

Δείξτε ότι η ακτίνα προσπίπτουσα στο εσωτερικό συστήματος δύο καθέτων επιπέδων κατόπτρων με οποιαδήποτε γωνία εξέρχεται πάντα αντιπαράλληλα προς την αρχική.



Από το σχήμα φαίνεται ότι:

$$\chi = 180 - 2(90 - \theta) = 2\theta$$

Συνεπώς προσπίπτουσα και ανακλώμενη είναι αντιπαράλληλες.

Άσκηση 4 σφαιρικά κάτοπτρα

Μικρό αντικείμενο Ο βρίσκεται στον κεντρικό άξονα ενός κοίλου σφαιρικού κατόπτρου σε απόσταση +18cm από τη κορυφή του κατόπτρου. Δίνεται η απόσταση μεταξύ εστίας και κέντρου καμπυλότητας 12cm.

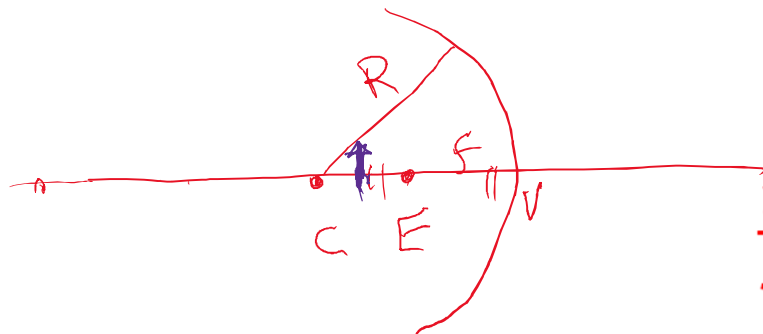
Βρείτε: (i) την ακτίνα καμπυλότητας (με πρόσημο)

(ii) Την απόσταση του ειδώλου από την κορυφή του κατόπτρου

(iii) Την εγκάρσια μεγέθυνση

(iv) Αν είναι πραγματικό ή φανταστικό, ορθό ή αντεστραμμένο

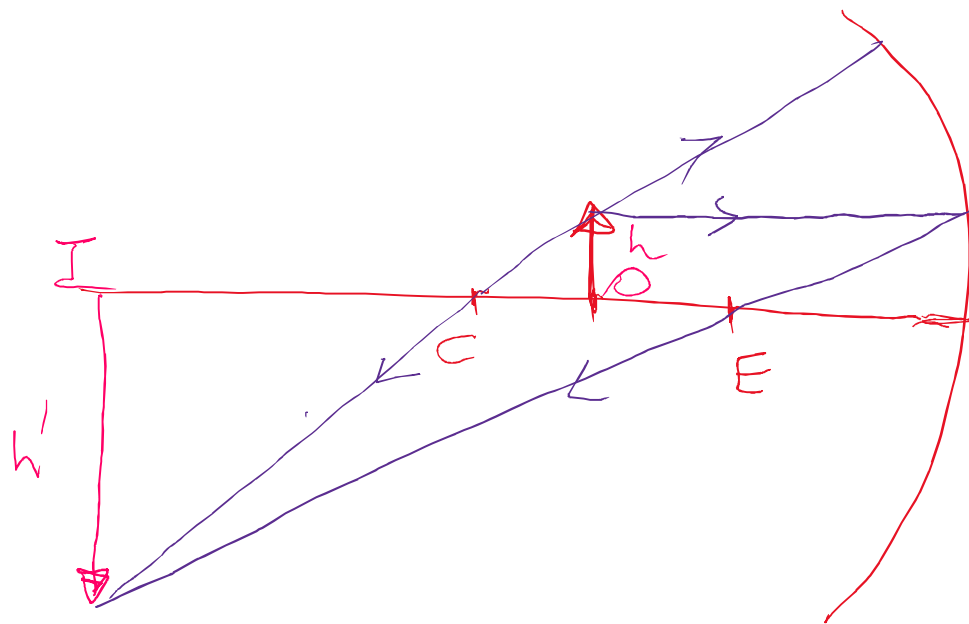
Να γίνει διάγραμμα ακτίνων



$f = \frac{R}{2}$ $R > 0$ $R = +24 \text{ cm}$

$s = +18 \text{ cm}$ (πραγματικό)

$$\frac{1}{s} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{R}$$
$$\frac{1}{+18} + \frac{1}{s'} = \frac{2}{24}$$
$$\Rightarrow \frac{1}{s'} = \frac{1}{12} - \frac{1}{18} = \frac{1}{36} \Rightarrow s' = 36 \text{ cm}$$
$$m = -s'/s = -\frac{36}{18} = -2$$



Άσκηση 5

Ένα σημειακό αντικείμενο είναι τοποθετημένο σε βάθος d μέσα σε ένα υγρό με δείκτη διάθλασης n . Ένας παρατηρητής, πάνω από την ελεύθερη επιφάνεια του υγρού, βλέπει το αντικείμενο υπό γωνία θ . Ποιο είναι το φαινόμενο βάθος του αντικειμένου;

$$(A'B') = h$$

$$(AA'') = (A'B) = x$$

$$\tan \theta = \frac{h}{(A'B)} = \frac{h}{x} \quad (1)$$

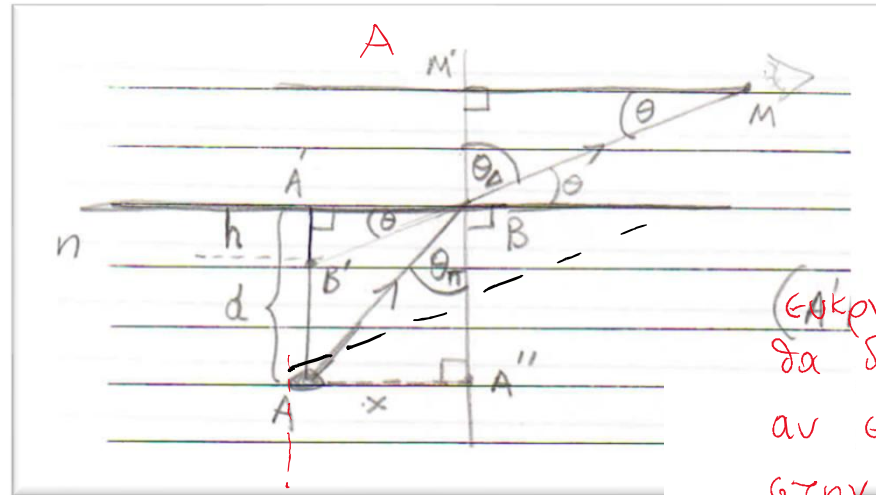
$$\tan \theta_{\pi} = \frac{(AA'')}{(BA'')} = \frac{x}{d} \Rightarrow x = d \tan \theta_{\pi} \quad (2)$$

$$\theta_{\Delta} + \theta = 90^{\circ} \quad (3)$$

$$\text{Νόμος Snell } n \sin \theta_{\pi} = \sin \theta_{\Delta} \quad (4)$$

$$h = x \tan \theta \stackrel{(2)}{=} d \tan \theta_{\pi} \tan \theta \stackrel{(3)}{=} h = d \tan \theta_{\pi} \cot \theta_{\Delta} = d \frac{\sin \theta_{\pi} \cos \theta_{\Delta}}{\cos \theta_{\pi} \sin \theta_{\Delta}} \stackrel{(4)}{=} d \cdot \frac{1 \cos \theta_{\Delta}}{n \cos \theta_{\pi}} \Rightarrow$$

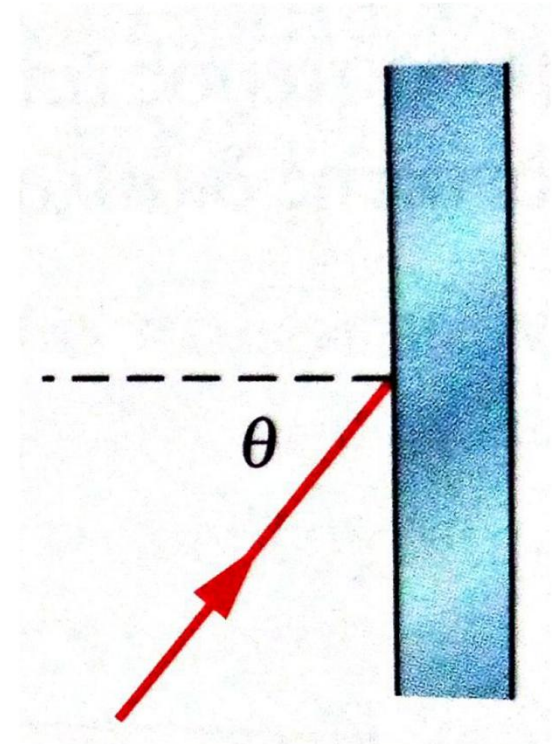
$$h = \frac{d \cos \theta_{\Delta}}{n \sqrt{1 - \sin^2 \theta_{\pi}}} \stackrel{(3,4)}{=} \frac{d \cos(90 - \theta)}{n \sqrt{1 - \left(\frac{\sin \theta_{\Delta}}{n}\right)^2}} \stackrel{(3)}{=} \frac{d \sin \theta}{n \sqrt{1 - \frac{\cos^2 \theta}{n^2}}}$$

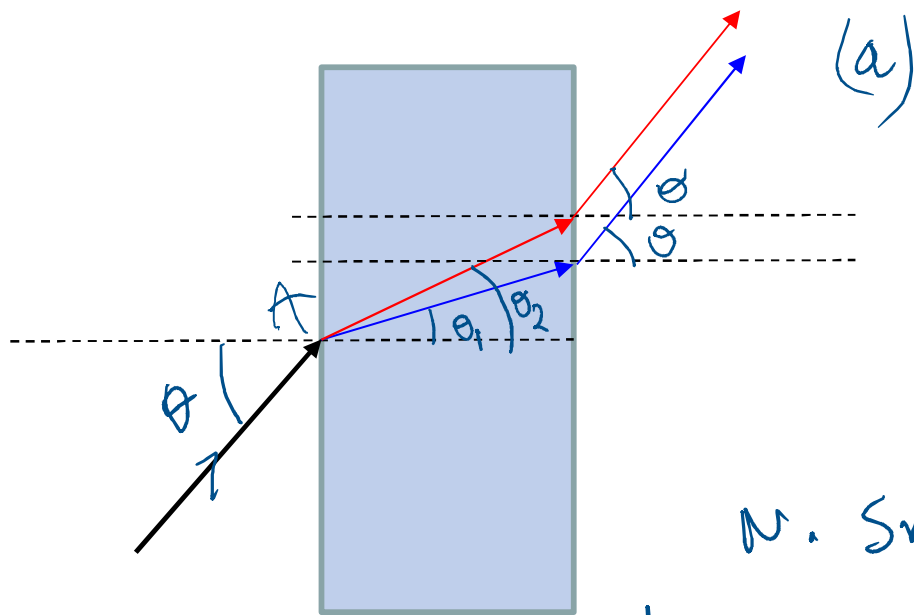


(Εκρινές είδωλο
θα δούμε μόνο
αν είμαστε κοντά
στην κατακόρυφο)

Άσκηση 6 (Halliday ασκ. 33.51)

Μια δέσμη λευκού φωτός προσπίπτει υπό γωνία 50° πάνω σε κοινό τζάμι, που έχει δείκτη διάθλασης για το ορατό φως που κυμαίνεται από 1.524 στο μπλε άκρο μέχρι 1.509 στο κόκκινο άκρο του ορατού φάσματος. Οι δυο όψεις του τζαμιού είναι παράλληλες. Πόσος είναι ο χρωματικός διαχωρισμός των χρωμάτων της δέσμης (α) όταν το φως εισέρχεται στο γυαλί και (β) όταν εξέρχεται από την απέναντι όψη.





(a)

$$\theta_i = \theta = 50^\circ$$

$$n_{\text{udara}} = 1.524$$

$$n_{\text{kaca}} = 1.509$$

$$n_{\text{udara}} \approx 1$$

N. Snell 6to 6mucio A:

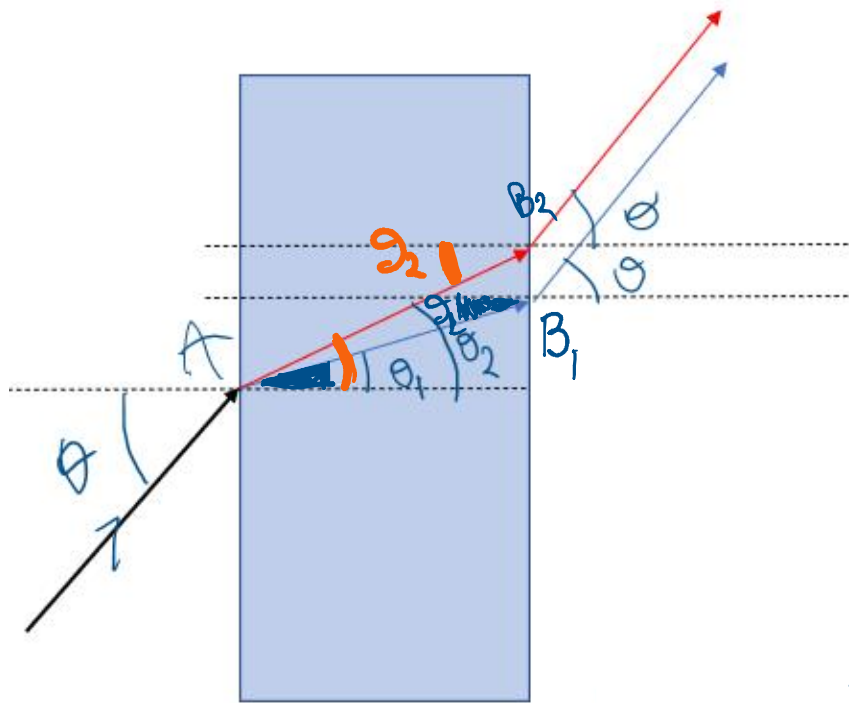
$$\text{Udara: } 1 \cdot \sin 50^\circ = 1.524 \times \sin \theta_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_1 = 30,176^\circ$$

$$\text{Kaca: } 1 \cdot \sin 50^\circ = 1.509 \times \sin \theta_2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \theta_2 = 30,508^\circ$$

$$\text{Mencari 6to wakti } \Delta\theta = 30,508^\circ - 30,176^\circ \approx 0,332^\circ$$



Ν. Snell στο B_1 !

$$n_{\text{αέρα}} \cdot \sin \theta_1 = n_{\text{μέσο}} \cdot \sin \theta_1'$$

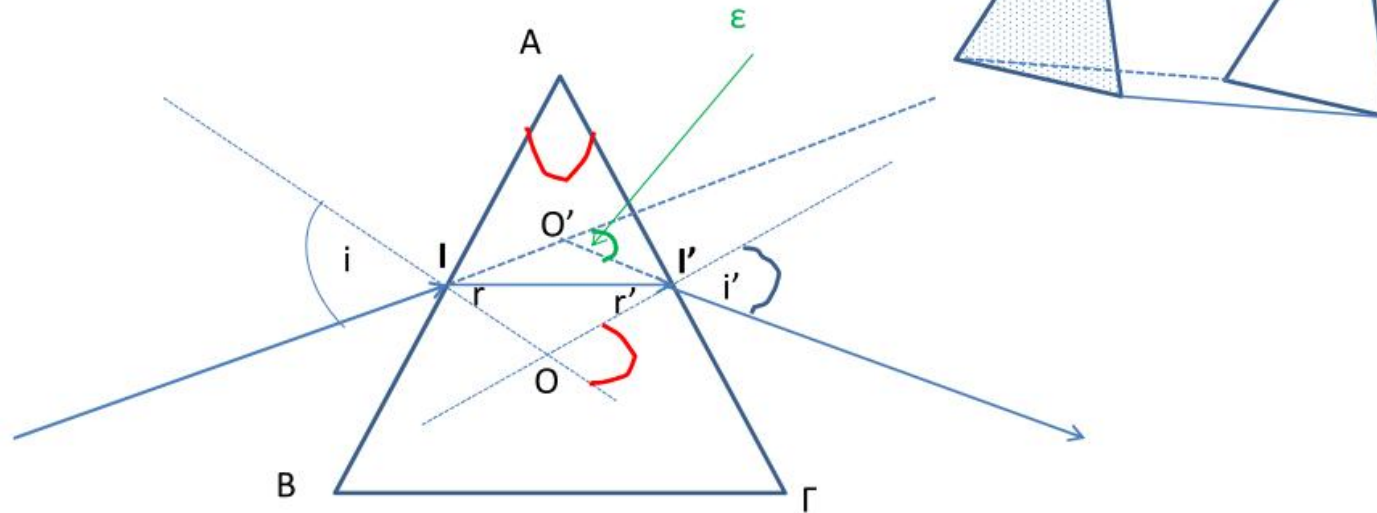
$$\Rightarrow \sin \theta_{\text{μέσο}} = n_{\text{μέσο}} \cdot \frac{\sin \theta}{n_{\text{μέσο}}} = \sin \theta$$

$$\Rightarrow \theta_{\text{μέσο}} = \theta$$

• Όμοια στο B_2 $\theta_{\text{κόκ}} = \theta$

Άρα η δέσμη είναι παραλλήλη και
δεν υπάρχει χρωματική διάσπαση

Άσκηση 7: γωνία εκτροπής σε πρίσμα



Γωνία εκτροπής μονοχρωματικής ακτίνας μέσω πρίσματος ισοσκελούς διατομής

Έστω A η θλαστική γωνία του πρίσματος.

$$\left. \begin{array}{l} I: 1 \sin(i) = n \sin(r) \\ I': n \sin(r') = 1 \sin(i') \end{array} \right\} \quad (1)$$

$$\text{Από το τρίγωνο } OII': A = r + r' \quad (2)$$

$$\text{Από το τρίγωνο } O'I'I', \text{ η γωνία εκτροπής } \varepsilon \text{ είναι: } \varepsilon = (i - r) + (i' - r') = (i + i') - (r + r') \rightarrow \varepsilon = (i + i') - A \quad (3)$$

Οξέα πρίσματα:

και μικρές γωνίες πρόσπτωσης, διάθλασης

Από την (1):

$$\begin{cases} i = nr \\ i' = nr' \end{cases}$$

Οπότε η (3) γίνεται:

$$\Rightarrow \varepsilon = n(r + r') - A = nA - A = (n - 1)A$$
$$\varepsilon = (n - 1)A \quad (4)$$

Η γωνία εκτροπής για οξέα πρίσματα είναι ανεξάρτητη της γωνίας πρόσπτωσης.

Γωνία ελάχιστης εκτροπής:

δεν λύνεται από το μέρος της άσκησης ...

Άραγε υπάρχει μία χαρακτηριστική διαδρομή για την οποία η γωνία εκτροπής να είναι ελάχιστη;

Εάν υπάρχει τότε θα πρέπει $d\varepsilon/di=0$

$$(3) \Rightarrow \frac{d\varepsilon}{di} = 1 + \frac{di'}{di} = 0 \Rightarrow \frac{di'}{di} = -1 \quad (5)$$

Με διαφορίση των σχέσεων (1) έχουμε:

$$\cos i di = n \cos r dr$$

$$\cos i' di' = n \cos r' dr'$$

Επιπλέον από την (2) με διαφορίση έχουμε: $dr = dr'$

Οπότε:
$$\frac{di'}{di} = -\frac{\cos i \cos r'}{\cos i' \cos r} \quad (6)$$

Επειδή οι γωνίες i, r, i', r' είναι οξείες και επιπλέον ικανοποιούν τις συμμετρικές σχέσεις (1), οι εξισώσεις (5) & (6) μπορούν ταυτόχρονα να ικανοποιηθούν μόνον όταν

$$i = i' \quad \& \quad r = r' \quad (7)$$

Τότε $\epsilon = \epsilon_{\min}$

Λόγω των (3) & (7): $\epsilon_{\min} = 2i - A$, απ' όπου
Λόγω των (2) & (7): $A = 2r$, απ' όπου

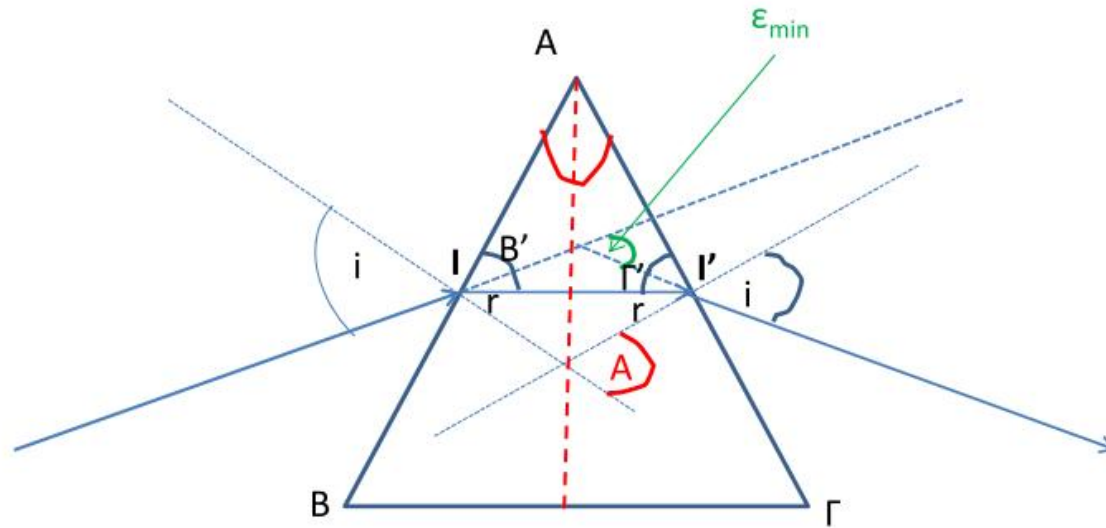
$$\epsilon_{\min} = 2i - A \Rightarrow i = \frac{\epsilon_{\min} + A}{2}$$

$$r = A/2 \quad (8)$$

Από τις (1) & (8) προκύπτει:

$$n = \frac{\sin \frac{\epsilon_{\min} + A}{2}}{\sin \frac{A}{2}} \quad (9)$$

Στην περίπτωση που η ακτίνα εκτρέπεται με την γωνία ελαχίστης εκτροπής ϵ_{\min} η διαδρομή της ακτίνας είναι συμμετρική αναφορικά με τις 2 επιφάνειες του πρίσματος.



$$B' + r = 90^\circ \text{ \& \ } \Gamma' + r = 90^\circ \rightarrow B' = \Gamma'$$

Τα ισοσκελή τρίγωνα $AB\Gamma$ & $AI'I'$ είναι όμοια, συνεπώς, $B = B'$ & $\Gamma = \Gamma'$
 Άρα η $B'I'$ είναι παράλληλη της $B\Gamma$, δηλαδή η ακτίνα κατά την διαδρομή της στο πρίσμα είναι παράλληλη προς την βάση.

