ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. Μ**ηχανικά κύματα**

Η έννοια της εμπέδησης

Ασκήσεις 3 Υπέρθεση-ανάκλαση-διάθλαση

Η έννοια της Εμπέδησης

Για να κατανοήσουμε τη φυσική σημασία **της εμπέδησης**, εξετάζουμε τη δύναμη που πρέπει να ασκήσει η πηγή ενός μηχανικού κύματος προκειμένου να παραχθεί η αρχική μετατόπιση του υλικού του μέσου (δηλ. για να δημιουργηθεί η διαταραχή που διαδίδεται στο μέσο).

Στην περίπτωση ενός εγκάρσιου μηχανικού κύματος, η πηγή (που μπορεί να είναι το χέρι σας που κινεί το ένα άκρο μιας χορδής κάθετα προς τη χορδή) πρέπει να υπερνικήσει την κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης τάσης.

Όπως έχουμε δει αν η μετατόπιση ενός στοιχειώδους τμήματος της χορδής από τη θέση ισορροπίας (η Θ.Ι. είναι πάνω στον οριζόντιο άξονα) είναι y και εάν η γωνία της χορδής ως προς την οριζόντια είναι θ, τότε η κατακόρυφη συνιστώσα της δύναμης τάσης είναι:

$$F_y = F\sin\theta \approx F\frac{\partial y}{\partial x} \qquad (1)$$

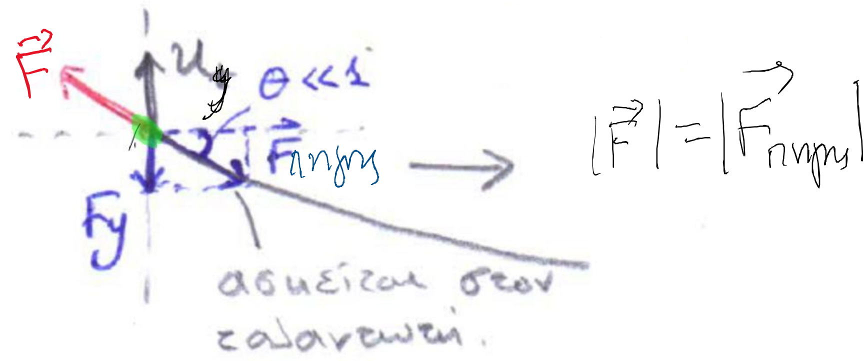
Για οποιοδήποτε μεμονωμένο οδεύον κύμα (εδώ προς τη θετική κατεύθυνση του άξονα x) , η μετατόπιση y έχει τη γενική μορφή $y(x - vt)$ έχουμε δείξει ότι

$$\frac{\partial y}{\partial x} = -\frac{1}{v}\frac{\partial y}{\partial t} \qquad (2)$$

Από (1) και (2) προκύπτει ότι $F_y = F\left(-\frac{1}{v}\right)\frac{\partial y}{\partial t}$ (3)

και, αφού $\partial y/\partial t = u_y$, η (3) γράφεται:

$$F_y = T\left(-\frac{1}{v}\right)u_y = -\left(\frac{F}{v}\right)u_y \qquad (4)$$



Χρησιμοποιώντας τη γνωστή σχέση $υ = \sqrt{F/\mu}$, η (4) γράφεται:

$$F_y = -\left(\frac{F}{\sqrt{F/\mu}}\right)u_y = -\left(\sqrt{F\mu}\right)u_y \qquad (5)$$

Αυτή είναι η δύναμη με την οποία η χορδή αντιτίθεται στην κίνηση της πηγής. Η πηγή πρέπει να ξεπεράσει αυτή τη δύναμη «έλξης» παράγοντας μια δύναμη $F_{y,\ πηγής}$ προς την αντίθετη κατεύθυνση.

Έτσι, η δύναμη που απαιτείται για τη δημιουργία του κύματος είναι ανάλογη με την εγκάρσια ταχύτητα της χορδής.

Η σταθερά αναλογίας μεταξύ της δύναμης και της εγκάρσιας ταχύτητας είναι η λεγόμενη **εμπέδηση ή σύνθετη αντίσταση, Z,** του μέσου.

$Z=\sqrt{F\mu}$ (6) οπότε $F_y = -Z\,u_y$ (7)

Παρατηρήστε ότι, για εγκάρσια κύματα σε μια χορδή, η εμπέδηση εξαρτάται μόνο από δύο χαρακτηριστικά της χορδής: την τάση και τη γραμμική πυκνότητα μάζας.

Από τις (5) και (6) και κάνοντας χρήση του ότι $F_{y,\ πηγής} = -F_y$ προκύπτει ότι $Z = \sqrt{T\mu} = \frac{F_{y,\ πηγής}}{u_y}$

Σχόλια

Για εγκάρσια κύματα σε χορδή, εάν το γινόμενο της τάσης και της γραμμικής πυκνότητας μάζας είναι μεγαλύτερο σε μια χορδή από ότι είναι σε μια άλλη, αυτή η χορδή έχει υψηλότερη εμπέδηση, επομένως χρειάζεται περισσότερη δύναμη για να επιτευχθεί μια δεδομένη εγκάρσια ταχύτητα σε αυτήν τη χορδή.

Όταν, όμως, επιτύχει αυτή την εγκάρσια ταχύτητα, η χορδή υψηλότερης εμπέδησης έχει περισσότερη ισχύ από μια χορδή χαμηλότερης εμπέδησης αντίστασης με την ίδια εγκάρσια ταχύτητα. Θυμηθείτε ότι η ισχύς της χορδής είναι $P(x, t) = \sqrt{\mu F}\, u_y^2 = Z\, u_y^2$

Η πραγματική δύναμη της εμπέδησης προκύπτει όταν σκεφτείτε τι συμβαίνει σε ένα κύμα που προσκρούει σε ένα όριο μεταξύ δύο μέσων με διαφορετικά χαρακτηριστικά.

Η ανάλυση της επίδρασης της αλλαγής των μέσων σε ένα μηχανικό κύμα ξεκινά με τις έννοιες στις οποίες βασίζεται η Εξ. (7).

Αυτές οι έννοιες είναι οι ακόλουθες.

(1) Το μέσο (η χορδή σε αυτήν την περίπτωση) παράγει μια δύναμη έλξης στην πηγή του κύματος.

(2) Αυτή η δύναμη έλξης είναι ανάλογη με την εγκάρσια ταχύτητα που παράγεται στο μέσο από το κύμα και στην αντίθετη κατεύθυνση (άρα $F_y \propto -u_y$).

(3) Η σταθερά αναλογίας μεταξύ της δύναμης και της εγκάρσιας ταχύτητας είναι η εμπέδηση (Z) του μέσου.

Άσκηση 1

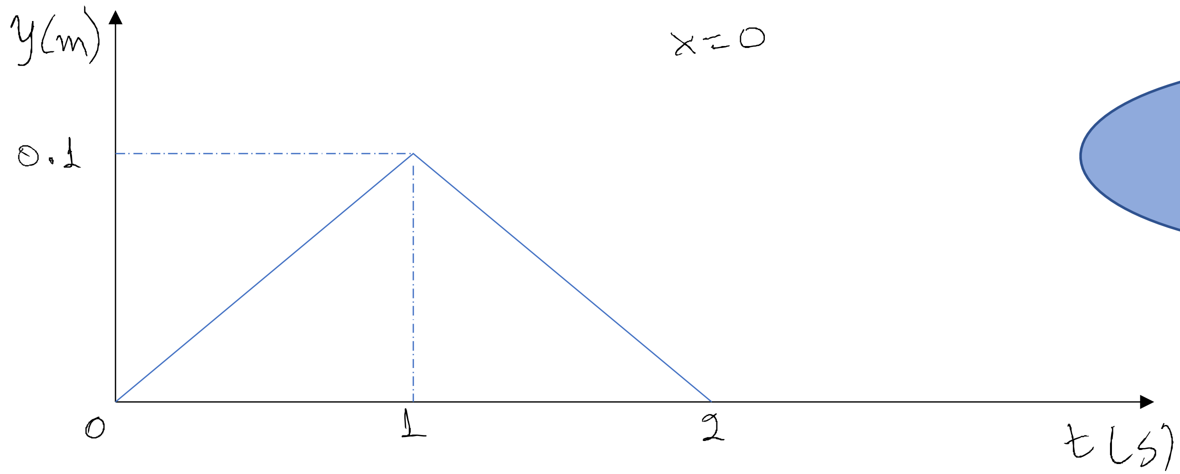
Έστω μία ημιάπειρη τεταμένη χορδή υπό τάση $F = 10\mathrm{N}$ και με γραμμική πυκνότητα $\mu = \frac{0.1kgr}{m}$. Κινούμε το άκρο της με κατακόρυφη ταχύτητα u_y=0.1m/s για χρονικό διάστημα t=1s προς τα επάνω και κατόπιν το επαναφέρουμε στη θέση ισορροπίας με ίση και αντίθετη ταχύτητα κινώντας το πάλι για t=1s. Με αυτό τον τρόπο δημιουργείται ένας τριγωνικός παλμός.

1) Πόση είναι η ταχύτητα που διαδίδεται ο παλμός στη χορδή και πόση η εμπέδηση;
2) Πόση ενέργεια δώσαμε στη χορδή;
3) Σχεδιάστε ένα στιγμιότυπο του παλμού που ταξιδεύει στη χορδή σημειώνοντας και την ταχύτητα u_y για t=3s.
4) Πόση ενέργεια μεταφέρει αυτός ο παλμός;
5) Πόση ορμή μεταφέρει αυτός ο παλμός;

Η διαταραχή που διαδίδεται στη τεντωμένη χορδή είναι ένας τριγωνικός παλμός. Ας θεωρήσουμε ένα τυχαίο σημείο x της χορδής. Η απομάκρυνση y από τη θέση ισορροπίας ($y = 0$) είναι

$$y = u_y t = \begin{cases} 0.1ms^{-1}\, t & \gamma 1a \quad t_o \leq t < t_o + 1s \\ -0.1ms^{-1}\, t & \gamma\alpha \quad t_o + 1s < t \leq t_o + 2s \end{cases}$$

όπου t_o είναι η χρονική στιγμή που παλμός φτάνει στο σημείο x της χορδής. Προφανώς $t_o = 0$ για το άκρο $x = 0$.



(α) $\upsilon = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{10\mathrm{N}}{0.1\mathrm{kgm}^{-1}}} = \sqrt{100\frac{\mathrm{m}^2}{\mathrm{s}^2}} = 10\mathrm{ms}^{-1}$

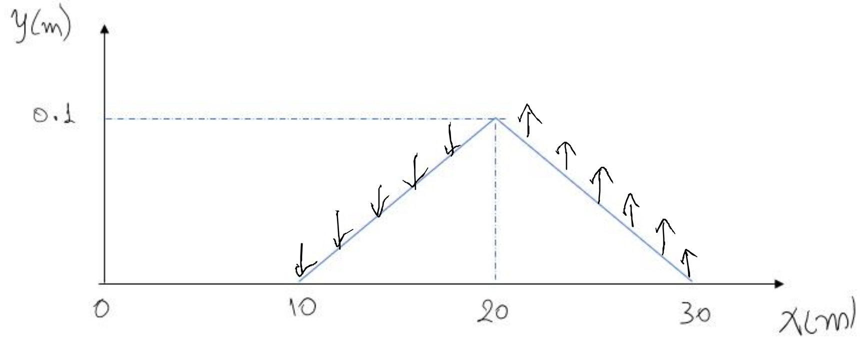
$Z = \sqrt{\mu F} = \sqrt{0.1\mathrm{kgm}^{-1} \times 10\mathrm{N}} = 1\mathrm{kgs}^{-1}$

(β) $\mathrm{P(x,t)} = \mathrm{Z}u_y^2 = 1\mathrm{kg}s^{-1} \times (0.1ms^{-1})^2 = 10^{-2}W$

$E = P \cdot \Delta t = 10^{-2}\mathrm{W} \times 2\mathrm{s} = 2 \times 10^{-2}\mathrm{J}$

(γ) Ο παλμός έχει πλάτος $h = 0.1m$, και χρονική διάρκεια $\mathrm{T} = 2s$. Η ταχύτητα διάδοσης του παλμού είναι $\upsilon = 10\mathrm{ms}^{-1}$. Οπότε το μήκος κύματος, δηλ. το μήκος της βάσης του τριγωνικού παλμού είναι $\lambda = \upsilon\mathrm{T} = 20m$.

Τη χρονική στιγμή $t = 3s$ ο παλμός έχει φτάσει στο σημείο $x = 10ms^{-1} \times 3s = 30m$



Με κατακόρυφα διανύσματα (βέλη) σημειώνεται η κατακόρυφη ταχύτητα u_y. Το μέτρο του διανύσματος είναι πάντα το ίδιο ίσο με $0.1m/s$.

Η φορά του διανύσματος είναι αρνητική μέχρι το μέγιστο, και μετά γίνεται θετική. Θυμηθείτε ότι $u_y = \frac{\partial y}{\partial t} = -\upsilon\frac{\partial y}{\partial x}$, οπότε όταν η κλίση της χορδής $\frac{\partial y}{\partial x}$ είναι θετική η κατακόρυφη ταχύτητα είναι αρνητική (προς τα κάτω).

(δ) Γραμμική πυκνότητα μηχανικής ενέργειας

$\rho_M = 2\rho_\delta = 2 \cdot \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot 10\mathrm{N} \left(\frac{0.1\mathrm{m}}{10\mathrm{m}}\right)^2 = 10 \cdot 10^{-4}\mathrm{N} = 10^{-3}\mathrm{N}$

$E_M = \int_{10}^{30} \rho_M dx = \rho_M \Delta x = 10^{-3}\mathrm{N} \cdot 20\mathrm{m} = 2 \times 10^{-2}\mathrm{J} = E_{\text{πηγης}}$

(ε) γραμμική πυκνότητα ορμής

$g = -\mu \frac{\partial y}{\partial t} \frac{\partial y}{\partial x} = -\mu u_y \frac{\partial y}{\partial x} = 0.1 \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m}} \times 0.1 \frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} \times \left(\frac{0.1\mathrm{m}}{10\mathrm{m}}\right) = 10^{-4}\mathrm{kg/s}$ (θυμηθείτε ότι $\frac{\partial y}{\partial t}$ $\kappa\alpha\iota$ $\frac{\partial y}{\partial x}$ έχουν αντίθετα πρόσημα).

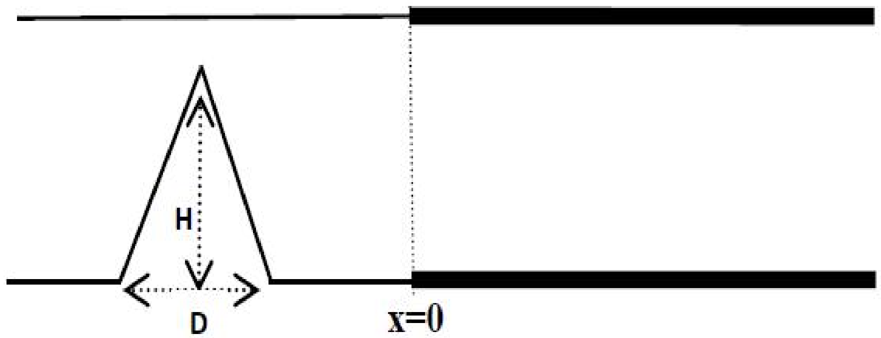
Συνολική ορμή που μεταφέρεται με τον παλμό:

$p = \int_{10}^{30} \mathrm{g} dx = \mathrm{g}\Delta x = 2 \times 10^{-3}\mathrm{kg\,m/s}$

(Παρατηρείστε ότι $\mathrm{E} = \rho\upsilon$)

Άσκηση 2

Στο σχήμα που ακολουθεί απεικονίζεται χορδή (T, μ_1, $x<0$), (T, μ_2, $x>0$) με $\mu_2 = 9\mu_1$. Στον αρνητικό ημιάξονα οδεύει προς τα δεξιά ο σχεδόν τριγωνικός παλμός (H, D).



Α) Να βρεθούν τα πλάτη του ανακλώμενου και του διαθλώμενου παλμού.

Β) Να σχεδιαστεί ποσοτικά ένα στιγμιότυπο της χορδής μετά την αποκατάσταση της διαδικασίας ανάκλασης και διάθλασης του παλμού στη θέση $x=0$.

Γ) Πόση είναι η ενέργεια του παλμού που προσπίπτει;

Δ) Ποιο είναι το ποσοστό της ενέργειας του προσπίπτοντος παλμού που πηγαίνει στον παλμό που διαθλάται;

A)

$A_1 = H =$ πλάτος προσπίπτοντος παλμού

$$r = \frac{A_2}{A_1} = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \qquad t = \frac{A_3}{A_1} = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$$

$$\upsilon_1 = \frac{\omega}{k_1} \Rightarrow k_1 = \frac{\omega}{\upsilon_1}, \ \ \upsilon_2 = \frac{\omega}{k_2} \Rightarrow k_2 = \frac{\omega}{\upsilon_2}$$

$$r = \frac{\frac{\omega}{\upsilon_1} - \frac{\omega}{\upsilon_2}}{\frac{\omega}{\upsilon_1} + \frac{\omega}{\upsilon_2}} = \frac{\upsilon_2 - \upsilon_1}{\upsilon_2 + \upsilon_1} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu_2}} - \sqrt{\frac{F}{\mu_1}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu_2}} + \sqrt{\frac{F}{\mu_1}}} \cdot \frac{\sqrt{\mu_1 \mu_2}}{\sqrt{\mu_1 \mu_2}} = \frac{\sqrt{\mu_1 F} - \sqrt{\mu_2 F}}{\sqrt{\mu_1 F} + \sqrt{\mu_2 F}} = \frac{Z_1 - Z_2}{Z_1 + Z_2}$$

Ομοίως $t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2}$

Για τα δεδομένα της άσκησης, δηλ. για $\mu_2 = 9\mu_1$

$$r = \frac{\sqrt{\mu_1 F} - \sqrt{\mu_2 F}}{\sqrt{\mu_1 F} + \sqrt{\mu_2 F}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2}}{\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2}} = \frac{\sqrt{\mu_1} - 3\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + 3\sqrt{\mu_1}} = -\frac{1}{2} \Rightarrow A_2 = -\frac{\mathrm{H}}{2}$$

→ αρνητικό

$$t = \frac{2Z_1}{Z_1 + Z_2} = \frac{2\sqrt{\mu_1}}{\sqrt{\mu_1} + 3\sqrt{\mu_1}} = \frac{1}{2} \Rightarrow A_3 = \frac{\mathrm{H}}{2}$$

β)

Η διάρκεια Τ του παλμού είναι D/υ όπου υ η ταχύτητα διάδοσης του παλμού στη χορδή.

<u>Ανακλώμενος παλμός</u>:

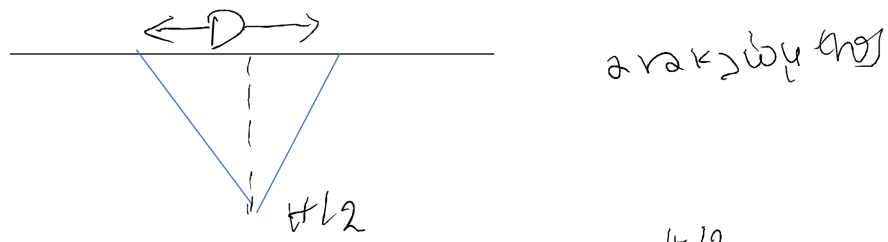
Το μήκος της βάσης του τριγωνικού παλμού είναι το ίδιο για τον προσπίπτοντα και ανακλώμενο παλμό (τα υ_1 και T είναι τα ίδια). Το ύψος του ανακλώμενου παλμού είναι H/2 και αρνητικό.

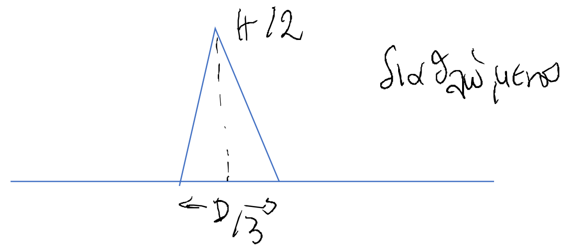
<u>Διαθλώμενος παλμός</u>:

Το μήκος της βάσης του διαθλώμενου παλμού είναι $\mathrm{D}_{\delta\iota\alpha\theta\lambda} = \upsilon_2 \mathrm{T}$

Αλλά

$$\frac{\upsilon_2}{\upsilon_1} = \frac{\sqrt{\frac{F}{\mu_2}}}{\sqrt{\frac{F}{\mu_1}}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} = \sqrt{\frac{\mu_1}{9\mu_1}} = \frac{1}{3}$$



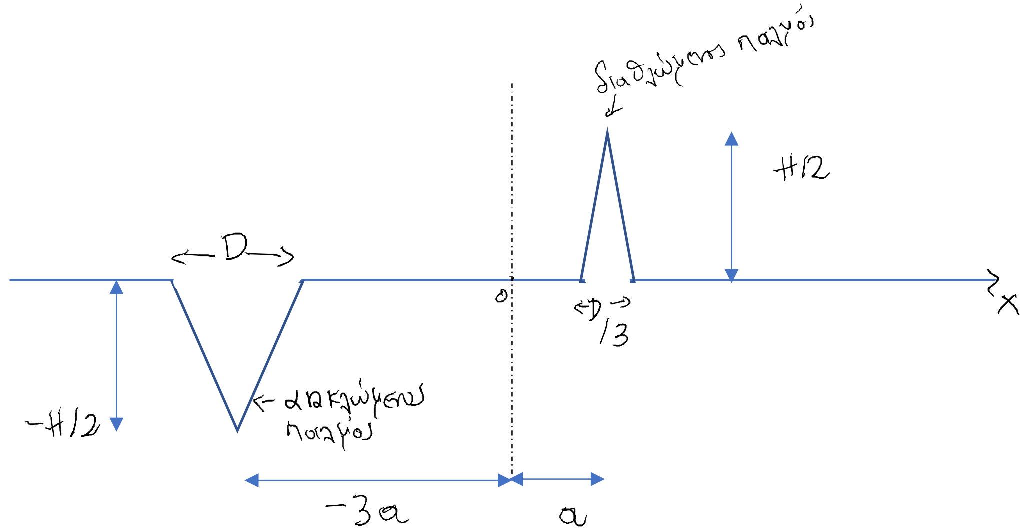


Επομένως

$$\frac{\mathrm{D}_{\delta\iota\alpha\theta\lambda}}{D_{\pi\rho o\sigma\pi}} = \frac{\upsilon_2 \mathrm{T}}{\upsilon_1 \mathrm{T}} = \frac{1}{3}$$

Με βάση τα παραπάνω, σχεδιάζουμε ένα στιγμιότυπο της χορδής:

Ας υποθέσουμε ότι κάποια χρονική στιγμή η κορυφή του διαθλώμενου παλμού βρίσκεται στη θέση $x = +\alpha$,. Τότε η κορυφή του ανακλώμενου παλμού, ο οποίος διαδίδεται με τριπλάσια ταχύτητα, θα είναι στη θέση $x = -3\alpha$:



Γ) Η γραμμική πυκνότητα μηχανικής ενέργειας του προσπίπτοντος παλμού είναι

$$\rho_{M,\pi\rho o\sigma\pi} = 2\rho_{\triangle,\pi\rho o\sigma\pi} = 2 \cdot \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2\frac{F}{2}\left(\frac{H}{D/2}\right)^2 = 4\frac{FH^2}{D^2}$$

Η συνολική ενέργεια του προσπίπτοντος παλμού είναι

$$E_{M,\pi\rho o\sigma\pi} = \int_0^{\mathrm{D}} \rho_{M,\pi\rho o\sigma\pi} dx = \rho_{M,\pi\rho o\sigma\pi}\mathrm{D} = 4\frac{FH^2}{D}$$

Δ) Η γραμμική πυκνότητα μηχανικής ενέργειας του διαθλώμενου παλμού είναι

$$\rho_{M,\delta\iota\alpha\theta\lambda} = 2\rho_{\triangle,\delta\iota\alpha\theta\lambda} = 2 \cdot \frac{1}{2}F\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = 2\frac{F}{2}\left(\frac{H/2}{D/6}\right)^2 = \frac{9FH^2}{D^2}$$

Η συνολική ενέργεια του προσπίπτοντος παλμού είναι

$$E_{M,\delta\iota\alpha\theta\lambda} = \int_0^{\mathrm{D}} \rho_{M,\delta\iota\alpha\theta\lambda} dx = \rho_{M,\delta\iota\alpha\theta\lambda}\left(\frac{\mathrm{D}}{3}\right) = \frac{9FH^2}{D^2}\frac{\mathrm{D}}{3} = \frac{3FH^2}{D}$$

Επομένως,

$$\frac{E_{M,\delta\iota\alpha\theta\lambda}}{E_{M,\pi\rho o\sigma\pi}} = \frac{\frac{3FH^2}{D}}{4\frac{FH^2}{D}} = \frac{3}{4} = 75\%$$