

## Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

### Φασική και Ομαδική ταχύτητα - Διασπορά

#### Ασκήσεις

1. Βρείτε τη φασική και ομαδική ταχύτητα κυμάτων που περιγράφονται από τη σχέση διασποράς  $\omega = ak + \beta$ , όπου  $a, \beta$  σταθερές. Σχολιάστε.
2. Τα κύματα που μελετήσαμε σε μία τεντωμένη χορδή έχουν σχέση διασποράς  $\omega = vk$  οπότε η φασική και ομαδική ταχύτητα είναι και οι δυο ίσες με  $v$ . Αν τώρα κολλήσουμε χάντρες μάζας  $m$  (η καθεμιά) ανά τακτά διαστήματα  $l$  πάνω στη χορδή, τότε, αποδεικνύεται ότι η σχέση διασποράς δίνεται από τον τύπο  $\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{kl}{2}\right)$ ,  $\omega_0 = \sqrt{\frac{T}{ml}}$ , όπου  $T$  η τάση της χορδής.

Βρείτε τη φασική και ομαδική ταχύτητα και σχολιάστε.

3. Δείξτε ότι  $v_g = v_p - \lambda \frac{dv_p}{d\lambda}$ , όπου  $v_p$  η φασική ταχύτητα,  $v_g$  η ομαδική ταχύτητα και  $\lambda$  το μήκος κύματος.
4. Έστω μια διαταραχή που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial y(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^3 y(x, t)}{\partial x^3} = 0$$

Να βρεθεί η εξίσωση διασποράς, η φασική και η ομαδική ταχύτητα.

5. Ας θεωρήσουμε κύματα της θάλασσας που καταλήγουν σε μία ακτή με άπειρο μήκος. Θεωρούμε ότι το βάθος μειώνεται συνεχώς καθώς πλησιάζουμε προς την ακτή. Αποδεικνύεται ότι τα κύματα στην επιφάνεια της θάλασσας (κύματα βαρύτητας) ακολουθούν την σχέση διασποράς  $\omega = \sqrt{gk \tanh(kd)}$ , όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας, και  $d$  το βάθος του πυθμένα της θάλασσας. Γράψτε προσεγγιστικές σχέσεις για τη σχέση διασποράς μακριά από την ακτή όπου θεωρούμε ότι το βάθος είναι πολύ μεγάλο, και κοντά στην ακτή όπου το βάθος είναι μικρό. Βρείτε τη φασική και την ομαδική ταχύτητα και στις δύο περιπτώσεις. Σχολιάστε.