ΚΥΜΑΤΙΚΗ
Ι. Μ**ηχανικά κύματα**

- Συμβολή κυμάτων με λίγο διαφορετικές συχνότητες – διαμόρφωση πλάτους
- Οι έννοιες της φασικής και ομαδικής ταχύτητας
- Διάδοση πληροφορίας

Ταχύτητα του οδεύοντος αρμονικού κύματος = Ταχύτητα φάσης

υπενθύμιση

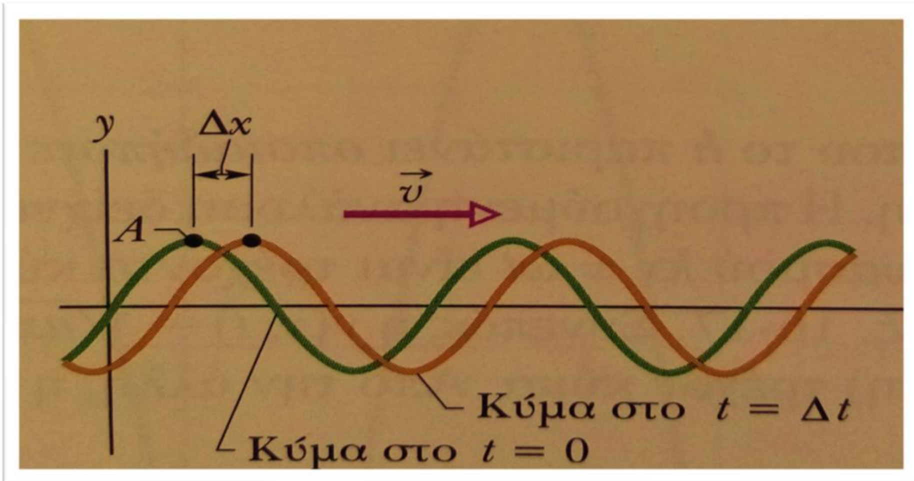
Είδαμε ότι καθώς διαδίδεται ένα μονοδιάστατο αρμονικό κύμα που περιγράφεται από τη σχέση $y(x,t) = A\sin(\omega t - kx + \varphi_o)$, τα διάφορα (υλικά) σημεία στο μέσο διάδοσης (εδώ στη τεντωμένη χορδή) έχουν γενικά διαφορετική φάση $\varphi(x,t) = \omega t - kx + \varphi_o$, που εξαρτάται από τη θέση του υλικού σημείου και το χρόνο.

Ας θεωρήσουμε ότι το κύμα (πράσινη γραμμή: το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t) διαδίδεται στο μέσο (στη χορδή) για χρόνο Δt (πορτοκαλιά γραμμή: το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$). Ας θεωρήσουμε την κορυφή A στη πράσινη καμπύλη. Το πλησιέστερο σημείο με την ίδια ακριβώς φάση, δηλ. με $\Delta\varphi = 0$, στην πορτοκαλιά γραμμή (δηλ. το στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$) απέχει κατά Δx από το A.

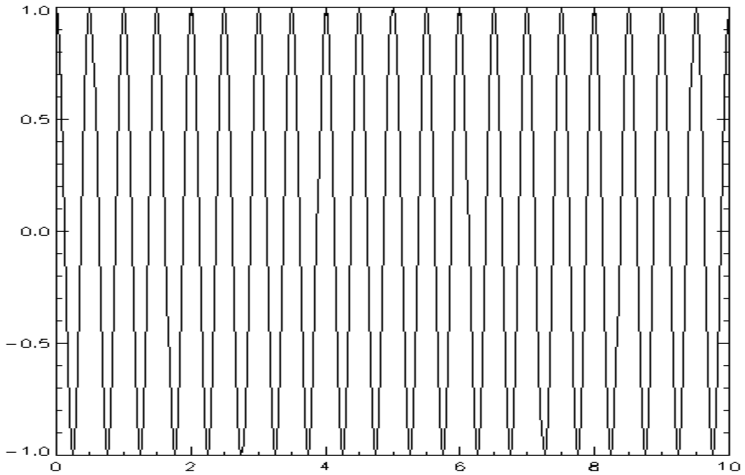
$$\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = k\Delta x - \omega\Delta t = 0 \Rightarrow \frac{\Delta\varphi(x,t)}{\Delta t} = k\frac{\Delta x}{\Delta t} - \omega = 0 \xRightarrow[\Delta t\to 0]{} k\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} - \omega = 0 \Rightarrow \upsilon \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{\mathrm{T}}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{\mathrm{T}}$$

Φασική ταχύτητα $\upsilon_p = \omega/k$

Είναι στην ουσία η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ένα «μονοχρωματικό» κύμα (δηλ. μία συχνότητα, ένα μήκος κύματος) στο μέσο.



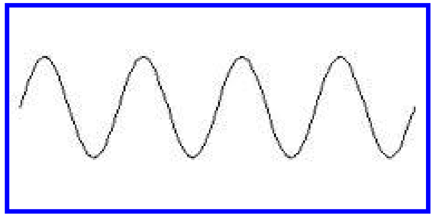
Η φασική ταχύτητα αναφέρεται στο αρμονικό κύμα, που είναι βέβαια μία μαθηματική οντότητα. Το αρμονικό κύμα έχει άπειρη χρονική διάρκεια και άπειρη χωρική έκταση, και δεν μεταφέρει κάποια πληροφορία (πέρα από τη συχνότητά του)



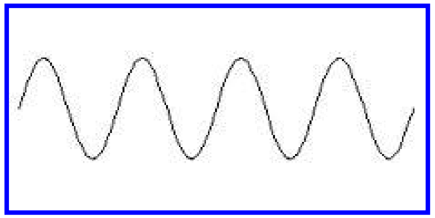
$\Delta x = \infty$
$\Delta t = \infty$

Τέτοιες διαταραχές δεν υπάρχουν στη φύση!

Οι πραγματικές διαταραχές έχουν πεπερασμένη χρονική διάρκεια και πεπερασμένη χωρική έκταση. Είναι **μη** περιοδικές!



Δt



Δx

Ακόμη και διαταραχές σαν αυτές του διπλανού σχήματος (πεπερασμένες), που μοιάζουν να είναι περιοδικές εντός των διαστημάτων Δx και Δt, είναι απεριοδικές, δεν είναι αρμονικά κύματα.

Επαλληλία δύο αρμονικών κυμάτων με ίσα πλάτη και διαφορετικές συχνότητες → διαμόρφωση πλάτους→ πληροφορία

Έστω τα δυο αρμονικά κύματα που διαδίδονται σε μία τεντωμένη χορδή, με ίδια φασική ταχύτητα $\upsilon = \sqrt{F/\mu}$

$y_1(x,t) = Asin(\omega_1 t - k_1 x)$

$y_2(x,t) = Asin(\omega_2 t - k_2 x)$, με $\omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega$ και $\omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega$ και

αντίστοιχα $k_1 = k_0 + \Delta k$ και $k_2 = k_0 - \Delta k$ (με Δω και Δk <<)

Αρχή της υπέρθεσης: $y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A[sin(\omega_1 t - k_1 x) + sin(\omega_2 t - k_2 x)] =$
$A\{sin[(\omega_0+\Delta\omega)t - (k_0+\Delta k)x] + sin[(\omega_0-\Delta\omega)t - (k_0-\Delta k)x]\} \Rightarrow$

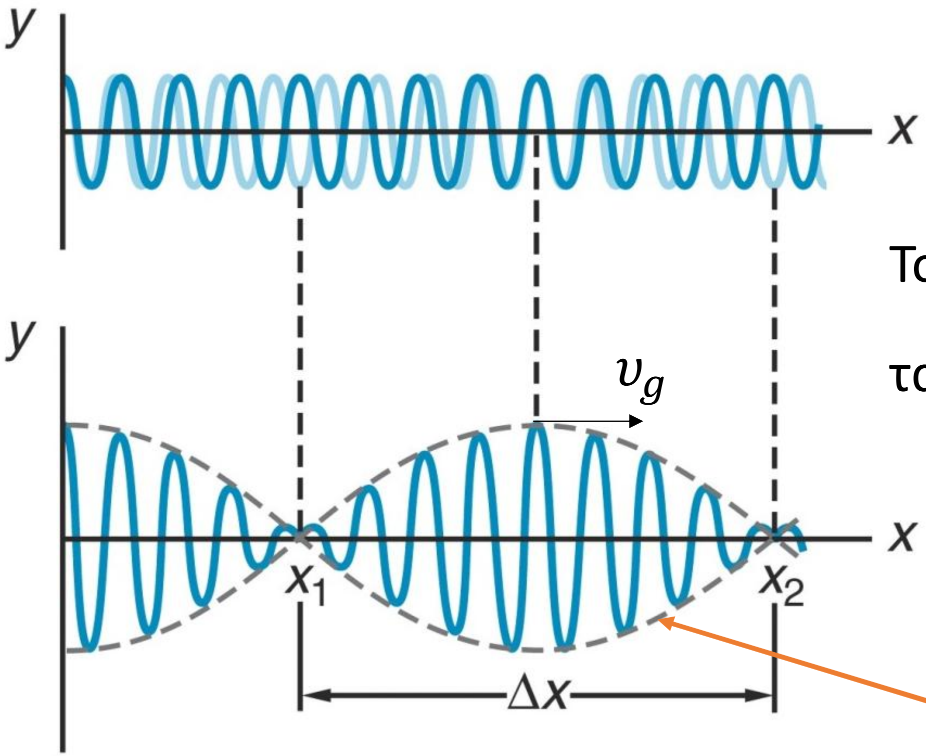
$y(x,t) =$

$$2Asin\left(\frac{[(\omega_0+\Delta\omega)t-(k_0+\Delta k)x]+[(\omega_0-\Delta\omega)t-(k_0-\Delta k)x]}{2}\right)\cos\left(\frac{[(\omega_0+\Delta\omega)t-(k_0+\Delta k)x]-[(\omega_0-\Delta\omega)t-(k_0-\Delta k)x]}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y(x,t) = 2Asin(\omega_0 t - k_0 x)\cos[(\Delta\omega)t - (\Delta k)x]$$

διότι $sina + sinb = 2\sin\left(\frac{a+b}{2}\right)cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Επαλληλία δύο αρμονικών κυμάτων με ίσα πλάτη και διαφορετικές συχνότητες → διαμόρφωση πλάτους → πληροφορία



Το περιβάλλον κύμα (διακεκομμένη γραμμή) έχει ταχύτητα διάδοσης $\frac{\Delta\omega}{\Delta k} \xrightarrow[\Delta k \to 0]{} \boxed{\frac{d\omega}{dk} \equiv v_g}$

Ταχύτητα ομάδας

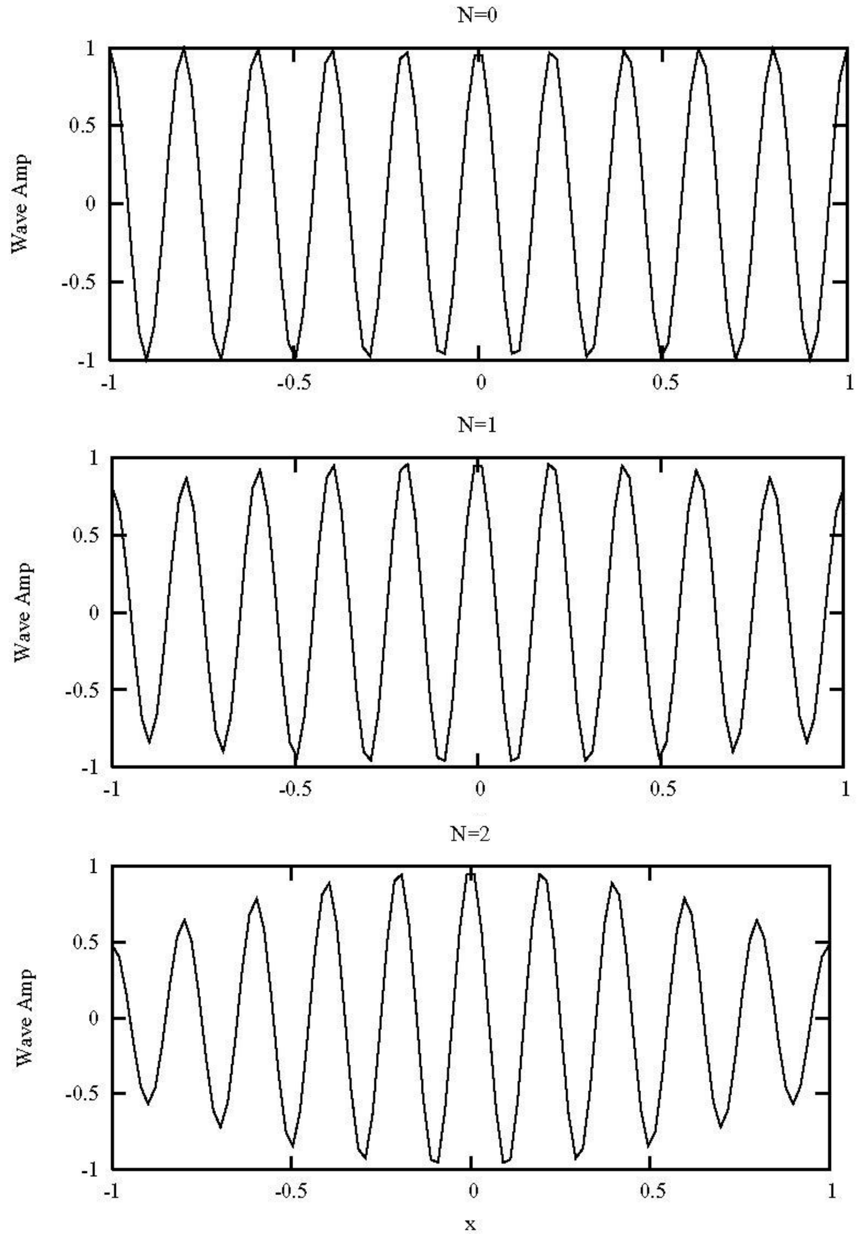
Envelope – περίβλημα $2A\cos[(\Delta\omega)t - (\Delta k)x]$

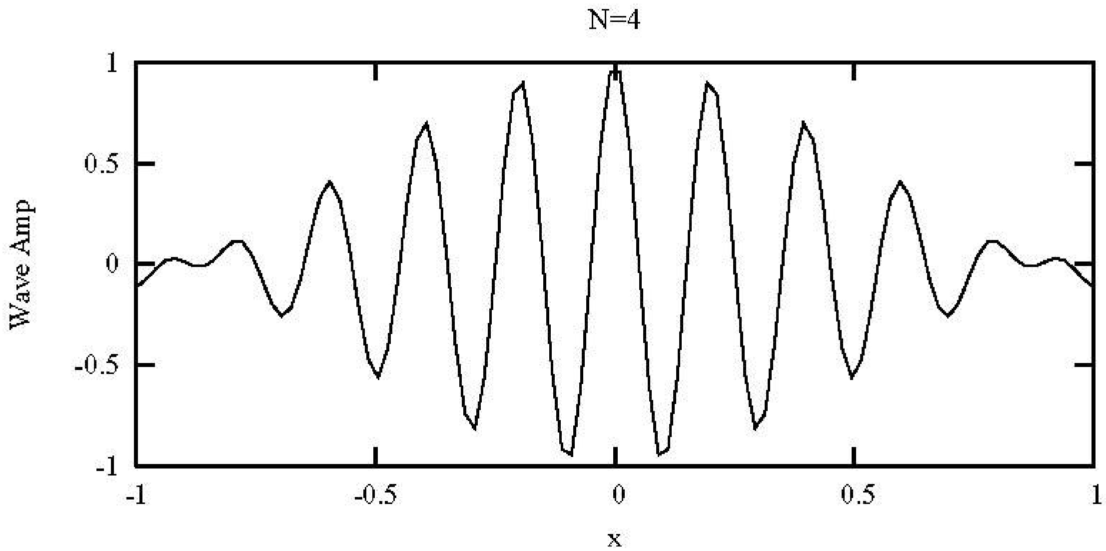
→ **Διαμόρφωση πλάτους**

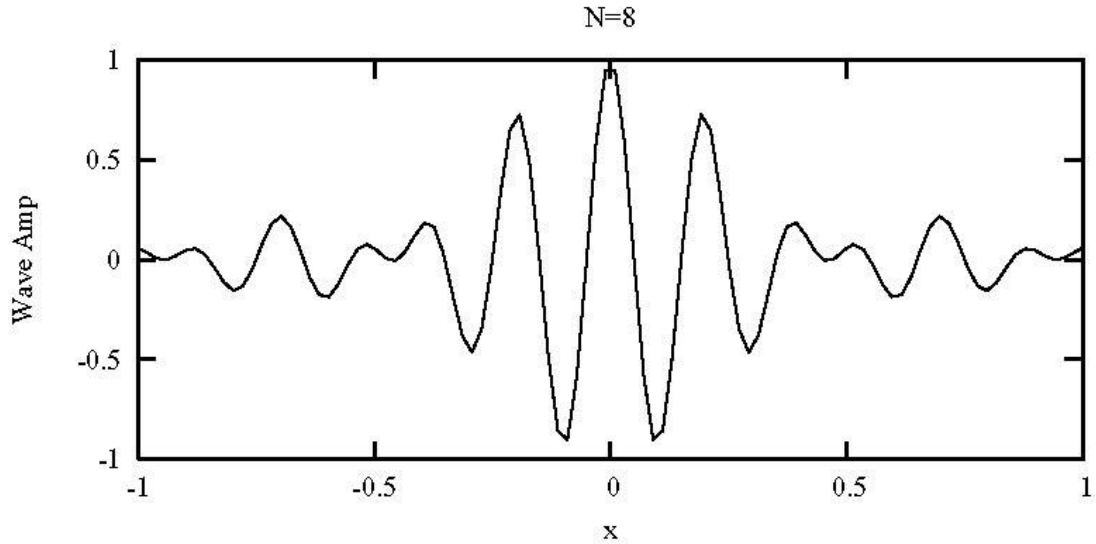
…τι θα γίνει αν προσθέσουμε και άλλα αρμονικά κύματα…

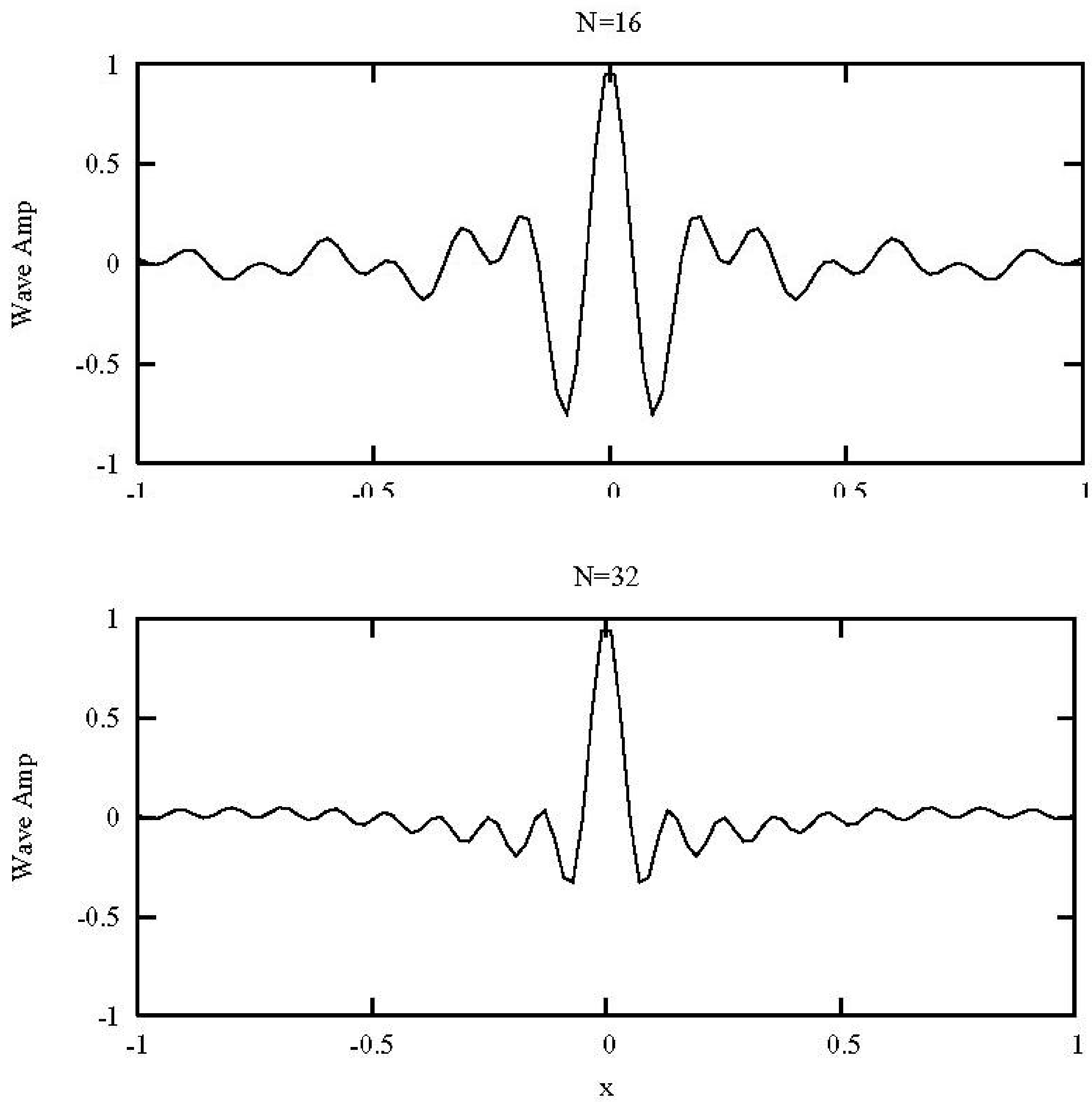
Έστω ότι, ακολουθώντας τη προηγούμενο παράδειγμα, συνεχίζουμε να προσθέτουμε αρμονικά κύματα με κυματάριθμους $\pm 2\Delta k$, $\pm 3\Delta k$ κλπ.

Στα παρακάτω διαγράμματα Ν είναι ο αριθμός των αρμονικών κυμάτων που προσθέτω στο αρχικό αρμονικό κύμα (ω_o, k_o)


N=0
N=1
N=2
Wave Amp
x
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1


N=4
1
0.5
0
-0.5
-1
Wave Amp
-1
-0.5
0
0.5
1
x


N=8
1
0.5
0
-0.5
-1
Wave Amp
-1
-0.5
0
0.5
1
x



N=16
Wave Amp
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
N=32
Wave Amp
1
0.5
0
-0.5
-1
-1
-0.5
0
0.5
1
x

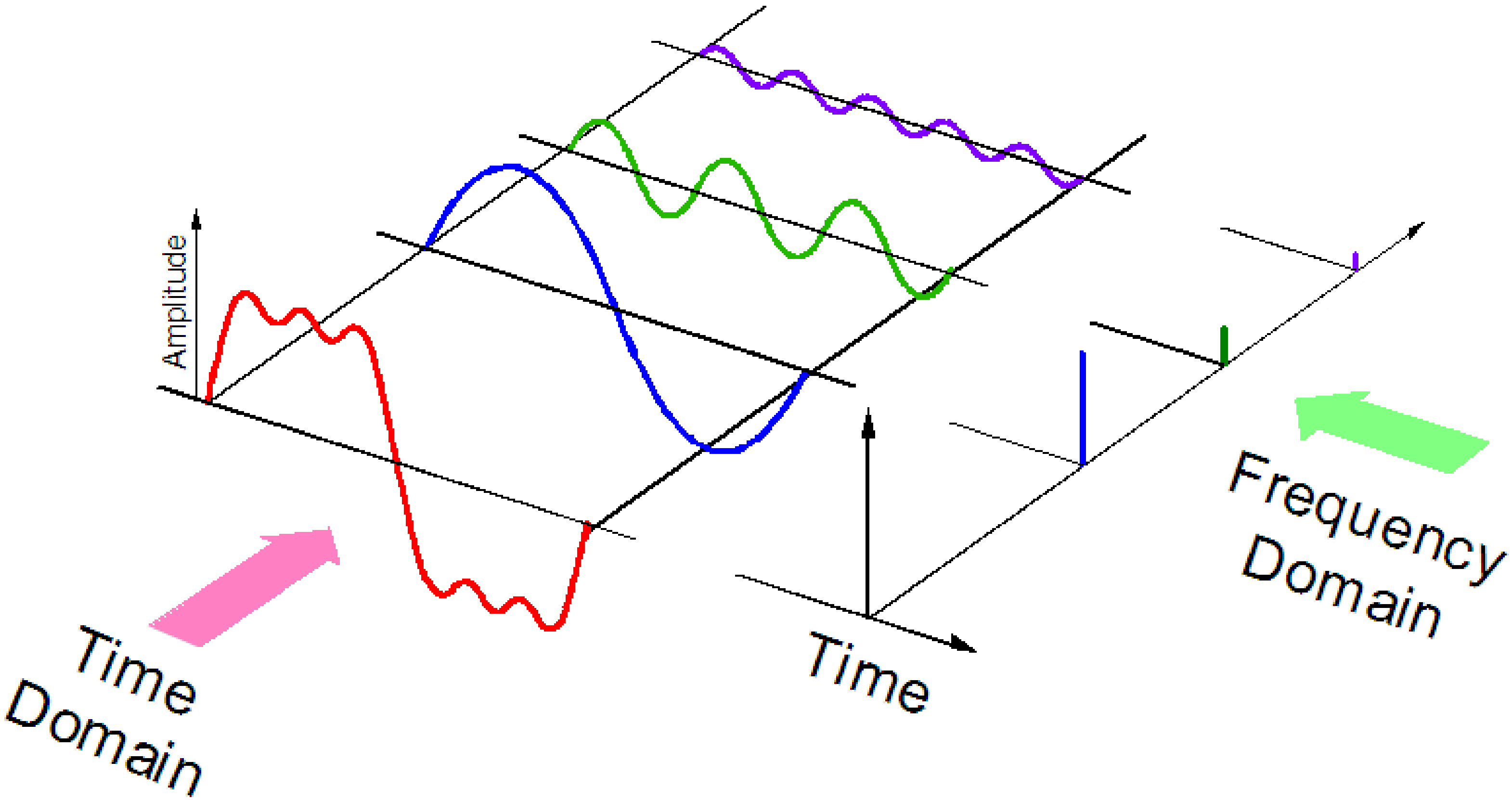
Ανάλυση Fourier

Θα μάθετε αργότερα ότι οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση (είτε περιοδική είτε όχι) μπορεί να προκύψει από την επαλληλία θεωρητικά άπειρων αρμονικών συναρτήσεων.

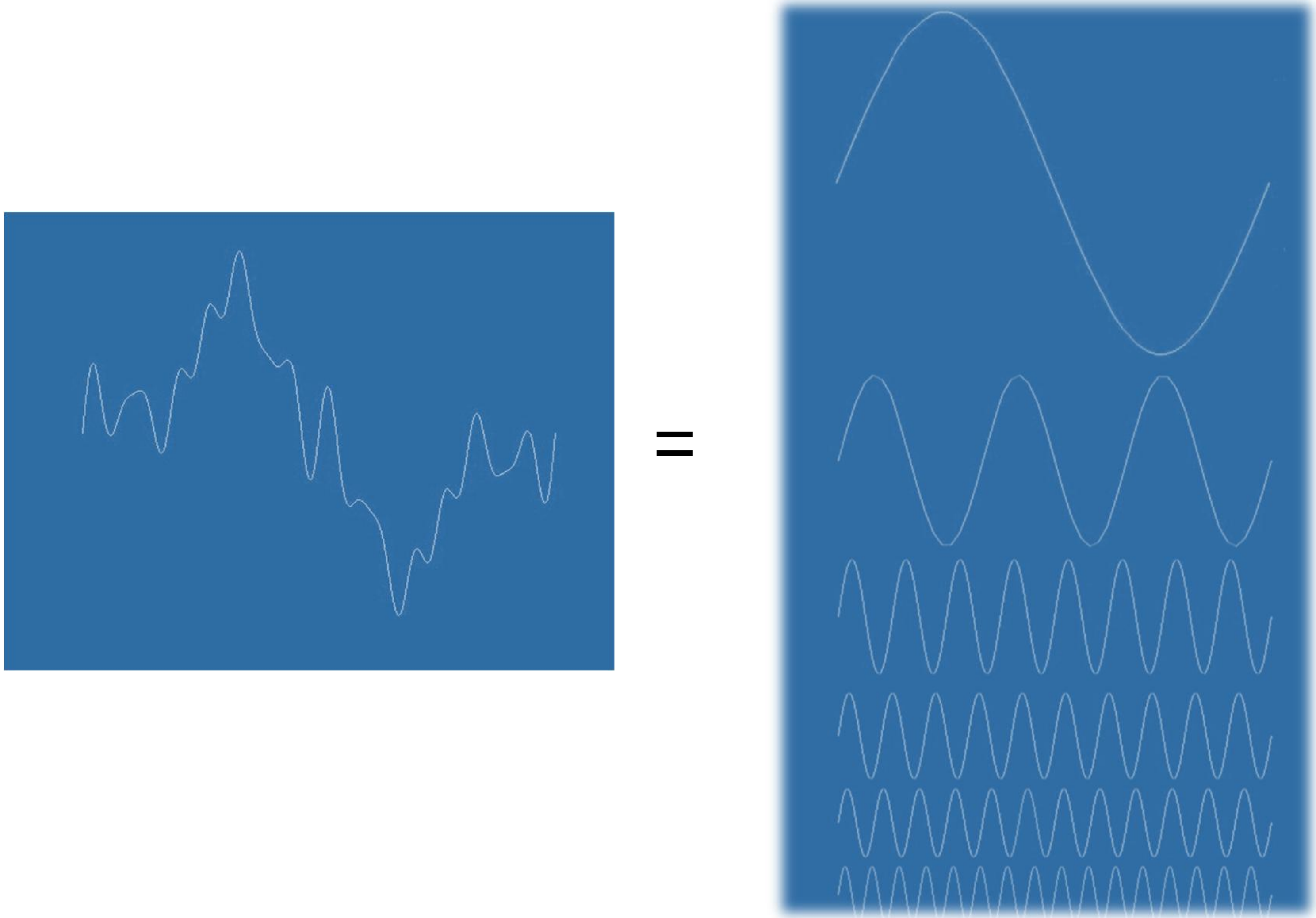
Για κάθε αρμονική συνιστώσα του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης, όπως λέγεται, μπορούμε να βρούμε τη συχνότητα, το πλάτος και τη φάση της.

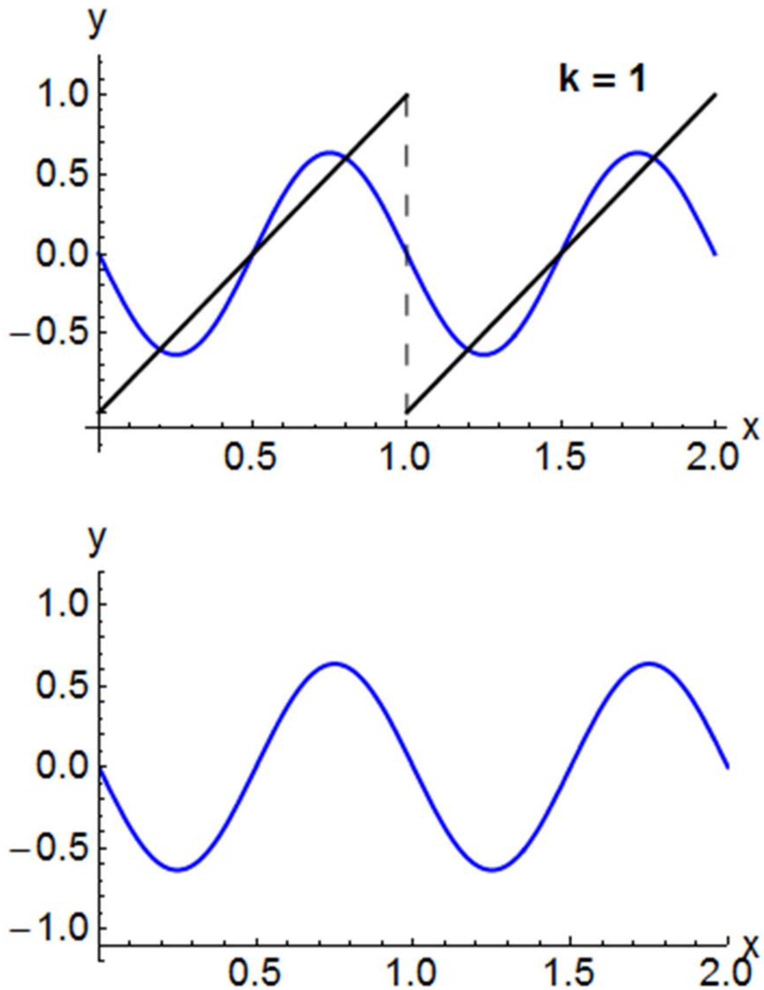
Κάθε συνάρτηση έχει τη δική της ξεχωριστή ανάλυση σε αρμονικές συνιστώσες.

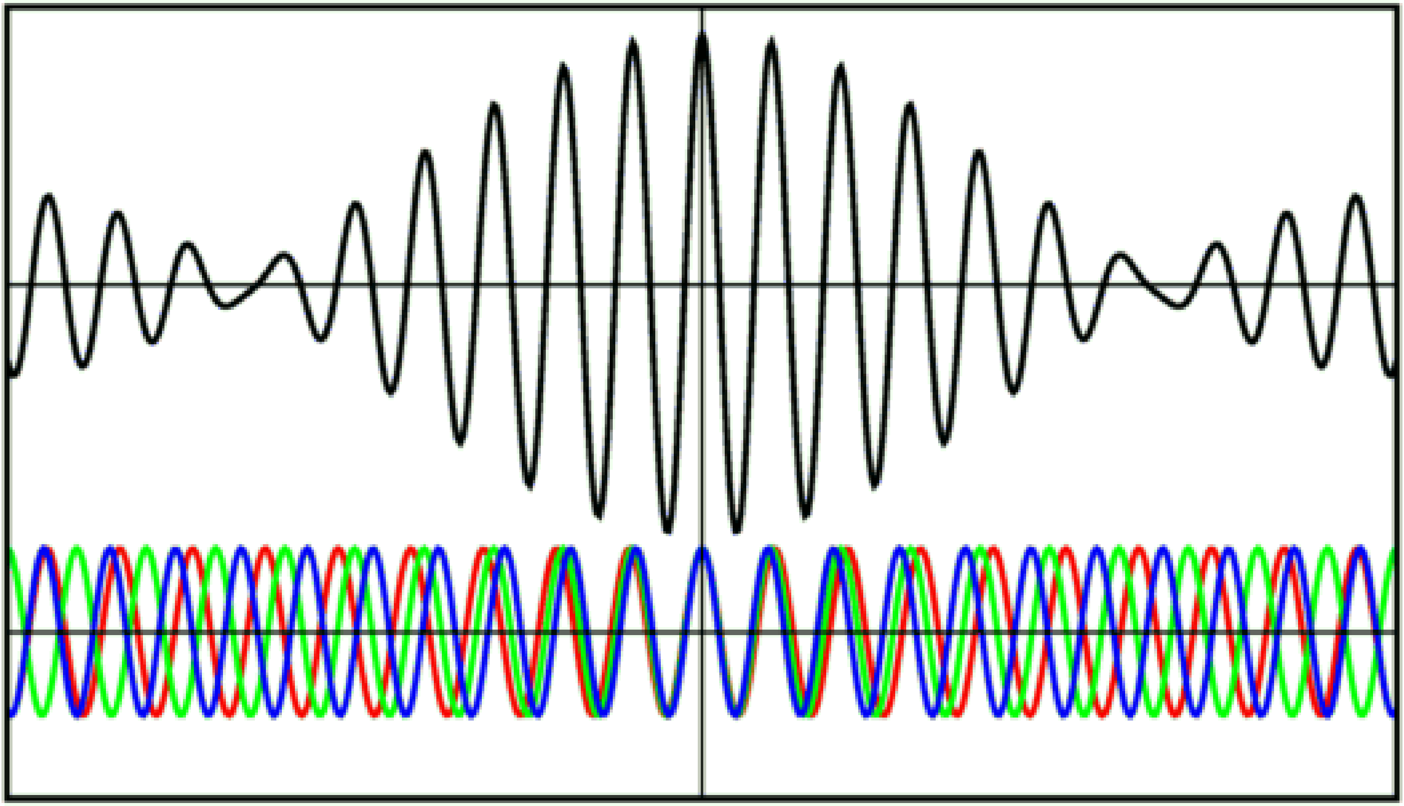
Καταλαβαίνουμε λοιπόν γιατί η εξιδανικευμένη ανάλυση που κάναμε για αρμονικά κύματα είναι χρήσιμη για τη μελέτη πραγματικών κυματικών φαινομένων.



Amplitude
Time Domain
Time
Frequency Domain

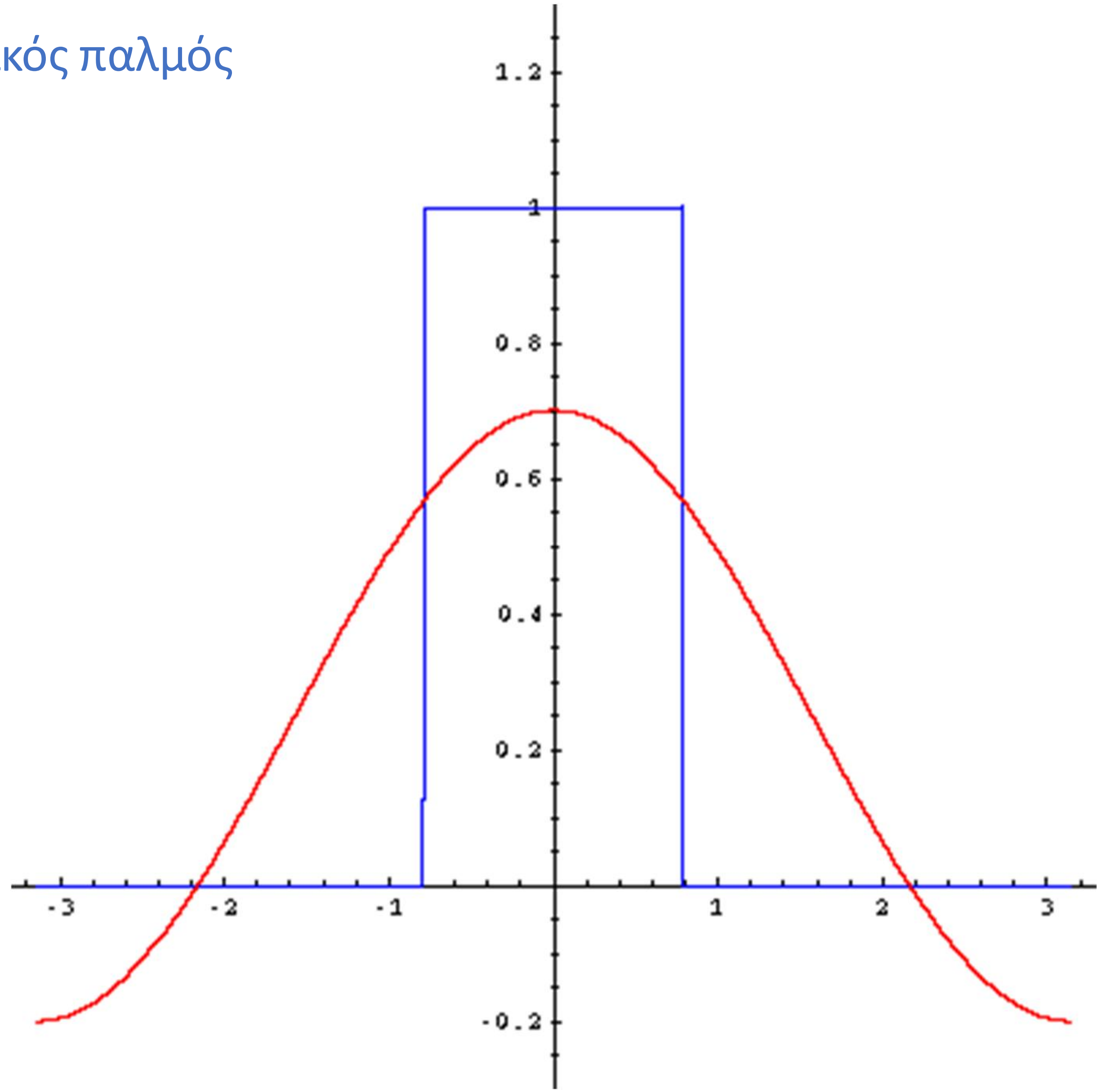



y
k = 1
1.0
0.5
0.0
−0.5
0.5
1.0
1.5
2.0
x
y
1.0
0.5
0.0
−0.5
−1.0
0.5
1.0
1.5
2.0
x



Η μαύρη διαταραχή προκύπτει από την επαλληλία των τριών έγχρωμων διαταραχών, που έχουν ίσα πλάτη, αλλά διαφορετικές συχνότητες

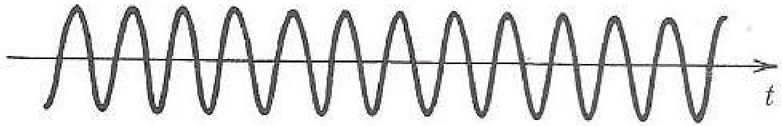
Τετραγωνικός παλμός

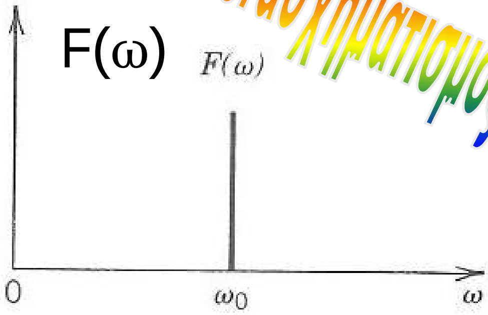


ΧΡΟΝΟΣ

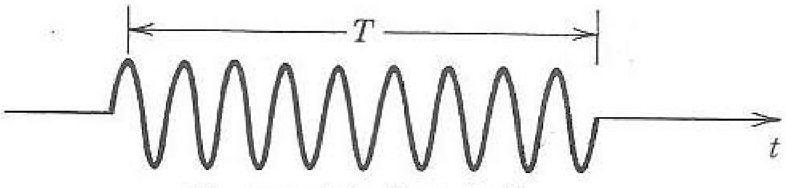
Μετασχηματισμός Fourier

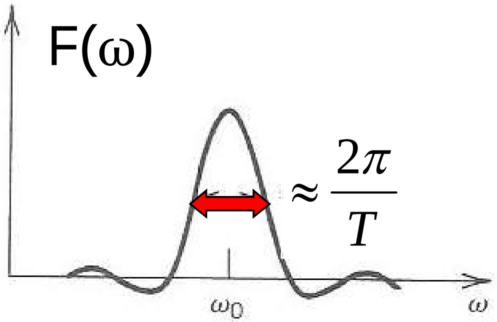
f(t)





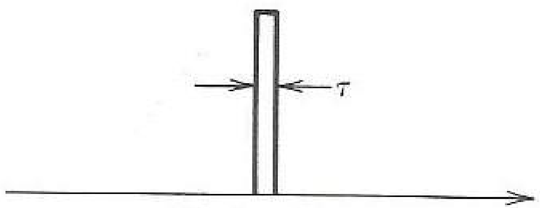
Συνεχές αρμονικό κύμα
συχνότητας ω_0

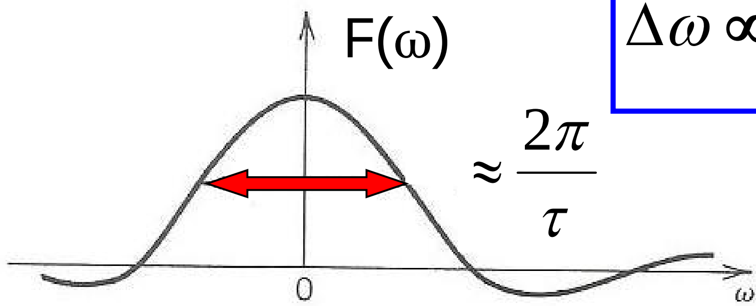




Κυματοσυρμός διάρκειας T
συχνότητας ω_0

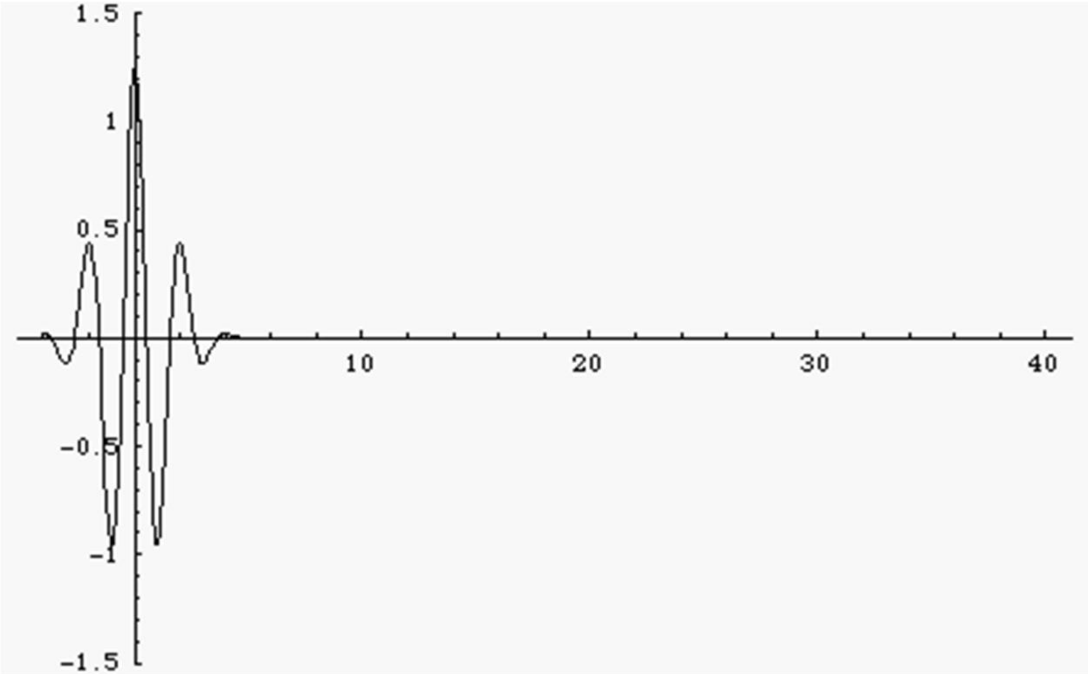
$$\boxed{\Delta\omega \propto \frac{1}{T}}$$





Μοναδικός παλμός διάρκειας τ

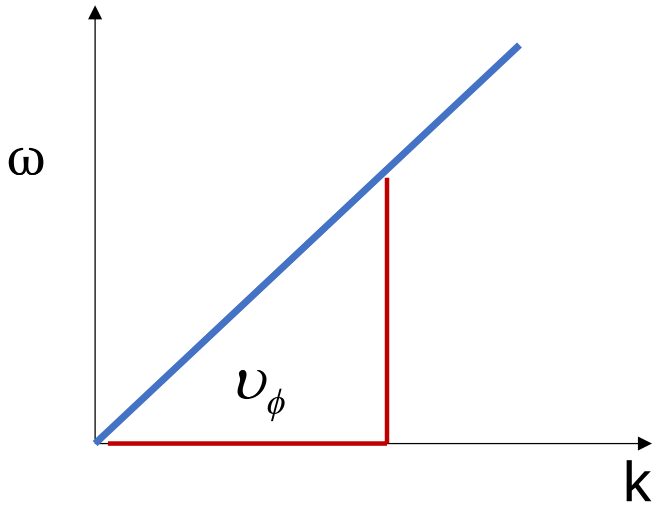
- Κάθε αρμονική συνιστώσα μιας συνάρτησης που περιγράφει μια διαταραχή, έχει τη δική της φασική ταχύτητα.
- Η διαταραχή προκύπτει από την επαλληλία όλων των αρμονικών συνιστωσών
- **Αν η φασική ταχύτητα είναι η ίδια για όλες τις συχνότητες**, τότε όλα τα αρμονικά κύματα διαδίδονται με την ίδια φασική ταχύτητα και το «σχήμα» της διαταραχής παραμένει αναλλοίωτο κατά τη διάδοσή του στο μέσο (παραμένει αναλλοίωτη και η πληροφορία που μεταφέρει)



Αυτή η διαταραχή προκύπτει από την επαλληλία 100 αρμονικών κυμάτων διαφορετικών συχνοτήτων, που διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα

…αθλητές ίδιας δυναμικότητας….

….η ομάδα δεν παραμορφώνεται…



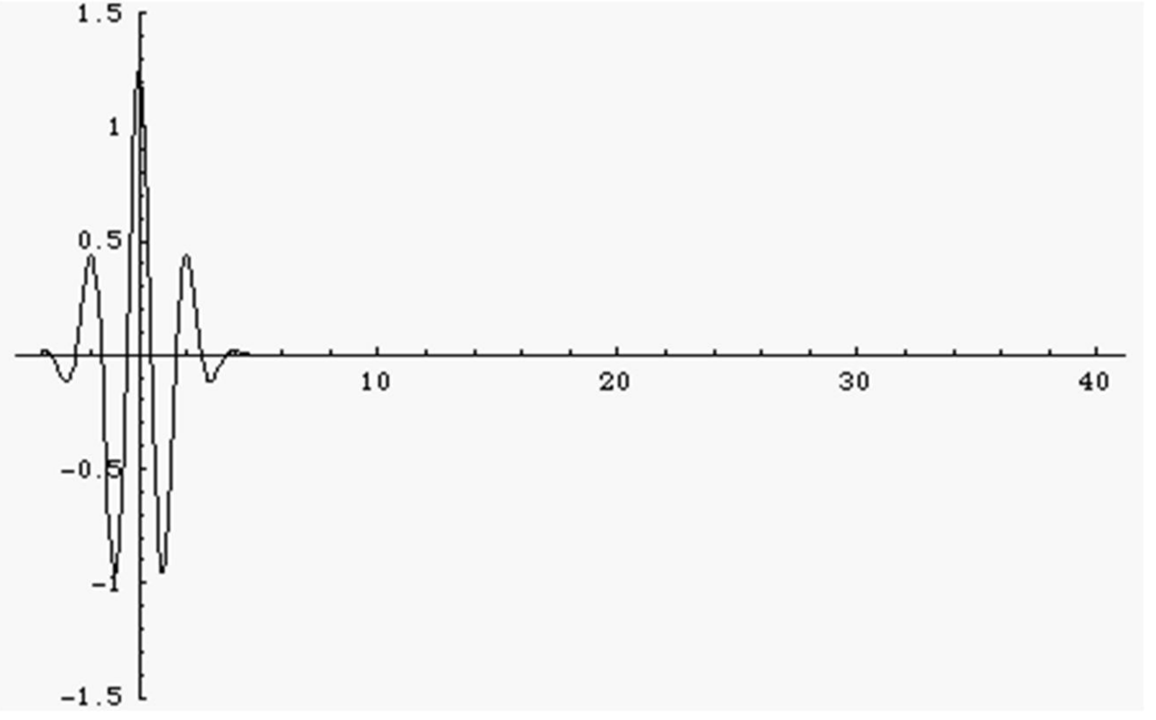
Αυτό συμβαίνει κατά τη διάδοση μίας διαταραχής σε τεντωμένη χορδή. Όλες οι αρμονικές συνιστώσες έχουν την ίδια φασική ταχύτητα $\upsilon_\varphi = \frac{\omega}{k} = = \sqrt{F/\mu} \Rightarrow$

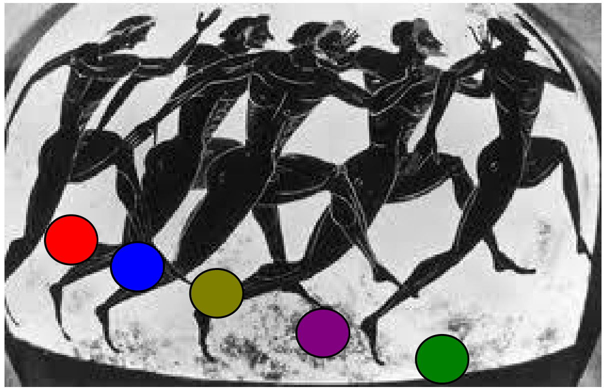
$$\boxed{\omega = \upsilon_\varphi k}$$

➢**Αν, όμως, η φασική ταχύτητα ΔΕΝ είναι η ίδια για όλες τις συχνότητες**, τότε καθώς διαδίδεται το κύμα το «σχήμα» της διαταραχής παραμορφώνεται και στο τέλος χάνεται… (μαζί και η πληροφορία που μεταφέρει)

➢Αυτό είναι το λεγόμενο **φαινόμενο της διασποράς ή του διασκεδασμού**

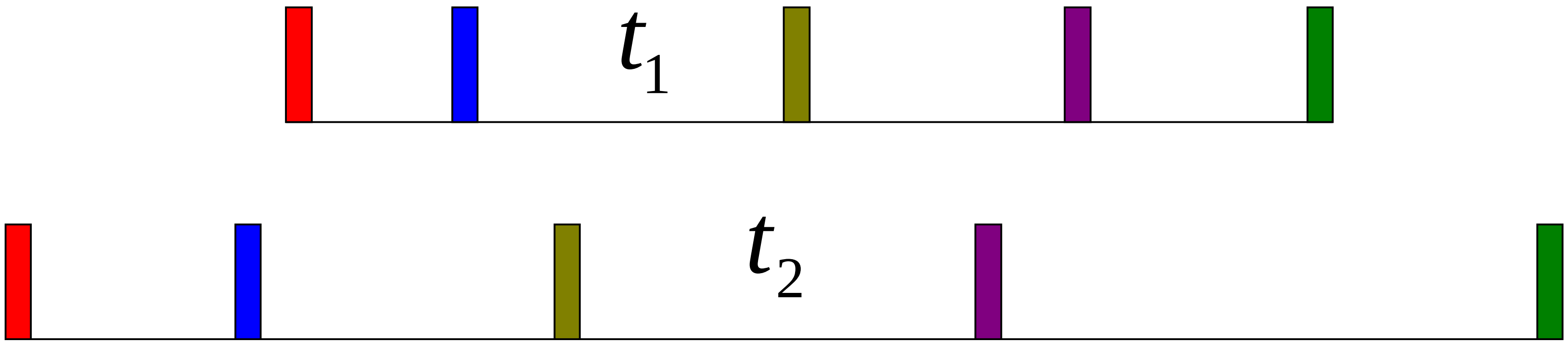
ω=ω(k)





t=0

…ας φανταστούμε μία ομάδα αθλητών πολύ διαφορετικών επιδόσεων…
Κατά την εκκίνηση αποτελούν μία ομάδα.

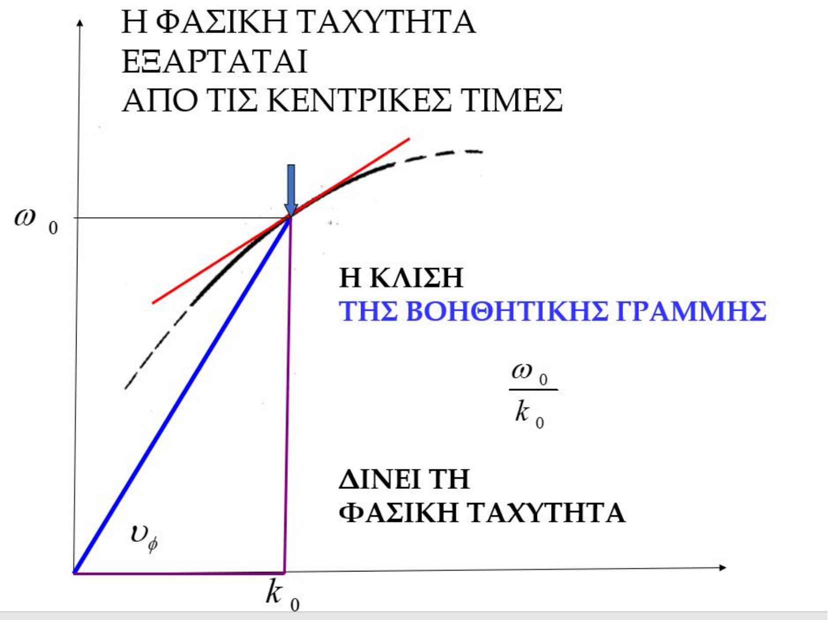


….με τη πάροδο του χρόνου η ομάδα διαλύεται…

Φασική ταχύτητα

$$\upsilon_p = \frac{\omega_0}{k_0}$$

Η φασική ταχύτητα εξαρτάται από τις κεντρικές τιμές ω_0, k_0



Ταχύτητα ομάδας

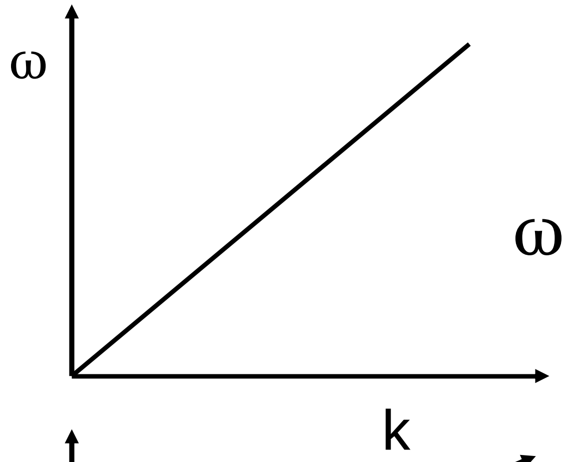
$$\upsilon_g = \left(\frac{d\omega(k)}{dk}\right)_{k_0}$$

Η φασική ταχύτητα εξαρτάται από το πως μεταβάλλεται το ω με το k (για $k = k_0$

Σχέση διασποράς (ή διασκεδασμού) $\omega = \omega(k)$

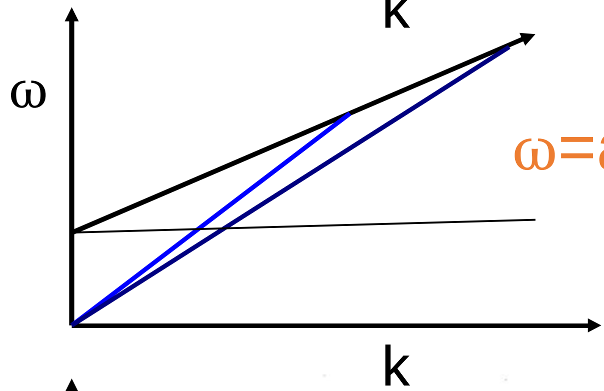
- $\upsilon_p = \frac{\omega_0}{k_0}$, $\upsilon_g = \left(\frac{d\omega(k)}{dk}\right)_{k_0}$

  Όταν $\upsilon_p = \upsilon_g$ δεν έχουμε διασπορά. Αυτό συμβαίνει στα κύματα που διαδίδονται στη τεντωμένη χορδή, όπου είδαμε ότι $\omega = \sqrt{F/\mu}\,k$, οπότε $\upsilon_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{F/\mu}$ και $\upsilon_g = \frac{d\omega(k)}{dk} = \sqrt{F/\mu}$, δηλ. $\upsilon_p = \upsilon_g$
- όταν $\upsilon_p > \upsilon_g$ λέμε ότι έχουμε ομαλό διασκεδασμό
- όταν $\upsilon_p < \upsilon_g$ λέμε ότι έχουμε ανώμαλο διασκεδασμό



ω=ak

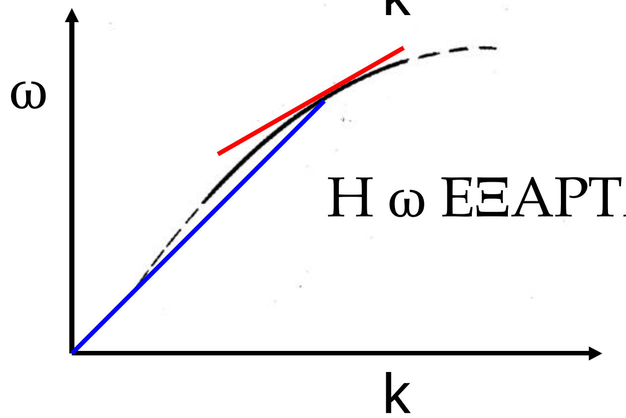
$$\upsilon_{ph} = \upsilon_g = const$$



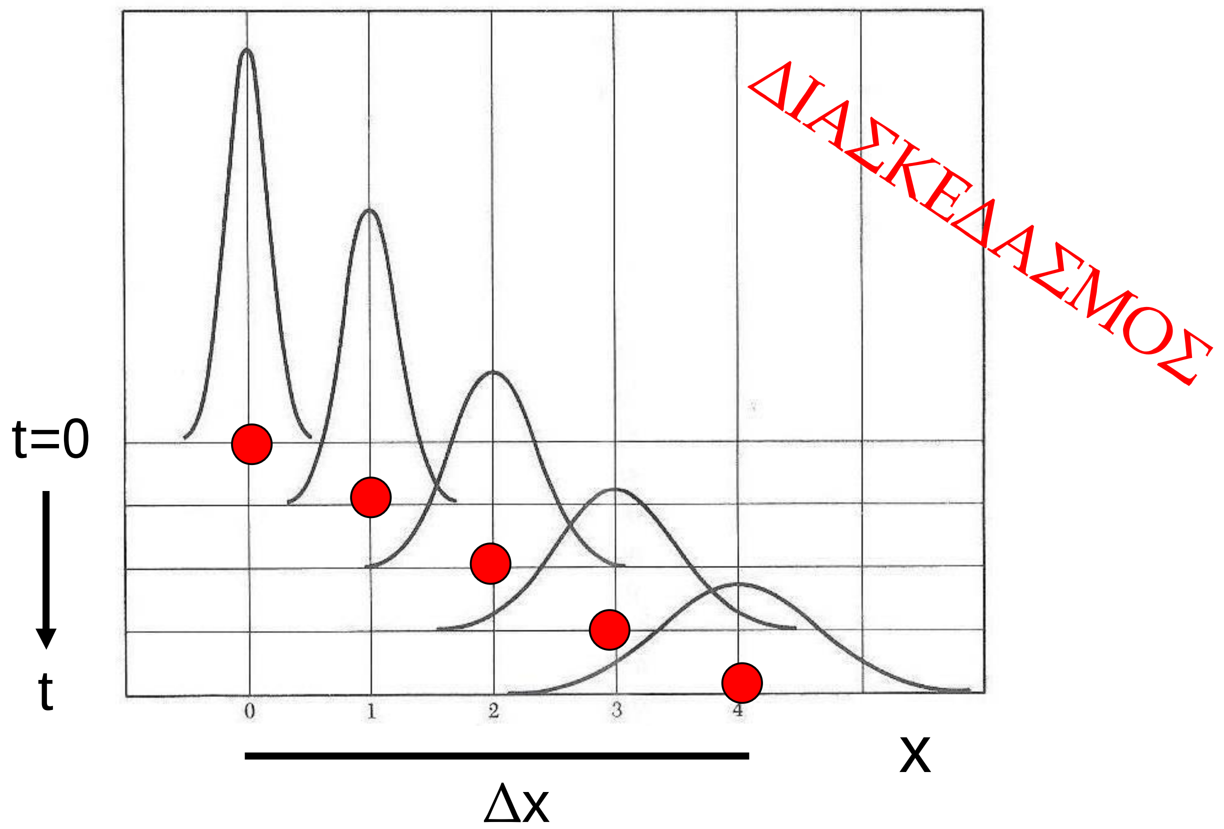
$$\upsilon_{ph} > \upsilon_g$$

ω=ak+b

$$\upsilon_g = const$$



Η ω ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΑΠΟ ΤΟΝ k



Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΟΜΑΔΟΣ
ΕΙΝΑΙ Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ
ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΕΙΔΟΥΣ
ΤΟΥ ''ΦΑΚΕΛΟΥ''

$$\upsilon_g = \frac{\Delta x}{t}$$

Περίληψη

- **Η φασική ταχύτητα** είναι μαθηματική οντότητα και αναφέρεται στα αρμονικά κύματα (που είναι επίσης μαθηματικές οντότητες). Είναι η ταχύτητα κίνησης νοητών σημείων (για μονοδιάστατα κύματα) ίδιας φάσης.

  Το αρμονικό κύμα δεν μεταδίδει πληροφορία (εκτός από εκείνη της ύπαρξής του).

- **Η ταχύτητα ομάδας** είναι φυσική οντότητα που αναφέρεται σε πραγματικές διαταραχές. Είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η ενέργεια του κύματος. Είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η πληροφορία.

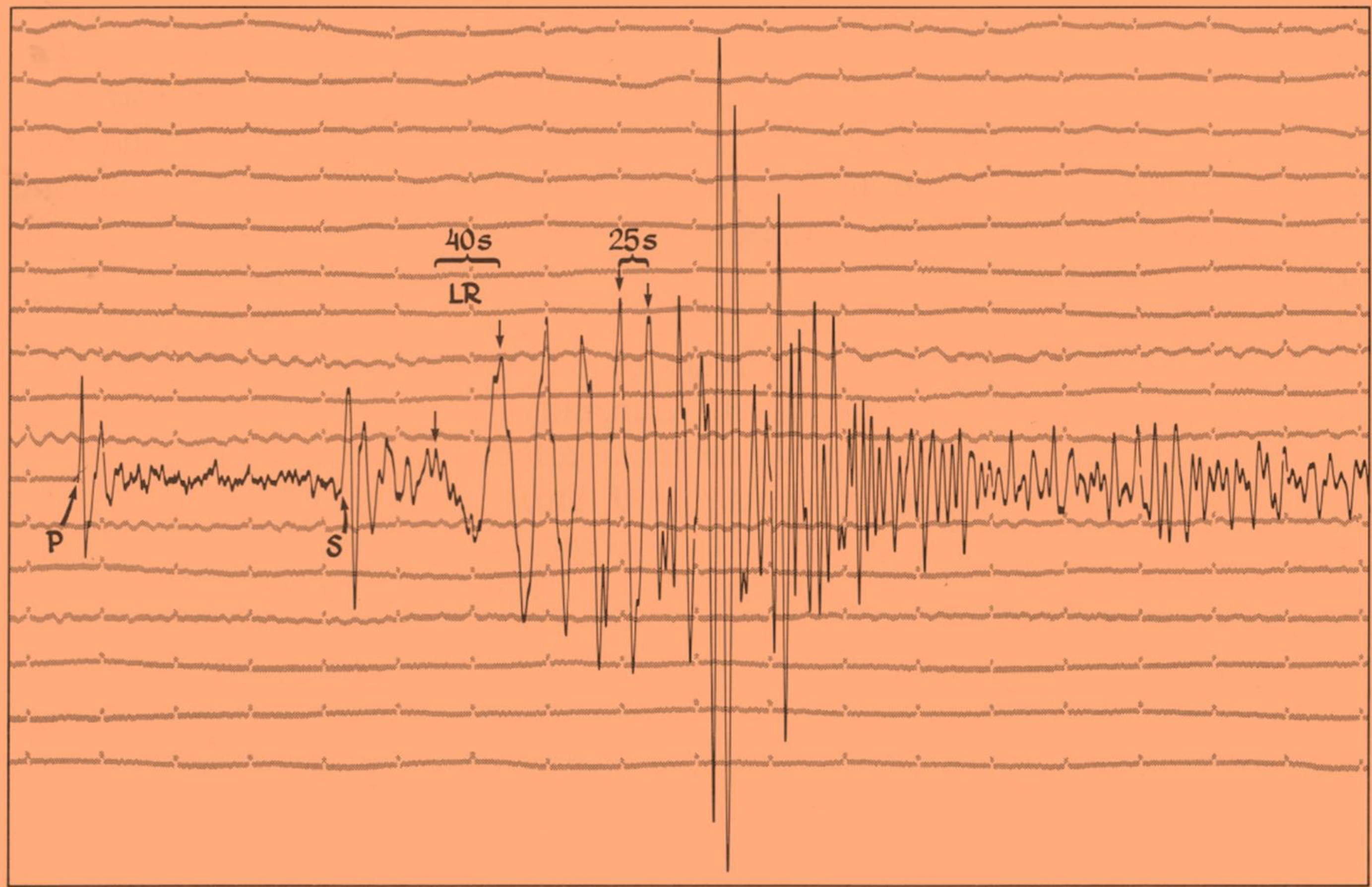


Fig. 7. Seismogram of the earthquake in northern Greece on May 23, 1978, (magnitude M=5.7, focal depth h=9 km), made at Uppsala, Sweden, at an epicentral distance of 2160 km. The trace has been made on a long-period Press-Ewing seismograph (see Chapter 6) and shows the vertical motion of the ground. Time advances from left to right and there is 1 minute between successive time marks (small upward offsets).

Ασκήσεις φυλλαδίου 5

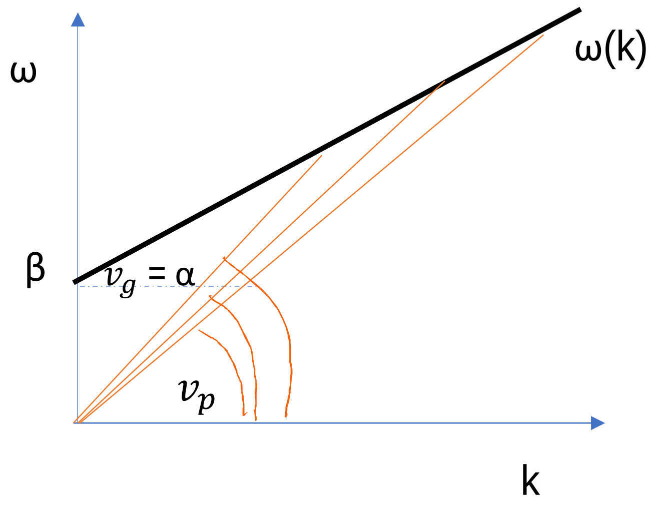
1. Βρείτε τη φασική και ομαδική ταχύτητα κυμάτων που περιγράφονται από τη σχέση διασποράς $\omega = \alpha k + \beta$, όπου α, β σταθερές. Σχολιάστε.

Λύση

$$v_p = \frac{\omega}{k} = \alpha + \frac{\beta}{k}$$

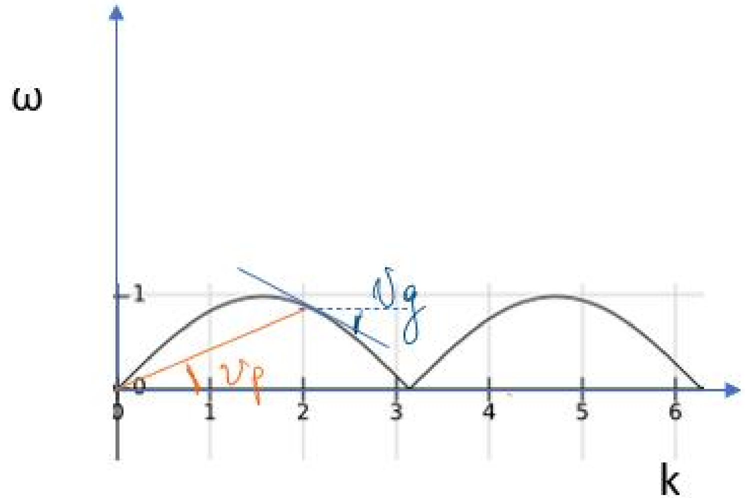
$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \alpha$$

Προφανώς $v_p \neq v_g$



2. Τα κύματα που μελετήσαμε σε μία τεντωμένη χορδή έχουν σχέση διασποράς $\omega = \upsilon k$ οπότε η φασική και ομαδική ταχύτητα είναι και οι δυο ίσες με υ. Αν τώρα κολλήσουμε χάντρες μάζας m (η καθεμιά) ανά τακτά διαστήματα l πάνω στη χορδή, τότε, αποδεικνύεται ότι η σχέση διασποράς δίνεται από τον τύπο $\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{kl}{2}\right), \omega_0 = \sqrt{\frac{T}{ml}}$, όπου T η τάση της χορδής. Βρείτε τη φασική και ομαδική ταχύτητα και σχολιάστε.

Λύση



$v_p = \frac{\omega}{k} = 2\omega_0 \left|\sin\left(\frac{kl}{2}\right)\right| / k$

$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 2\omega_0 \frac{l}{2} \cos\left(\frac{kl}{2}\right) = \omega_0 l \cos\left(\frac{kl}{2}\right)$

Παρατηρούμε ότι όταν το l γίνει πολύ μικρό, η φασική ταχύτητα γίνεται $v_p \cong \frac{2\omega_0 \frac{kl}{2}}{k} = \omega_0 l = \sqrt{\frac{T}{ml}}\, l = \sqrt{\frac{T}{m/l}} = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, δηλ. τείνει στο αποτέλεσμα που έχουμε βρει για συνεχή χορδή. Το ίδιο συμβαίνει με το $v_g = \omega_0 l \cos\left(\frac{kl}{2}\right) \cong \omega_0 l = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$ το οποίο ισούται με τη φασική ταχύτητα, όπως γνωρίζουμε ότι ισχύει για τη συνεχή χορδή.

3. Δείξτε ότι $\upsilon_g = \upsilon_p - \lambda \frac{d\upsilon_p}{d\lambda}$, όπου υ_p η φασική ταχύτητα, υ_g η ομαδική ταχύτητα και λ το μήκος κύματος.

Λύση

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad (1)$$

$$\upsilon_p = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = \upsilon_p k = \upsilon_p \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (2)$$

$$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow \upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} = \frac{d\left(\frac{2\pi\upsilon_p}{\lambda}\right)}{d\lambda} \cdot \frac{d\left(\frac{2\pi}{k}\right)}{dk} =$$

$$= \left[\frac{2\pi}{\lambda}\frac{d\upsilon_p}{d\lambda} - \frac{2\pi\upsilon_p}{\lambda^2}\right] 2\pi\left(-\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\right) \Rightarrow \upsilon_g = \upsilon_p - \lambda\frac{d\upsilon_p}{d\lambda}$$

$(k = 2\pi/\lambda)$

4. Έστω μια διαταραχή που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

Να βρεθεί η εξίσωση διασποράς, η φασική και η ομαδική ταχύτητα.

Λύση

Έστω αρμονική διαταραχή $y(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$. Παραγωγίζοντας διαδοχικά βρισκουμε:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = ikAe^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -ik^3 Ae^{i(kx-\omega t)}$$

Επίσης, $\frac{\partial y}{\partial t} = -i\omega Ae^{i(kx-\omega t)}$

Αντικαθιστώντας στην (1) και απλοποιώντας το $Ae^{i(kx-\omega t)}$ βρίσκουμε:

$$ik - i\omega - ik^3 = 0 \Rightarrow \omega = k - k^3$$

Άρα, $\upsilon_p = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2$ και $\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3k^2$

5. Ας θεωρήσουμε κύματα της θάλασσας που καταλήγουν σε μία ακτή με άπειρο μήκος. Θεωρούμε ότι το βάθος μειώνεται συνεχώς καθώς πλησιάζουμε προς την ακτή. Αποδεικνύεται ότι τα κύματα στην επιφάνεια της θάλασσας (κύματα βαρύτητας) ακολουθούν την σχέση διασποράς $\omega = \sqrt{gk\tanh(kd)}$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας, και d το βάθος του πυθμένα της θάλασσας. Γράψτε προσεγγιστικές σχέσης για τη σχέση διασποράς μακριά από την ακτή όπου θεωρούμε ότι το βάθος είναι πολύ μεγάλο, και κοντά στην ακτή όπου το βάθος είναι μικρό. Βρείτε τη φασική και την ομαδική ταχύτητα και στις δύο περιπτώσεις. Σχολιάστε.

Λύση

Σε μεγάλα βάθη, μακριά από την ακτή, $\tanh(kd) = \frac{e^{kd}-e^{-kd}}{e^{kd}+e^{-kd}} = \frac{1-e^{-2kd}}{1+e^{-2kd}} \underset{d\to\infty}{\rightarrow} 1$, δηλ. η σχέση διασποράς γίνεται $\omega = \sqrt{gk}$, χωρίς εξάρτηση από το βάθος d.

Στην περίπτωση αυτή, $\upsilon_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$ και $\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$, δηλ. στα βαθιά, η φασική ταχύτητα είναι διπλάσια από την ομαδική ταχύτητα.

Κοντά στην ακτή, το βάθος είναι μικρό οπότε $\tanh(kd) \cong kd$

(ανάπτυγμα Taylor $\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$-...), οπότε $\omega = k\sqrt{g\mathrm{d}}$

$\upsilon_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{g\mathrm{d}} = \frac{d\omega}{dk} = \upsilon_g$. Όσο μικραίνει το βάθος, τόσο μικραίνει η ομαδική ταχύτητα. Δηλ. το «μπροστινό» περίβλημα του κυματοπακέτου επιβραδύνεται κοντά στην ακτή. Τα κύματα «πέφτουν το ένα πάνω στο άλλο» και το ύψος του κύματος μεγαλώνει.