

# ΚΥΜΑΤΙΚΗ

## I. Μηχανικά κύματα

**Ασκήσεις Φυλλαδίου 4**  
**Συμβολή – Στάσιμα κύματα σε χορδή**

# Ερωτήσεις κατανόησης για τη Συμβολή

1. Δύο κύματα με το ίδιο πλάτος και μήκος κύματος συμβάλλουν σε τρεις διαφορετικές περιπτώσεις, δημιουργώντας συνιστάμενα κύματα με τις ακόλουθες εξισώσεις

$$(1) y'(x, t) = 4\sin(5x - 4t) \quad \rightarrow (\alpha)$$

$$(2) y'(x, t) = 4\sin(5x)\cos(4t) \quad \rightarrow (\gamma)$$

$$(3) y'(x, t) = 4\sin(5x + 4t) \quad \rightarrow (\beta)$$

Σε ποια περίπτωση τα δύο συμβάλλοντα κύματα διαδίδονται (α) προς τη θετική κατεύθυνση του  $x$ , (β) προς την αρνητική κατεύθυνση του  $x$  και (γ) προς αντίθετες κατευθύνσεις;

2. Από την ακόλουθη σειρά συχνοτήτων συντονισμού, λείπει μία συχνότητα (μικρότερη από 400 Hz): 150, 225, 300, 375 Hz.

(α) Ποια είναι η συχνότητα που λείπει; (β) Ποια είναι η συχνότητα της 7<sup>ης</sup> αρμονικής;

$$(\alpha) 375-300=75, 300-225=75, 225-150=75, 150-75=75 \rightarrow 75\text{Hz}$$

$$(\beta) 6^{\text{η}} \text{ αρμονική } 375+75=450\text{Hz}$$

$$7^{\text{η}} \text{ αρμονική } 450+75=525\text{Hz}$$

## Άσκηση 1 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-34) Συμβολή κυμάτων

Ημιτονοειδές κύμα γωνιακής συχνότητας  $1200\text{rad/s}$  και πλάτους  $3.00\text{mm}$  στέλνεται κατά μήκος καλωδίου γραμμικής πυκνότητας  $2.00\text{g/m}$  που βρίσκεται υπό τάση  $1200\text{N}$ .

(α) Πόσος είναι ο μέσος ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από το κύμα στο αντίθετο άκρο του καλωδίου;

(β) Εάν ένα πανομοιότυπο κύμα διαδίδεται ταυτόχρονα κατά μήκος ενός διπλανού πανομοιότυπου καλωδίου πόσος είναι ο συνολικός μέσος ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από τα δύο κύματα;

Εάν αντιθέτως αυτά τα δύο κύματα σταλούν ταυτόχρονα κατά μήκος του ίδιου καλωδίου, πόσος είναι ο μέσος ρυθμός με τον οποίο μεταφέρουν ενέργεια όταν η διαφορά φάσης τους είναι (γ)  $0$ , (δ)  $0.4\pi$  rad και (ε)  $\pi$  rad;

## Λύση

$$(a) y_m = 3.00 \text{ mm} = 3 \times 10^{-3} \text{ m}$$

$$\omega = 1200 \text{ rad/s} = 1.2 \times 10^3 \text{ rad/s}$$

$$\mu = 2 \text{ g/m} = 2 \times 10^{-3} \text{ kg/m}$$

$$v = \sqrt{F/\mu} = \sqrt{\frac{1200 \text{ N}}{2 \times 10^{-3} \text{ kg/m}}} = 774.6 \text{ m/s}$$

$$P_{avg} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2 = \frac{1}{2} \times 2 \times \frac{10^{-3} \text{ kg}}{\text{m}} \times \frac{774.6 \text{ m}}{\text{s}} \times 1.2^2 \times 10^6 \text{ s}^{-2} \times 9 \times 10^{-6} \text{ m}^2 = 10.388 \text{ kg m}^2 \text{ s}^{-3} \cong 10 \text{ W}$$

(β) Ανεξάρτητα μεταξύ τους – άρα απλά αθροίζω τις ισχύες  $\rightarrow 20 \text{ W}$

$$(\gamma), (\delta), (\epsilon) \quad y'_m = 2y_m \cos \frac{1}{2} \phi \rightarrow P'_{avg} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m'^2 = 4P_{avg} \cos^2 \frac{1}{2} \phi$$

$$\text{Άρα για } \phi = 0 \rightarrow P'_{avg} = 4P_{avg} = 40 \text{ W}$$

$$\text{για } \phi = 0.4\pi \rightarrow P'_{avg} = 4P_{avg} \cos^2 0.2\pi = 26.2 \text{ W}$$

$$\text{για } \phi = \pi \rightarrow P'_{avg} = 0$$

## Άσκηση 2 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-39) – Διανύσματα φάσης

Δύο ημιτονοειδή κύματα της ίδιας περιόδου και με πλάτη 5.0 και 7.0mm διαδίδονται κατά μήκος μιας τεντωμένης χορδής και προς την ίδια κατεύθυνση. Δημιουργούν ένα συνιστάμενο κύμα πλάτους 9.00 mm. Η σταθερά φάσης του κύματος πλάτους 5.00mm είναι 0. Πόση είναι η σταθερά φάσης του κύματος πλάτους 7.00mm;

### Λύση

1<sup>ος</sup> τρόπος – φάσορες και νόμος συνημιτόνων

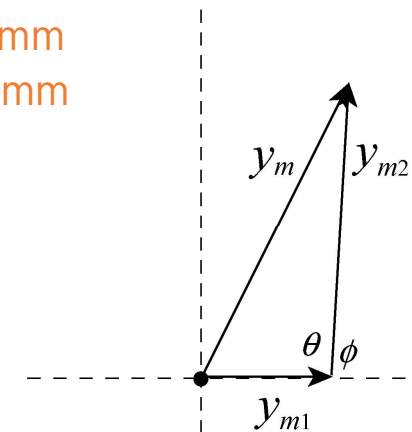
Νόμος συνημιτόνων:

$$\begin{aligned}y_m^2 &= y_{m1}^2 + y_{m2}^2 - 2y_{m1}y_{m2}\cos\theta \\ &= y_{m1}^2 + y_{m2}^2 + 2y_{m1}y_{m2}\cos\phi \Rightarrow\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos\phi &= \frac{y_m^2 - y_{m1}^2 - y_{m2}^2}{2y_{m1}y_{m2}} = \frac{(9.0\text{mm})^2 - (5.0\text{mm})^2 - (7.0\text{mm})^2}{2(5.0\text{mm})(7.0\text{mm})} \\ &= 0.10\end{aligned}$$

Άρα  $\phi=84^\circ$

$$\begin{aligned}y_{m1} &= 5.0\text{mm} \\ y_{m2} &= 7.0\text{mm} \\ y_m &= 9.0\text{mm}\end{aligned}$$



## 2<sup>ος</sup> τρόπος μιγαδική αναπαράσταση

$$y_{1m} + y_{2m}e^{i\varphi} = y_m e^{i\theta}$$

$$\begin{aligned} y_{1m} + y_{2m}e^{i\varphi} &= y_{1m} + y_{2m}(\cos \varphi + i \sin \varphi) = \\ &= (y_{1m} + y_{2m} \cos \varphi) + i y_{2m} \sin \varphi \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |y| &= |(y_{1m} + y_{2m} \cos \varphi) + i y_{2m} \sin \varphi| |e^{i\theta}| = \sqrt{y_{1m}^2 + y_{2m}^2 \cos^2 \varphi + 2y_{1m}y_{2m} \cos \varphi + y_{2m}^2 \sin^2 \varphi} \\ &= \sqrt{y_{1m}^2 + y_{2m}^2 + 2y_{1m}y_{2m} \cos \varphi} \Rightarrow \cos \varphi = \frac{y_m^2 - y_{m1}^2 - y_{m2}^2}{2y_{m1}y_{m2}} = 0.10 \end{aligned}$$

### Άσκηση 3 Στάσιμα κύματα

$\epsilon \pm \omega$

Δύο οδεύοντα κύματα που κινούνται σε χορδή είναι πανομοιότυπα εκτός του ότι έχουν αντίθετες ταχύτητες. Ικανοποιούν την εξίσωση  $y(x, t) = A \sin(kx \pm \omega t)$ , όπου το θετικό ή το αρνητικό πρόσημο εξαρτάται από την κατεύθυνση που ταξιδεύει το κύμα.

α) Δείξτε ότι η παλλόμενη χορδή περιγράφεται από την εξίσωση  $y(x, t) = 2A \sin(kx) \cos(\omega t)$ ,

β) Για τις τιμές  $A=4 \text{ cm}$ ,  $k=3 \text{ rad/cm}$  και  $\omega=2 \text{ rad/s}$  ποια η μέγιστη μετατόπιση της συνισταμένης κυματικής διαταραχής στο σημείο με συντεταγμένη  $x=2.3 \text{ cm}$ ;

γ) Ποιες οι θέσεις των δεσμών και των αντιδεσμών (κοιλιών) της συνισταμένης κυματικής διαταραχής;

### Λύση

α) Έστω  $y_1(x, t) = A \sin(kx - \omega t)$  και  $y_2(x, t) = A \sin(kx + \omega t)$ , οπότε

$$y'(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A \sin(kx - \omega t) + A \sin(kx + \omega t) = [2A \sin kx] \cos \omega t$$

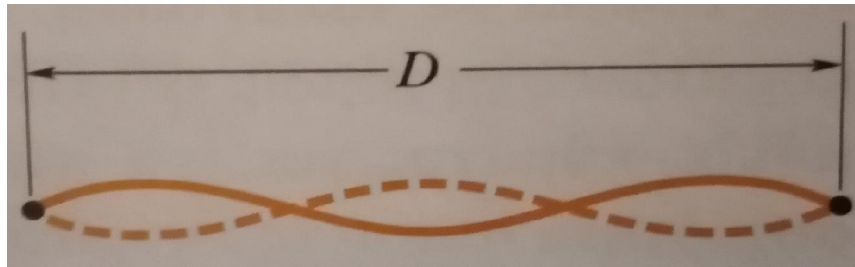
β) Για  $x = 2.3 \text{ cm}$ ,  $y'_{max} = 2A \sin kx = 2 \times 4 \text{ cm} \times \sin \left( 3 \frac{\text{rad}}{\text{cm}} \times 2.3 \text{ cm} \right) = 4.63 \text{ cm}$

γ)  $\lambda = \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{3} \text{ cm} = 2.09 \text{ cm} \rightarrow x = \frac{n\lambda}{2} = 1.05n$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  Δεσμοί

και  $x = \left( n + \frac{1}{2} \right) \lambda / 2 = 1.05(n + 1/2)$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$  Αντιδεσμοί (κοιλίες)

## Άσκηση 4 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-49) – Στάσιμα κύματα και συντονισμός

Μία πλαστική χορδή κιθάρας έχει γραμμική πυκνότητα  $7.2\text{g/m}$  και στη χορδή ασκείται τάση  $150\text{N}$ . Τα σταθερά στηρίγματά της απέχουν μεταξύ τους κατά απόσταση  $D=90.0\text{cm}$ . Η χορδή ταλαντώνεται δημιουργώντας τον σχηματισμό στάσιμου κύματος που φαίνεται στο παρακάτω σχήμα. Να υπολογίσετε: (α) τη ταχύτητα διάδοσης, (β) το μήκος κύματος και (γ) τη συχνότητα των οδευόντων κυμάτων των οποίων η υπέρθεση δίνει αυτό το στάσιμο κύμα.



$$(\alpha) v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} = \sqrt{\frac{150\text{N}}{7.20 \times 10^{-3}\text{kg/m}}} = 144.34\text{m/s} \approx 1.44 \times 10^2\text{m/s}$$

$$(\beta) \text{ Από το σχήμα προκύπτει ότι } D = \lambda + \frac{\lambda}{2} = 3\lambda/2 \Rightarrow \lambda = \frac{2}{3}D = \frac{2}{3}(90\text{cm}) = 60.0\text{cm} = 0.6\text{m}$$

$$(\gamma) f = \frac{v}{\lambda} = \frac{1.44 \times 10^2\text{m/s}}{0.6\text{m}} = 241\text{Hz}$$



## Άσκηση 5 Στάσιμα κύματα

(α) Χορδή υπό τάση  $F$  και μάζα ανά μονάδα μήκους  $\mu$  είναι στερεωμένη στο  $x = 0$  και στο  $x = L$ . Την χρονική στιγμή  $t = 0$ , η χορδή είναι σε ηρεμία και η κατακόρυφη μετατόπιση  $y$  κατά μήκος της δίνεται από την κυματοσυνάρτηση:

$$y(x, 0) = 2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + 3\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \quad (1)$$

Ποια είναι η συνολική ενέργεια στο  $t = 0$ ;

(β) Η χορδή ελευθερώνεται τη χρονική στιγμή  $t = 0$  και αρχίζει να ταλαντώνεται. Ποια η απομάκρυνση  $y(x, t)$  τη χρονική στιγμή  $t$ ;

### Λύση

(α) Η ενέργεια τη στιγμή  $t = 0$  είναι μόνο δυναμική (αφού η χορδή είναι ακίνητη) με γραμμική πυκνότητα

$$\rho_U = \frac{dU}{dx} \approx \frac{1}{2}F \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 \quad (2)$$

$$\text{Από (1) προκύπτει } \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 = \left[\frac{4\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{3\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]^2.$$

$$\text{Οπότε } E_{\text{total}} = U(t = 0) = \frac{1}{2}F \int_0^L \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2 dx = \frac{1}{2}F \int_0^L \left[\frac{4\pi}{L} \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) + \frac{3\pi}{L} \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)\right]^2 dx$$

Ο όρος που είναι  $\propto \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{\pi x}{L}\right)$  δεν συμμετέχει στο ολοκλήρωμα (διαπιστώστε το) οπότε τελικά

$$E_{\text{total}} = \frac{1}{2}F \frac{\pi^2}{L^2} \left[16 \int_0^L \cos^2\left(\frac{2\pi x}{L}\right) dx + 9 \int_0^L \cos^2\left(\frac{\pi x}{L}\right) dx\right]$$

$$\text{Άρα } E_{\text{total}} = \frac{1}{2}F \frac{\pi^2}{L^2} \left(16 \frac{L}{2} + 9 \frac{L}{2}\right) = \frac{25}{4} \frac{F\pi^2}{L}$$

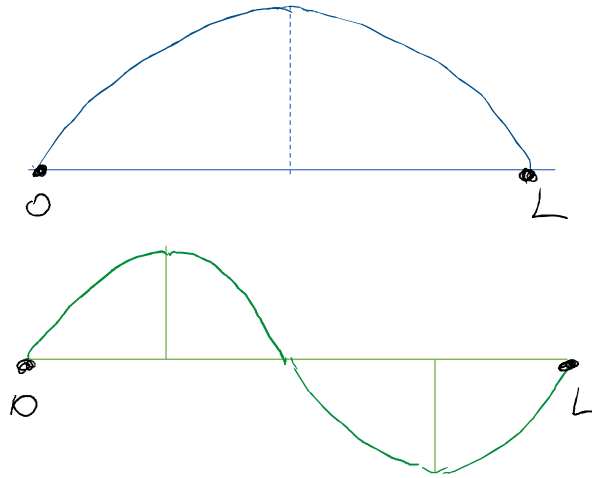
$$\beta) y(x, 0) = 3\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + 2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)$$

$$\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) \rightarrow k_1 = \frac{\pi}{L} \rightarrow \lambda_1 = 2L$$

$$\text{και } \omega_1 = vk_1 = \frac{\pi v}{L}$$

$$\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \rightarrow k_2 = \frac{2\pi}{L} \rightarrow \lambda_2 = L$$

$$\text{και } \omega_2 = vk_2 = \frac{2\pi v}{L} = 2\omega_1$$



Συνολικά

$$y(x, t) = 2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos(\omega_2 t) + 3\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos(\omega_1 t) = 2\sin\left(\frac{2\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{2\pi v}{L}t\right) + 3\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right)\cos\left(\frac{\pi v}{L}t\right)$$

## Άσκηση 6 (Halliday-Resnick-Walker, ex. 16-84) – Στάσιμα κύματα και συντονισμός

Η ταλάντωση ενός διαπασών των 600Hz δημιουργεί στάσιμα κύματα σε μια χορδή στερεωμένη στα δύο άκρα της. Η κυματική ταχύτητα σε αυτή τη χορδή είναι 400m/s. Το στάσιμο κύμα έχει 4 βρόχους και πλάτος 2mm. (α) Πόσο είναι το μήκος της χορδής; (β) Γράψτε μία εξίσωση για την εγκάρσια μετατόπιση της χορδής ως συνάρτηση της θέσης και του χρόνου.

Λύση

$$(α) L = 4 \left( \frac{\lambda}{2} \right) = 2\lambda$$

$$\lambda = v/f \Rightarrow \lambda = \frac{400 \frac{m}{s}}{600 1/s} = \frac{2}{3} m$$

$$L = \left( \frac{4}{3} \right) m$$

$$(β) y = y_m \sin(kx) \cos(\omega t)$$

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} = 2\pi \frac{3}{2} m^{-1} = 3\pi m^{-1} \cong 9,42 rad m^{-1}$$

$$\omega = 2\pi f = 2\pi(600Hz) = 3800 rad/s$$

$$y(x, t) = (2.0mm) \sin[(9.4m^{-1})x] \cos[(3800s^{-1})t]$$



$$L = 2\lambda$$