ΚΥΜΑΤΙΚΗ

Ι. Μ**ηχανικά κύματα**

Φυλλάδιο Ασκήσεων 5

- Οι έννοιες της φασικής και ομαδικής ταχύτητας
- Διάδοση πληροφορίας

Ασκήσεις φυλλαδίου 5

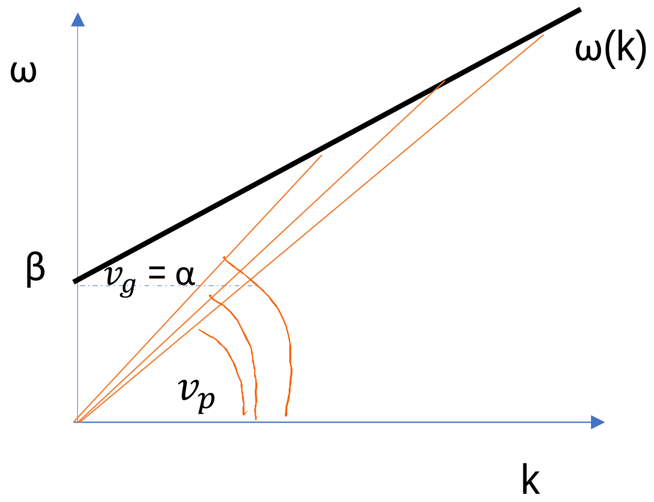
1. Βρείτε τη φασική και ομαδική ταχύτητα κυμάτων που περιγράφονται από τη σχέση διασποράς $\omega = \underline{\alpha k + \beta}$, όπου α, β σταθερές. Σχολιάστε.

Λύση

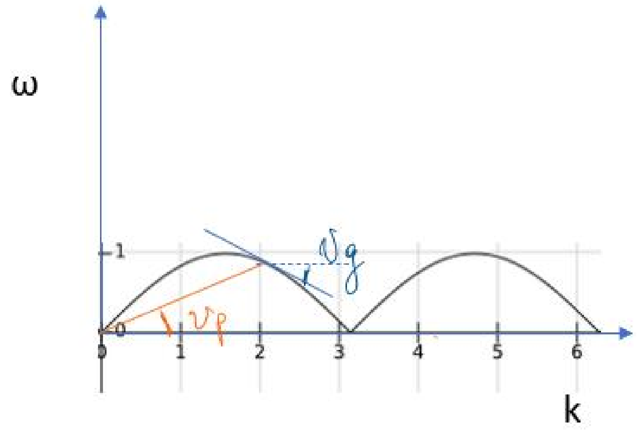
$$v_p = \frac{\omega}{k} = \alpha + \frac{\beta}{k}$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \alpha$$

Προφανώς $v_p \neq v_g$



2. Τα κύματα που μελετήσαμε σε μία τεντωμένη χορδή έχουν σχέση διασποράς $\omega = \upsilon k$ οπότε η φασική και ομαδική ταχύτητα είναι και οι δυο ίσες με υ. Αν τώρα κολλήσουμε χάντρες μάζας m (η καθεμιά) ανά τακτά διαστήματα l πάνω στη χορδή, τότε, αποδεικνύεται ότι η σχέση διασποράς δίνεται από τον τύπο $\omega = 2\omega_0 \sin\left(\frac{kl}{2}\right), \omega_0 = \sqrt{\frac{F}{ml}}$, όπου F η τάση της χορδής. Βρείτε τη φασική και ομαδική ταχύτητα και σχολιάστε.



Λύση

$$v_p = \frac{\omega}{k} = 2\omega_0 \left|\sin\left(\frac{kl}{2}\right)\right| / k$$

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = 2\omega_0 \frac{l}{2} \cos\left(\frac{kl}{2}\right) = \omega_0 l \cos\left(\frac{kl}{2}\right)$$

Παρατηρούμε ότι όταν το l γίνει πολύ μικρό, η φασική ταχύτητα γίνεται $v_p \cong \frac{2\omega_0 \frac{kl}{2}}{k} = \omega_0 l = \sqrt{\frac{F}{ml}}\, l = \sqrt{\frac{F}{m/l}} = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$, δηλ. τείνει στο αποτέλεσμα που έχουμε βρει για συνεχή χορδή (έστω n ο αριθμός των χαντρών που χρησιμοποιήσαμε. Τότε $\mu = nm/[(n-1)l] \sim m/l$, όπου θεωρήσαμε τη μάζα των χαντρών πολύ μεγαλύτερη από της χορδής). Το ίδιο συμβαίνει με το $v_g = \omega_0 l \cos\left(\frac{kl}{2}\right) \cong \omega_0 l = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ το οποίο ισούται με τη φασική ταχύτητα, όπως γνωρίζουμε ότι ισχύει για τη συνεχή χορδή.

3. Δείξτε ότι $\upsilon_g = \upsilon_p - \lambda \frac{d\upsilon_p}{d\lambda}$, όπου υ_p η φασική ταχύτητα, υ_g η ομαδική ταχύτητα και λ το μήκος κύματος.

Λύση

$$\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} \qquad (1)$$

$$\upsilon_p = \frac{\omega}{k} \Rightarrow \omega = \upsilon_p k = \upsilon_p \frac{2\pi}{\lambda} \qquad (2)$$

$$(1)\ \&\ (2) \Rightarrow \upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d\omega}{d\lambda}\frac{d\lambda}{dk} = \frac{d\left(\frac{2\pi\upsilon_p}{\lambda}\right)}{d\lambda} \cdot \frac{d\left(\frac{2\pi}{k}\right)}{dk} =$$

$$= \left[\frac{2\pi}{\lambda}\frac{d\upsilon_p}{d\lambda} - \frac{2\pi\upsilon_p}{\lambda^2}\right] 2\pi \left(-\frac{\lambda^2}{4\pi^2}\right) \Rightarrow \upsilon_g = \upsilon_p - \lambda \frac{d\upsilon_p}{d\lambda}$$

$(k = 2\pi/\lambda)$

4. Έστω μια διαταραχή που περιγράφεται από τη διαφορική εξίσωση

$$\frac{\partial y(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial y(x,t)}{\partial t} + \frac{\partial^3 y(x,t)}{\partial x^3} = 0 \quad (1)$$

Να βρεθεί η εξίσωση διασποράς, η φασική και η ομαδική ταχύτητα.

Λύση

Έστω αρμονική διαταραχή $y(x,t) = Ae^{i(kx-\omega t)}$. Παραγωγίζοντας διαδοχικά βρισκουμε:

$$\frac{\partial y}{\partial x} = ikAe^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = -k^2 Ae^{i(kx-\omega t)}$$

$$\frac{\partial^3 y}{\partial x^3} = -ik^3 Ae^{i(kx-\omega t)}$$

Επίσης, $\frac{\partial y}{\partial t} = -i\omega Ae^{i(kx-\omega t)}$

Αντικαθιστώντας στην (1) και απλοποιώντας το $Ae^{i(kx-\omega t)}$ βρίσκουμε:

$ik - i\omega - ik^3 = 0 \Rightarrow \omega = k - k^3$

Άρα, $\upsilon_p = \frac{\omega}{k} = 1 - k^2$ και $\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = 1 - 3k^2$

5. Στη κβαντομηχανική, η σχέση διασποράς για ένα ηλεκτρόνιο με ταχύτητα $\upsilon = \frac{\hbar\, k}{m}$ είναι $\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + m^2 c^2/\hbar^2$, όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό. Δείξτε ότι το γινόμενο ομαδικής και φασικής ταχύτητας είναι ίσο με c^2.

$$\frac{\omega^2}{c^2} = k^2 + m^2 c^2/\hbar^2 \Rightarrow \omega^2 = c^2\, k^2 + m^2 c^4/\hbar^2 \xrightarrow[d/dk]{}$$

$$2\omega \frac{d\omega}{dk} = 2k\, c^2 \Rightarrow \frac{d\omega}{dk}\frac{\omega}{k} = c^2 \Rightarrow \upsilon_g\, \upsilon_p = c^2$$

6. Ας θεωρήσουμε κύματα της θάλασσας που καταλήγουν σε μία ακτή με άπειρο μήκος. Θεωρούμε ότι το βάθος μειώνεται συνεχώς καθώς πλησιάζουμε προς την ακτή. Αποδεικνύεται ότι τα κύματα στην επιφάνεια της θάλασσας (κύματα βαρύτητας) ακολουθούν την σχέση διασποράς $\omega = \sqrt{gk\tanh(kd)}$, όπου g η επιτάχυνση της βαρύτητας, και d το βάθος του πυθμένα της θάλασσας. Γράψτε προσεγγιστικές σχέσεις για τη σχέση διασποράς μακριά από την ακτή όπου θεωρούμε ότι το βάθος είναι πολύ μεγάλο, και κοντά στην ακτή όπου το βάθος είναι μικρό. Βρείτε τη φασική και την ομαδική ταχύτητα και στις δύο περιπτώσεις. Σχολιάστε.

Λύση

Σε μεγάλα βάθη, μακριά από την ακτή, $\tanh(kd) = \frac{e^{kd}-e^{-kd}}{e^{kd}+e^{-kd}} = \frac{1-e^{-2kd}}{1+e^{-2kd}} \underset{d\to\infty}{\rightarrow} 1$, δηλ. η σχέση διασποράς γίνεται $\omega = \sqrt{gk}$, χωρίς εξάρτηση από το βάθος d.

Στην περίπτωση αυτή, $\upsilon_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{\frac{g}{k}}$ και $\upsilon_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{g}{k}}$, δηλ. στα βαθιά, η φασική ταχύτητα είναι διπλάσια από την ομαδική ταχύτητα.

Κοντά στην ακτή, το βάθος είναι μικρό οπότε $\tanh(kd) \cong kd$

(ανάπτυγμα Taylor $\tanh(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15}$-...), οπότε $\omega = k\sqrt{g\mathrm{d}}$

$\upsilon_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{g\mathrm{d}} = \frac{d\omega}{dk} = \upsilon_g$. Όσο μικραίνει το βάθος, τόσο μικραίνει η ομαδική ταχύτητα. Δηλ. το «μπροστινό» περίβλημα του κυματοπακέτου επιβραδύνεται κοντά στην ακτή. Τα κύματα «πέφτουν το ένα πάνω στο άλλο» και το ύψος του κύματος μεγαλώνει.