ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. Μ**ηχανικά κύματα**

Μάθημα 5ο

I. Υπέρθεση κυμάτων
II. Συνοριακές συνθήκες
III. Ανάκλαση – διάθλαση κυμάτων
IV. Συμβολή κυμάτων

Σχήματα και διαγράμματα (όπου δεν υπάρχει αναφορά) από Πανεπιστημιακή Φυσική Young & Freedman, και από Φυσική-Βασικές αρχές Halliday, Resnick & Walker

Αρχή της επαλληλίας ή υπέρθεσης κυμάτων

Ας υποθέσουμε ότι σε μία χορδή διαδίδονται δύο (ή περισσότερα) κύματα, $y_1(x,t)$ και $y_2(x,t)$. Τότε η μετατόπιση ενός τυχαίου σημείου της χορδής x τη χρονική στιγμή t θα προκύπτει από το άθροισμα των μετατοπίσεων που θα οφειλόταν σε κάθε κύμα ξεχωριστά, δηλ.

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t)$$

Αυτό οφείλεται στο ότι η κυματική εξίσωση είναι γραμμική. Αν οι κυματοσυναρτήσεις $y_1(x,t)$ και $y_2(x,t)$ ικανοποιούν τη κυματική εξίσωση, δηλ.

$$\frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y_1(x,t)}{\partial t^2} \text{ και } \frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y_2(x,t)}{\partial t^2}$$

τότε προκύπτει ότι

(αθροίζοντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις και χρησιμοποιώντας τις ιδιότητες των μερικών παραγώγων)

$$\frac{\partial^2 (y_1(x,t)+y_2(x,t))}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 (y_1(x,t)+y_2(x,t))}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial x^2} = \frac{1}{\upsilon^2}\frac{\partial^2 y(x,t)}{\partial t^2}$$

Σημείωση: το ίδιο ισχύει για οποιοδήποτε γραμμικό συνδυασμό λύσεων της κυματικής εξίσωσης

Αλληλοεπικαλυπτόμενα κύματα αθροίζονται αλγεβρικά για να δώσουν ένα συνιστάμενο κύμα (ή ολικό κύμα)

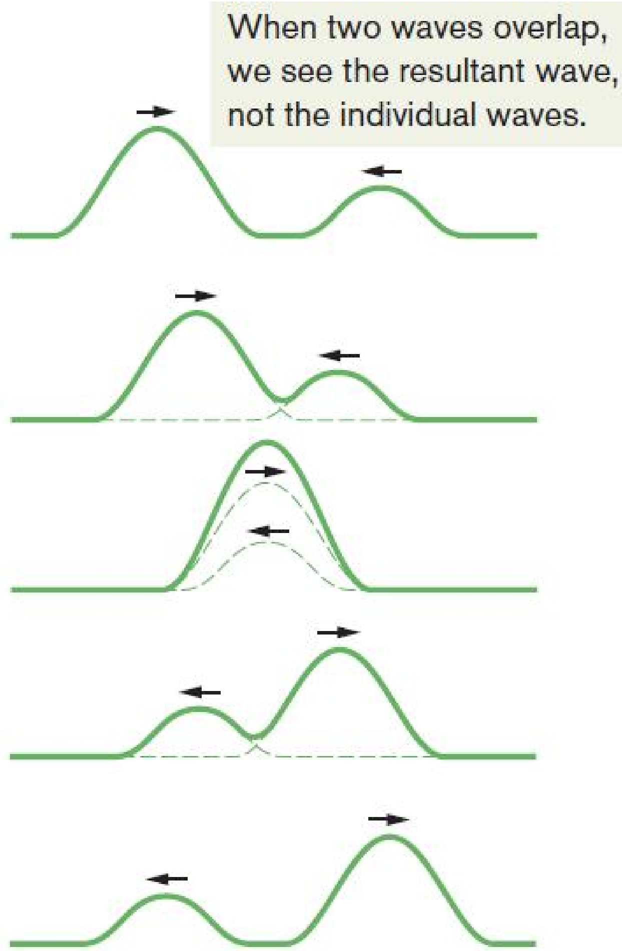


Fig. 16-11 A series of snapshots that show two pulses traveling in opposite directions along a stretched string. The superposition principle applies as the pulses move through each other.

Συνοριακές συνθήκες

Μέχρι τώρα υποθέσαμε ότι το μήκος της χορδής είναι «άπειρο», δηλ. ότι δεν έχει σύνορο. Επίσης υποθέσαμε ότι η γραμμική πυκνότητα της χορδής παραμένει σταθερή σε όλο το μήκος της χορδής.

Στα επόμενα θα εξετάσουμε τι συμβαίνει αν δεν απαιτήσουμε η χορδή να έχει παντού την ίδια γραμμική πυκνότητα (ή ακόμα, να έχει ένα ή δύο σταθερά άκρα).

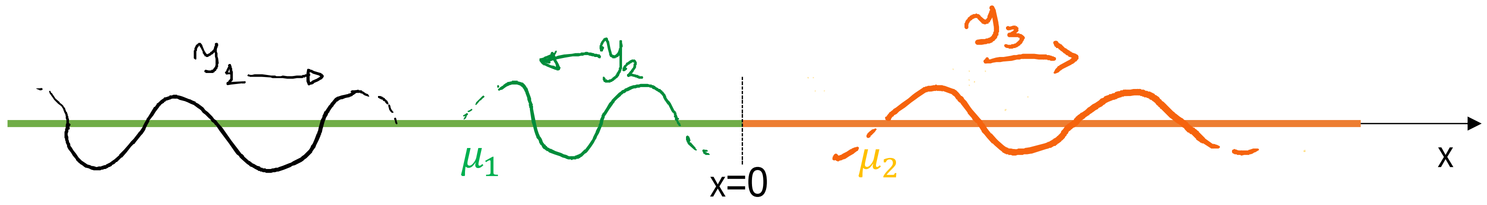
Θα υποθέσουμε, ως ένα απλό παράδειγμα, ότι, καθώς διαδίδεται προς τα δεξιά $(+x)$ ένα αρμονικό κύμα κατά μήκος μιας τεντωμένης χορδής με γραμμική πυκνότητα μ_1, συναντά σε κάποιο σημείο (έστω στο $x = 0$) ένα «σύνορο» από το οποίο και μετά η χορδή έχει διαφορετική γραμμική πυκνότητα, μ_2.

Δηλ. $\mu(x) = \begin{cases} \mu_1, x < 0 \\ \mu_2, x > 0 \end{cases}$

Έστω $y_1(x,t) = \mathrm{A}_1 sin(\omega t - k_1 x)$

όπου $k_1 = \frac{\omega}{\upsilon_1}$, $\upsilon_1 = \sqrt{\frac{\mathrm{F}}{\mu_1}}$, όπου F είναι η τάση της χορδής. Υποθέτουμε ότι η F είναι η ίδια σε όλα τα σημεία της χορδής, διότι αν δεν συνέβαινε αυτό θα είχαμε σε κάποιο σημείο μη μηδενική οριζόντια επιτάχυνση.

Συνοριακές συνθήκες – Ανάκλαση – Διάθλαση



Στο σημείο $x = 0$ δύο πράγματα μπορεί να συμβούν:

(i) το κύμα να εξακολουθήσει να διαδίδεται κατά μήκος της χορδής με διαφορετική ταχύτητα διάδοσης

$$v_2 = \sqrt{\frac{F}{\mu_2}}, \text{ ή}$$

(i) το κύμα να συνεχίσει να διαδίδεται στο πρώτο μέρος της χορδής ακολουθώντας αντίθετη κατεύθυνση διάδοσης, δηλ. να «ανακλαστεί»,

ή να συμβούν και τα δύο, δηλ. μέρος του κύματος να διαδοθεί πέρα από το $x = 0$ και ένα μέρος να ανακλαστεί. Θα εξετάσουμε αυτή τη γενικότερη περίπτωση.

Προσπίπτον κύμα: $y_1(x,t) = A_1 sin(\omega t - k_1 x)$, διαδίδεται προς τα δεξιά για $x < 0$ με ταχύτητα $v_1 = \frac{\omega}{k_1} = \sqrt{\frac{F}{\mu_1}}$

Ανακλώμενο κύμα: $y_2(x,t) = A_2 sin(\omega t + k_1 x)$,διαδίδεται προς τα αριστερά για $x < 0$ με ταχύτητα v_1

Διαδιδόμενο κύμα: $y_3(x,t) = A_3 sin(\omega t - k_2 x)$, διαδίδεται προς τα δεξιά για $x > 0$ με ταχύτητα $v_2 = \frac{\omega}{k_2} = \sqrt{\frac{F}{\mu_2}}$

ή διαθλώμενο κύμα

Σύμφωνα με την αρχή της επαλληλίας **το κύμα που διαδίδεται στο αριστερό τμήμα** της χορδής (για $x < 0$) είναι

$$y(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = A_1 sin(\omega t - k_1 x) + A_2 sin(\omega t + k_1 x), x < 0$$

Στο δεξί τμήμα της χορδής ($x > 0$) έχουμε μόνο το διαδιδόμενο τμήμα, δηλ.

$$y(x,t) = y_3(x,t) = A_3 sin(\omega t - k_2 x), x > 0$$

Το στοιχειώδες τμήμα της χορδής στο σημείο $x = 0$ τη τυχαία χρονική στιγμή t έχει μία συγκεκριμένη απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας. Είναι προφανές λοιπόν ότι θα πρέπει $\boxed{\boldsymbol{y(x,t)|_{0-} = y(x,t)|_{0+}}}$ (η συνάρτηση y είναι συνεχής). Αυτή είναι **η πρώτη συνοριακή συνθήκη**.

Επίσης, η κατακόρυφη δύναμη υπό την επίδραση της οποίας κινείται κατακόρυφα το στοιχειώδες τμήμα στο $x = 0$ πρέπει να έχει συγκεκριμένη τιμή, δηλ. θα πρέπει $F_y(x,t)|_{0-} = F_y(x,t)|_{0+}$ (δηλ. η συνάρτησηπου περιγράφει την οριζόντια δύναμη είναι συνεχής). Έχουμε δει ότι $F_y = F\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}$, άρα πρέπει $\boxed{\boldsymbol{\frac{\partial y(x,t)}{\partial x}|_{0-} = \frac{\partial y(x,t)}{\partial x}|_{0+}}}$. Αυτή είναι **η δεύτερη συνοριακή συνθήκη**.

Εφαρμόζουμε τις δυο συνοριακές συνθήκες: $\boldsymbol{x = 0}$

1η : $A_1 sin(\omega t) + A_2 sin(\omega t) = A_3\ sin(\omega t) \Rightarrow A_1 + A_2 = A_3 \Rightarrow 1 + \frac{A_2}{A_1} = \frac{A_3}{A_1}$ (*)

2η : $-k_1\ A_1 \cos(\omega t) + k_1\ A_2 \cos(\omega t) = -k_2\ A_3 \cos(\omega t) \Rightarrow k_1(A_1 - A_2) = k_2 A_3 \Rightarrow$

$k_1(1 - \frac{A_2}{A_1}) = k_2 \frac{A_3}{A_1}$ (**)

Ορίζουμε τους συντελεστές πλάτους ανάκλασης και διάθλασης $r = \frac{A_2}{A_1}$ και $t = \frac{A_3}{A_1}$, οπότε

$$\left.\begin{array}{l} (*) \rightarrow\ t = 1 + r \\ (**) \rightarrow k_1(1 - r) = k_2 t \end{array}\right\} \quad \begin{array}{l} r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2} \\ t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2} \end{array}$$

Ειδικές περιπτώσεις

$r = \frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}, \ t = \frac{2k_1}{k_1 + k_2}$

(α) $k_1 = k_2 \rightarrow r = 0$ και t =1 (η περίπτωση του οδεύοντος κύματος σε άπειρη χορδή σταθερής πυκνότητας)

(β) $k_1 < k_2 \rightarrow r = \frac{\mathrm{A}_2}{\mathrm{A}_1} < 0$ που σημαίνει ότι το ανακλώμενο κύμα γράφεται ως $-|\mathrm{A}_2| sin(\omega t + k_1 x) = |\mathrm{A}_2| sin(\omega t + k_1 x + \pi)$ δηλ. έχουμε αλλαγή φάσης κατά π στο σύνορο καθώς πηγαίνουμε από το λιγότερο πυκνό στο περισσότερο πυκνό τμήμα της χορδής (θυμηθείτε ότι $k \propto \sqrt{\mu}$).

(γ) $k_1 > k_2 \rightarrow r > 0$, δεν έχουμε αλλαγή φάσης στο σύνορο καθώς πηγαίνουμε από το περισσότερο πυκνό στο λιγότερο πυκνό τμήμα της χορδής

(δ) $k_2 \rightarrow \infty \rightarrow \mathrm{r} = \frac{\frac{k_1}{k_2} - 1}{\frac{k_1}{k_2} + 1} \xrightarrow[k_2 \rightarrow \infty]{} -1$ και $\mathrm{t} = \frac{2\frac{k_1}{k_2}}{\frac{k_1}{k_2} + 1} \xrightarrow[k_2 \rightarrow \infty]{} 0$.

Σε αυτή τη περίπτωση έχουμε ολική ανάκλαση με αλλαγή φάσης κατά π.

Η ισχύς του ανακλώμενου και διαδιδόμενου κύματος

Θυμόμαστε ότι η μέση ισχύς είναι ίση με $\mathrm{P}_{avg} = \frac{1}{2}\sqrt{\mu \mathrm{F}}\omega^2 y_m^2 = \frac{1}{2}F\omega k y_m^2$, όπου εδώ αντί για το y_m έχουμε τα A_1, A_2, A_3.

Υπολογίζουμε τον λόγο R της ανακλώμενης προς τη προσπίπτουσα μέση ισχύ και το λόγο T της διαδιδόμενης προς την προσπίπτουσα μέση ισχύ:

$$R = \frac{\frac{1}{2}F\omega k_1 A_2^2}{\frac{1}{2}F\omega k_1 A_1^2} = r^2 = \left(\frac{k_1 - k_2}{k_1 + k_2}\right)^2$$

$$T = \frac{\frac{1}{2}F\omega k_2 A_3^2}{\frac{1}{2}F\omega k_1 A_1^2} = \frac{k_2}{k_1}t^2 = \frac{k_2}{k_1}\left(\frac{2k_1}{k_1 + k_2}\right)^2 = \frac{4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2}$$

Παρατηρούμε ότι $R + T = \frac{k_1^2 + k_2^2 - 2k_1 k_2 + 4k_1 k_2}{(k_1 + k_2)^2} = \frac{(k_1 + k_2)^2}{(k_1 + k_2)^2} = 1$, όπως απαιτείται για να διατηρείται η μηχανική ενέργεια.

Συμβολή κυμάτων

Αν δυο ημιτονοειδή κύματα ίδιου πλάτους και μήκους κύματος διαδίδονται προς την ίδια κατεύθυνση κατά μήκος μίας τεντωμένης χορδής, συμβάλουν και παράγουν ένα επίσης ημιτονοειδές κύμα που διαδίδεται στην ίδια διεύθυνση

$$\left.\begin{aligned} y_1(x,t) &= y_m \sin(kx - \omega t) \\ y_2(x,t) &= y_m \sin(kx - \omega t + \phi). \end{aligned}\right\} \Rightarrow \begin{aligned} y'(x,t) &= y_1(x,t) + y_2(x,t) \\ &= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx - \omega t + \phi). \end{aligned}$$

$$\sin\theta \pm \sin\varphi = 2\sin\left(\frac{\theta \pm \varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\theta \mp \varphi}{2}\right)$$

$$\overbrace{y'(x,t)}^{\text{Μετατόπιση}} = \underbrace{\left[2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right]}_{\text{Η απόλυτη τιμή του δίνει το πλάτος}} \underbrace{\sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right)}_{\text{Ταλαντούμενος όρος}}$$

$$y'_m = \left|2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right|$$

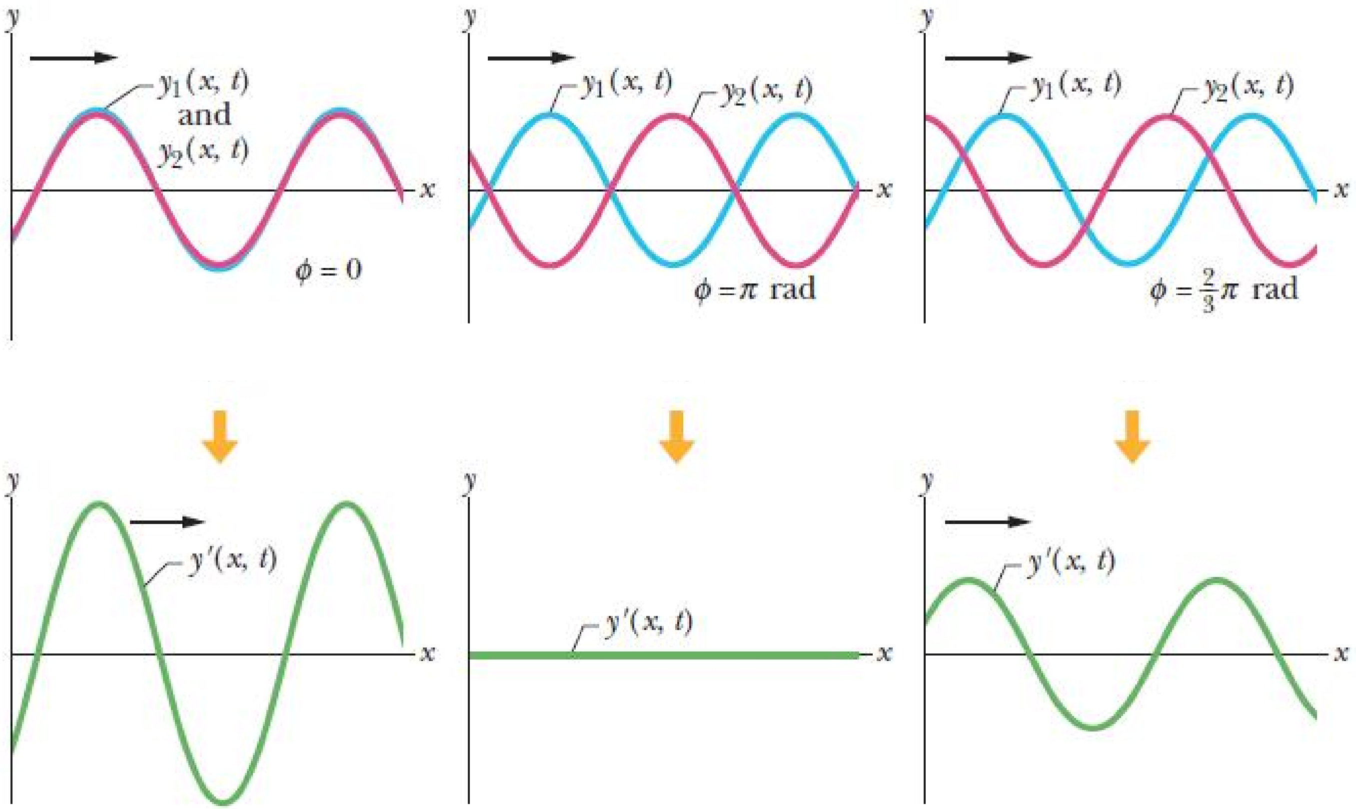
Το προκύπτον κύμα είναι επίσης ημιτονοειδές εγκάρσιο κύμα με διαφορετικό πλάτος και διαφορετική φάση, αλλά ίδια συχνότητα και ίδια ταχύτητα και κατεύθυνση διάδοσης

Αυτά ισχύουν για συμβολή κυμάτων ίσου πλάτους

Παραδείγματα συμβολής εγκάρσιων κυμάτων σε χορδή

$$y'_m = \left|2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right|$$

Κύματα με διαφορά φάσης 0 (2κπ, γενικά) σε φάση → μεγάλο πλάτος	Κύματα με διαφορά φάσης π (γενικά (2κ±1)π) εκτός φάσης→ μηδενικό πλάτος	Ενδιάμεση κατάσταση



Επειδή ένα ημιτονοειδές κύμα επαναλαμβάνει το σχήμα του κάθε 2πrad, μία διαφορά φάσης 2π rad αντιστοιχεί σε μετατόπιση του ενός κύματος ως προς το άλλο κατά απόσταση ίση με το μήκος κύματος λ.

Π.χ. αν τα κύματα έχουν διαφορά φάσης π, μπορούμε να πούμε ότι είναι εκτός φάσης κατά 0.5 μήκος κύματος.

Διαφορά φάσης και το είδος της συμβολής που προκύπτει

Διαφορά φάσης σε		ϕ/2π	**Πλάτος του κύματος**	**Είδος συμβολής**
Μοίρες	rad	**λ**		
0	0	0	$2y_m$	Fully constructive
120	$\frac{2}{3}\pi$	0.33	y_m	Intermediate
180	π	0.50	0	Fully destructive
240	$\frac{4}{3}\pi$	0.67	y_m	Intermediate
360	2π	1.00	$2y_m$	Fully constructive
865	15.1	2.40	$0.60y_m$	Intermediate

[a]The phase difference is between two otherwise identical waves, with amplitude y_m, moving in the same direction.

Παράδειγμα

Δύο όμοια ημιτονοειδή εγκάρσια κύματα διαδίδονται προς την ίδια κατεύθυνση μιας τεντωμένης χορδής και συμβάλλουν. Το πλάτος του κάθε κύματος είναι 9.8mm και η διαφορά φάσης μεταξύ τους είναι 100°. **(α)** Ποιο είναι το πλάτος του προκύπτοντος τρέχοντος κύματος και τί είδους συμβολή έχουμε.

$$y'(x,t) = \left[2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right] \sin\left(kx - \omega t + \frac{1}{2}\phi\right)$$

$$y'_m = \left|2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right| = (2)(9.8\text{mm})\cos(100°/2)$$
$$= 13\text{mm} < 2 \times 9.8mm = 19.6mm$$

→ «Ενδιάμεση» συμβολή

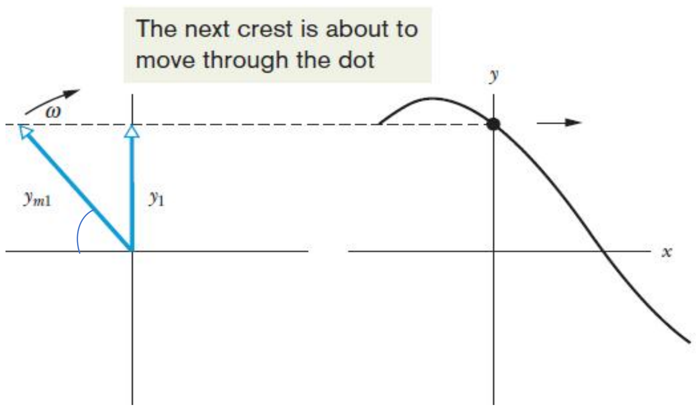
(β) Ποια διαφορά φάσης (σε ακτίνια) μεταξύ των δύο κυμάτων, θα δώσει συνιστάμενο κύμα πλάτους 4.9mm

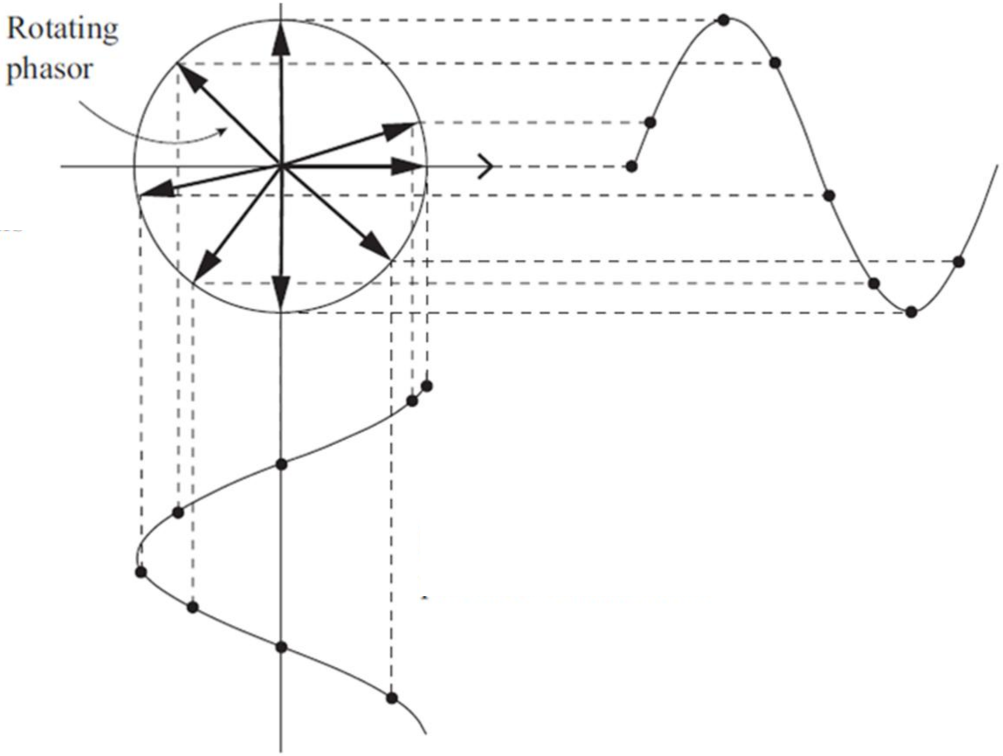
$$y'_m = \left|2y_m \cos\frac{1}{2}\phi\right| \Rightarrow 4.9\text{mm} = (2)(9.8\text{mm})\cos\frac{1}{2}\phi \Rightarrow \phi =$$
$$2\cos^{-1}\frac{4.9\text{mm}}{(2)(9.8\text{mm})} \cong \pm 2.636\text{rad} \rightarrow \pm 2.636\text{rad} \frac{2\pi\ \text{rad}}{\lambda} =$$
$$\pm\, 0.42\lambda$$

ΠΑΡΑΝΘΕΣΗ – ΕΠΑΝΑΛΗΨΗ ΕΝΝΟΙΩΝ ΑΠΌ ΠΡΟΗΓΟΥΜΕΝΟ ΕΞΑΜΗΝΟ

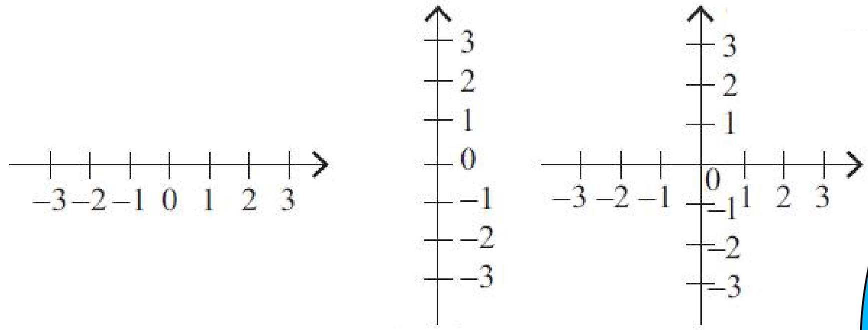
Διανύσματα φάσης – Φάσορες (phasors) Μιγαδική αναπαράσταση

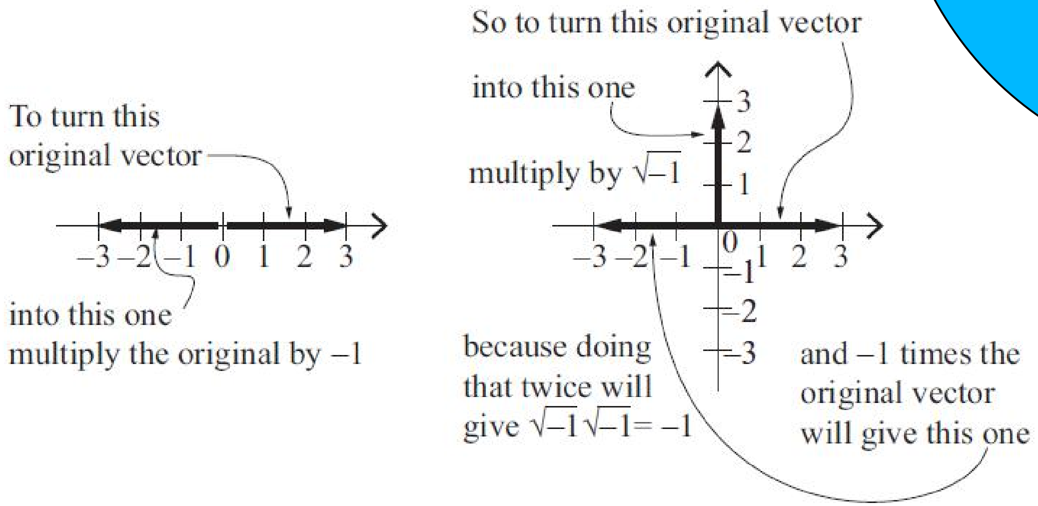
Ένα διάνυσμα φάσης (ή φάσορας) είναι ένα είδος διανύσματος που περιστρέφεται γύρω από την αρχή του (που είναι ακλόνητη στην αρχή του συστήματος συντεταγμένων) με γωνιακή ταχύτητα ίση με τη γωνιακή ταχύτητα του κύματος και πλάτος ίσο με το πλάτος του κύματος. Η γωνία που σχηματίζει με τον οριζόντιο άξονα τη χρονική στιγμή $t = 0$ ισούται με $\theta = kx + \varphi_o$





Μιγαδικοί αριθμοί: $i = \sqrt{-1}$





Έτσι, ένας πολύ χρήσιμος τρόπος να σκεφτόμαστε το i (√-1) είναι ως ένας τελεστής που παράγει μια περιστροφή 90◦ οπουδήποτε εφαρμόζεται.

$$z = Re(z) + i[Im(z)]$$

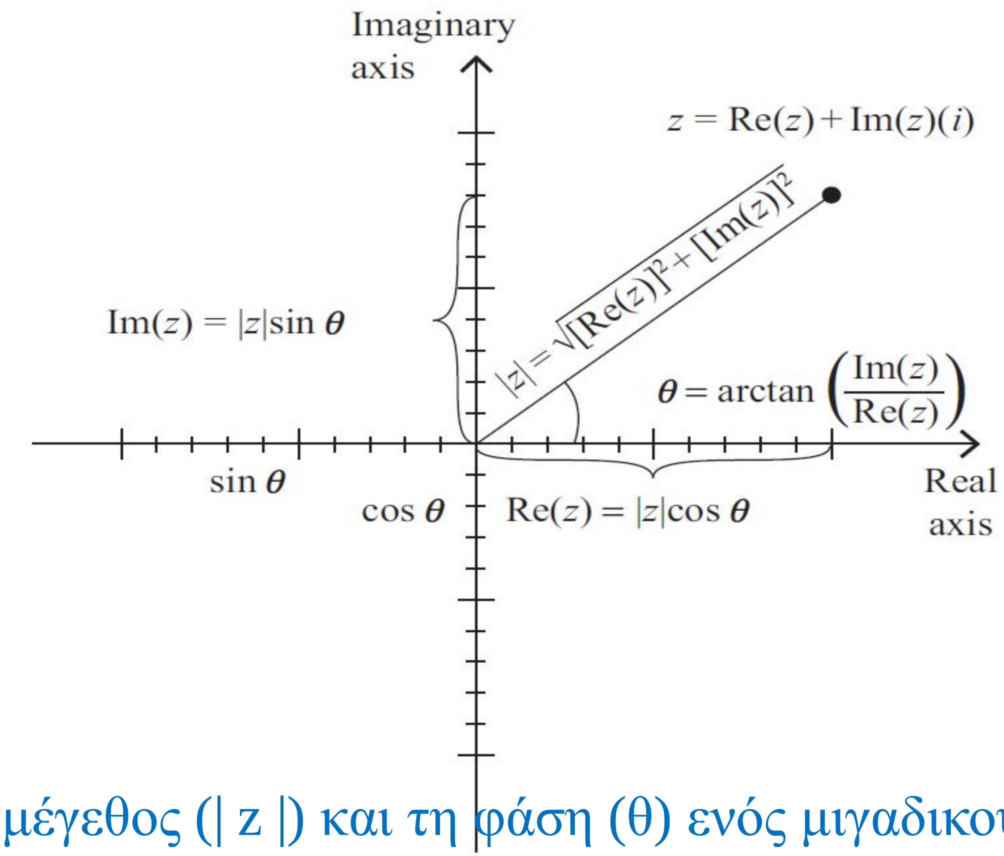
Το i είναι γραμμένο ρητά για να σας υπενθυμίσει ότι το φανταστικό τμήμα είναι κατά μήκος της καθέτου. (*Τα δύο μέρη δεν μπορούν να προστεθούν αλγεβρικά όπως ισχύει και στην περίπτωση των διανυσμάτων*)

Όπως και στα διανύσματα για το μέτρο ενός μιγαδικού αριθμού χρησιμοποιείς τη σχέση:

$$|z| = \sqrt{|Re(z)|^2 + |Im(z)|^2}$$

και η γωνία του μιγαδικού αριθμού με τον πραγματικό άξονα είναι:

$$\theta = \arctan\left(\frac{Im(z)}{Re(z)}\right)$$



αν γνωρίζετε το μέγεθος (| z |) και τη φάση (θ) ενός μιγαδικού αριθμού z, η γεωμετρία του σχήματος δείχνει ότι το πραγματικό (Re) και το φανταστικό (Im) τμήμα του z μπορούν να βρεθούν χρησιμοποιώντας τις σχέσεις:

$$Re(z) = |z|cos\theta \qquad Im(z) = |z|sin\theta$$

Για το υποσύνολο που αποτελείται από όλα τα σημεία που σχηματίζουν έναν κύκλο γύρω από το κέντρο σε απόσταση ακριβώς μιας μονάδας.

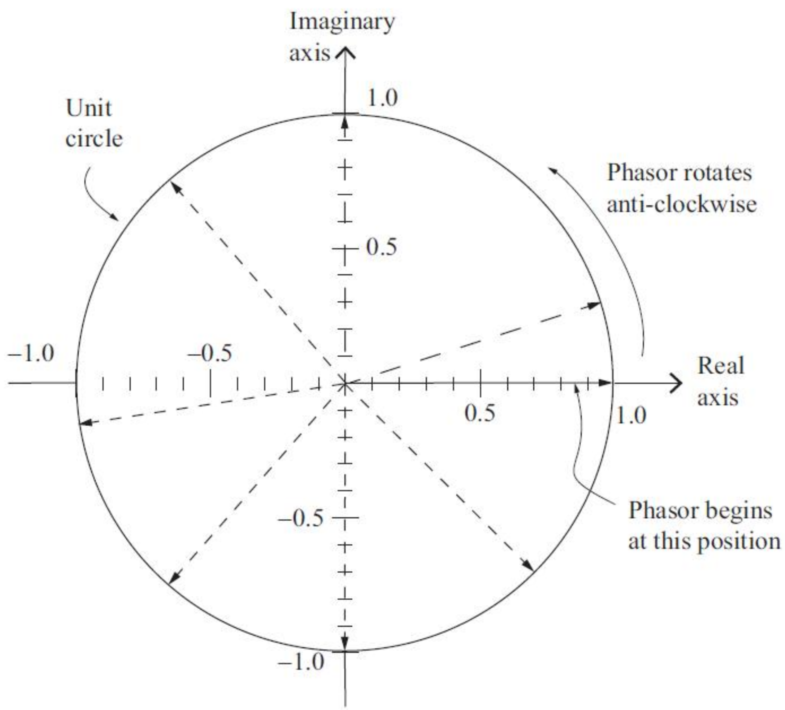
$$Re(z) = |z|cos\theta = 1cos\theta$$

$$Im(z) = |z|sin\theta = 1sin\theta$$

οπότε κάθε μιγαδικός αριθμός στον μοναδιαίο κύκλο μπορεί να γραφτεί ως:

$$z = cos\theta + isin\theta$$

Ο μοναδιαίος κύκλος στο μιγαδικό επίπεδο είναι ιδιαίτερα χρήσιμος στην κατανόηση των “phasors”, που προαναφέραμε.
Οι φάσορες περιγράφονται ως διανύσματα που περιστρέφονται γύρω από τον μοναδιαίο κύκλο στο μιγαδικό επίπεδο και γι’ αυτό μπορεί να ονομαστούν και «στρεφόμενα ανύσματα».



Σχέσεις του Euler

Για να απλουστευθούν οι μαθηματικές πράξεις με τους μιγαδικούς αριθμούς, θα χρειαστεί να εκφραστεί το z ως συνάρτηση που έχει τόσο το μέγεθος όσο και τη φάση
και είναι ισοδύναμη με την έκφραση $z = cos\theta + isin\theta$

$$\frac{dz}{d\theta} = -sin\theta + icos\theta = i(cos\theta + isin\theta) = iz$$

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = -cos\theta - isin\theta = i^2(cos\theta + isin\theta) = i^2z$$

$$= -z$$

οπότε κάθε φορά που παίρνετε μία άλλη παράγωγο, παίρνετε έναν παράγοντα i αλλά κατά τα άλλα η συνάρτηση μένει αμετάβλητη

$$z = e^{i\theta}$$

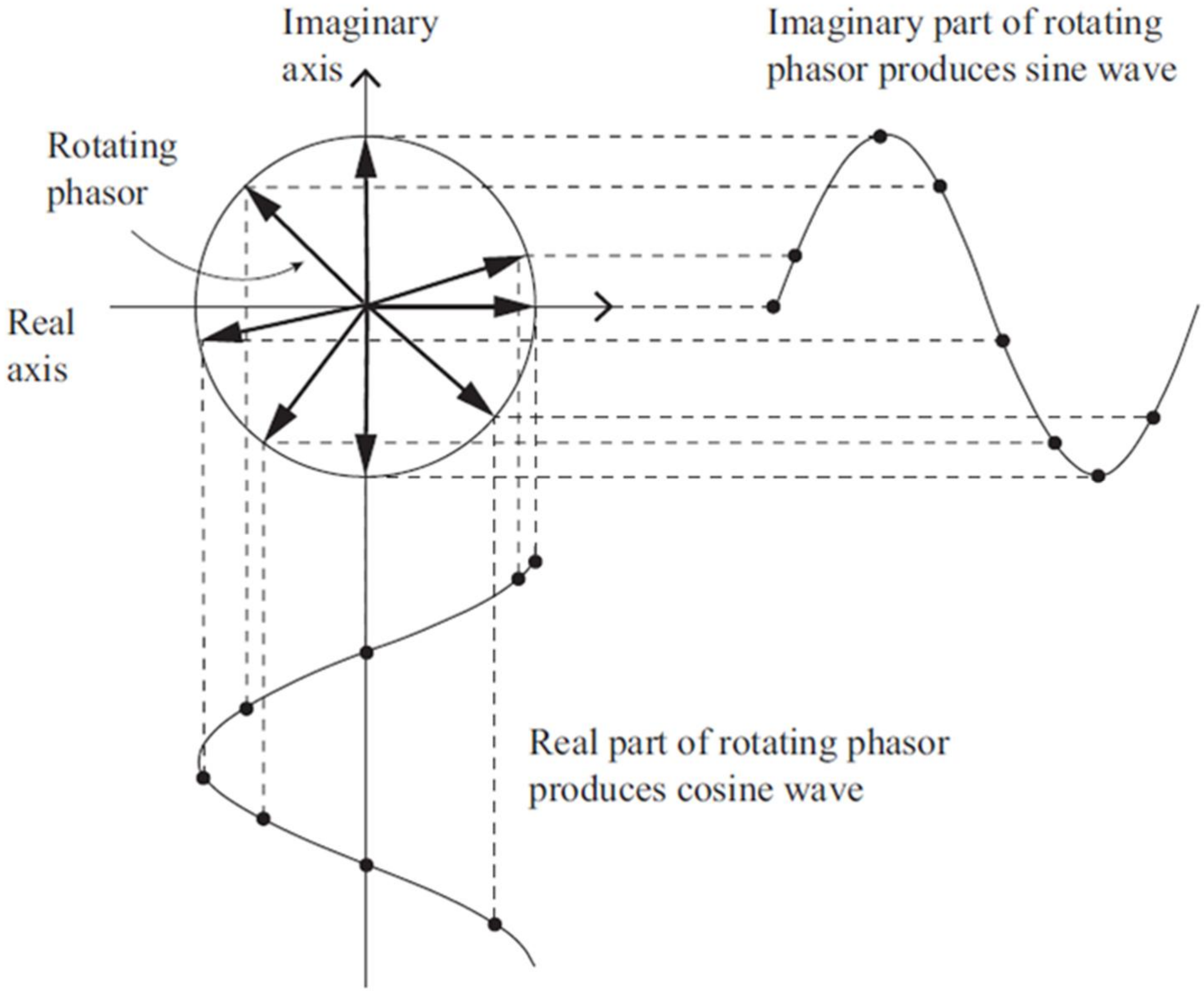
$$\frac{dz}{d\theta} = i\left(e^{i\theta}\right) = iz$$

$$\frac{d^2z}{d\theta^2} = i^2\left(e^{i\theta}\right) = i^2z$$

Σχέση του Euler

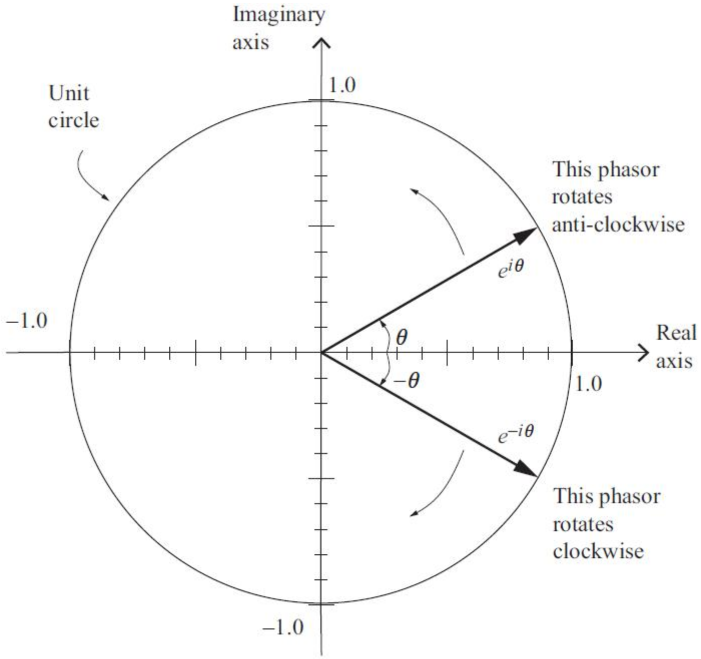
$$\boxed{e^{\pm i\theta} = cos\theta \pm isin\theta}$$

Αυτή η εξίσωση θεωρείται από ορισμένους μαθηματικούς και φυσικούς ως την πιο σημαντική εξίσωση που επινοήθηκε ποτέ.


Imaginary
axis
Imaginary part of rotating
phasor produces sine wave
Rotating
phasor
Real
axis
Real part of rotating phasor
produces cosine wave

$$e^{\pm i\theta} = \cos\theta \pm i\sin\theta$$

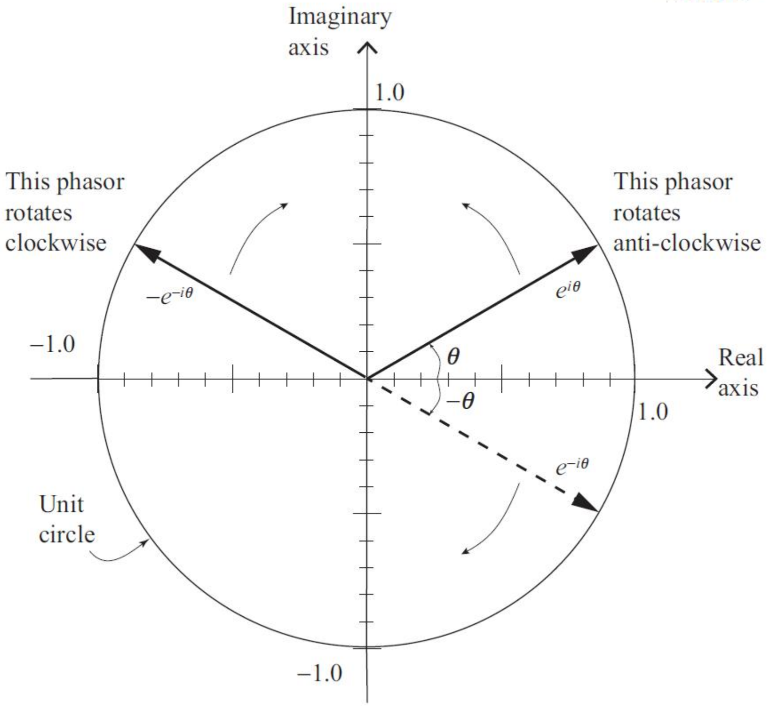
$$e^{i\theta} + e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) + (\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$= \cos\theta + \cos\theta + i\sin\theta - i\sin\theta = 2\cos\theta$$
$$\cos\theta = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2}$$



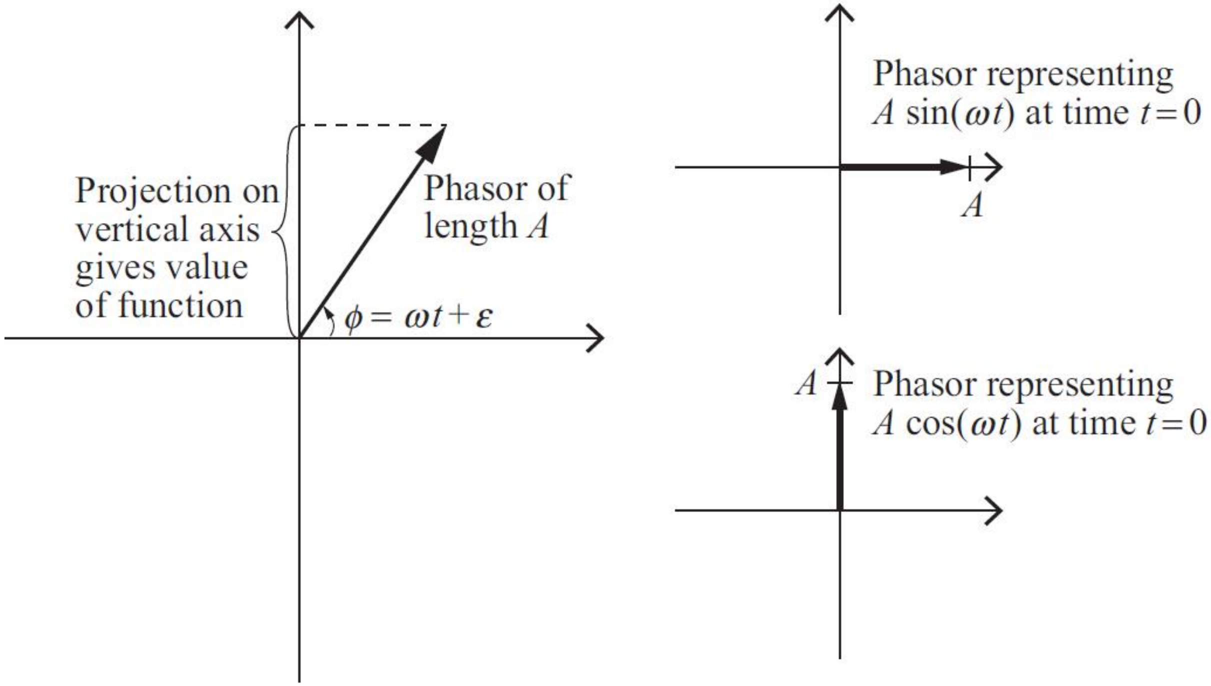
η συνάρτηση συνημιτόνου μπορεί να αναπαρασταθεί από δύο αντίθετα περιστρεφόμενα ανύσματα (φάσορες), καθώς το θ αυξάνει περιστρεφόμενο αριστερόστροφα και το $e^{-i\theta}$ περιστρέφεται δεξιόστροφα

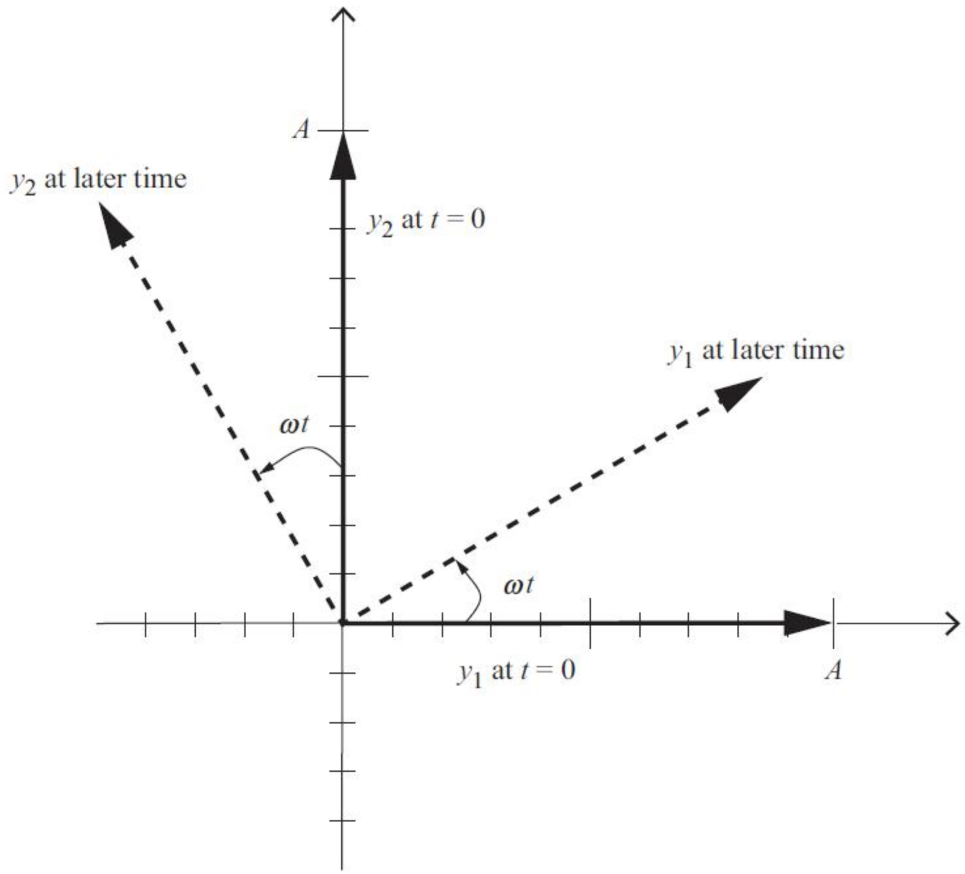
$$e^{i\theta} - e^{-i\theta} = (\cos\theta + i\sin\theta) - (\cos\theta - i\sin\theta)$$
$$= \cos\theta - \cos\theta + i\sin\theta - (-i\sin\theta) = 2i\sin\theta$$

$$\sin\theta = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}.$$



Έτσι <u>η συνάρτηση του ημιτόνου</u> μπορεί να αναπαρασταθεί από τους δύο αντίθετα περιστρεφόμενα ανύσματα (φάσορες) $e^{i\theta}$ και $-e^{-i\theta}$ και υπό οποιαδήποτε γωνία η προσθήκη αυτών των φάσεων και η διαίρεση με το 2i αποδίδει την τιμή του ημιτονίου αυτής της γωνίας.


Projection on
vertical axis
gives value
of function
Phasor of
length A
$\phi = \omega t + \varepsilon$
Phasor representing
$A \sin(\omega t)$ at time $t=0$
A
A
Phasor representing
$A \cos(\omega t)$ at time $t=0$



A
y_2 at later time
y_2 at $t = 0$
y_1 at later time
ωt
ωt
y_1 at $t = 0$
A

Χρήση της μιγαδικής αναπαράστασης των αρμονικών κυμάτων στη μελέτη της συμβολής

Ας πάρουμε δυο αρμονικά κύματα με διαφορετικά πλάτη, και διαφορετική αρχική φάση, αλλά με την ίδια κυκλική συχνότητα και ίδιο κυματάριθμο, που διαδίδονται σε μία χορδή. Θα χρησιμοποιήσουμε τη μιγαδική αναπαράσταση:

$$y_1(x,t) = y_{1m}e^{i(kx-\omega t)}$$

$$y_2(x,t) = y_{2m}e^{i(kx-\omega t+\varphi)}$$

Θεωρούμε την υπέρθεση των δυο κυμάτων σε ένα σημείο x της χορδής:

$$y'(x,t) = y_1(x,t) + y_2(x,t) = y_{1m}e^{i(kx-\omega t)} + y_{2m}e^{i(kx-\omega t+\varphi)} \Rightarrow$$

$y'(x,t) = \; e^{i(kx-\omega t)}\left[y_{1m} + y_{2m}e^{i\varphi}\right]$ → αρμονικό κύμα με την ίδια κυκλική συχνότητα και κυματάριθμο και την ίδια διεύθυνση διάδοσης.

Ο όρος $\left[y_{1m} + y_{2m}e^{i\varphi}\right]$ είναι ένας μιγαδικός αριθμός που μπορεί να γραφεί ως

$$y'_m \, e^{i\theta}$$

οπότε

$$y'(x,t) = y'_m \, e^{i(kx-\omega t+\theta)}$$

$\boldsymbol{y_{1m} + y_{2m}e^{i\varphi} = y'_m\, e^{i\theta}}$

Ας βρούμε τώρα το πλάτος y'_m και τη φάση θ του κύματος $y'(x,t)$:
Χρησιμοποιούμε τη σχέση Euler $e^{i\varphi} = (\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$$y_{1m} + y_{2m}e^{i\varphi} = y_{1m} + y_{2m}(\cos\varphi + i\sin\varphi) =$$
$$= (y_{1m} + y_{2m}\cos\varphi) + i\, y_{2m}\sin\varphi$$

$$|y'| = |(y_{1m} + y_{2m}\cos\varphi) + i\, y_{2m}\sin\varphi| = \sqrt{y_{1m}^2 + y_{2m}^2 cos^2\varphi + 2y_{1m}y_{2m}cos\varphi + y_{2m}^2 sin^2\varphi}$$

$= \sqrt{y_{1m}^2 + y_{2m}^2 + 2y_{1m}y_{2m}cos\varphi}$ και η φάση θα είναι $tan\theta = \frac{y_{2m}\sin\varphi}{(y_{1m}+y_{2m}\cos\varphi)}$

(σημ. $\left|e^{i(kx-\omega t)}\right| = 1$)

Δείτε ότι αν $y_{1m} = y_{2m}$ προκύπτουν οι σχέσεις που είχαμε ήδη αποδείξει τριγωνομετρικά στο προηγούμενο μάθημα $|y'| = y_m\sqrt{2 + 2cos\varphi} = y_m\sqrt{4cos^2\frac{\varphi}{2}} = 2y_m\left|\cos\frac{1}{2}\phi\right|$ και $tan\theta = \frac{\sin\varphi}{(1+\cos\varphi)} = tan\frac{\varphi}{2}$