

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

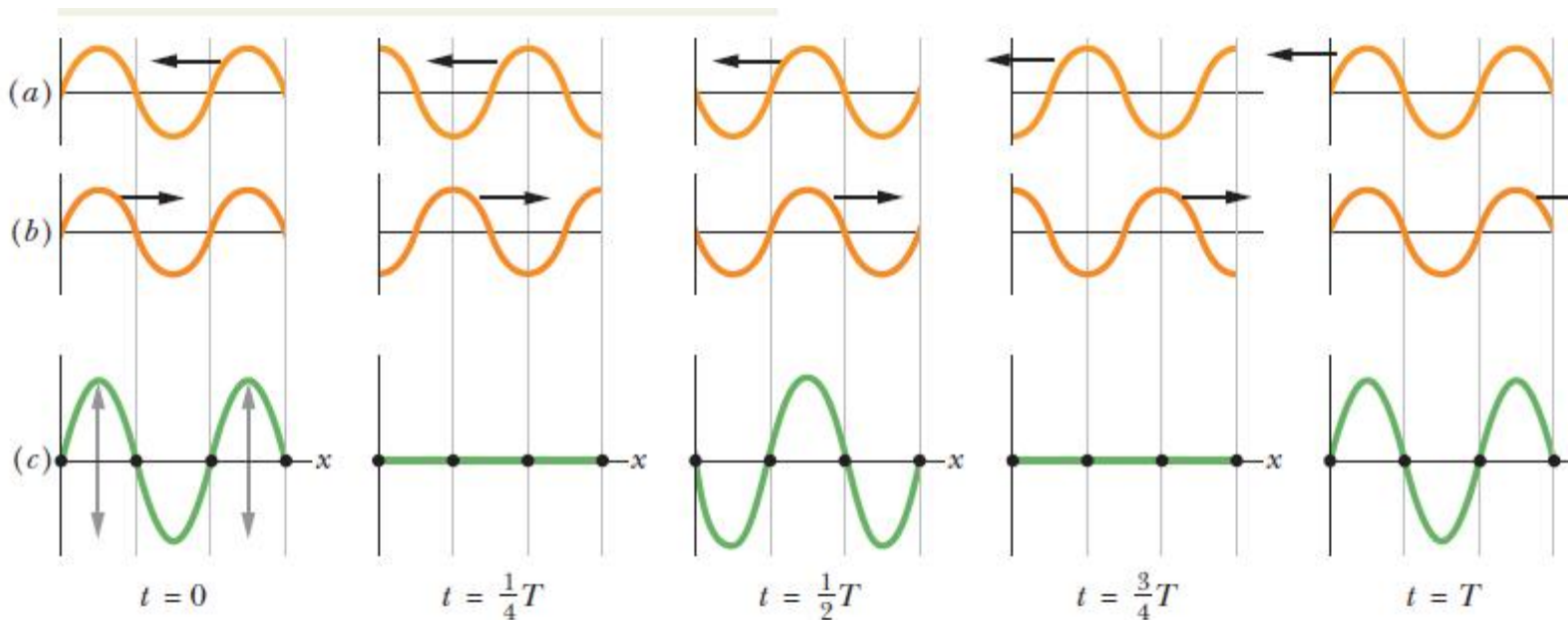
I. Μηχανικά κύματα

Στάσιμα κύματα (σε χορδή)

Σχήματα και διαγράμματα (όπου δεν υπάρχει αναφορά) από Πανεπιστημιακή Φυσική Young & Freedman, και από Φυσική-Βασικές αρχές Halliday, Resnick & Walker

Στάσιμα κύματα

Συμβολή δύο κυμάτων που διαδίδονται στην ίδια χορδή, με ίδια κυκλική συχνότητα, ίδιο κυματάριθμο, ίδια φάση, αλλά αντίθετες κατευθύνσεις διάδοσης



Υπέρθεση αντίθετα διαδιδόμενων αρμονικών κυμάτων (ίδια k, ω, y_m)
 → δημιουργία στάσιμων κυμάτων

Έστω ότι τα κύματα είναι ημιτονοειδή (ή συνημιτονοειδή, δεν αλλάζει κάτι, μόνο η αρχική φάση $\pi/2$)

$$\left. \begin{aligned} y_1(x, t) &= y_m \sin(kx - \omega t) \\ y_2(x, t) &= y_m \sin(kx + \omega t) \end{aligned} \right\} \longrightarrow \begin{aligned} y'(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) \\ &= y_m \sin(kx - \omega t) + y_m \sin(kx + \omega t) \end{aligned}$$

Χρησιμοποιώντας την ταυτότητα $\sin \theta + \sin \varphi = 2 \sin \left(\frac{\theta + \varphi}{2} \right) \cos \left(\frac{\theta - \varphi}{2} \right)$

$$y'(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t$$

Δεν είναι της μορφής $f(x \pm vt)$ → δεν είναι οδεύον κύμα

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε αν χρησιμοποιήσουμε τη μιγαδική αναπαράσταση:

$$\left. \begin{aligned} y_1(x, t) &= y_m \operatorname{Im} e^{i(kx - \omega t)} \\ y_2(x, t) &= y_m \operatorname{Im} e^{i(kx + \omega t)} \end{aligned} \right\} \begin{aligned} y'(x, t) &= y_1(x, t) + y_2(x, t) = \\ &= y_m \operatorname{Im} [e^{ikx} (e^{+i\omega t} + e^{-i\omega t})] = \\ &= 2y_m \operatorname{Im} [e^{ikx}] \cos \omega t = [2y_m \sin kx] \cos \omega t \end{aligned}$$

$$\cos \theta = (e^{i\theta} + e^{-i\theta})/2$$

Το πραγματικό μέρος είναι $y'(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t$

Συνάρτηση μόνο του x .

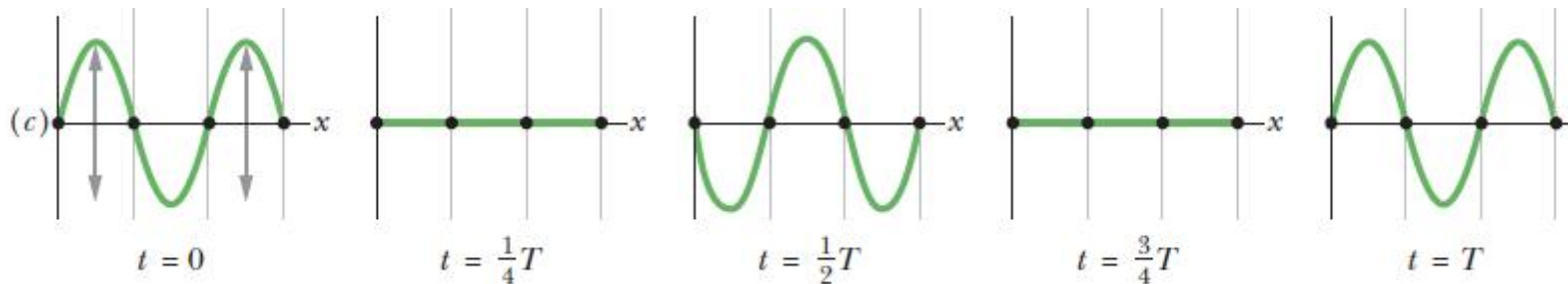
Η απόλυτη τιμή του δίνει το πλάτος της ταλάντωσης στη θέση $x \rightarrow$ το πλάτος της ταλάντωσης εξαρτάται από το x

Κάθε χρονική στιγμή το σχήμα της χορδής είναι ημιτονοειδής καμπύλη

Συνάρτηση μόνο του χρόνου

Παράγοντας ταλάντωσης πάνω-κάτω. Δηλ. κάθε σημείο της χορδής ταλαντώνεται πάνω κάτω με κυκλική συχνότητα ω (όπως και στα οδεύοντα κύματα)

- Υπάρχουν σημεία που ταλαντώνονται με το μέγιστο πλάτος (**κοιλίες ή αντιδεσμοί**) και σημεία που δεν ταλαντώνονται καθόλου (**δεσμοί**)
- Η μορφή του κύματος παραμένει στην ίδια θέση, ταλαντούμενη πάνω-κάτω όπως υπαγορεύει ο όρος $\cos \omega t$ (εδώ έχουμε ζωγραφίσει τη περίπτωση που $y'(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t$)



$$y'(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t$$

Εύρεση των θέσεων των δεσμών και των κοιλιών (ή αντιδεσμών)

➤ Δεσμοί: $y'(x, t) = 0 \forall t \Rightarrow \sin kx = 0 \Rightarrow kx = n\pi, n = 1, 2, \dots \xrightarrow{k = \frac{2\pi}{\lambda}}$
 $x = n\lambda/2, n = 1, 2, \dots$

➤ Κοιλίες: μέγιστο πλάτος $\rightarrow |\sin kx| = 1 \Rightarrow kx = (\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}, \frac{5\pi}{2}, \dots) = (n + 1/2)\pi, n = 0, 1, 2,$
 $x = (n + 1/2)\lambda/2, \text{ for } n = 0, 1, 2, \dots$

Οι διαδοχικοί δεσμοί (και οι διαδοχικές κοιλίες) απέχουν μεταξύ τους κατά $\lambda/2$

Σημαντική παρατήρηση: Όλα τα σημεία μεταξύ δύο δεσμών ταλαντώνονται σε φάση (ενώ στο οδεύον κύμα, τα διάφορα σημεία ταλαντώνονται με διαφορετική φάση)

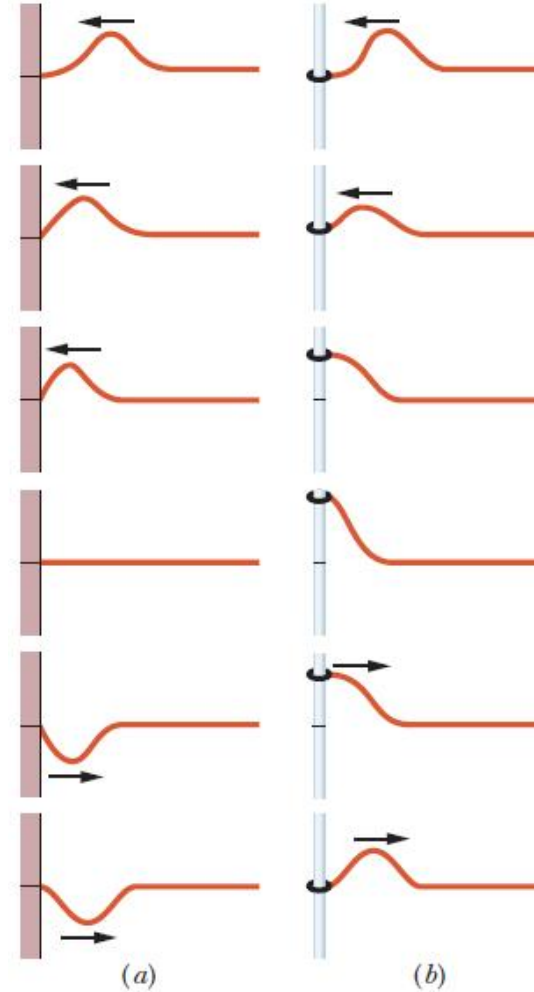
**Πως μπορούμε να φτιάξουμε στάσιμα κύματα:
Με ανάκλαση σε ένα σύνορο (π.χ. σταθερό άκρο)**

(α) Ένας παλμός προσπίπτει στο αριστερό άκρο της χορδής που είναι στερεωμένο στον τοίχο. Παρατηρήστε ότι ο ανακλώμενος παλμός είναι αντεστραμμένος (3^{ος} νόμος του Νεύτωνα δράση-αντίδραση)

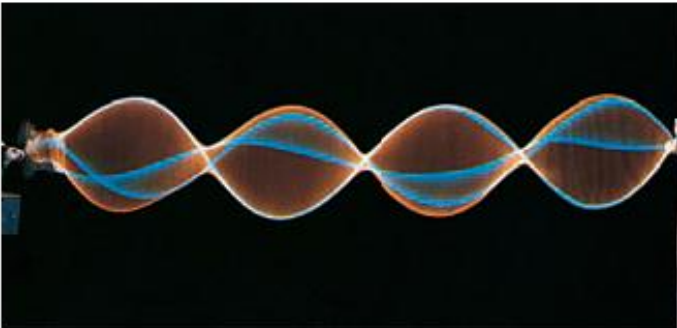
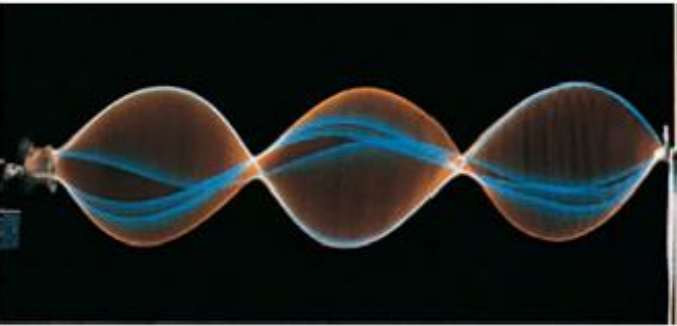
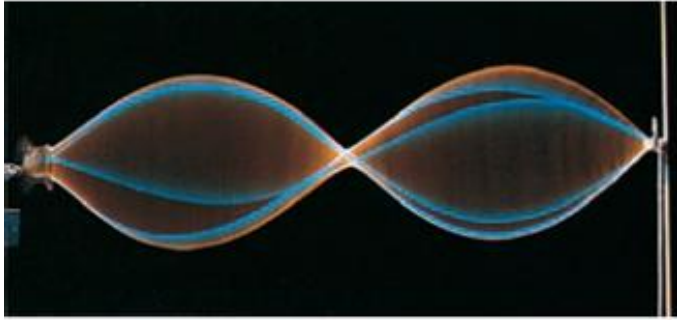
(b) Σε αυτή τη περίπτωση το αριστερό άκρο της χορδής είναι δεμένο σε ένα δαχτυλίδι (αμελητέας μάζας) που είναι ελεύθερο να ολισθαίνει χωρίς τριβές κατά μήκος μιας ράβδου. Σε αυτή τη περίπτωση ο παλμός δεν αναστρέφεται κατά την ανάκλαση.

Θυμηθείτε τη γενική συζήτησή μας για ανάκλαση και διάδοση του κύματος σε ένα σημείο ασυνέχειας και τον ρόλο των συνοριακών συνθηκών

Δύο τρόποι ανάκλασης στο άκρο της χορδής



Στάσιμα κύματα και συντονισμός

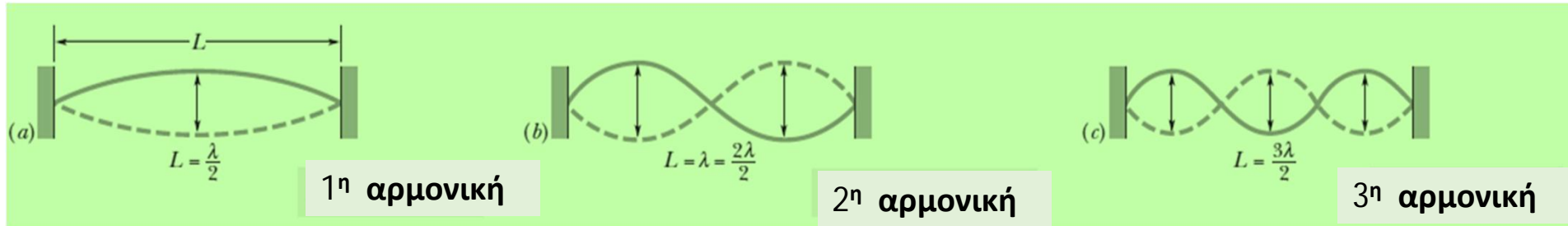


Ας θεωρήσουμε τώρα μία χορδή συγκεκριμένου μήκους με πακτωμένα και τα δύο άκρα της

Για συγκεκριμένες συχνότητες, δημιουργούνται στάσιμα κύματα στη χορδή, με δεσμούς και κοιλίες (ή αντιδεσμούς).

Ένα τέτοιο κύμα λέμε ότι παράγεται **σε συντονισμό**, και ότι η χορδή είναι συντονισμένη σε αυτές τις συγκεκριμένες συχνότητες, που λέγονται **συχνότητες συντονισμού** (ή ιδιοσυχνότητες)

Και τα δύο άκρα της χορδής στερεωμένα



Μία χορδή μήκους L έχει ακλόνητα πακτωμένα άκρα, και τίθεται σε ταλάντωση, που οδηγεί στη δημιουργία στάσιμων κυμάτων.

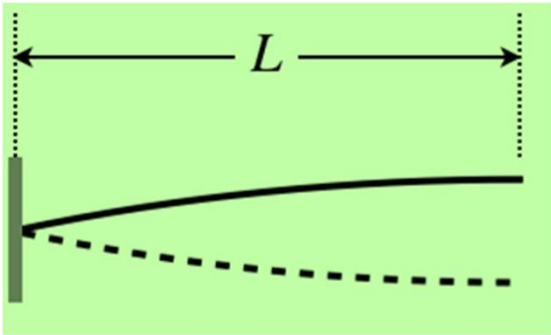
Η πιο απλή περίπτωση φαίνεται στο (α) όπου δεν υπάρχει κανένας δεσμός ανάμεσα στα δύο άκρα. Αυτός είναι ο λεγόμενος **θεμελιώδης τρόπος ταλάντωσης** (ή **1^η αρμονική**). Στο (β) η χορδή απεικονίζεται με ένα δεσμό ανάμεσα στα άκρα της (**2^η αρμονική**). Στο (γ) απεικονίζεται η «**3^η αρμονική**» με δύο δεσμούς ανάμεσα στα άκρα κ.ο.κ.

Σε όλες τις περιπτώσεις το μήκος της χορδής είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του μισού του μήκους κύματος $L = n\lambda/2$

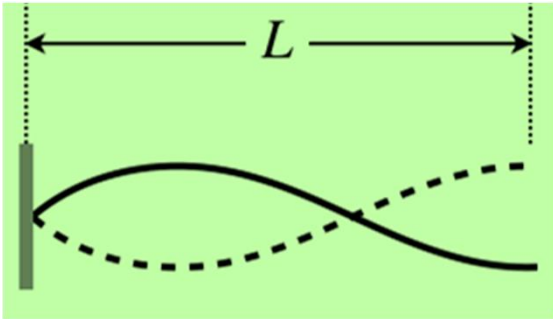
$$\lambda = \frac{2L}{n}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$
$$f = \frac{v}{\lambda} = n \frac{v}{2L}, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

όπου v είναι η ταχύτητα διάδοσης οδοντών κυμάτων στη χορδή

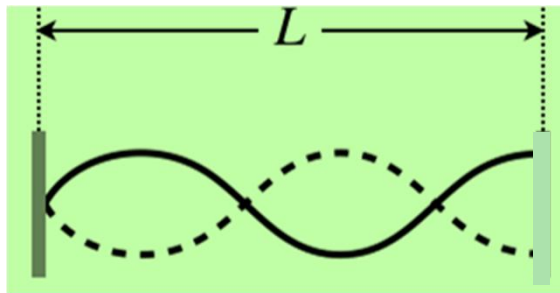
Το ένα άκρο της χορδής στερεωμένο, το άλλο ελεύθερο



$$\lambda = 4L \Rightarrow f = \left(\frac{v}{4L}\right)$$



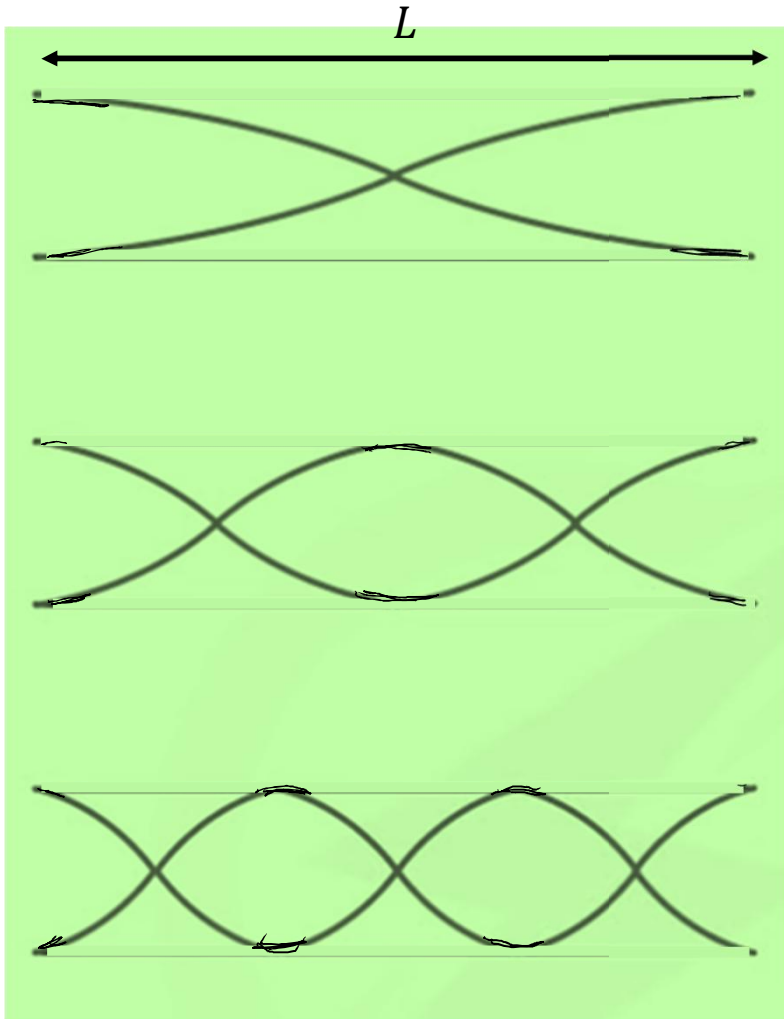
$$\lambda = \frac{4}{3}L \Rightarrow f = 3\left(\frac{v}{4L}\right)$$



$$\lambda = \frac{4}{5}L \Rightarrow f = 5\left(\frac{v}{4L}\right)$$

$$\lambda_n = \frac{4L}{n} \Rightarrow f_n = n\left(\frac{v}{4L}\right), n = 1, 3, 5, \dots$$

Και τα δυο άκρα της χορδής ελεύθερα



$$\lambda = 2L \Rightarrow f = \left(\frac{v}{2L}\right)$$

$$\lambda = L \Rightarrow f = \left(\frac{v}{L}\right)$$

$$\lambda = \frac{2}{3}L \Rightarrow f = \left(\frac{3v}{2L}\right)$$

$$\lambda_n = \frac{2L}{n} \Rightarrow f_n = n \left(\frac{v}{2L}\right), n = 1, 2, 3, \dots$$

Κανονικοί τρόποι ταλάντωσης

Κανονικός τρόπος ταλάντωσης ενός ταλαντούμενου συστήματος είναι μία κίνηση κατά την οποία όλα τα σημεία του συστήματος κινούνται (συν)ημιτονοειδώς με την ίδια συχνότητα.

Για τη πακτωμένη και στα δυο άκρα χορδή, κάθε μία από τις συχνότητες που βρήκαμε πιο πάνω,

$$f_n = n \frac{v}{2L}, n = 1, 2, 3, \dots$$

αντιστοιχούν σε ένα κανονικό τρόπο ταλάντωσης της χορδής

Όλοι οι δυνατοί τρόποι ταλάντωσης αποτελούν μία **αρμονική σειρά** και ο αριθμός n είναι ο λεγόμενος **αρμονικός αριθμός της n αρμονικής**.

Οι συχνότητες f_n εξαρτώνται μόνο από τις ιδιότητες της χορδής, δηλ. από τη γραμμική της πυκνότητα, την τάση της χορδής και το μήκος της. Γι' αυτό συχνά χρησιμοποιείται ο όρος «ιδιοσυχνότητες».

Αντίθετα για τα οδεύοντα κύματα, η συχνότητα καθορίζεται από την εξωτερική διέγερση.

Εύρεση κανονικών τρόπων ταλάντωσης στασίμων κυμάτων χρησιμοποιώντας την κυματική εξίσωση (\rightarrow αρμονικές σειρές)

Είδαμε ότι, στην απλή περίπτωση που εξετάσαμε υπέρθεσης δύο όμοιων (συν)ημιτονοειδών κυμάτων αντίθετης κατεύθυνσης διάδοσης, το στάσιμο κύμα που προκύπτει έχει τη μορφή

$$y'(x, t) = [2y_m \sin kx] \cos \omega t \quad (\text{ή } y'(x, t) = [2y_m \cos kx] \cos \omega t)$$

Δηλ. μπορεί να γραφεί σαν γινόμενο δύο συναρτήσεων, μίας συνάρτησης του x , έστω $X(x)$ και μίας συνάρτησης του χρόνου t , έστω $T(t)$

Θεωρούμε λοιπόν μία συνάρτηση $y(x, t) = X(x)T(t)$

που θέλουμε να ικανοποιεί την κυματική εξίσωση $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$ (*)

$$\text{Δηλ. } \frac{\partial^2 [X(x)T(t)]}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 [X(x)T(t)]}{\partial t^2} \Rightarrow T(t) \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} X(x) \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$$

Διαιρώντας με το γινόμενο $(X(x)T(t))$ και τα δύο μέλη, προκύπτει $\frac{1}{X(x)} \frac{\partial^2 X(x)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2} \frac{1}{T(t)} \frac{\partial^2 T(t)}{\partial t^2}$

Αφού τα δύο μέλη είναι ίσα, για κάθε x και t , θα πρέπει να ισούνται με μία σταθερά, έστω c

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} = c \quad \frac{1}{v^2} \frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = c$$

(*) Σημ. Προφανώς, αφού το στάσιμο κύμα προέρχεται από την υπέρθεση δύο κυμάτων (οδευόντων) που ικανοποιούν την κ.ε., θα πρέπει και αυτό να την ικανοποιεί.

Οπότε προκύπτουν οι δύο σχέσεις:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} = cX$$
$$\frac{d^2 T}{dt^2} = cv^2 T$$

Είναι φανερό ότι για να έχω **αρμονικές λύσεις** θα πρέπει η σταθερά να είναι αρνητική, έστω $c = -k^2$

Οπότε

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + k^2 X = 0 \Rightarrow X(x) = A \cos kx + B \sin kx$$
$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \omega^2 T = 0 \Rightarrow T(t) = C \sin \omega t + D \cos \omega t$$

με $\omega^2 = k^2 v^2$, και A, B, C, D σταθερές που προσδιορίζονται από τις συνοριακές συνθήκες

Ας υποθέσουμε ότι η χορδή μας, μήκους L είναι πακτωμένη στα δύο άκρα, επομένως

για $x = 0$ και $x = L$, έχουμε ότι $y(x, t) = 0, \forall t$, δηλαδή:

$$y(0, t) = X(0)T(t) = [A \cos(0) + B \sin(0)]T(t) = 0 \Rightarrow [(A)(1) + (B)(0)]T(t) = 0 \Rightarrow A = 0$$

$$y(L, t) = X(L)T(t) = [A \cos(kL) + B \sin(kL)]T(t) = 0 \Rightarrow [0 \cos(kL) + B \sin(kL)]T(t) = 0, \forall t$$

$\Rightarrow B = 0$ ή $\sin(kL) = 0$ (το $B = 0$ δίνει τετριμμένη λύση, αφού και $A = 0$, οπότε η χορδή θα ήταν ακίνητη).

Άρα $\sin(kL) = 0 \Rightarrow \lambda = \frac{2L}{n}, n = 1, 2, \dots$ όπως βρήκαμε πριν... (με $k = 2\pi/\lambda$)

Για τη χρονικά μεταβαλλόμενη συνάρτηση $T(t)$ βρίσκουμε, επιλύοντας την αντίστοιχη διαφορική εξίσωση, ότι

$$T(t) = C\sin(\omega t) + D\cos(\omega t)$$

$$\text{Αλλά } \omega^2 = k^2 v^2 = \left(\frac{4\pi^2}{\lambda^2}\right) v^2 = \left(\frac{4\pi^2 n^2}{4L^2}\right) v^2 \Rightarrow \omega = n\pi v/L$$

$$\text{Δηλ. } T(t) = C\sin(n\pi vt/L) + D\cos(n\pi vt/L)$$

Αν τη χρονική στιγμή $t = 0$ η χορδή ήταν ακίνητη, τότε $dT/dt(t = 0) \Rightarrow C = 0$

$$\text{και } T(t) = D\cos(n\pi vt/L)$$

$$\rightarrow y(x, t) = X(x)T(t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \cos\left(\frac{n\pi vt}{L}\right)$$



Παράδειγμα:

Στο διπλανό σχήμα φαίνεται ένα χαρακτηριστικό μοτίβο συντονισμένης ταλάντωσης μίας χορδής μάζας $m = 2.500 \text{ g}$ και μήκους $L = 0.800 \text{ m}$ που είναι τεντωμένη με τάση

$\tau = 325.0 \text{ N}$. Ποιο είναι το μήκος κύματος των εγκάρσιων κυμάτων που δημιουργούν τα στάσιμα κύματα που βλέπουμε και ποιος είναι ο αρμονικός αριθμός n ; Ποια είναι η συχνότητα f των εγκάρσιων κυμάτων και των ταλαντώσεων των στοιχειωδών τμημάτων της χορδής; Ποια είναι η μέγιστη τιμή της εγκάρσιας ταχύτητας ταλάντωσης u_m του στοιχείου της χορδής στο σημείο $x = 0.180 \text{ m}$;

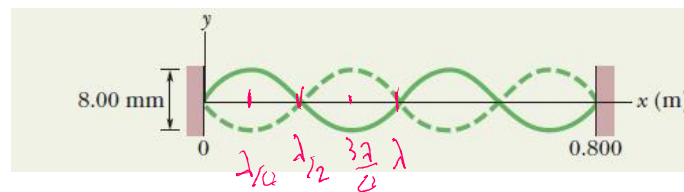
Λύση

$$\begin{aligned} 2\lambda &= L, \\ \lambda &= \frac{L}{2} \\ &= \frac{0.800 \text{ m}}{2} = 0.400 \text{ m}. \end{aligned}$$

Μετρώντας τον αριθμό των $\lambda/2$ στο σχήμα, βρίσκουμε ότι ο αρμονικός αριθμός $n=4$.

Ακόμα,

$$\begin{aligned} v &= \sqrt{\frac{\tau}{\mu}} = \sqrt{\frac{\tau}{m/L}} = \sqrt{\frac{\tau L}{m}} \\ &= \sqrt{\frac{(325 \text{ N})(0.800 \text{ m})}{2.50 \times 10^{-3} \text{ kg}}} = 322.49 \text{ m/s}. \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} f &= \frac{v}{\lambda} = \frac{322.49 \text{ m/s}}{0.400 \text{ m}} \\ &= 806.2 \text{ Hz} \approx 806 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

Για την εγκάρσια ταχύτητα:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{\partial y'}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t} [(2y_m \sin kx) \cos \omega t] \\ &= [-2y_m \omega \sin kx] \sin \omega t. \end{aligned}$$

Αλλά

$$u_m = | -2y_m \omega \sin kx |.$$

και $y_m = 2.00 \text{ mm}$, $k = 2\pi/\lambda = 2\pi/(0.400 \text{ m})$, και $\omega = 2\pi f = 2\pi(806.2 \text{ Hz})$.

Οπότε η μέγιστη εγκάρσια ταχύτητα του στοιχείου της χορδής στο $x = 0.180 \text{ m}$ είναι:

$$\begin{aligned} u_m &= \left| -2(2.00 \times 10^{-3} \text{ m})(2\pi)(806.2 \text{ Hz}) \right. \\ &\quad \left. \times \sin\left(\frac{2\pi}{0.400 \text{ m}}(0.180 \text{ m})\right) \right| \\ &= 6.26 \text{ m/s}. \end{aligned}$$

Τί γίνεται με την ενέργεια; Μεταφέρεται ενέργεια στο στάσιμο κύμα;

Έχουμε δει ότι

$$\rho_K = \frac{1}{2} \mu \left(\frac{\partial y}{\partial t} \right)^2 \text{ και } \rho_U = \frac{1}{2} F \left(\frac{\partial y}{\partial x} \right)^2$$

και

$$y(x, t) = 2y'_m \sin kx \cos \omega t$$

$$\text{Οπότε } \frac{\partial y}{\partial t} = -\omega y'_m \sin kx \sin \omega t \Rightarrow \rho_K = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y'^2_m \sin^2 kx \sin^2 \omega t \text{ και}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = k y'_m \cos kx \cos \omega t \Rightarrow \rho_U = \frac{1}{2} F k^2 y'^2_m \cos^2 kx \cos^2 \omega t$$

$\rho_K \neq \rho_U$ (ενώ για τα τρέχοντα/οδεύοντα κύματα είχαμε βρει $\rho_K = \rho_U$)

Παρατηρούμε ότι ρ_K μεγιστοποιείται (ως προς x) στις κοιλίες, ενώ μηδενίζεται στους δεσμούς. Το αντίστροφο συμβαίνει για τη δυναμική ενέργεια.

1^η ωσθία
 $kx = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
 $\frac{2\pi}{\lambda} x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow$
 $x = \lambda/4$

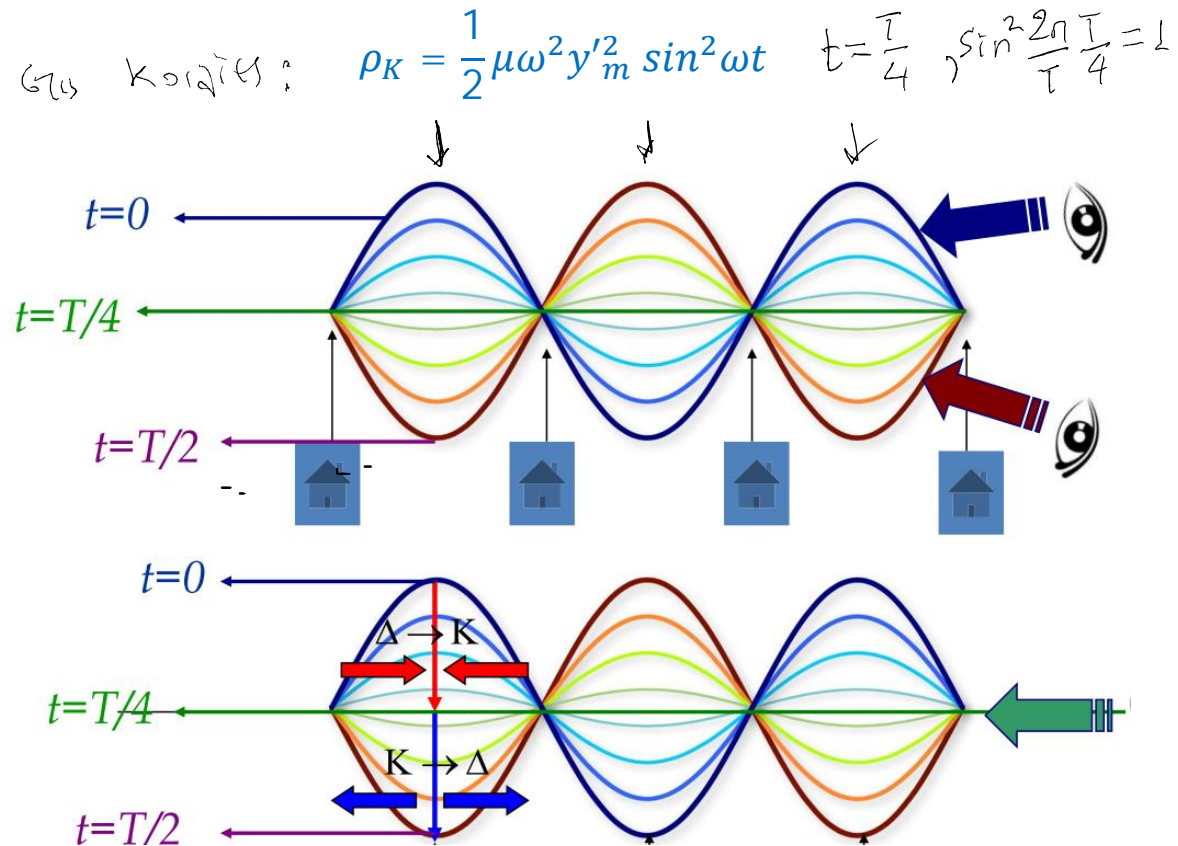
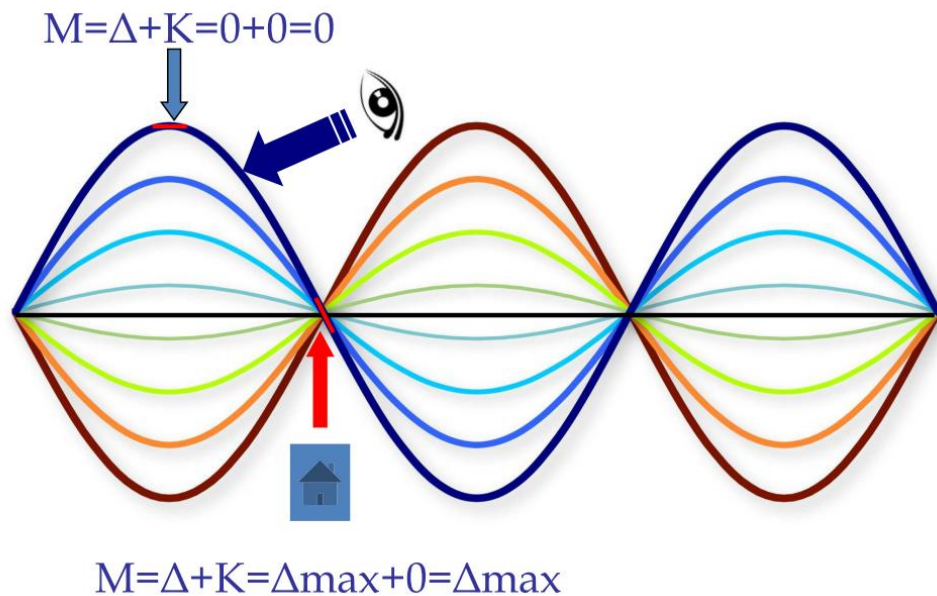
Στις κοιλίες λοιπόν έχουμε $\rho_K = \frac{1}{2} \mu \omega^2 y'^2_m \sin^2 \omega t$ και $\langle \rho_K \rangle = \frac{1}{4} \mu \omega^2 y'^2_m$ ενώ $\rho_U = 0$

Στους δεσμούς έχουμε $\rho_U = \frac{1}{2} F k^2 y'^2_m \cos^2 \omega t$ και $\langle \rho_U \rangle = \frac{1}{4} F k^2 y'^2_m = \frac{1}{4} \mu \omega^2 y'^2_m$
 ενώ $\rho_K = 0$

$\rightarrow 0$ για $t = T/2, T$
 $\leftarrow 0$ για $t = T/4$

$(\cos \frac{\pi}{2} = 0)$

$\forall t$



Από 0 ως $T/4$ η κλίση στο δεσμό μειώνεται και μέρος της δυναμικής ενέργειας γίνεται κινητική.
 Από $T/4$ έως $T/2$ γίνεται το αντίστροφο, δηλ. αυξάνεται η κλίση (με αντίθετο πρόσημο), οπότε αυξάνεται η δυναμική ενέργεια αλλά μειώνεται η κινητική.
 Δηλ. στη διάρκεια της μιας περιόδου υπάρχει ροή ενέργειας μεταξύ διαδοχικών δεσμών, αλλά όχι από το ένα άκρο της χορδής στο άλλο!