

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. Μηχανικά κύματα

- Ηχητικά κύματα
- Ταχύτητα του ήχου
- Τρέχοντα ηχητικά κύματα
- Διακροτήματα
- Φαινόμενο Doppler

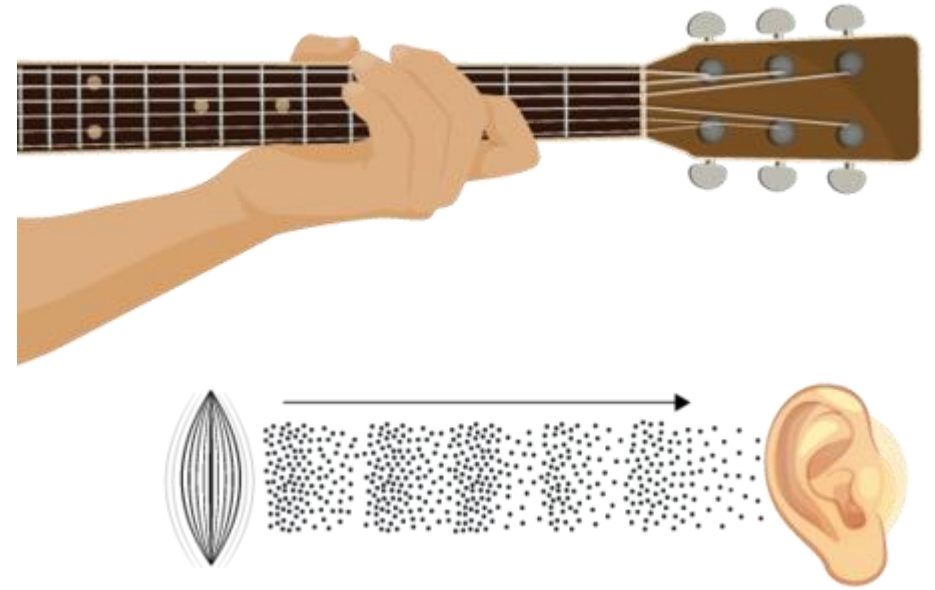
Ήχος

Τα πιο σημαντικά μηχανικά κύματα στη καθημερινή μας ζωή είναι τα ηχητικά κύματα, που είναι **διαμήκη κύματα διαδιδόμενα σε ένα μέσο** (αέριο, υγρό ή στερεό). Στα διαμήκη κύματα η μετατόπιση ενός στοιχειώδους τμήματος του μέσου λόγω της διαταραχής είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσης της διαταραχής (του κύματος).

Θα ασχοληθούμε κυρίως με ηχητικά κύματα στον αέρα.

Τα απλούστερα ηχητικά κύματα είναι τα ημιτονοειδή, που έχουν συγκεκριμένη συχνότητα, πλάτος και μήκος κύματος.

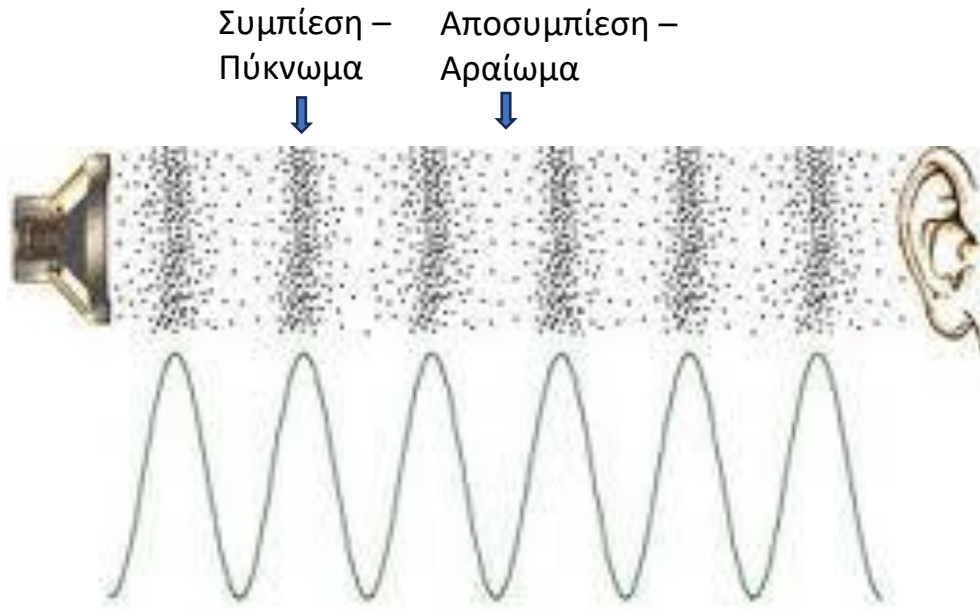
Τα ηχητικά κύματα διαδίδονται συνήθως από τη πηγή προς τα έξω προς όλες τις διευθύνσεις, με πλάτος που εξαρτάται από την απόσταση από τη πηγή και μπορεί να εξαρτάται και από τη κατεύθυνση διάδοσης.



Το ανθρώπινο αυτί είναι ευαίσθητο σε κύματα με συχνότητα από **20 - 20 000 Hz**
→ **Ακουστική περιοχή**

- Μεγαλύτερες συχνότητες → **υπέρηχοι**
- Μικρότερες συχνότητας → **υπόηχοι**

Η διαταραχή είναι παράλληλη προς τη διεύθυνση διάδοσής της



Πριν από την εκπομπή από το ηχείο, η πίεση ήταν σε όλα τα σημεία σταθερή, ίση με την ατμοσφαιρική $P_{\text{ατμ}}$. Μετά την εκπομπή, έχουμε σημεία όπου η πίεση είναι μεγαλύτερη ή μικρότερη της $P_{\text{ατμ}}$. Το φυσικό μέγεθος $\Delta P(x, y, z, t) = P(x, y, z, t) - P_{\text{ατμ}}$ είναι ένα κατάλληλο μέγεθος για την περιγραφή της διαταραχής που έχει προκληθεί.

- Η διαταραχή (μεταβολή της πίεσης) είναι παράλληλη προς την διεύθυνση διάδοσης της διαταραχής
- Το μήκος κύματος είναι η απόσταση από το ένα πύκνωμα στο άλλο ή από το ένα αραίωμα στο άλλο
- Το «μοτίβο» των πυκνωμάτων και αραιωμάτων κινείται σταθερά προς τα δεξιά, όπως ακριβώς οι κορυφές και οι κοιλάδες στο εγκάρσιο κύμα

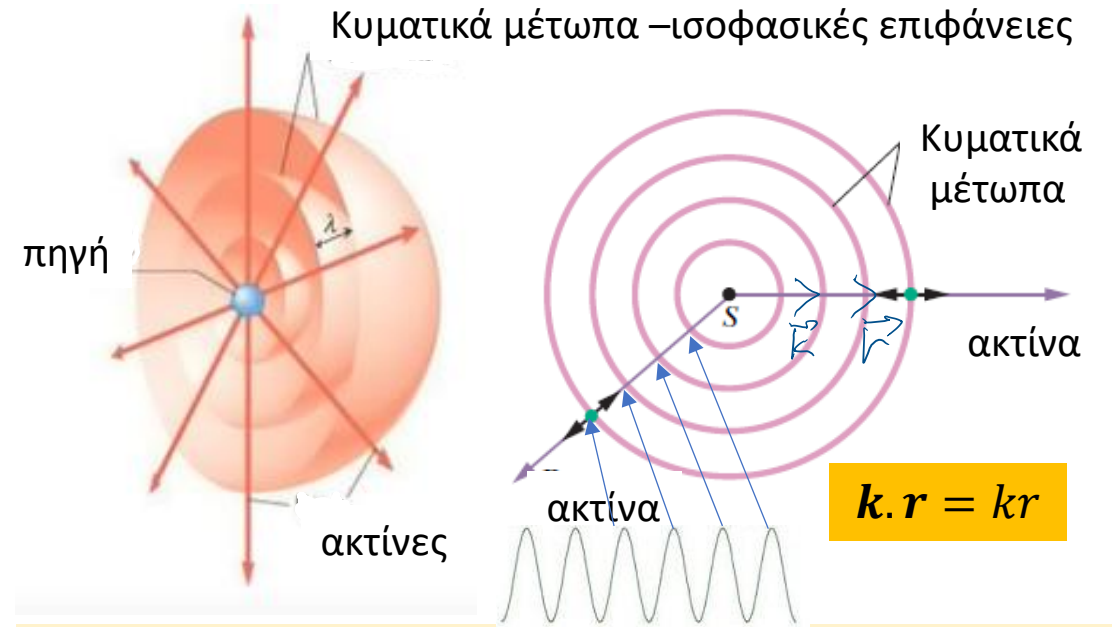
Κυματικά μέτωπα

Οι έννοιες που ακολουθούν ισχύουν για όλα τα κύματα, όχι μόνο τα ηχητικά. Στα προηγούμενα μαθήματα ασχοληθήκαμε με μονοδιάστατα κύματα. Τα ηχητικά κύματα μας δίνουν την ευκαιρία να γενικεύσουμε σε τρισδιάστατα κύματα.

Έστω ένα ηχητικό (εδώ) κύμα, το οποίο προέρχεται από μία σημειακή πηγή S και διαδίδεται στον χώρο, προς όλες τις κατευθύνσεις.

Οι λεγόμενες **ισοφασικές** επιφάνειες στις οποίες όλα τα σημεία του μέσου έχουν την ίδια φάση (δηλ. έχουν την ίδια απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας και την ίδια ταχύτητα), λέγονται **κυματικά μέτωπα**.

Ας υποθέσουμε ότι η διάδοση της διαταραχής γίνεται με την ίδια ταχύτητα σε όλες τις κατευθύνσεις, δηλ. **ισότροπα**, τότε τα κυματικά μέτωπα είναι ομόκεντρες σφαίρες, με το κέντρο τους στο S . Συνήθως σχεδιάζουμε τη προβολή τους στο επίπεδο (ομόκεντροι κύκλοι). Οι ευθείες που είναι κάθετες σε όλα τα κυματικά μέτωπα λέγονται **ακτίνες**.



Σε ένα ισότροπο μέσο, τα κυματικά μέτωπα του ήχου σχηματίζουν σφαίρες που έχουν το κέντρο τους στη πηγή.

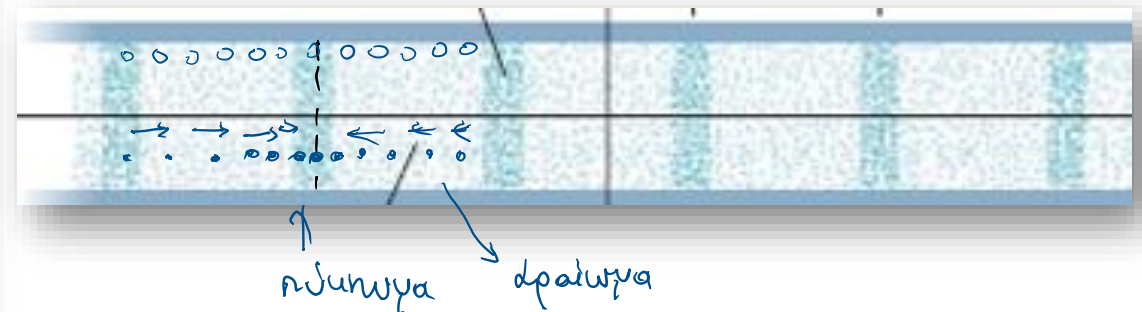
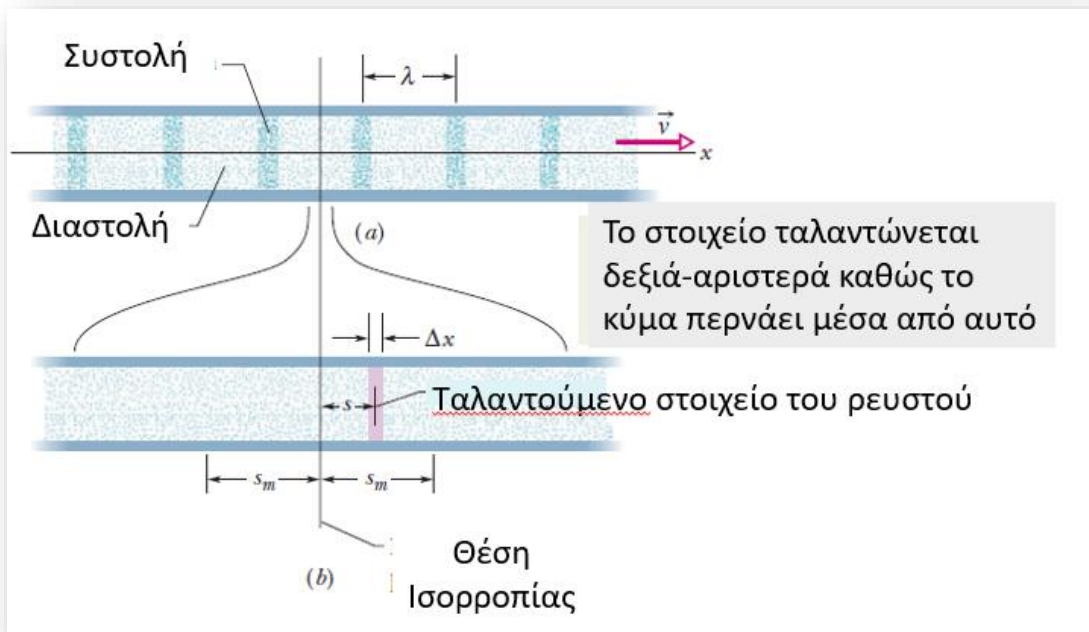
Τα μικρά μαύρα διπλά βέλη υποδεικνύουν ότι τα στοιχεία του μέσου ταλαντώνονται γύρω από τη θέση ισορροπίας τους, παράλληλα προς τη κατεύθυνση διάδοσης του κύματος.

Τα διαδοχικά μέτωπα απέχουν μεταξύ τους απόσταση ίση με το μήκος κύματος

Τα ηχητικά κύματα ως διακυμάνσεις της πίεσης

Μπορούμε να περιγράψουμε τα ηχητικά κύματα συναρτήσει **των μεταβολών της πίεσης** στα διάφορα σημεία του χώρου (η απόδειξη ακολουθεί στις επόμενες διαφάνειες).

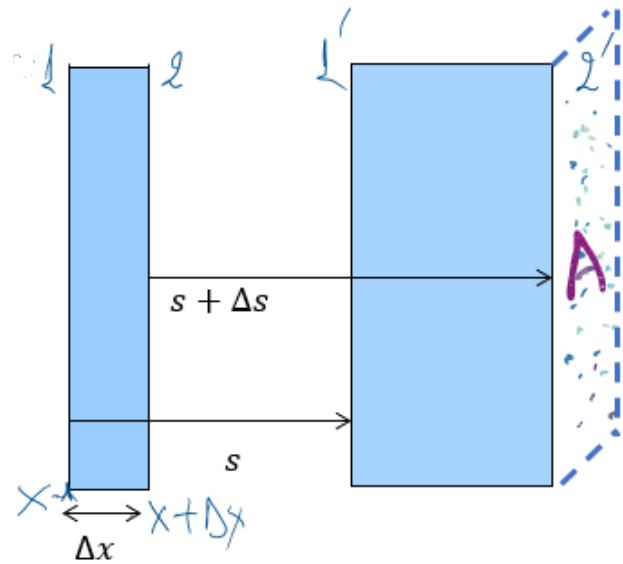
Για ένα ημιτονοειδές ηχητικό κύμα, η πίεση ταλαντώνεται γύρω από την ατμοσφαιρική τιμή P_a με μια ημιτονοειδή μεταβολή που έχει την ίδια συχνότητα με τις κινήσεις των σωματιδίων του αέρα.



Ένα σκαρίφημα που δείχνει τη κίνηση μεμονωμένων σωματιδίων του ρευστού κάποια χρονική στιγμή

Το **ανθρώπινο αυτί** λειτουργεί ως **αισθητήρας** τέτοιων μεταβολών της πίεσης. Ένα ηχητικό κύμα που εισέρχεται στον ακουστικό πόρο, ασκεί μεταβαλλόμενη πίεση στο τύμπανο, στην άλλη πλευρά του οποίου η πίεση είναι ίση με την ατμοσφαιρική πίεση. Η διαφορά στη πίεση ασκεί (μεταβαλλόμενη) δύναμη στο τύμπανο το οποίο εξαναγκάζεται σε ταλάντωση

Ταχύτητα διάδοσης ηχητικών κυμάτων (γενικά διαταραχών πίεσης)



Θεωρούμε ένα σωλήνα μέσα στον οποίο υπάρχει ιδανικό αέριο για το οποίο ισχύει η γνωστή καταστατική εξίσωση

$$PV = Nk_B T \quad (1)$$

όπου P η πίεση, V ο όγκος και T η θερμοκρασία.

Ας υποθέσουμε ότι αρχικά το αέριο έχει παντού την ίδια πίεση P_0

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι μία διαταραχή διαδίδεται κατά μήκος του σωλήνα, οπότε η πίεση μεταβάλλεται $P(x, t) = P_0 + \Delta P(x, t)$

Στα αριστερά του σχήματος βλέπουμε ένα στοιχειώδες τμήμα του αέρα μέσα στον σωλήνα, με πάχος Δx και διατομή A (η διατομή είναι κάθετα στο σχήμα).

Καθώς διέρχεται η διαταραχή, η πλευρά 1 του στοιχειώδους τμήματος μετατοπίζεται κατά s (στη θέση 1') και η πλευρά 2 κατά $s + \Delta s$ (θέση 2'). Αυτό φαίνεται στα δεξιά του σχήματος.

Ο όγκος του στοιχειώδους τμήματος του αερίου έχει μεταβληθεί (στο παράδειγμα αυτό έχει αυξηθεί).

Αρχικά ήταν $V_0 = A\Delta x$ (2).

Στο δεξιό στιγμιότυπο έχει ο όγκος είναι $V = A[x + \Delta x + s + \Delta s - (x + s)] = A(\Delta x + \Delta s)$

Δηλ. $\Delta V = V - V_0 = A\Delta s$ (3), άρα η διαστολή που έχει υποστεί το στοιχειώδες τμήμα είναι

$$\delta = \frac{\Delta V}{V_0} = \frac{A\Delta s}{A\Delta x} \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\partial s}{\partial x} \quad (4)$$

Στο στοιχειώδες τμήμα του αερίου, με όγκο V_0 , του προηγούμενου σχήματος, η πίεση που ασκείται στην πλευρά 1 (στο x) είναι $P(x)$, ενώ η πίεση στη πλευρά 2 (στη θέση $x + dx$), είναι $P(x + dx)$.

Θυμόμαστε ότι η δύναμη (που ασκείται κάθετα στην επιφάνεια) ισούται με τη πίεση επί το εμβαδόν της επιφάνειας.

Στη συγκεκριμένη περίπτωση, η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο αέριο όγκου V_0 είναι

$$F_x = AP(x) - AP(x + dx) = -A \frac{\partial P}{\partial x} dx = -A \frac{\partial \Delta P}{\partial x} dx \quad (5) \quad (\text{διότι } P = P_0 + \Delta P, P_0 \text{ σταθερο} \rightarrow \text{η αρχική πίεση})$$

$$\text{Από τον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα έχουμε ότι } F_x = ma_x \quad (6)$$

$$\text{Αλλά } m = \rho_0 V_0 = \rho_0 A dx \quad (7) \quad \text{και } a_x = \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (8)$$

$$\text{Από (6), (7) και (8) προκύπτει ότι } F_x = A \rho_0 dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (9)$$

Ανακαλούμε τώρα το ορισμό του **μέτρου συμπιεστότητας όγκου** (B , bulk modulus)

$$B = -V \frac{\partial P}{\partial V} \Rightarrow B \simeq -V_0 \frac{\Delta P}{\Delta V} \quad (10)$$

$$\text{Από τη (10) και την (4) βρίσκουμε ότι } \Delta P = -B \frac{\Delta V}{V_0} = -B \frac{\partial s}{\partial x} \Rightarrow \frac{\partial \Delta P}{\partial x} = -B \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} \quad (11)$$

$$\text{Από (5) και (9) προκύπτει ότι } -A \frac{\partial \Delta P}{\partial x} dx = A \rho_0 dx \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \xrightarrow{(11)} B \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \rho_0 \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \Rightarrow \frac{\partial^2 s}{\partial x^2} = \frac{1}{c_{\eta\chi\omicron\upsilon}^2} \frac{\partial^2 s}{\partial t^2} \quad (12)$$

$$\text{όπου } c_{\eta\chi\omicron\upsilon}^2 = \frac{B}{\rho_0} \quad (13)$$

Βρήκαμε (εξ. (13)) ότι η ταχύτητα ήχου δίνεται από τη σχέση $c_{\eta\chi ou} = \sqrt{\frac{B}{\rho}}$

Αν θεωρήσουμε ότι η διάδοση του ήχου είναι **αδιαβατική διαδικασία**, δηλ. αν $PV^\gamma = \text{σταθερό}$ (14), τότε στη ταχύτητα του ήχου υπεισέρχεται το **αδιαβατικό bulk modulus** (και όχι το ισόθερμο) που είναι $B_{ad} = \gamma P$.

Απόδειξη:

$$P = \frac{\text{σταθ.}}{V^\gamma} \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial V} = -\gamma \frac{\text{σταθ.}}{V^{\gamma+1}}$$

$$\text{οπότε } B = -V \frac{\partial P}{\partial V} = \gamma \frac{\text{σταθ.}}{V^\gamma} = \gamma P$$

και σε αυτή τη περίπτωση $c_{\eta\chi ou} = \sqrt{\frac{\gamma P}{\rho}}$

$\gamma \cong 1.4$ για διατομικό αέριο, $P = 1 \text{ atm} = 1.013 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}$, $\rho = 1.2 \text{ kgm}^{-3}$ (σε συνθήκες δωματίου)
οπότε η ταχύτητα του ήχου προκύπτει ότι είναι ίση με

$$c_{\eta\chi ou} \cong \sqrt{\frac{1.4 \times 10^5 \text{ Nm}^{-2}}{1.2 \text{ kgm}^{-3}}} = 343 \text{ ms}^{-1}$$

Άσκηση 1

Έστω ηχητικό κύμα που διαδίδεται μέσα σε ένα μακρύ σωλήνα γεμάτο αέρα. Ας υποθέσουμε ότι η οριζόντια μετατόπιση ενός τυχαίου στοιχείου περιγράφεται από τη συνάρτηση $s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t)$. Βρείτε τη συνάρτηση που περιγράφει τη μεταβολή της πίεσης ως προς τη θέση x και το χρόνο t .

Βλ. σχήμα στη
5^η διαφάνεια

$$\left. \begin{aligned} \Delta V &= A \Delta s. \\ \Delta P &= -B \frac{\Delta V}{V}. \end{aligned} \right\} \Delta P = -B \frac{\Delta s}{\Delta x} = -B \frac{\partial s}{\partial x}.$$

$$s(x, t) = s_m \cos(kx - \omega t).$$

$$\frac{\partial s}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial x} [s_m \cos(kx - \omega t)] = -k s_m \sin(kx - \omega t).$$

$$\Delta P(x, t) = B k s_m \sin(kx - \omega t)$$

$$\Delta P(x, t) = \Delta P_m \sin(kx - \omega t)$$

$$\Delta P_m = B k s_m \xrightarrow{\text{εξ.14}} \Delta P_m = \rho c_{\eta\chi\omicron\upsilon}^2 k s_m$$

$$k = \omega / c_{\eta\chi\omicron\upsilon}$$

$$\Delta P_m = \rho \omega c_{\eta\chi\omicron\upsilon} s_m$$

Άσκηση 2

Το μέγιστο πλάτος πίεσης που ανέχεται το ανθρώπινο αυτί είναι 28Pa (υπενθυμίζεται ότι η 1 atm= 10⁵Pa). Πόσο είναι το πλάτος μετατόπισης για ένα τέτοιο ήχο συχνότητας 1000Hz, διαδιδόμενο με ταχύτητα 343m/s σε αέρα πυκνότητας 1.21kg/m³;

Είδαμε προηγουμένως ότι

$$\Delta P_m = \rho \omega c_{\eta\chi\omicron\upsilon} s_m \Rightarrow$$

$$s_m = \frac{\Delta P_m}{\rho \omega c_{\eta\chi\omicron\upsilon}} = \frac{\Delta P_m}{\rho 2\pi f c_{\eta\chi\omicron\upsilon}} \Rightarrow s_m = \frac{28\text{Pa}}{(1.21\text{kg/m}^3)(2\pi)(1000\text{Hz})(343\text{m/s})} = 1.1 \times 10^{-5}\text{m} = 11\mu\text{m}$$

Το αυτί μπορεί να ακούσει σε αυτή τη συχνότητα μέχρι $2.8 \times 10^{-5}\text{Pa}$, που αντιστοιχεί σε

$$s_m = 1.1 \times 10^{-11}\text{m} = 11\text{pm}$$

Ένταση και επίπεδο του ήχου

Είχαμε δει για την διάδοση εγκάρσιου κύματος σε τεντωμένη χορδή ότι η μέση ισχύς δίνεται από τη σχέση

$$P_{average} = \frac{1}{2} \mu v \omega^2 y_m^2$$

Ομοίως, μπορούμε εύκολα να αποδείξουμε (άσκηση) ότι για τα ηχητικά κύματα έχουμε

$$P_{average} = \frac{1}{2} A \rho c_{\eta\chi} \omega^2 s_m^2$$

Ορίζουμε ως **ένταση των ηχητικών κυμάτων** (τις ίδιες έννοιες θα συναντήσουμε και στα ηλεκτρομαγνητικά κύματα) το μέσο ρυθμό με τον οποίο μεταφέρεται ενέργεια από το κύμα δια μέσου ή επί της επιφάνειας, ανά μονάδα επιφάνειας:

$$I = \frac{P_{average}}{A} = \frac{1}{2} \rho c_{\eta\chi} \omega^2 s_m^2$$

Η **ακουστότητα** του ήχου είναι ανάλογη της έντασης του ήχου, αλλά εξαρτάται και από τη συχνότητα.

Άσκηση 3 Εύρεση της έντασης του ήχου

Θεωρείστε ένα μικρό στοιχείο όγκου αέρα πάχους dx , επιφάνειας διατομής A , και μάζας dm , που ταλαντώνεται εμπρός-πίσω, καθώς το ηχητικό κύμα περνά από αυτό. Υποθέτουμε ότι η οριζόντια αυτή μετατόπιση περιγράφεται από τη συνάρτηση

$$s = s_m \cos(kx - \omega t)$$

Η κινητική ενέργεια του στοιχείου αυτού είναι

$$dK = \frac{1}{2} dm v_s^2.$$

Αλλά

$$v_s = \frac{\partial s}{\partial t} = -\omega s_m \sin(kx - \omega t).$$

Επομένως

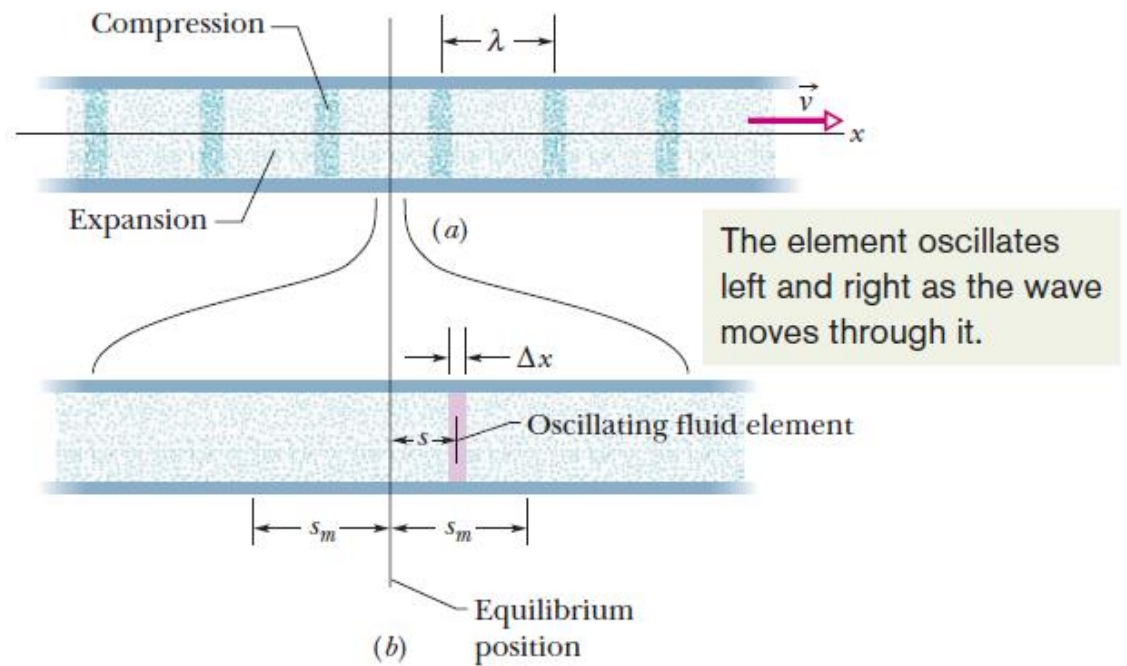
$$dK = \frac{1}{2} (\rho A dx) (\omega s_m)^2 \sin^2(kx - \omega t).$$

και,

$$\frac{dK}{dt} = \frac{1}{2} \rho A v \omega^2 s_m^2 \sin^2(kx - \omega t).$$

Τότε ο μέσος ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται η κινητική ενέργεια είναι

$$\left(\frac{dK}{dt} \right)_{\text{avg}} = \frac{1}{2} \rho A v \omega^2 s_m^2 [\sin^2(kx - \omega t)]_{\text{avg}} = \frac{1}{4} \rho A v \omega^2 s_m^2.$$



Αφού ο ρυθμός με τον οποίο μεταφέρεται η δυναμική ενέργεια είναι ίσος με της κινητικής ενέργειας, συνολικά η ένταση του ηχητικού κύματος θα είναι

$$I = \frac{2(dK/dt)_{\text{avg}}}{A} = \frac{1}{2} \rho v \omega^2 s_m^2.$$

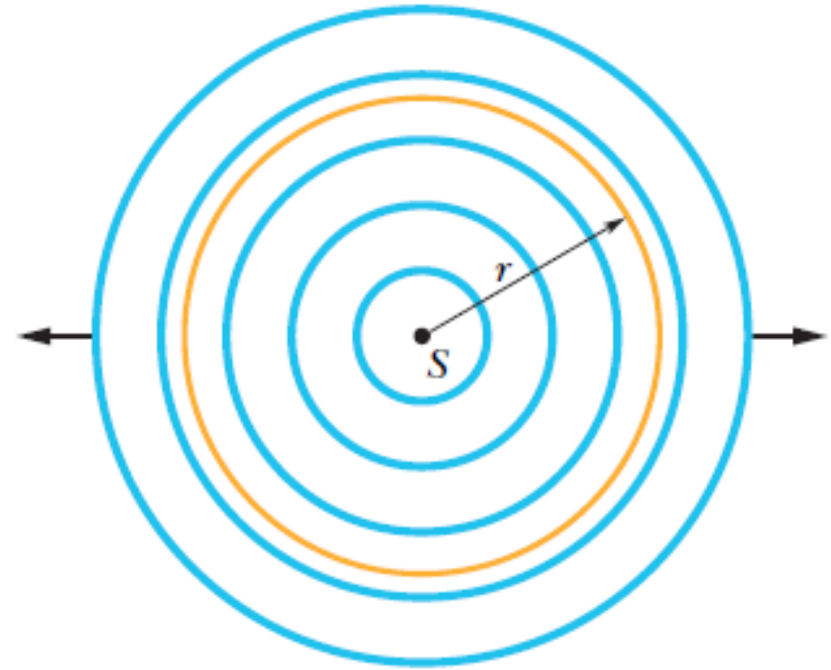
Η μεταβολή της έντασης του ήχου με την απόσταση

Ας υποθέσουμε ότι έχουμε μια σημειακή πηγή S που εκπέμπει ισοτροπικά, δηλ. εκπέμπει σφαιρικά κύματα. Η μέση ισχύς της πηγής είναι P_s

Υποθέτουμε ότι δεν έχουμε απώλειες ενέργειας κατά τη διάδοση του κύματος.

Ας θεωρήσουμε μία σφαιρική επιφάνεια με κέντρο τη πηγή και ακτίνα r . Η ένταση του ήχου σε ένα οποιοδήποτε σημείο της σφαίρας είναι

$$I = \frac{P_s}{4\pi r^2}$$



Εξάρτηση του πλάτους από την απόσταση από τη πηγή (για σφαιρικά κύματα)

Ας θεωρήσουμε την ένταση του ήχου σε δύο διαφορετικές αποστάσεις από τη πηγή r_1 και r_2 .

$$\text{Τότε } \frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{P_s}{4\pi r_1^2}}{\frac{P_s}{4\pi r_2^2}} = \frac{r_2^2}{r_1^2}$$

$$\text{Επίσης, } \frac{I_1}{I_2} = \frac{\frac{1}{2}\rho c_{\eta\chi}\omega^2 s_{m1}^2}{\frac{1}{2}\rho c_{\eta\chi}\omega^2 s_{m2}^2} = \frac{s_{m1}^2}{s_{m2}^2}$$

$\frac{s_{m1}^2}{s_{m2}^2} = \frac{r_2^2}{r_1^2} \Rightarrow r_1 s_{m1} = r_2 s_{m2}$ Δηλ. το πλάτος είναι αντιστρόφως ανάλογο της απόστασης από τη πηγή.

Το επίπεδο του ήχου και η κλίμακα decibel

Το πλάτος μετατόπισης του τύμπανου του αυτιού καλύπτει 6 τάξεις μεγέθους από 10^{-5} m έως 10^{-11} m.

Για αυτό είναι πρακτικό να χρησιμοποιήσουμε λογαριθμική κλίμακα για τη μέτρηση της έντασης του ήχου.

Επίπεδο ήχου: $\beta \equiv (10DB)\log\frac{I}{I_0}$, DB: decibel

όπου

$$I_0 = 10^{-12} \text{W/m}^2$$

$$I = I_0 \Rightarrow \beta = 0$$

$$I = 10^{-11} \text{W/m}^2 \Rightarrow \beta = 10DB$$

Παράδειγμα

Αν μία ωτασπίδα μειώνει το επίπεδο του ήχου κατά 20DB πόσος είναι ο λόγος της τελικής I_f προς την αρχική ένταση I_i ;

$$\beta_f = (10DB)\log\frac{I_f}{I_0}$$

$$\beta_i = (10DB)\log\frac{I_i}{I_0}$$

$$-20DB = \beta_f - \beta_i = (10DB) \left(\log\frac{I_f}{I_0} - \log\frac{I_i}{I_0} \right) \Rightarrow -2 = \log\frac{I_f}{I_i} \Rightarrow \frac{I_f}{I_i} = 10^{-2}$$

Πηγές μουσικών ήχων – μουσικά όργανα

Μουσικά όργανα

- Ταλαντούμενες χορδές (κιθάρα, πιάνο , βιολί, κλπ)
- Ταλαντούμενες μεμβράνες (τύμπανα, κλπ)
- Ταλαντούμενες στήλες αέρα (φλάουτο, όμποε, κλπ)
- Ξυλάκια, μεταβλητές ράβδοι (ξυλόφωνο, μεταλλόφωνο)

Τα περισσότερα μουσικά όργανα περιλαμβάνουν περισσότερα από ένα ταλαντούμενα μέρη.

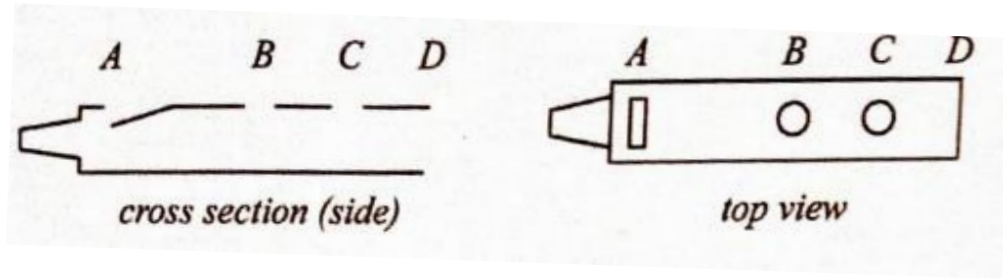
Ας θεωρήσουμε την περίπτωση μίας ταλαντούμενης χορδής με σταθερά άκρα. Από την υπέρθεση των ανακλώμενων στα άκρα της χορδής κυμάτων, για κατάλληλο ταίριασμα μεταξύ μήκους κύματος και μήκους της χορδής, προκύπτουν στάσιμα κύματα με χαρακτηριστικές συχνότητες (κανονικοί τρόποι ταλάντωσης - βλ. Μάθημα 7). Η χορδή ταλαντώνεται με σταθερό πλάτος, σπρώχνοντας τον αέρα και δημιουργώντας ηχητικά κύματα ίδιας συχνότητας.

Παρόμοια, μπορούμε να δημιουργήσουμε στάσιμα κύματα σε ένα σωλήνα με αέρα (βλ. παράδειγμα που ακολουθεί). Ένα κλειστό άκρο του σωλήνα είναι το αντίστοιχο του στερεωμένου άκρου μιας χορδής.

Παράδειγμα

Ένα απλό «φλάουτο» όπως φαίνεται στην εικόνα είναι ανοικτό στο D. Υπάρχει επίσης ένα μεγάλο άνοιγμα στο A (κοντά στο στόμιο) και υπάρχουν δύο τρύπες στο B και C ($AB=BD$, $BC=CD$). Η απόσταση AD είναι $\sim 37\text{cm}$. Η ταχύτητα του ήχου είναι $\sim 340\text{m/s}$. Ποια συχνότητα περιμένετε να ακούσετε όταν φυσάμε από το στόμιο και έχουμε

- (a) Και τις δύο τρύπες στο B και C κλειστές
- (b) Μόνο τη τρύπα στο C κλειστή
- (c) Μόνο τη τρύπα στο B κλειστή
- (d) Και τις δύο τρύπες στο B και C ανοικτές



Υποθέστε ότι θα ακούσετε κυρίως την θεμελιώδη αρμονική.

- (a) Σωλήνας με δύο ανοικτά άκρα και μήκος $L = AD = 37\text{cm}$.

$$\text{Θεμελιώδης τρόπος ταλάντωσης } \lambda = 2L = 74\text{cm} \Rightarrow f = \frac{c_{\eta\chi}}{\lambda} = 446\text{Hz}$$



- b) Εάν οι τρύπες είναι αρκετά μεγάλες είναι σαν να έχουμε ένα σωλήνα μήκους 18.5cm (ανοικτό στα δύο άκρα) οπότε $\lambda = 2AB = 37\text{cm} \Rightarrow f = \frac{c_{\eta\chi}}{\lambda} = 892\text{Hz}$

- c) $\lambda = 2AC = 2\left(18.5 + \frac{18.5}{2}\right)\text{cm} = 55.5\text{cm} \Rightarrow f = \frac{c_{\eta\chi}}{\lambda} = 612\text{Hz}$

- d) Τότε είναι σαν να έχουμε τη περίπτωση (b).

Σημείωση

Συνήθως η θεμελιώδης και οι περισσότερες αρμονικές παράγονται ταυτόχρονα, με διαφορετικά πλάτη, και υπερτίθενται. Αυτό που ακούμε είναι το συνολικό κύμα.



Γενικά οι υψηλότερες αρμονικές παράγονται με διαφορετικές εντάσεις από διαφορετικά όργανα, οπότε η κυματομορφή που δείχνουμε πιο πάνω για την ίδια νότα, θα είναι διαφορετική για διαφορετικά όργανα.

Διακροτήματα (beats)

Τί γίνεται όταν ακούμε ταυτόχρονα δύο ήχους ίδιου πλάτους και παρόμοιων συχνοτήτων; Έστω ότι βρισκόμαστε σε μία συγκεκριμένη θέση. Έστω ότι οι μετατοπίσεις στη θέση αυτή ως προς το χρόνο περιγράφονται από τις σχέσεις:

$$s_1 = s_m \cos \omega_1 t \text{ και } s_2 = s_m \cos \omega_2 t$$

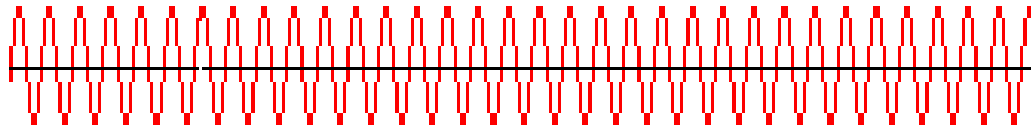
Από την υπέρθεση των δυο κυμάτων προκύπτει κύμα με μετατόπιση s :

$$\begin{aligned} s &= s_m (\cos \omega_1 t + \cos \omega_2 t) = \\ &= 2s_m \cos \left(\frac{\omega_1 - \omega_2}{2} t \right) \cos \left(\frac{\omega_1 + \omega_2}{2} t \right) \\ &= 2s_m \cos \omega' t \cos \omega t, \text{ όπου } \omega' = \frac{\omega_1 - \omega_2}{2}, \quad \omega = \frac{\omega_1 + \omega_2}{2} \end{aligned}$$

Το $|2s_m \cos \omega' t|$ είναι το πλάτος του διακροτήματος, που γίνεται μέγιστο δύο φορές μέσα σε μία περίοδο, όταν $\cos \omega' t = \pm 1$. Άρα η κυκλική συχνότητα του διακροτήματος είναι

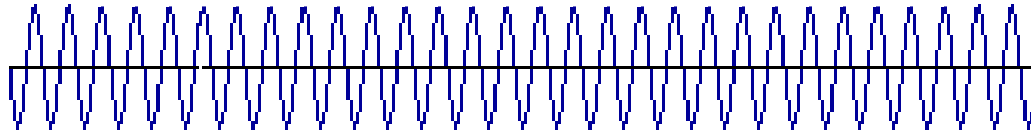
$$\omega_{\text{beat}} = 2\omega' = \omega_1 - \omega_2 \text{ και η αντίστοιχη συχνότητα } f_{\text{beat}} = f_1 - f_2$$

1ο κύμα (κόκκινο)



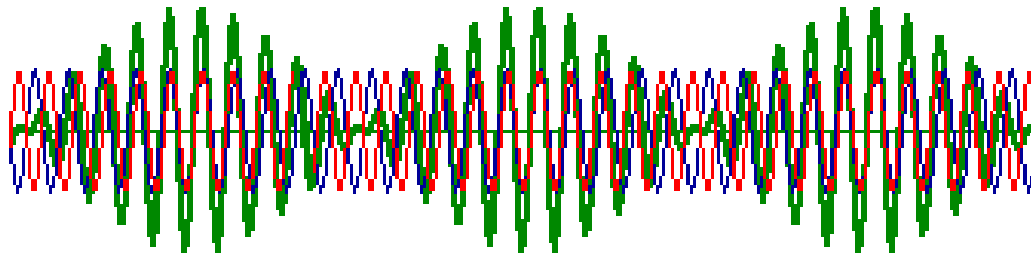
ω_1

2ο κύμα (μπλε)



ω_2

Διακρότημα (πράσινο)



Εφαρμογή: το κούρδισμα των μουσικών οργάνων → ρύθμιση μέχρι να εξαφανιστεί το «τρεμούλιασμα» στην ένταση του ήχου, που οφείλεται στο διακρότημα (που δημιουργείται από τη διαφορά μεταξύ ω_1 και ω_2)

Παράδειγμα 1

Η χορδή της νότας λα ενός βιολιού είναι τεντωμένη λίγο περισσότερο από ότι πρέπει. Όταν η χορδή ηχεί ταυτόχρονα με ένα διαπασών που ταλαντώνεται ακριβώς στη νότα λα (440Hz) ακούγονται 4 διακροτήματα το δευτερόλεπτο. Ποια είναι η περίοδος ταλάντωσης της χορδής του βιολιού;

Έστω T_β η περίοδος ταλάντωσης της χορδής του βιολιού. Η αντίστοιχη συχνότητα θα είναι $f_\beta = 1/T_\beta$.

Δίνεται ότι $f_{beat} = 4s^{-1}$

Αλλά, $f_{beat} = f_1 - f_2 = f_\beta - f_{\text{διαπασων}} \Rightarrow$

$$4s^{-1} = 1/T_\beta - 440s^{-1} \Rightarrow T_\beta = \left(\frac{1}{444}\right)s = 2.25 \times 10^{-3}s$$

Παράδειγμα 2

Δύο πανομοιότυπες χορδές πιάνου έχουν θεμελιώδη συχνότητα 600Hz. Ποια κλασματική αύξηση της τάσης της μιας χορδής θα οδηγήσει στην εμφάνιση 6 διακροτημάτων το δευτερόλεπτο, όταν οι δύο χορδές ταλαντώνονται ταυτόχρονα.

Κάθε χορδή ταλαντώνεται στη θεμελιώδη συχνότητα με $L = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow \lambda = 2L$ (1)

$$f = \frac{v}{\lambda} \quad (2)$$

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}} \quad (3)$$

Από (1), (2), και (3) προκύπτει ότι $f = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}}$

$$\text{Έστω } f_1 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F}{\mu}} \text{ και } f_2 = \frac{1}{2L} \sqrt{\frac{F+\Delta F}{\mu}}$$

$$\text{Τότε } \frac{f_2}{f_1} = \sqrt{\frac{F+\Delta F}{F}} = \sqrt{1 + \frac{\Delta F}{F}}$$

$$\text{Για } \Delta F \ll F, \quad \frac{f_2}{f_1} = \sqrt{1 + \frac{\Delta F}{F}} \cong 1 + \frac{1}{2} \frac{\Delta F}{F} \Rightarrow , f_{\text{beat}} = f_2 - f_1 = \frac{1}{2} \frac{\Delta F}{F} f_1 \Rightarrow$$

$$6\text{Hz} = \frac{1}{2} \frac{\Delta F}{F} 600\text{Hz} \Rightarrow \frac{\Delta F}{F} = 0.02$$

Φαινόμενο Doppler

(για κύματα όλων των ειδών, όχι μόνο για ηχητικά κύματα)

Τί συμβαίνει όταν η πηγή ή ο ανιχνευτής κινούνται

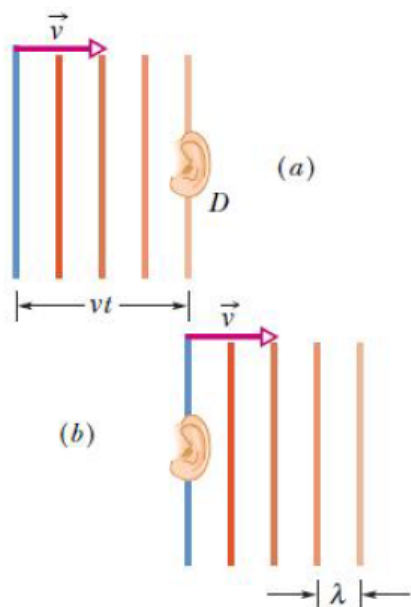
Η συχνότητα που αντιλαμβάνεται ο ανιχνευτής/παρατηρητής δεν είναι ίδια με αυτήν που εκπέμπει η πηγή, όταν ο ανιχνευτής/παρατηρητής και η πηγή βρίσκονται σε σχετική κίνηση μεταξύ τους. Το φαινόμενο αυτό λέγεται **φαινόμενο Doppler**.

Αν f είναι η συχνότητα με την οποία εκπέμπει η πηγή, και f' η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής, v_s είναι το μέτρο της ταχύτητας της πηγής και v_D το μέτρο της ταχύτητας του ανιχνευτή, τότε αποδεικνύεται ότι:

$$f' = f \frac{v \pm v_D}{v \pm v_s}$$

Για τα πρόσημα που εμφανίζονται στον παραπάνω τύπο, ακολουθούμε τον ακόλουθο κανόνα: Όταν η κίνηση του ανιχνευτή (της πηγής) είναι προς τη κατεύθυνση της πηγής (του ανιχνευτή), τότε το πρόσημο που θα χρησιμοποιήσουμε στη ταχύτητα θα πρέπει είναι τέτοιο ώστε να αυξάνεται η συχνότητα f' . Αντίθετα, όταν η πηγή (ο ανιχνευτής) απομακρύνεται από τον ανιχνευτή (την πηγή), το πρόσημο πρέπει να είναι τέτοιο ώστε να μειώνεται η συχνότητα που ανιχνεύεται.

Όταν ο ανιχνευτής και η πηγή είναι ακίνητοι, η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής ταυτίζεται με τη συχνότητα της πηγής



Τα επίπεδα κυματικά μέτωπα (α) φτάνουν και (β) ξεπερνάνε τον ακίνητο ανιχνευτή D .

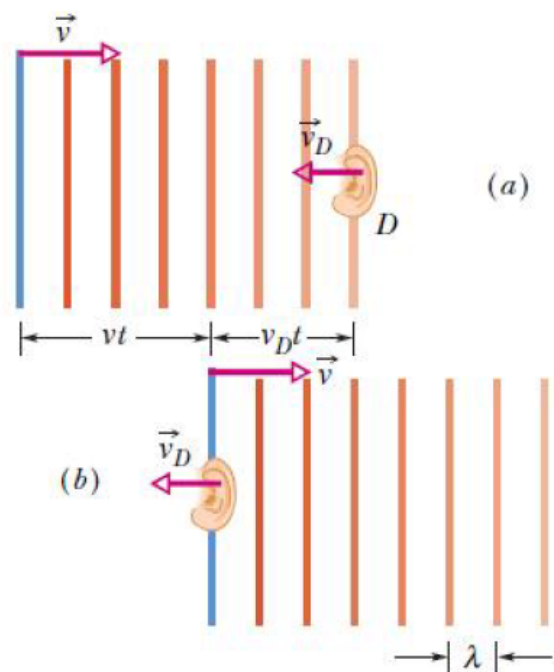
Σε χρόνο t , τα κυματικά μέτωπα (εδώ τα θεωρούμε επίπεδα, για ευκολία) «διανύουν» απόσταση vt προς τα δεξιά, όπου v η ταχύτητα διάδοσης του κύματος.

Ο αριθμός των μηκών κύματος σε αυτή την απόσταση, είναι ο αριθμός των κυματικών μετώπων που φτάνουν στον D μέσα σε χρόνο t , δηλ. vt/λ . Ο ρυθμός με τον οποίο συμβαίνει αυτό, που είναι ακριβώς η συχνότητα που καταγράφει ο ανιχνευτής, θα είναι

$$f' = \frac{vt}{\lambda} = \frac{v}{\lambda} = f$$

Δηλ. ίδια με τη συχνότητα της πηγής.

Κινούμενος ανιχνευτής, ακίνητη πηγή



Αν ο ανιχνευτής D κινείται προς τη πηγή, αντίθετα προς τη ταχύτητα των κυματομετώπων, σε χρόνο t τα κυματομέτωπα κινούνται προς τα δεξιά κατά vt (όπως στη προηγούμενη διαφάνεια), αλλά τώρα και ο D κινείται προς τα αριστερά κατά $v_D t$.

Έτσι, μέσα στο χρόνο t , η απόσταση κατά την οποία έχουν μετακινηθεί τα κυματομέτωπα σε σχέση με τη πηγή είναι $vt + v_D t$.

Ο αριθμός των κυματικών μετώπων που φτάνουν στον D μέσα σε χρόνο t , θα είναι $(vt + v_D t)/\lambda$ και η αντίστοιχη συχνότητα:

$$f' = \frac{\frac{vt + v_D t}{\lambda}}{t} = \frac{v + v_D}{\lambda} = \frac{v + v_D}{v/f} = \frac{v + v_D}{v} f$$

Παρόμοια, αν το D απομακρύνεται από το S, τότε η σχετική απόσταση που διανύουν τα κυματομέτωπα είναι $vt - v_D t$, οπότε

$$f' = \frac{v - v_D}{v} f$$

Κινούμενη πηγή, ακίνητος ανιχνευτής

Έστω ότι ο ανιχνευτής D είναι ακίνητος (ως προς τον αέρα μέσα στον οποίο διαδίδεται το κύμα που εκπέμπει η πηγή). Έστω ότι η πηγή κινείται προς το D με ταχύτητα v_S .

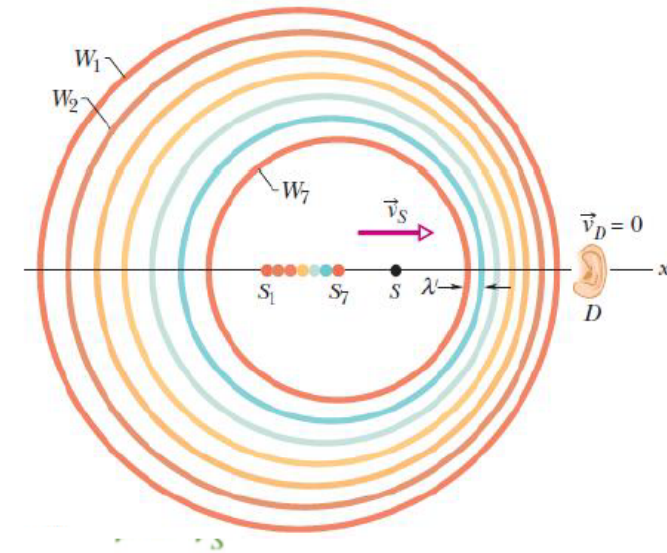
Αν T ($=1/f$) είναι ο χρόνος μεταξύ της εκπομπής οποιουδήποτε ζεύγους από διαδοχικά κυματοπακέτα W_1 και W_2 , μέσα στο χρόνο T , το W_1 κινείται κατά απόσταση vT ενώ η πηγή μετακινείται κατά $v_S T$. Με το πέρας του χρονικού διαστήματος T , εκπέμπεται το κυματομέτωπο W_2 .

Στη κατεύθυνση στην οποία κινείται η πηγή, η απόσταση μεταξύ W_1 και W_2 , που είναι το μήκος κύματος λ' των κυμάτων που διαδίδονται σε αυτή τη κατεύθυνση, είναι $(vT - v_S T)$.

Η συχνότητα που θα ανιχνεύσει ο D θα είναι :

$$f' = \frac{v}{\lambda'} = \frac{v}{vT - v_S T} = \frac{v}{v/f - v_S/f} = \frac{v}{v - v_S} f$$

Αν η πηγή κινείται προς την αντίθετη διεύθυνση, τότε, με παρόμοιο σκεπτικό βρίσκουμε: $f' = \frac{v}{v + v_S} f$



(1) Όταν και ο παρατηρητής και η πηγή κινούνται κατά μήκος της ευθείας που τους συνδέει και ο αέρας είναι ακίνητος τότε:

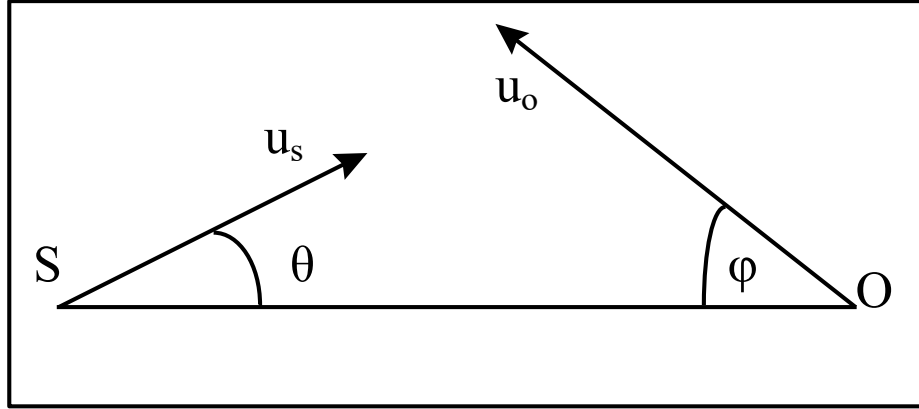
$$f' = f \frac{v \pm v_D}{v \mp v_s}$$

(2) Όταν και ο παρατηρητής και η πηγή κινούνται κατά μήκος της ευθείας που τους συνδέει και ο αέρας κινείται με κάποια ταχύτητα τότε:

$$f' = f \frac{v_{σχ} \pm v_D}{v_{σχ} \mp v_s}$$

Όπου $v_{σχ}$ είναι η σχετική ταχύτητα του ήχου ως προς τον αέρα

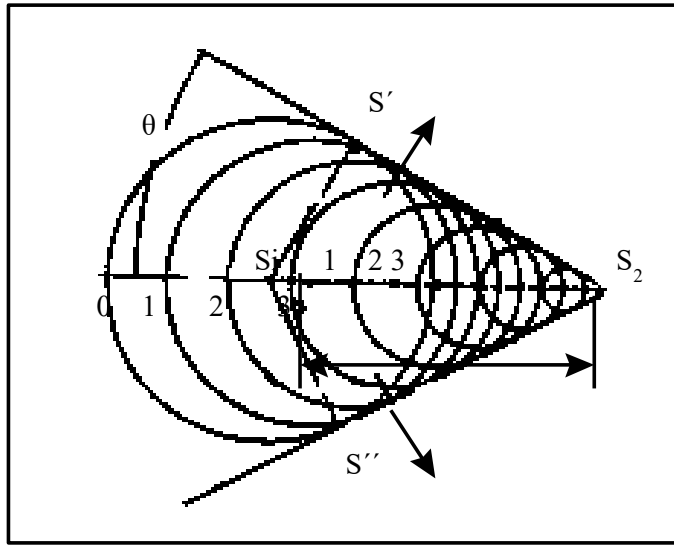
(3) Όταν ο παρατηρητής και η πηγή κινούνται σε διευθύνσεις διαφορετικές από την κοινή ευθεία που τους συνδέει (ίδε σχήμα) τότε:



Σχήμα 74

$$f' = f \frac{v + v_D \cos \varphi}{v - v_s \cos \theta}$$

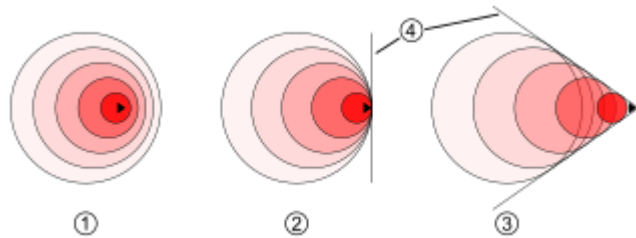
(4) **Κρουστικό κύμα** : Όταν το v_o ή το v_s ή αμφότερα είναι μεγαλύτερα της $v_{\text{ήχου}}$, τότε πλέον δεν ισχύει για φαινόμενο Doppler.



Σχήμα 75

Όταν η ταχύτητα της πηγής v_s είναι μεγαλύτερη από $v_{\text{ήχου}}$ τότε οι εφαπτόμενες των μετώπων του κύματος συγκλίνουν σε ένα σημείο δημιουργώντας έναν κώνο με κορυφή το σημείο σύγκλισης. Η γωνία θ του κώνου βρίσκεται από τη σχέση :

$$\sin\theta = \frac{vt}{v_s t} = \frac{v}{v_s}$$

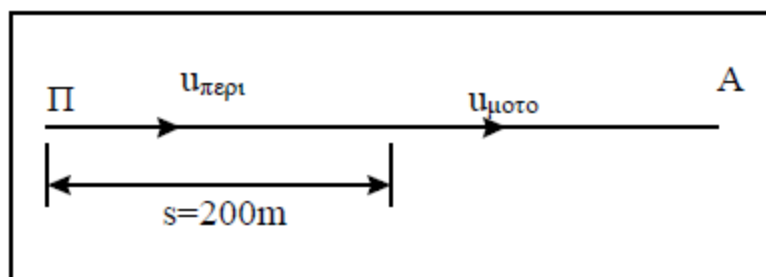


Για αντικείμενα κινούμενα με ταχύτητες μεγαλύτερες από την ταχύτητα του ήχου (υπερηχητικές) δημιουργούνται μεγάλες διαφορές πίεσης με αποτέλεσμα τη γένεση ισχυρότατου κρότου.

Άσκηση 1^η :

1. Περιπολικό με την σειρήνα σε λειτουργία ($\nu = 2900\text{Hz}$), κυνηγά παραβάτη μοτοσικλετιστή. Και οι δυο έχουν αναπτύξει το μέγιστο της ταχύτητάς τους και εκτελούν πλέον κίνηση ευθύγραμμη ομαλή. Όταν το περιπολικό απέχει $S = 200\text{m}$ από το μοτοσικλετιστή, αυτός αντιλαμβάνεται ήχο συχνότητας $\nu' = 3100\text{Hz}$. Το περιπολικό συλλαμβάνει το μοτοσικλετιστή μετά 10sec. Ζητούνται οι ταχύτητες περιπολικού και μοτοσικλέτας ($u_{\eta\chi}=340\text{ m / sec}$).

Υπόδειξη :



Σχήμα 77

Έστω ότι το περιπολικό θα φθάσει το μοτοσικλετιστή στο σημείο A της διαδρομής.

$$\text{Τότε θα είναι : } S_{\text{περ}} = S + S_{\text{μοτ}} \rightarrow u_{\text{περι}} \cdot t = s + u_{\text{μοτ}} \cdot t \quad (1)$$

$$\text{Επίσης ισχύει : } \nu' = \nu \frac{u - u_{\text{μοτ}}}{u - u_{\text{περι}}} \quad (2)$$

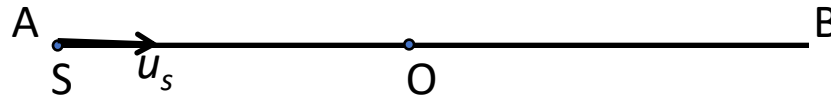
Από τις (1) και (2) προκύπτουν τα $u_{\text{περι}}$ και $u_{\text{μοτ}}$.

Άσκηση 2^η: Πηγή (S) κινείται κατά μήκος μιας διαδρομής AB με ταχύτητα u_s εκπέμπουσα ήχο συχνότητας f_0 . Να δοθεί η γραφική παράσταση της συχνότητας f που αντιλαμβάνεται ακίνητος παρατηρητής (O) συναρτήσει της διαδρομής:

- α) ευρισκόμενος στο μέσο της διαδρομής AB,
- β) ευρισκόμενος εκτός της διαδρομής AB,
- γ) εξετάστε το παραπάνω πρόβλημα για την περίπτωση (α) αλλά με την πηγή επιταχυνόμενη με σταθερή επιτάχυνση γ

Λύση:

α)

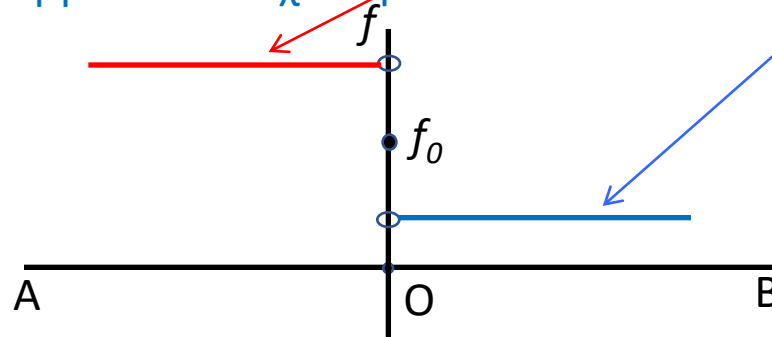


Κατά την διαδρομή AO ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

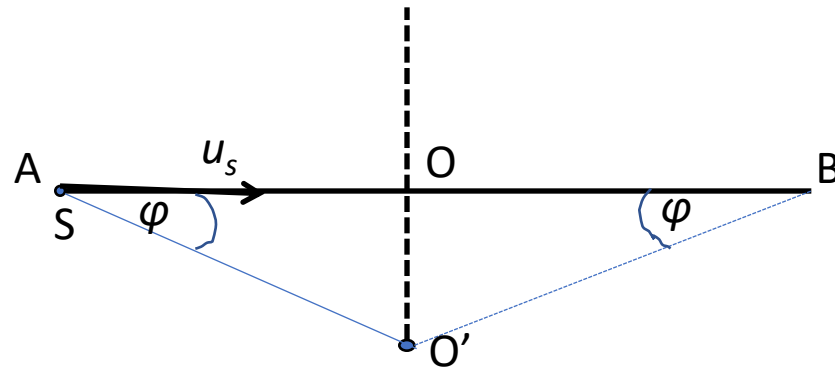
$$f' = f \frac{v}{v - u_s}$$

Κατά την διαδρομή OB ο παρατηρητής αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = f \frac{v}{v + u_s}$$



β)

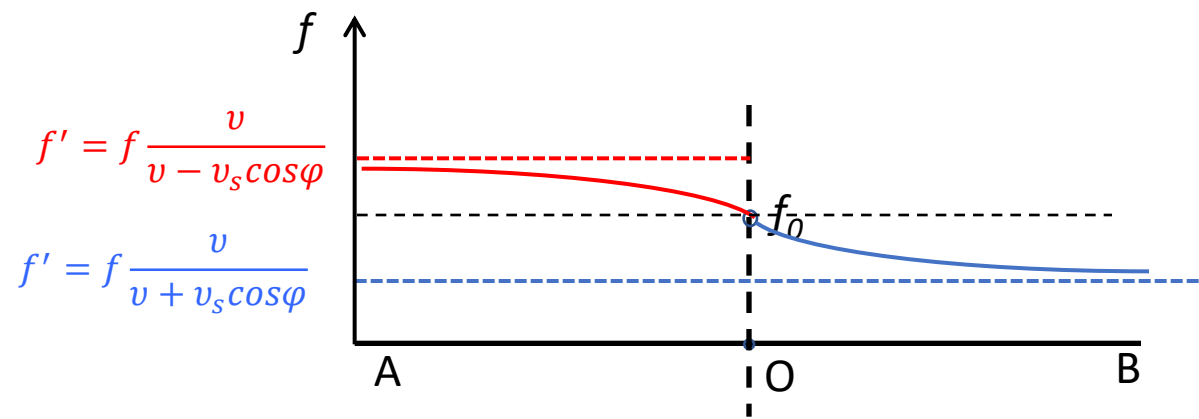


Κατά την διαδρομή AO ο παρατηρητής
O' αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = f \frac{v}{v - v_s \cos \varphi}$$

Κατά την διαδρομή OB ο παρατηρητής
O' αντιλαμβάνεται συχνότητα

$$f' = f \frac{v}{v + v_s \cos \varphi}$$

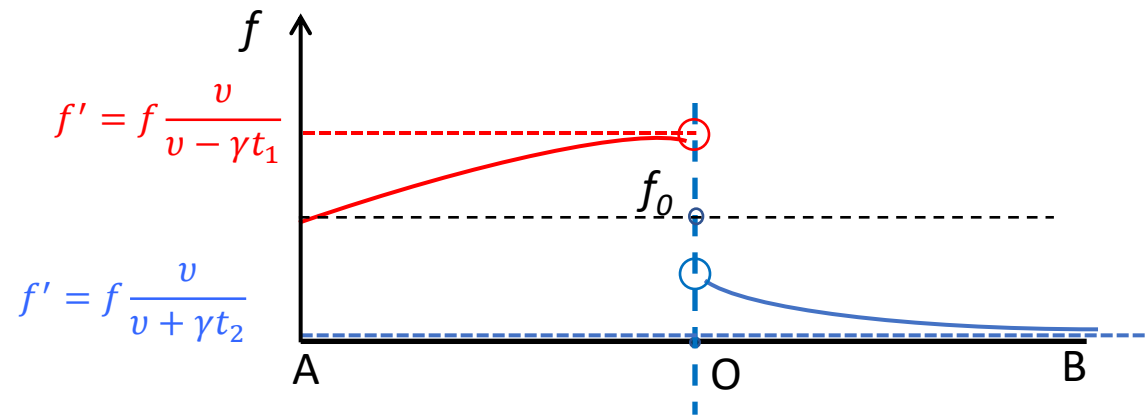


Προφανώς η συχνότητα αυτή μεταβάλλεται μετά της γωνίας φ .

Για τη διαδρομή AO που η πηγή πλησιάζει τον παρατηρητή η γωνία φ μεταβάλλεται από $[0^\circ - 90^\circ]$ το $\cos \varphi$ μεταβάλλεται από $[1 - 0]$ η παράσταση $(v - v_s \cos \varphi)$ αυξάνει και συνεπώς η συχνότητα ν' ελαττώνεται τείνοντας προς την τιμή f_0 .

Για τη διαδρομή OB που η πηγή απομακρύνεται από τον παρατηρητή η γωνία φ μεταβάλλεται από $[90^\circ - 0^\circ]$ το $\cos \varphi$ μεταβάλλεται από $[0 - 1]$ η παράσταση $(v + v_s \cos \varphi)$ αυξάνει και συνεπώς η συχνότητα ν' ελαττώνεται τείνοντας προς μία οριακή τιμή.

γ)



Όταν η πηγή επιταχύνεται ο γενικός τύπος για την διαδρομή AB είναι:

$$f' = f \frac{v}{v \mp \gamma t}$$

Διαπιστώσ τε ότι η αντίστοιχη γραφική
παράσταση είναι αυτή του παραπάνω σχήματος.