ΜΕΡΟΣ ΙΙ: ΟΠΤΙΚΗ

Εισαγωγικά στοιχεία για Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

Αρχή του Fermat

Ανάκλαση – Διάθλαση του φωτός

Δείκτης διάθλασης

Οπτικός Δρόμος

ΟΠΤΙΚΗ: Τι είναι το φως;

- Σωματίδια

Εμπεδοκλής (5ος π.Χ. αιώνας) – Newton (17ος μΧ) - αρχές του 19ου μ.Χ. αιώνα

- Κύμα

Christian Huygens (1629-1695)

Thomas Young (1773-1829)-

J.C. Maxwell το φως ***είναι υψίσυχνο Ηλεκτρομαγνητικό κύμα***

Einstein(1905): ***αποτελείται όμως από φωτόνια!***

Το φως έχει διττή υπόσταση!

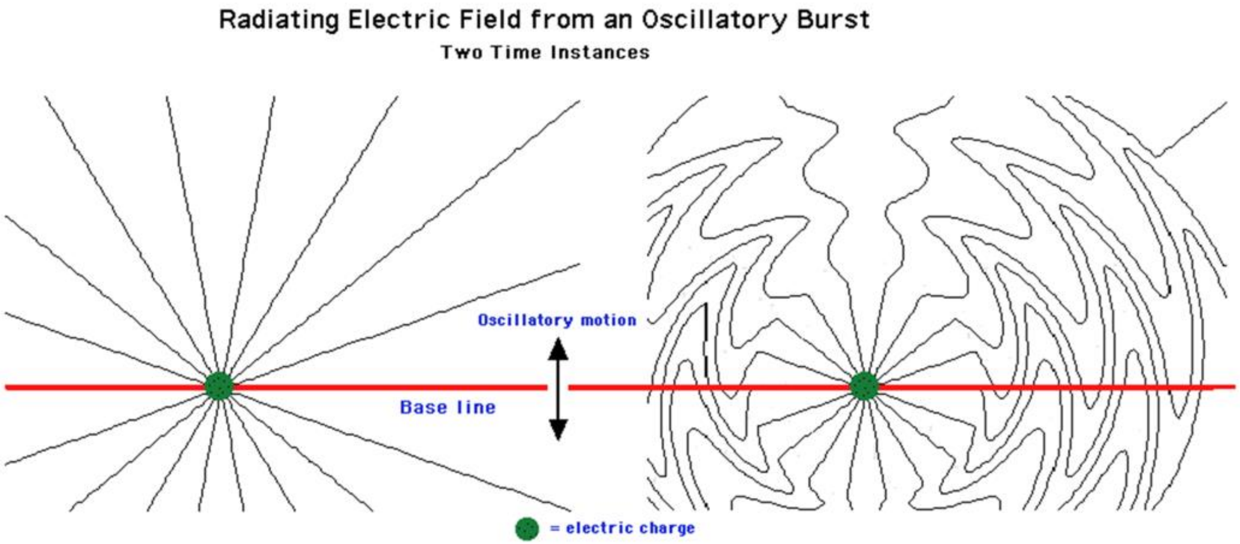
Σήμερα γνωρίζουμε ότι τα φωτόνια είναι σωμάτια που ακολουθούν τη Στατιστική Bose-Einstein.

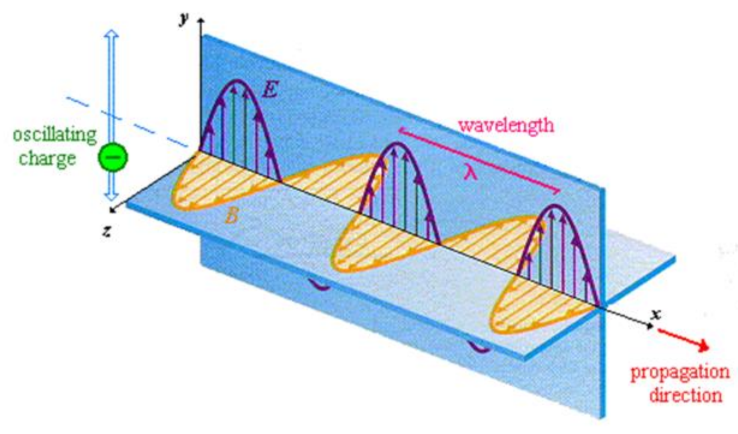
Ηλεκτρομαγνητικά κύματα

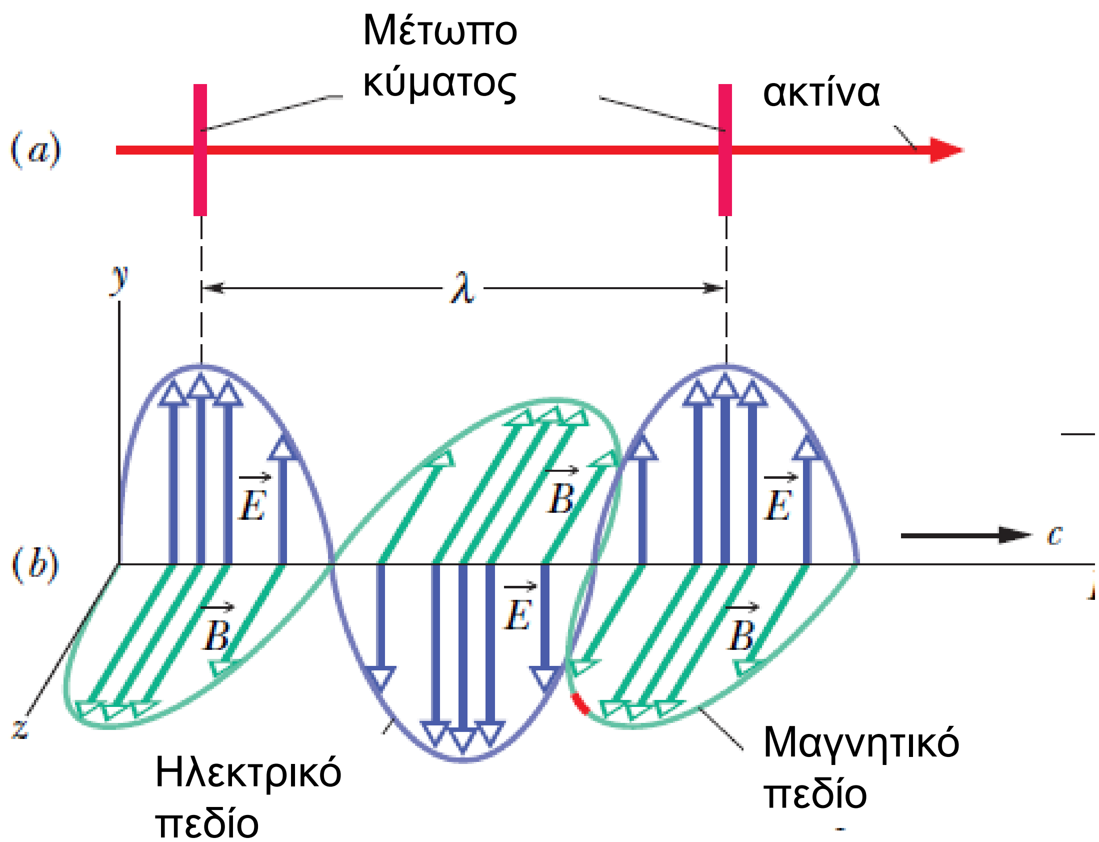
- Στο πρώτο μέρος του μαθήματος μιλήσαμε για μηχανικά κύματα και είδαμε πως μεταφέρουν ενέργεια και ορμή. Μελετήσαμε επίσης διάφορα φαινόμενα που προκύπτουν από την υπέρθεση κυμάτων και από τη διάδοση κυμάτων διαφορετικών συχνοτήτων μέσα στην ύλη
- Στο δεύτερο μέρος θα ασχοληθούμε με τη δεύτερη μεγάλη κατηγορία κυμάτων που ευθύνονται για τη διάδοση ενέργειας στη φύση, τα **ηλεκτρομαγνητικά κύματα**.
- Τα ΗΜ κύματα προκύπτουν από το γεγονός ότι ένα μεταβαλλόμενο ηλεκτρικό πεδίο παράγει μαγνητικό πεδίο και αντιστρόφως. Μαθηματικά, προκύπτουν από τις λεγόμενες **εξισώσεις του Maxwell** που θα συναντήσετε του χρόνου στη Φ3.

Βασικές ιδιότητες ΗΜ κυμάτων

- Τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα είναι **εγκάρσια κύματα**.
- Τα φυσικά μεγέθη που μεταβάλλονται είναι η **ένταση του ηλεκτρικού, $\vec{\mathrm{E}}$ και του μαγνητικού πεδίου, $\vec{\mathrm{B}}$.**
- Τα δύο πεδία είναι κάθετα μεταξύ τους και κάθετα στη διεύθυνση διάδοσης του κύματος.
- Ο λόγος των μέτρων των πεδίων $\vec{\mathrm{E}}$ και $\vec{\mathrm{B}}$ είναι σταθερός $\mathrm{E}/\mathrm{B} = c$
- τα ΗΜ κύματα διαδίδονται (και) στο κενό με συγκεκριμένη και σταθερή ταχύτητα $c = 3 \times \frac{10^8 m}{s}$
- Σε αντίθεση με τα μηχανικά κύματα, τα ΗΜ κύματα ΔΕΝ χρειάζονται τα σωμάτια ενός μέσου (όπως του αέρα ή της χορδής) για να μεταδώσουν το κύμα

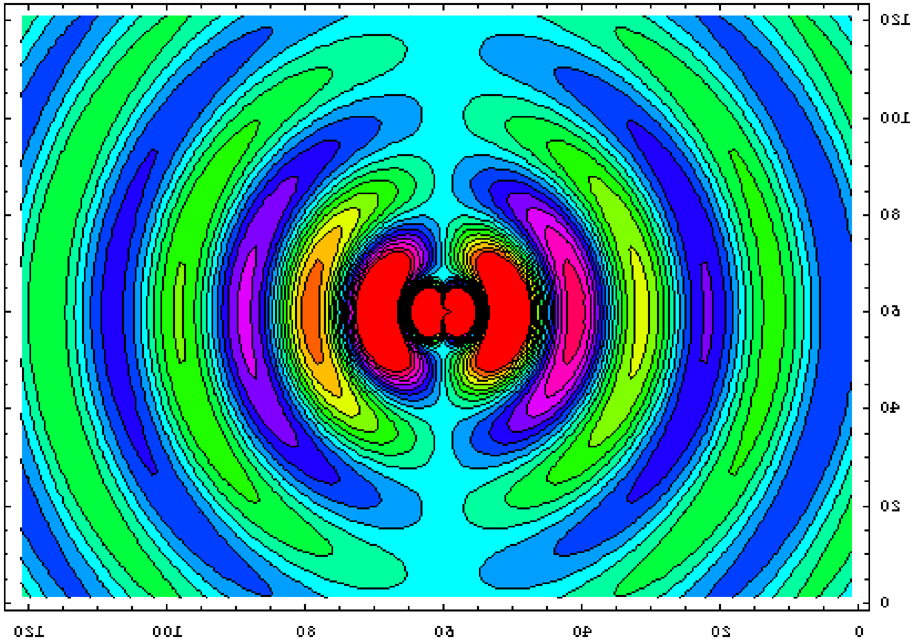

Radiating Electric Field from an Oscillatory Burst
Two Time Instances
Oscillatory motion
Base line
= electric charge

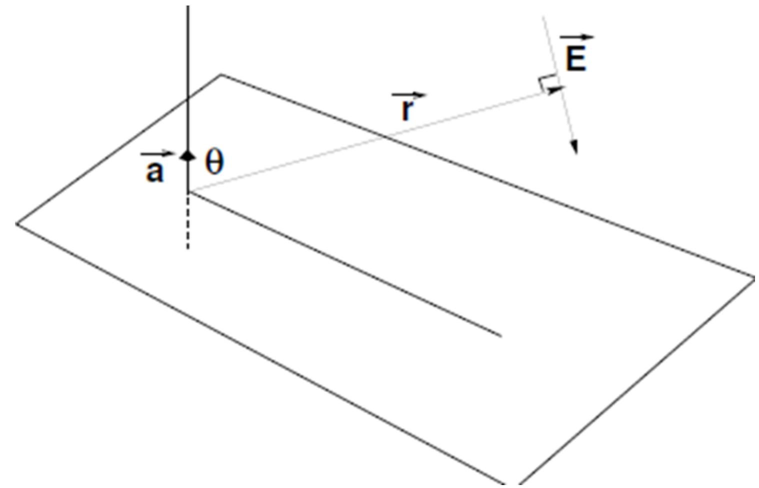

y
E
wavelength
oscillating
charge
λ
B
z
x
propagation
direction



➢Η ταχύτητα διάδοσης στο κενό είναι η ίδια για όλα τα ΗΜ κύματα, και ίση με c=299.792.458 km/s (exact)

Χαρακτηρίζεται από μια συχνότητα ν (του ταλαντωτή που το εξέπεμψε) και στο κενό έχει μήκος κύματος λ, έτσι ώστε λf=c





$$\alpha = -\omega^2 x_0 cos\omega t = \alpha_0 cos\omega t$$

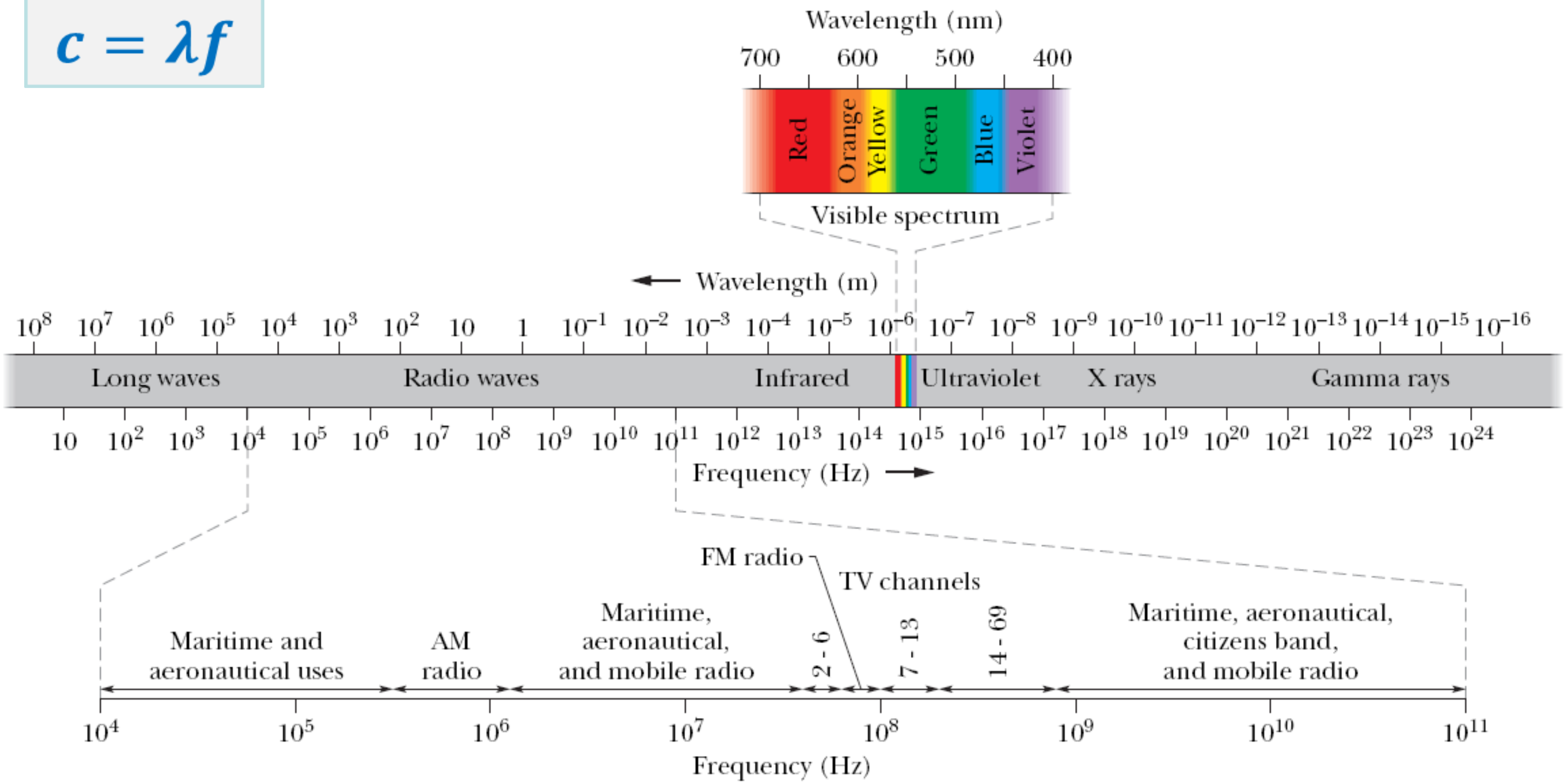
Μια αναπαράσταση του πεδίου στο χώρο

$$\mathrm{E} = -\mathrm{q}\sin\theta \frac{a_0 \cos\omega(t - {}^{r}/_{c})}{4\pi\varepsilon_0 r c^2}$$

Λόγω του όρου $sin\theta$ δεν έχουμε $\vec{E}$ κατά την διεύθυνση ταλάντωσης του φορτίου.

Οι συχνότητες των ΗΜ κυμάτων καλύπτουν 24 τάξεις μεγέθους

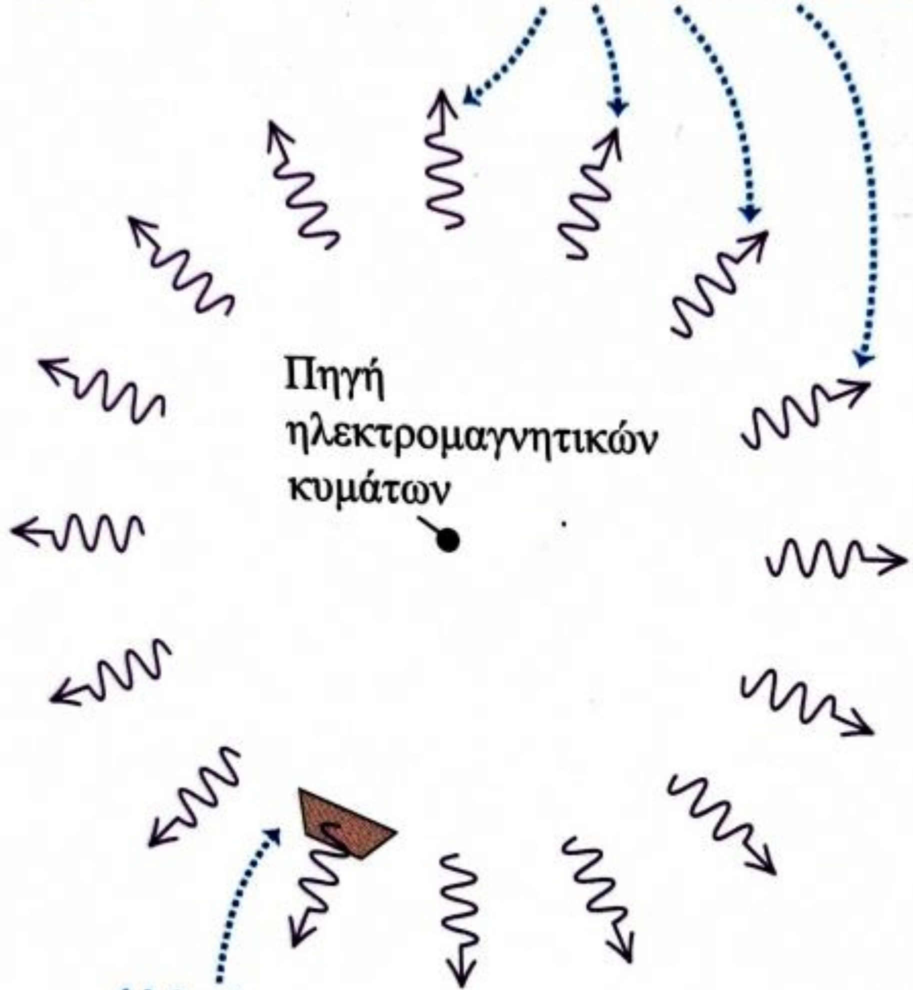
$$c = \lambda f$$



Ημιτονοειδή ηλεκτρομαγνητικά κύματα

- Τα ημιτονοειδή ΗΜ κύματα είναι εντελώς ανάλογα των ημιτονοειδών εγκάρσιων μηχανικών κυμάτων. Τα πεδία $\vec{E}$ και $\vec{B}$ σε κάθε σημείο στο χώρο είναι ημιτονοειδείς συναρτήσεις του χρόνου, και σε κάθε χρονική στιγμή είναι η χωρική ματαβολή είναι επίσης ημιτονοειδής.
- Επίπεδα ΗΜ κύματα έχουν την ιδιότητα ότι σε κάθε χρονική στιγμή τα πεδία είναι ομοιόμορφα σε κάθε πεδίο κάθετο στη διεύθυνση διάδοσης (δηλ. τα κυματικά μέτωπα είναι επίπεδα).
- Γενικά οι πηγές ΗΜ κυμάτων δεν εκπέμπουν επίπεδα κύματα (συνήθως π.χ. σφαιρικά ή κυλινδρικά). Ωστόσο μπορούμε να υποθέσουμε ότι είναι επίπεδα, αν είμαστε αρκετά μακριά από τη πηγή και κοιτάμε μια μικρή περιοχή στο χώρο.

Κύματα που περνάνε διαμέσου μιας μεγάλης επιφάνειας διαδίδονται σε διάφορες κατευθύνσεις...



... αλλά κύματα που περνάνε διαμέσου μιας μικρής επιφάνειας διαδίδονται σχεδόν στην ίδια κατεύθυνση, οπότε μπορούμε να τα χειριστούμε ως επίπεδα.

Τα πεδία ενός (συν)ημιτονοειδούς κύματος

Για τις στιγμιαίες τιμές της y συνιστώσας του ηλεκτρικού και της z συνιστώσας του μαγνητικού πεδίου έχουμε

$$E_y(x,t) = E_{max}\cos(kx - \omega t)$$

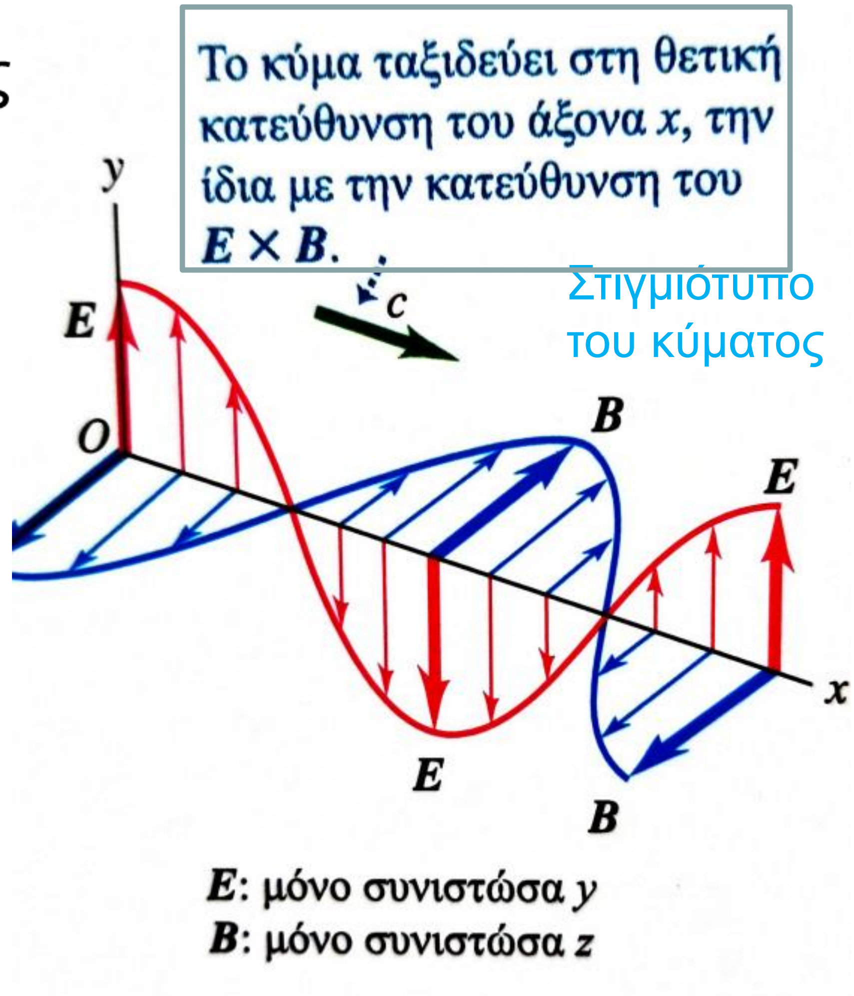
$$B_z(x,t) = B_{max}\cos(kx - \omega t)$$

με $c = \omega/k$

Σε διανυσματική μορφή:

$$\vec{E}(x,t) = \hat{y}E_{max}\cos(kx - \omega t)$$

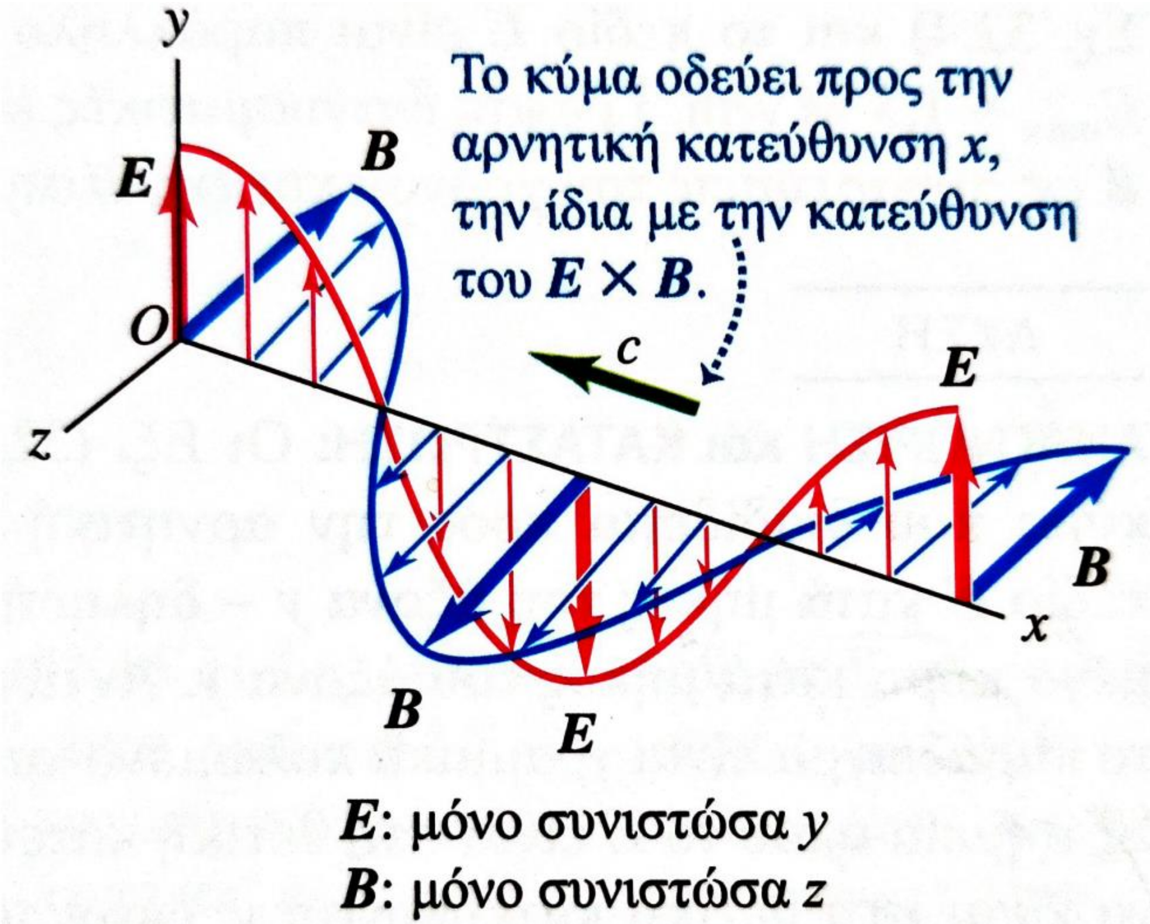
$$\vec{B}(x,t) = \hat{z}B_{max}\cos(kx - \omega t)$$



Στιγμιότυπο του κύματος

Προσοχή σε ένα επίπεδο κύμα E και B υπάρχουν παντού στο χώρο. Εδώ δείχνουμε τι γίνεται κατά μήκος του άξονα των x. Σε ένα επίπεδο κάθετο στον άξονα σε κάποιο σημείο x οι τιμές του E και B είναι οι ίδιες σε όλο το επίπεδο. Αλλάζουν από σημείο σε σημείο του άξονα x.

Αν το ΗΜ κύμα ταξιδεύει προς τα αρνητικά του άξονα των x, τότε έχουμε:



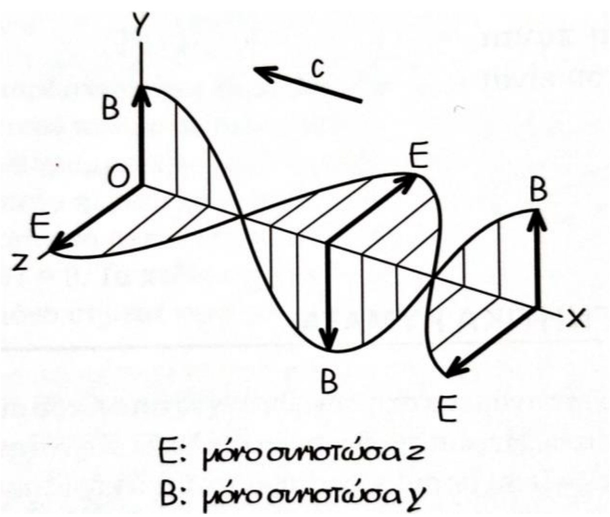
Και για τις δύο κατευθύνσεις διάδοσης που είδαμε, οι ταλαντώσεις των πεδίων $\vec{\mathrm{E}}$ και $\vec{\mathrm{B}}$ είναι **σε φάση** και το διανυσματικό γινόμενο $\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ δείχνει τη **κατεύθυνση διάδοσης** του κύματος.

Αν το $\vec{\mathrm{E}}$ είναι για οποιαδήποτε χρονική στιγμή παράλληλο με τον άξονα y, τότε λέμε ότι το ΗΜ κύμα είναι γραμμικά πολωμένο κατά τον άξονα αυτό. Το επίπεδο που ορίζεται από τη διεύθυνση του ηλεκτρικού πεδίου και τη διεύθυνση διάδοσης ονομάζεται επίπεδο πόλωσης. Θα μιλήσουμε αναλυτικά για την πόλωση αργοτερα.

Παράδειγμα

Ένα λέιζερ CO_2 εκπέμπει ημιτονοειδές ηλεκτρομαγνητικό κύμα που οδεύει στο κενό στην αρνητική κατεύθυνση x. Το μήκος κύματος είναι 10.6μm (υπέρυθρο) και το ηλεκτρικό πεδίο είναι παράλληλο προς τον άξονα z με $E_{max} = 1.5\mathrm{MV/m}$. Γράψτε τις διανυσματικές εξισώσεις για τα $\vec{\mathrm{E}}$ και $\vec{\mathrm{B}}$ ως συναρτήσεις του χρόνου και της θέσης.

$\vec{\mathbf{E}} \times \vec{\mathbf{B}}$ // $-\hat{x}$, με $\vec{\mathbf{E}}$ // $\hat{z}$ και $\vec{\boldsymbol{B}}$ // $\hat{y}$ (πράγματι $\hat{z} \times \hat{y} = -\hat{x}$).



$$\vec{E}(x,t) = \hat{z}E_{max}\cos(\mathrm{kx} + \omega\mathrm{t}) \quad (1)$$

$$\vec{B}\,(x,t) = \hat{y}B_{max}\cos(\mathrm{kx} + \omega\mathrm{t}) \quad (2)$$

Το πρόσημο + στα ορίσματα των cos δείχνει ότι η διάδοση είναι προς την αρνητική διεύθυνση του x.

Επειδή $E_{max}/\,B_{max} = c \Rightarrow B_{max} = \frac{1.5\times10^{6}\mathrm{V/m}}{3\times10^{8}\mathrm{m/s}} = 5 \times 10^{-3}Tesla$

Παράδειγμα (συνέχεια)

$k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{2\pi\ rad}{10.6\times10^{-6}m}$ =5.93 $\times 10^5$rad/m και $\omega =$ k $= 3 \times 10^8 \mathrm{m/s} \times$ 5.93 $\times$ 10^5rad/m = 1.78 $\times$ 10^{14}rad/s

Αντικαθιστώντας στις σχέσεις (1) και (2) προκύπτουν οι:

$$\boldsymbol{E}(x, t) = \hat{z}\, 1{,}5 \times 10^6\ \mathrm{V/m})$$
$$\times \cos[(5{,}93 \times 10^5\ \mathrm{rad/m})x + (1{,}78 \times 10^{14}\ \mathrm{rad/s})t]$$

$$\boldsymbol{B}(x, t) = \hat{y}(5{,}0 \times 10^{-3}\ \mathrm{T})$$
$$\times \cos[(5{,}93 \times 10^5\ \mathrm{rad/m})x + (1{,}78 \times 10^{14}\ \mathrm{rad/s})t]$$

(γενικά μπορώ να προσθέσω μία φάση φ και στα δύο ορίσματα, που για να τη προσδιορίσω θα έπρεπε να έχω κάποια κατάλληλη αρχική συνθήκη)

Ηλεκτρομαγνητικά κύματα στα διηλεκτρικά

- Μέχρι τώρα συζητήσαμε για ΗΜ κύματα που διαδίδονται στο κενό. Τα ΗΜ κύματα όμως διαδίδονται και μέσα στην ύλη (π.χ. στον αέρα, στο νερό, στο γυαλί κλπ).
- Όταν ΗΜ κύμα διαδίδεται σε ένα μη αγώγιμο υλικό (διηλεκτρικό – θα δείτε σχετικές έννοιες στη Φ3 και στον ΗΜ) αλλάζει η ταχύτητα διάδοσής του, και συμβολίζεται με υ
- Ο λόγος της ταχύτητας στο κενό προς την ταχύτητα στο μέσο λέγεται **δείκτης διάθλασης $\boldsymbol{n = c/\upsilon}$**
- Όταν ΗΜ συχνότητας f διαδίδεται σε διηλεκτρικό με δείκτη διάθλασης n, το μήκος κύματος μεταβάλλεται και δίνεται από τη σχέση $\boldsymbol{\lambda = \upsilon f = \left(\frac{c}{n}\right) f = \left(\frac{1}{n}\right)\lambda_{\kappa\varepsilon\nu o}}$

(θα μάθουμε στον ΗΜ ότι ο δείκτης διάθλασης σχετίζεται με την σχετική επιτρεπότητα και σχετική διαπερατότητα του υλικού)

Φύση του φωτός (κύμα ή σωμάτιο)

Για τη μελέτη της συμπεριφοράς του φωτός απαιτείται η εισαγωγή κριτηρίων ως προς τα μεγέθη που περιγράφουν την διάδοση και την αλληλεπίδραση του φωτός με την ύλη.

Κριτήρια (τα μεγέθη που υπεισέρχονται στα κριτήρια) που καθορίζουν την συμπεριφορά του φωτός

Μ Ε Γ Ε Θ Η → (για τη φύση του φωτός/για τη συμπεριφορά του)

1. **Μήκος κύματος λ** (κυματικό μέγεθος)

   Σύγκριση με διαστάσεις d της χρησιμοποιούμενης «συσκευής»

2. **Ενέργεια φωτονίου Ε (=h ν)** (σωματιδιακό μέγεθος)

   Σύγκριση με ενεργειακή ευαισθησία $E_{ευαισθησία}$ της χρησιμοποιούμενης «συσκευής»

Γενική περιγραφή της συμπεριφοράς του φωτός μέσω:

- Γεωμετρικής Οπτικής
- Κυματικής εικόνας του φωτός
- Σωματιδιακής εικόνας του φωτός

1. Κριτήρια Γεωμετρικής Οπτικής.

$\lambda << d$

Πλήρης περιγραφή των φαινομένων της **ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ**

Η έννοια της ακτίνας του φωτός

2. Κριτήρια Κυματικής Οπτικής.

$$\boldsymbol{\lambda \approx d}$$

Πλήρης περιγραφή των φαινομένων **της ΣΥΜΒΟΛΗΣ & ΠΕΡΙΘΛΑΣΗΣ**
καθώς και της ΑΝΑΚΛΑΣΗΣ ΚΑΙ ΤΗΣ ΔΙΑΘΛΑΣΗΣ

Οι δύο αυτοί κλάδοι της Γεωμετρικής και Κυματικής Οπτικής περιγράφουν τα φαινόμενα με όρους της **Κλασσικής Φυσικής**

3. Κριτήρια Σωματιδιακής εικόνας του Φωτός

λ <<< d

Πλήρης περιγραφή των φαινομένων:
Φωτοηλεκτρικό φαινόμενο
Φαινόμενο Compton κ.α.

Ο τρίτος κλάδος αναφέρεται στην περιγραφή φαινομένων με όρους της **Κβαντικής Φυσικής.**

Κυματική συμπεριφορά της ύλης

Ερώτημα: Η εικόνα της διττής φύσης του φωτός μπορεί να επεκταθεί και στη ύλη με την *έννοια της διττής φύσης της ύλης;*

Λόγω της συμμετρίας στη φύση αφού το φώς μπορεί να συμπεριφερθεί ως σωματίδιο γεννάται το ερώτημα εάν και το σωματίδιο μπορεί να συμπεριφέρεται ως κύμα, δηλαδή, μπορεί η ύλη να εκδηλώνει κυματική συμπεριφορά;

Το ερώτημα διατυπώθηκε πρώτα θεωρητικώς από τον de Broglie και προτάθηκε ότι ένα σωματίδιο μάζας m μπορεί να συμπεριφέρεται ως κύμα με μήκος κύματος $\lambda = h/2pm$ (h η σταθερά του Blank) . Αργότερα αποδείχθηκε και πειραματικά.

Με την εισαγωγή της έννοιας της ***κυματοσυνάρτησης*** γίνεται ενοποίηση της περιγραφής της διττής (κυματική/σωματιδιακή) φύσης του φωτός και της ύλης.

Μεταφορά ενέργειας και διάνυσμα Poynting

Η κατεύθυνση του διανύσματος Poynting $\vec{S}$ ενός ΗΜ κύματος σε οποιοδήποτε σημείο στο χώρο δίνει την διεύθυνση διάδοσης του κύματος και τη διεύθυνση μεταφοράς ενέργειας στο σημείο αυτό.

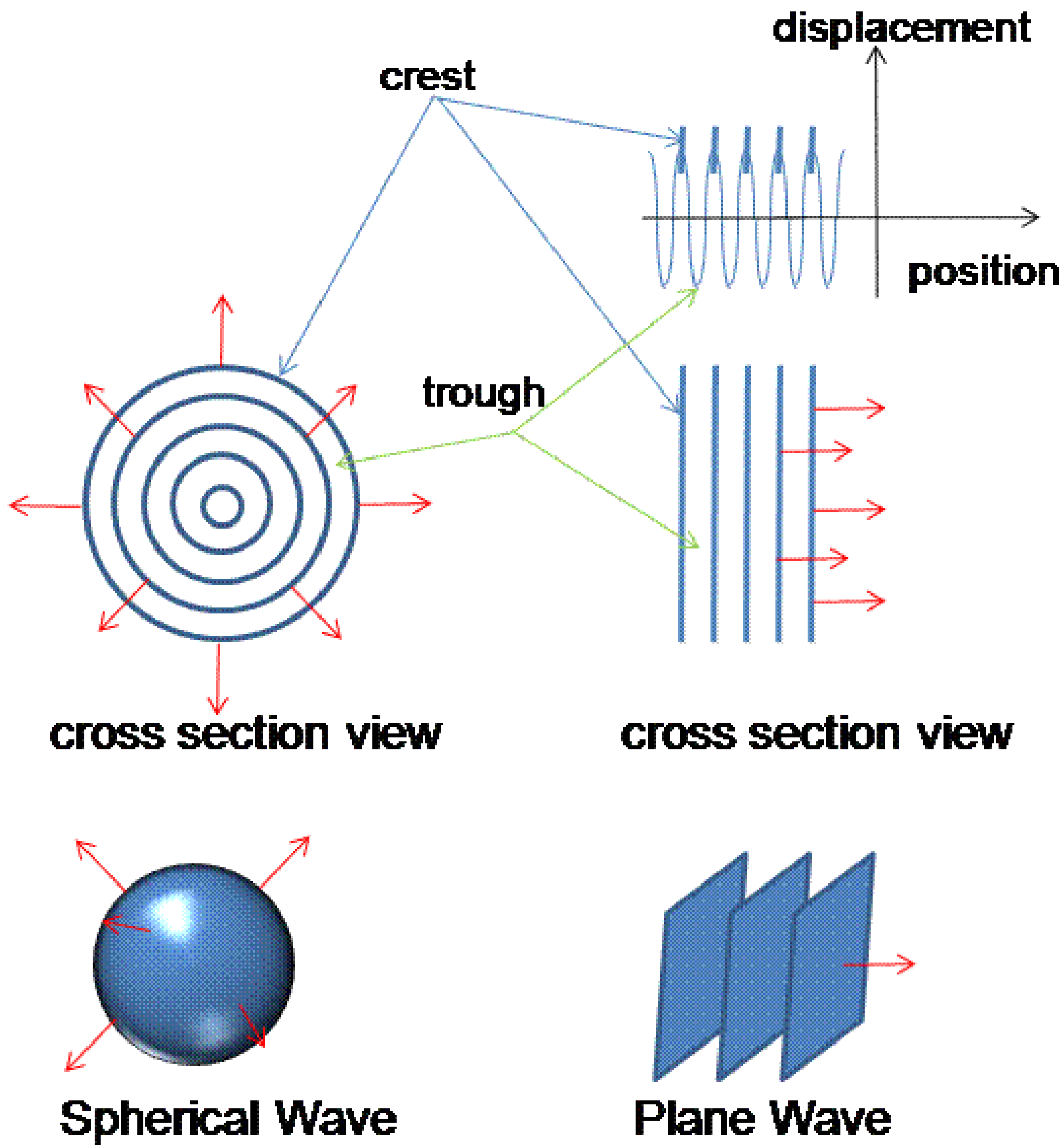
$$\boxed{\vec{S} = \frac{1}{\mu_0}\vec{E} \times \vec{B} \qquad \text{(Poynting vector).}}$$

$$S = \left(\frac{\text{energy/time}}{\text{area}}\right)_{\text{inst}} = \left(\frac{\text{power}}{\text{area}}\right)_{\text{inst}}.$$

$$S = \frac{1}{\mu_0}EB, \quad \Rightarrow \quad \boxed{S = \frac{1}{c\mu_0}E^2}$$

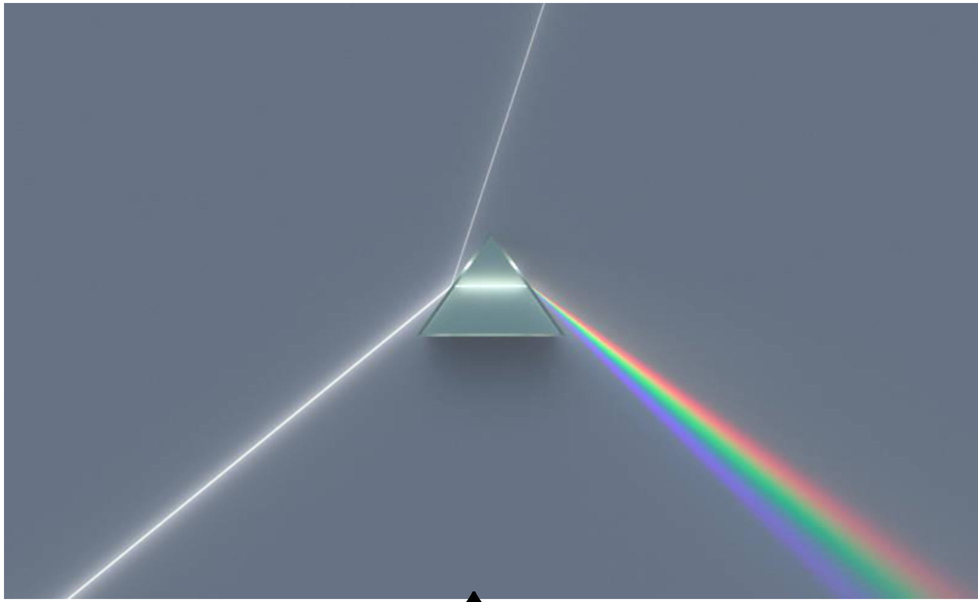
$$I = S_{\text{avg}} = \left(\frac{\text{energy/time}}{\text{area}}\right)_{\text{avg}} = \left(\frac{\text{power}}{\text{area}}\right)_{\text{avg}} = \frac{1}{c\mu_0}[E^2]_{\text{avg}} = \frac{1}{c\mu_0}[E_m^2 \sin^2(kx - \omega t)]_{\text{avg}}.$$

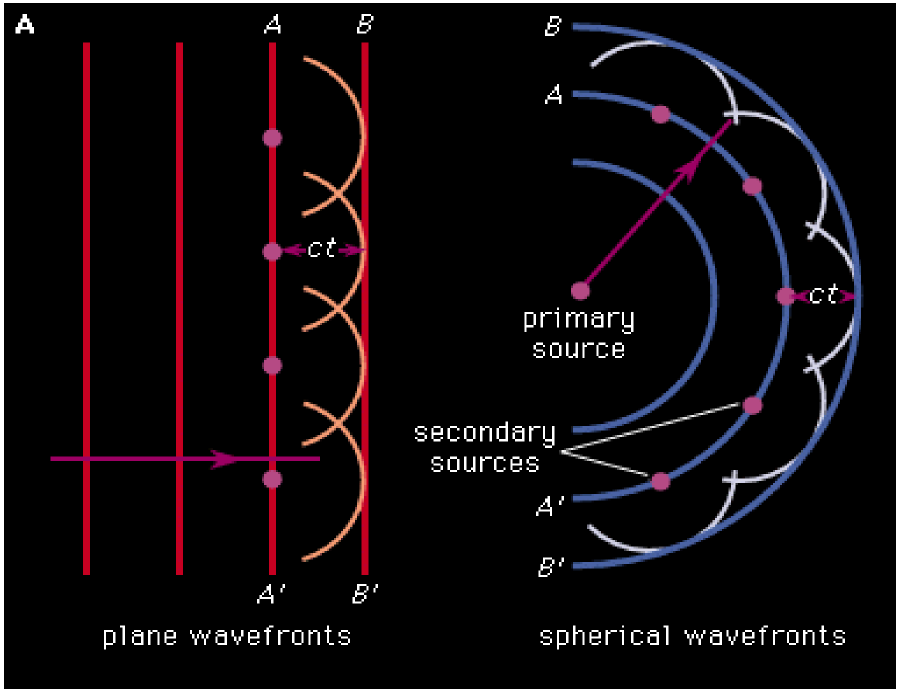
$$E_{\text{rms}} = \frac{E_m}{\sqrt{2}}. \quad \Rightarrow \quad \boxed{I = \frac{1}{c\mu_0}E_{\text{rms}}^2.}$$


crest
displacement
position
trough
cross section view
cross section view
Spherical Wave
Plane Wave

Η αρχή του Huygens

$\lambda \downarrow$





$\uparrow$

Γεωμετρική Οπτική

$n=c/c_{υλικού}$

Οπτικός Δρόμος

nR

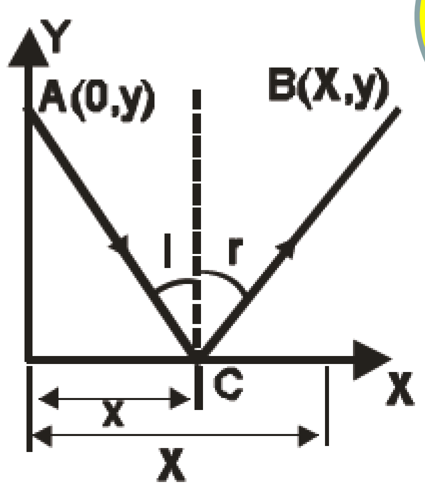
ΑΝΑΚΛΑΣΗ & ΔΙΑΘΛΑΣΗ

Αρχή του Ήρωνος (αρχή του ελαχίστου δρόμου)

1. <u>Πειραματική διαπίστωση</u>: Ευθύγραμμη διάδοση του φωτός σε ομογενές και ισότροπο μέσον.
2. <u>Γεωμετρικό αξίωμα</u>: Η ευθεία συντομότερη κάθε άλλης γραμμής με τα ίδια άκρα

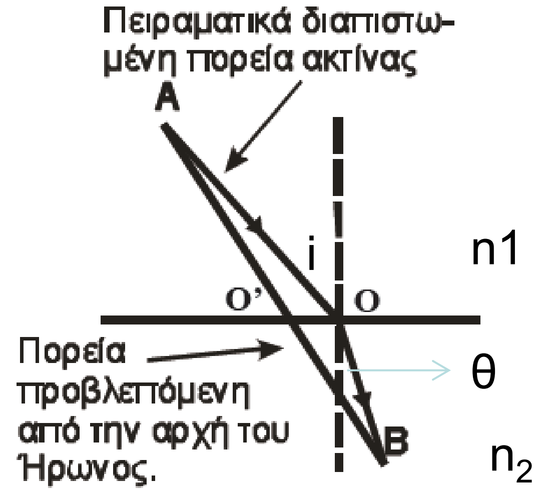
Το φως κατά την διάδοσή του μεταξύ δύο σημείων «ακολουθεί» την διαδρομή του ελαχίστου δρόμου.

Ανάκλαση, i=r



<u>Επιτυχία</u> της Αρχής του Ήρωνος

Διάθλαση, $\sin(i)*n_1=\sin(\theta)*n_2$



<u>Αποτυχία</u> της Αρχής του Ήρωνος

Απόδειξη του Νόμου της Ανάκλασης (Βάσει της αρχής του Ήρωνος)

Όταν μια φωτεινή ακτίνα (Σχήμα 80) προσπέσει σε επίπεδη κατοπτρική επιφάνεια, υφίσταται ανάκλαση και διαδίδεται κατά τη διεύθυνση BC .Η γωνία **i** καλείται ***γωνία προσπτώσεως*** , η γωνία **r** καλείται ***γωνία ανακλάσεως*** και το επίπεδο ABC ***επίπεδο ανακλάσεως***.

Για να μπορέσουμε να εφαρμόσουμε την αρχή ελαχίστου δρόμου πρέπει καταρχήν να βρούμε το δρόμο L που διανύει η φωτεινή ακτίνα, συναρτήσει μιας συντεταγμένης θέσης . Από το σχήμα 80 έχουμε :

$$L = AC + CB \rightarrow L = \left(x^2 + y^2\right)^{1/2} + \left[(X - x)^2 + y^2\right]^{1/2} \quad = \text{minimum}$$

Υπολογίζοντας την πρώτη παράγωγο έχουμε:

$$dL/dx = \tfrac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)^{-1/2} 2x + \tfrac{1}{2}\left[(X - x)^2 + y^2\right]^{-1/2} 2(X - x)(-1)$$

Θέτοντας την $dL/dx = 0 \rightarrow x\left(x^2 + y^2\right)^{-1/2} = \left[(X - x)^2 + y^2\right]^{-1/2}(X - x)$

οπότε $\sin i = \sin r$ άρα $\hat{i} = \hat{r}$ επειδή πρόκειται για οξείες γωνίες .

Υπολογίζοντας στη συνέχεια τη δεύτερη παράγωγο βρίσκουμε ότι αυτή είναι θετική. Πράγματι:

$d^2L/d^2x = y^2\left(x^2 + y^2\right)^{-3/2} + y^2\left[(X - x)^2 + y^2\right]^{-3/2} > 0$ που σημαίνει ελάχιστο δρόμο.

1η διατύπωση της αρχής του Fermat (αρχή του ελαχίστου χρόνου)

Κατά την μετάβαση του φωτός από ένα σημείο σε ένα άλλο αυτό ακολουθεί το δρόμο εκείνο που καθιστά ***το χρόνο της διαδρομής ελάχιστο.***

2η διατύπωση της αρχής του Fermat

Εισαγωγικές έννοιες:

1ον : Δείκτης Διάθλασης «η» υλικού: η=c/υ (όπου c η ταχύτητα του φωτός στο κενό & υ η ταχύτητα του φωτός στο μέσον)

2ον : Οπτικός Δρόμος :

για διαστήματα: $S_1, S_2, \ldots, S_i, \ldots S_n$

διανυόμενα με ταχύτητες: $\upsilon_1, \upsilon_2, \ldots, \upsilon_i, \ldots \upsilon_n$

σε χρόνους: $t_1, t_2, \ldots, t_i, \ldots t_n$

Ο ολικός χρόνος είναι:

$$t_{o\lambda} = \sum_{i=1}^{n} t_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{\upsilon_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{S_i}{c/n_i} = \frac{1}{C} \sum_{i=1}^{n} n_i S_i$$

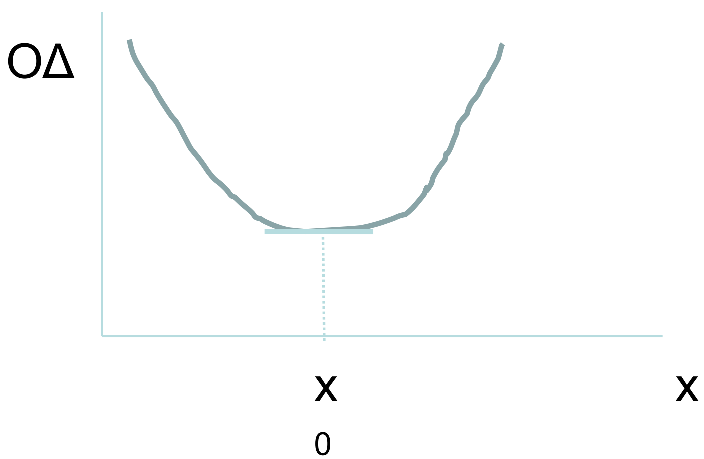
Η παράσταση $\sum_{i-1}^{n} n_i S_i$ ορίζεται σαν ΟΠΤΙΚΟΣ ΔΡΟΜΟΣ (ΟΔ)

Για συνεχώς μεταβαλλόμενο δείκτη διάθλασης n=n(S) (π.χ. η περίπτωση διάδοση του φωτός στην ατμόσφαιρα) η γενικότερη έκφραση του ΟΔ γίνεται:

$$\mathrm{O\Delta} = \int_{A}^{B} n(S)\,dS$$

<u>Διατύπωση της 2ης Αρχής του Fermat:</u>

Κατά την μετάβαση του φωτός από ένα σημείο σε ένα άλλο αυτό ακολουθεί την διαδρομή που αντιστοιχεί στον ΟΔ που είναι ακρότατος σε σύγκριση με εκείνους γειτονικών ισοδυνάμων διαδρομών.



$$\frac{d(\mathrm{O\Delta})}{dx} = 0$$

Για ένα σύνολο γειτονικών διαδρομών εκατέρωθεν του χ

Παρατήρηση:
1/c *(ΟΔ)
έχει διαστάσεις χρόνου

Άσκηση:
Γιατί είναι ισοδύναμες οι 2 διατυπώσεις της Αρχής του Fermat;

Ακρότατος χρόνος: $\frac{dt}{dx} = 0$

Ακρότατος ΟΔ: $t = \frac{1}{c} \mathrm{O\Delta}$

$$\frac{d\mathrm{O\Delta}}{dx} \Leftrightarrow \frac{dt}{dx}$$

Η ύπαρξη γειτονικών ισοδυνάμων διαδρομών

Έστω ότι: $$\text{ΟΔ} = \text{c t(x)} = \text{f(x)}$$

Και ότι επίσης η *f(x)* έχει ακρότατο στο $x=x_0$.

Αναλύοντας κατά Taylor έχουμε:

$$f(x) = f(x_0) + \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} (x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \ldots$$

Επειδή το x_0 είναι ακρότατο, (δηλαδή $\left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{x_0} = 0$) θα μπορούσε να ληφθεί $f(x) \approx f(x_0)$ ή σε καλύτερη προσέγγιση

$$f(x) \approx f(x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\right|_{x_0} (x - x_0)^2 + \ldots$$

Που σημαίνει ότι το *f(x) είναι ισοδύναμο με το* $f(x_0)$ + *όροι 2^ης^ –τάξης. Δηλαδή,* *υπάρχει ένα σύνολο γειτονικών διαδρομών που οι αντίστοιχοι ΟΔ είναι ισοδύναμοι μεταξύ τους.*

Μερικοί δείκτες διάθλασης

ΠΙΝΑΚΑΣ Ο1.1 *Δείκτες διάθλασης*

Υλικό	Δείκτης διάθλασης	Υλικό	Δείκτης διάθλασης
Στερεά στους 20°C		*Υγρά στους 20°C*	
Κυβική ζιρκονία	2.20	Βενζόλιο	1.501
Διαμάντι (C)	2.419	Διθειάνθρακας	1.628
Φθορίτης (CaF_2)	1.434	Τετραχλωράνθρακας	1.461
Τηγμένος χαλαζίας (SiO_2)	1.458	Αιθυλική αλκοόλη	1.361
Φωσφορούχο γάλλιο	3.50	Γλυκερίνη	1.473
Στεφανύαλος	1.52	Νερό	1.333
Πυριτύαλος	1.66		
Πάγος (H_2O)	1.309	*Αέρια (0°C, 1 atm)*	
Πολυστυρένιο	1.49	Αέρας	1.000 293
Χλωριούχο νάτριο (NaCl)	1.544	Διοξείδιο του άνθρακα	1.000 45

Σημείωση: Όλες οι τιμές αντιστοιχούν σε φως το οποίο έχει μήκος κύματος 589 nm στο κενό.

Απόδειξη του νόμου της Ανάκλασης με την Αρχή του Fermat

Βάση της $1^{ης}$ διατύπωσης της Αρχής του Fermat:
$1^{η}$ & $2^{η}$ είναι ισοδύναμες με τις αντίστοιχες αποδείξεις που βασίζονται στην Αρχή του Ήρωνος λαμβάνοντας υπ' όψιν ότι σε ομογενή και ισότροπο χώρο [t=1/c S], δηλαδή:

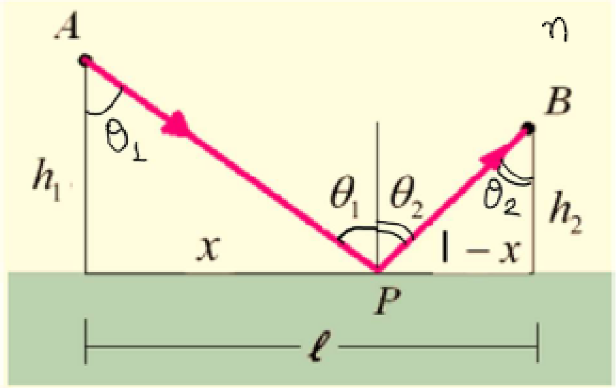
$$t = \frac{S}{c}$$

$1^{η}$: t=min $\Longleftrightarrow$ S=min

$2^{η}$: dt/dx=min $\Longleftrightarrow$ dS/dx=min

Δείκτης διάθλασης $n = \frac{c}{\upsilon} \Rightarrow \upsilon = \frac{c}{n}$

$$\mathrm{AP} = \sqrt{h_1^2 + x^2},\ \mathrm{BP} = \sqrt{h_2^2 + (l-x)^2}$$



$$t_{AP} = \frac{\sqrt{h_1^2+x^2}}{c/n},\ t_{BP} = \frac{\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}}{c/n}$$

$$t_{AB} = \frac{\sqrt{h_1^2+x^2}+\sqrt{h_2^2+(l-x)^2}}{c/n}$$

$$sin\theta_2 = \frac{l-x}{\sqrt{(l-x)^2+h_2^2}}$$

$$0 = \frac{dt_{AB}}{dx} = \frac{x}{\frac{c}{n}\sqrt{x^2+h_1^2}} + \frac{-(l-x)}{\frac{c}{n}\sqrt{(l-x)^2+h_2^2}} \Rightarrow \frac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}} = \frac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2+h_2^2}} \Rightarrow$$

$\sin\theta_1 = \sin\theta_2$ (οξείες γωνίες)

$\Rightarrow \boxed{\theta_1 = \theta_2}$

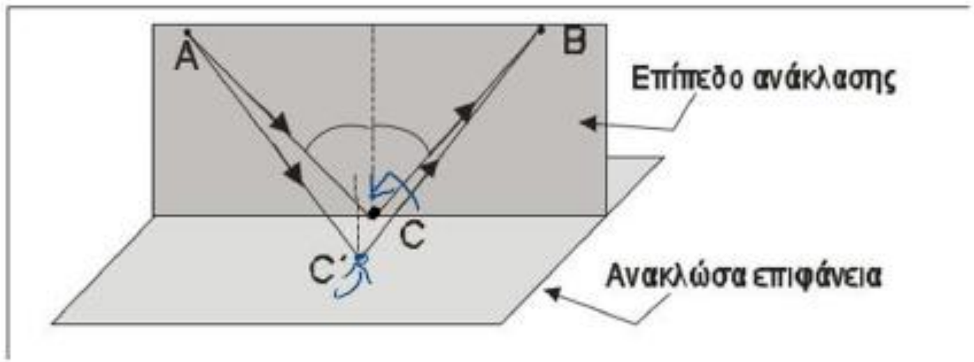
αφού $sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2+h_1^2}}$ και $sin\theta_2 = \frac{(l-x)}{\sqrt{(l-x)^2+h_2^2}}$

Η προσπίπτουσα και η ανακλώμενη είναι στο ίδιο επίπεδο.

Και αυτό προκύπτει εύκολα από την αρχή του Fermat.

Νόμος της ανάκλασης: η γωνία πρόσπτωσης είναι ίση με τη γωνία ανάκλασης

Χρησιμοποιώντας την αρχή του Fermat, μπορούμε να δείξουμε ότι η προσπίπτουσα ακτίνα, η ανακλώμενη ακτίνα και η κάθετη στο σημείο πρόσπτωσης στην ανακλώσα επιφάνεια κείνται στο ίδιο επίπεδο.



Το επίπεδο ACB είναι κάθετο στην ανακλώσα επιφάνεια.
Αν η ανάκλαση γίνει σε οποιοδήποτε άλλο σημείο C΄ έξω από το επίπεδο ACB ($ACC' = 90^o$) θα έχουμε : $AC' > AC$
Ομοίως επειδή $BCC' = 90^0$, θα έχουμε $BC' > BC$

Οπότε : $AC' + BC' > AC + BC$. Επειδή το φως διαδίδεται στο ίδιο μέσο με την ίδια ταχύτητα, αυτό σημαίνει $t_{AC'B} > t_{ACB}$, κάτι που αντίκειται στην αρχή του Fermat.

Η έννοια του δείκτη διάθλασης

Ο δείκτης διάθλασης είναι μία αδιάστατη ποσότητα που ορίζεται ως ο λόγος της ταχύτητας του φωτός στο κενό c προς τη ταχύτητα του φωτός σε ένα μέσο υ (ταχύτητα φάσης)

$$n = c/\upsilon$$

Table 33-1

Some Indexes of Refraction[a]

Medium	Index	Medium	Index
Vacuum	Exactly 1	Typical crown glass	1.52
Air (STP)[b]	1.00029	Sodium chloride	1.54
Water (20°C)	1.33	Polystyrene	1.55
Acetone	1.36	Carbon disulfide	1.63
Ethyl alcohol	1.36	Heavy flint glass	1.65
Sugar solution (30%)	1.38	Sapphire	1.77
Fused quartz	1.46	Heaviest flint glass	1.89
Sugar solution (80%)	1.49	Diamond	2.42

[a]For a wavelength of 589 nm (yellow sodium light).

[b]STP means "standard temperature (0°C) and pressure (1 atm)."

Απόδειξη του νόμου της διάθλασης (νόμος του Snell) με την αρχή του Fermat

Όταν μία ακτίνα φωτός προσπίπτει σε μία επιφάνεια που διαχωρίζει δύο μέσα με διαφορετικό δείκτη διάθλασης, ένα μέρος του φωτός διαδίδεται στο δεύτερο μέσο, ακολουθώντας διαφορετική διεύθυνση από την προσπίπτουσα ακτίνα.

$$\mathrm{AP} = \sqrt{h_1^2 + x^2}, \quad \mathrm{BP} = \sqrt{h_2^2 + (l - x)^2}$$

$$n_{1,2} = \frac{c}{\upsilon_{1,2}} \Rightarrow \upsilon_{1,2} = \frac{c}{n_{1,2}}$$

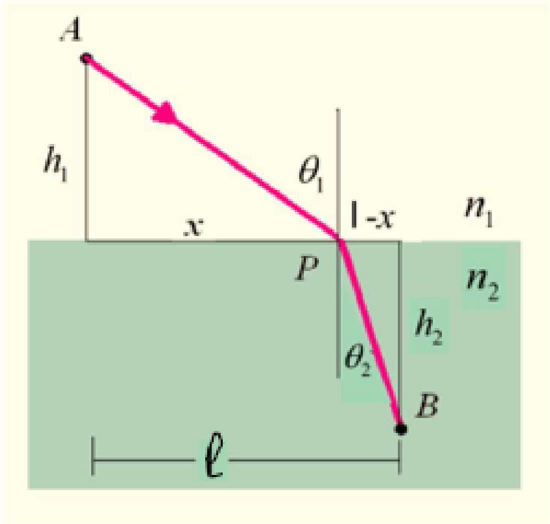
$$t_{AP} = \frac{\sqrt{h_1^2 + x^2}}{c/n_1}, t_{BP} = \frac{\sqrt{h_2^2 + (l - x)^2}}{c/n_2}$$

$$0 = \frac{dt_{AB}}{n_2 dx} = \frac{n_1 x}{c\sqrt{x^2 + h_1^2}} + \frac{-n_2(l - x)}{c\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}} \Rightarrow \frac{n_1 x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}} = \frac{n_2(l - x)}{\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}}$$

Αλλά $sin\theta_1 = \frac{x}{\sqrt{x^2 + h_1^2}}$ και $sin\theta_2 = \frac{l - x}{\sqrt{(l - x)^2 + h_2^2}}$

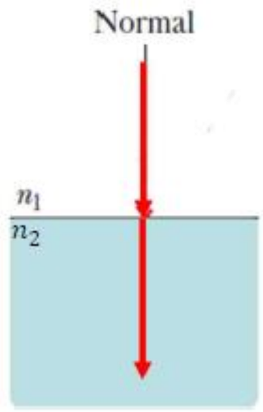
Οπότε τελικά $\boxed{n_1 \sin\theta_1 = n_2 \sin\theta_2}$

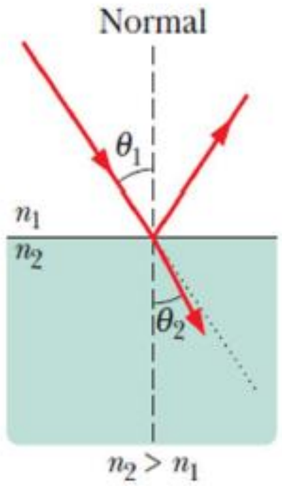
Νόμος του Snell

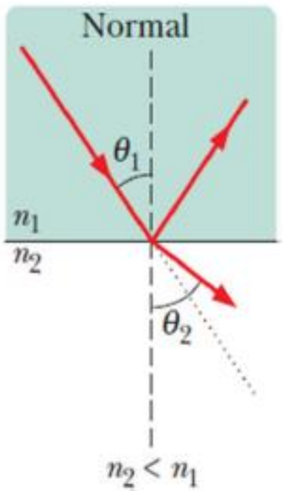


Η προσπίπτουσα και η διαθλώμενη είναι στο ίδιο επίπεδο (*)

(*) μπορείτε να το αποδείξετε ακολουθώντας το σκεπτικό της διαφ.6







Αν η πρόσπτωση είναι κάθετη (γωνία πρόσπτωσης 0°) η διαθλώμενη ακτίνα συνεχίζει να διαδίδεται κατά μήκος της καθέτου στην επιφάνεια (γωνία διάθλασης 0°)

Αν $n_1 < n_2$ η διαθλώμενη πλησιάζει προς τη κάθετο

Από οπτικά αραιότερο σε οπτικά πυκνότερο υλικό

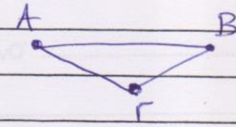
Αν $n_1 > n_2$ η διαθλώμενη απομακρύνεται προς τη κάθετο

Από οπτικά πυκνότερο σε οπτικά αραιότερο υλικό

Αρχή της αντιστρεψιμότητας

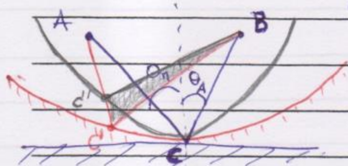
Όταν αντιστραφεί η πορεία μιας οπτικής ακτίνας,
αυτή θα ακολουθήσει ακριβώς την ίδια διαδρομή,
αλλά αντίστροφα (διότι το αποτέλεσμα της εφαρμογής της αρχής του Fermat δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία εμφανίζονται τα σημεία Α και Β).

Τριγωνική ανισότητα:



$$(A\Gamma)+(\Gamma B) \geq (AB)$$

ACB η φυσική πορεία των ακτίνων



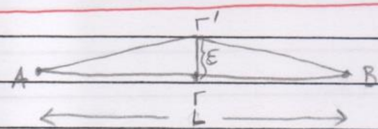
Για την έλλειψη: $(AC)+(CB)=(AC')+(C'B)$

ΙΣΟΥΣ ΧΡΟΝΟΥΣ ΜΕ ΓΕΙΤΟΝΙΚΕΣ ΑΚΤΙΝΕΣ

Από τρίγωνο $\triangle C'C''B$

$$(AC'')+(C''B) \leq (AC'')+(C'C'')+(C'B) = (AC')+(C'B)$$

Δηλαδή η φυσική διαδρομή δεν είναι η ελάχιστη αλλά αμφίβολο
ΣΤΑΣΙΜΟΣ σε γειτονικές διαδρομές



$(A\Gamma)=(\Gamma B)=\frac{L}{2}$

$(\Gamma\Gamma')=\varepsilon$

$$(A\Gamma')+(\Gamma'B)=\sqrt{(A\Gamma)^2+(\Gamma\Gamma')^2}+\sqrt{(\Gamma B)^2+(\Gamma\Gamma')^2}=$$

$$=\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+\varepsilon^2}+\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+\varepsilon^2}=2\sqrt{\left(\frac{L}{2}\right)^2+\varepsilon^2}=$$

$\sqrt{1+x}=1+\frac{x}{2},\ x\ll 1$

$$=L\sqrt{1+\left(\frac{2\varepsilon}{L}\right)^2}\simeq L\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{2\varepsilon}{L}\right)^2\right)=L\left(1+\frac{2\varepsilon^2}{L^2}\right)=$$

$$=L+\frac{2}{L}\varepsilon^2 \Rightarrow$$

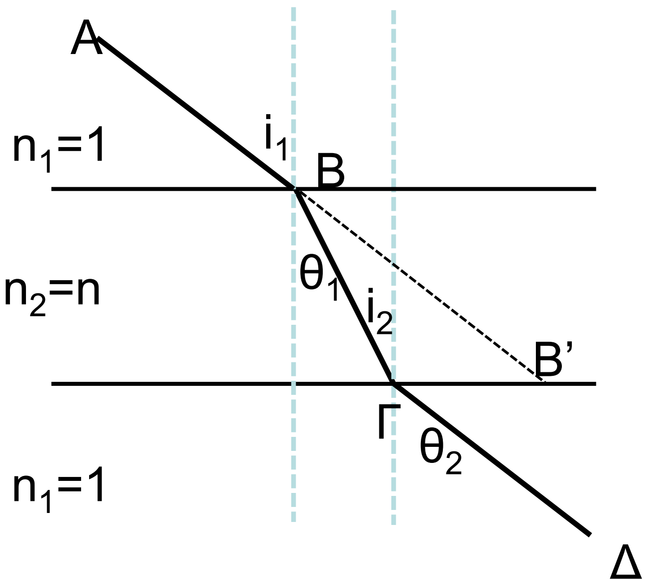
$$(A\Gamma')+(\Gamma'B)=L+\frac{2}{a}\varepsilon^2$$

όρος παραβολικός

Εφαρμογές της Αρχής του Fermat

1. Αρχή της αντίστροφης πορείας διάδοσης του φωτός (Reciprocity Principle)
σαν συνέπεια της Αρχής του Fermat
Η διαδρομή συντομότερου χρόνου είτε προς την μία κατεύθυνση είτε προς την αντίστροφη είναι, βάσει της αρχής του Fermat, πάντοτε η ίδια (η ελαχίστη)
.

2. Παράλληλη μετατόπιση φωτός κατά την δίοδο του μέσα από ορθογώνια πλάκα (ομογενές και ισότροπο υλικό)



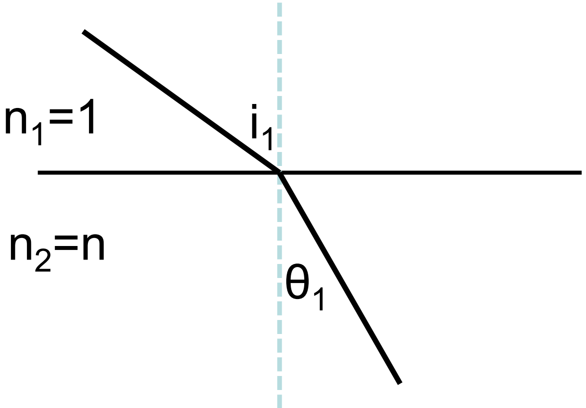
$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{B}:\ 1\sin(i_1)=n\sin(\theta_1) \\ \Gamma:\ n\sin(i_2)=1\sin(\theta_2) \\ \text{Αλλά, } \theta_1=i_2 \end{array}\right\} \longrightarrow$$

$\sin(i_1) = \sin(\theta_2)$, συνεπώς $i_1= \theta_2$,
δηλαδή ΓΔ // ΑΒ

Το φως επιλέγει την διαδρομή ΒΓ αντί της ΒΒ' ώστε να ελαχιστοποιεί το χρόνο μέσα στο υλικό (όπου η ταχύτητα είναι μικρότερη).

3. Η ταχύτητα c του φωτός είναι η μεγίστη στη φύση.

Από την πειραματική διαπίστωση ότι θ<i και το νόμο του Snell προκύπτει ότι η ταχύτητα του φωτός στο κενό είναι η μεγίστη στη φύση.

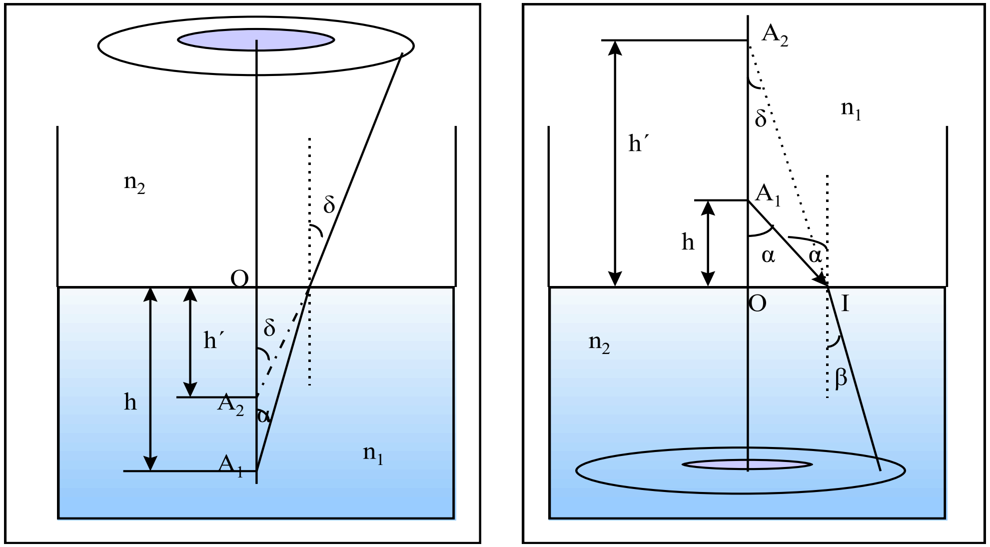


$$\left.\begin{array}{l}\text{Από } \theta<i \text{ συνάγεται ότι: } \sin(i)/\sin(\theta)>1 \\ \text{Από Snell: } 1\,\sin(i)=n\,\sin(\theta)\end{array}\right\} \Rightarrow n > 1$$

Αλλά επειδή n=c/υ συνάγεται c > υ για κάθε υλικό μέσο.

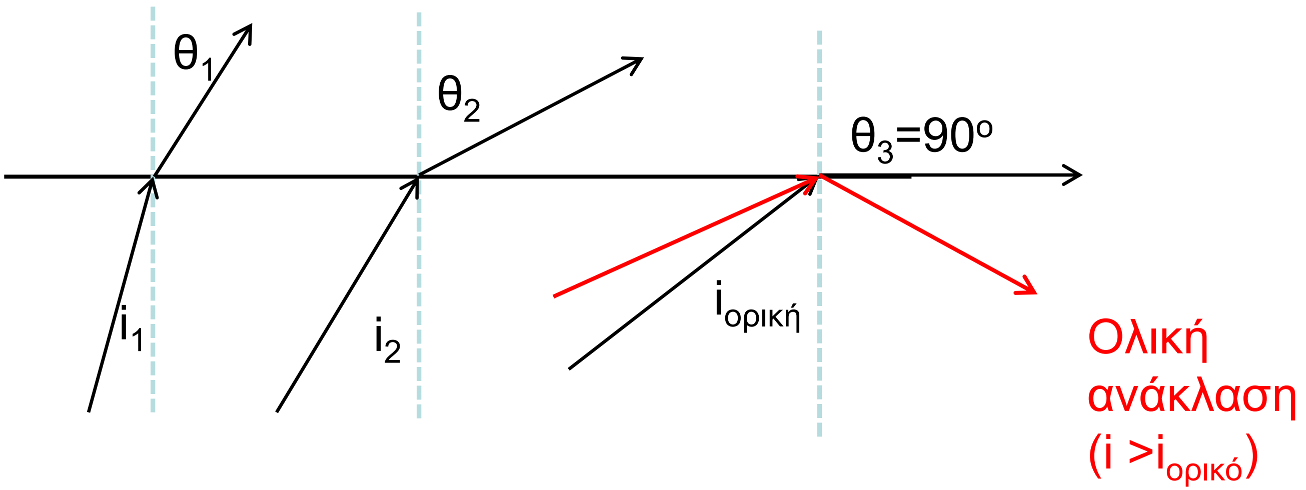
Άρα c το μέγιστο στη φύση

4. Φαινόμενη ανύψωση βυθού & Φαινόμενη απομάκρυνση του παρατηρητή



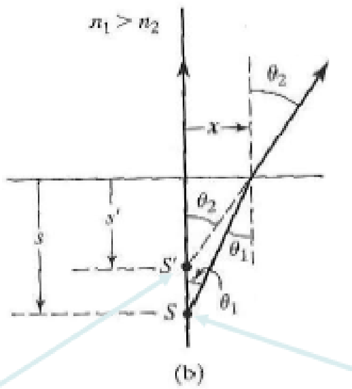
5. Οριακή γωνία

Για $i_2 > i_1$ τότε $\theta_2 > \theta_1$
Όταν $\theta=90^o$ τότε
Από Snell:
$\sin(i_{ορική})=1/n$



Σχηματισμός ειδώλου από διάθλαση από επίπεδη επιφάνει

Παραξονικές ακτίνες



$\tan\theta_1 = \frac{x}{s}$

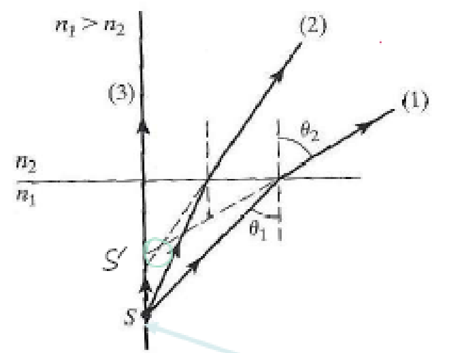
$\tan\theta_2 = \frac{x}{s'}$

είδωλο

αντικείμενο

Νόμος του Snell: $n_1\sin\theta_1 \sim n_2\sin\theta_2$
Παραξονικές ακτίνες→ μικρές γωνίες πρόσπτωσης και διάθλασης
$\sin\theta \sim \tan\theta \sim \theta$, άρα
$n_1\tan\theta_1 \sim n_2\tan\theta_2$
$n_1(x/s) = n_2(x/s')$
$s' = (n_2/n_1)s$ (ανεξάρτητο της γωνίας πρόσπτωσης)

Ακτίνες μακριά από τον άξονα



αντικείμενο

Οι (1), (2) και (3) δεν τέμνονται, σε κοινό σημείο
οπότε δεν δημιουργείται ευκρινές είδωλο.

Μόνο για παραξονικές ακτίνες έχουμε ευκρινές είδωλο