

ΚΥΜΑΤΙΚΗ

I. Μηχανικά κύματα Φασική, Ομαδική Ταχύτητα, Διασπορά

- Συμβολή κυμάτων με λίγο διαφορετικές συχνότητες – διαμόρφωση πλάτους
- Οι έννοιες της φασικής και ομαδικής ταχύτητας
- Διάδοση πληροφορίας

Ταχύτητα του οδεύοντος αρμονικού κύματος = Ταχύτητα φάσης

υπενθύμιση

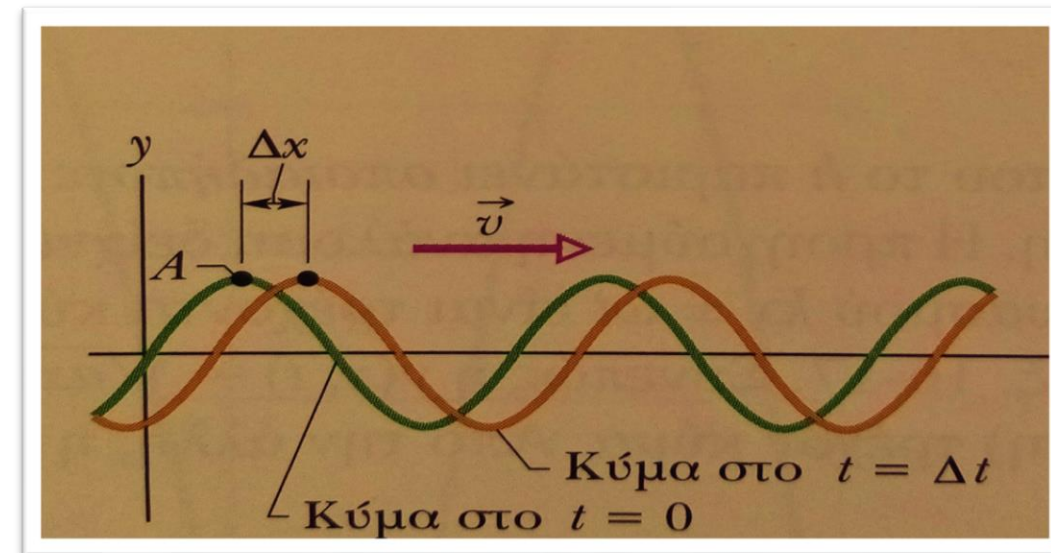
Είδαμε ότι καθώς **διαδίδεται** ένα μονοδιάστατο αρμονικό κύμα που περιγράφεται από τη σχέση $y(x, t) = A \sin(\omega t - kx + \varphi_0)$, τα διάφορα (υλικά) σημεία στο μέσο διάδοσης (εδώ στη τεντωμένη χορδή) έχουν γενικά διαφορετική φάση $\varphi(x, t) = \omega t - kx + \varphi_0$, που εξαρτάται από τη θέση του υλικού σημείου και το χρόνο.

Ας θεωρήσουμε ότι το κύμα (πράσινη γραμμή: το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή t) διαδίδεται στο μέσο (στη χορδή) για χρόνο Δt (πορτοκαλιά γραμμή: το στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$). Ας θεωρήσουμε την κορυφή Α στη πράσινη καμπύλη. Το πλησιέστερο σημείο με την ίδια ακριβώς φάση, δηλ. με $\Delta\varphi = 0$, στην πορτοκαλιά γραμμή (δηλ. το στιγμιότυπο τη χρονική στιγμή $t + \Delta t$) απέχει κατά Δx από το Α.

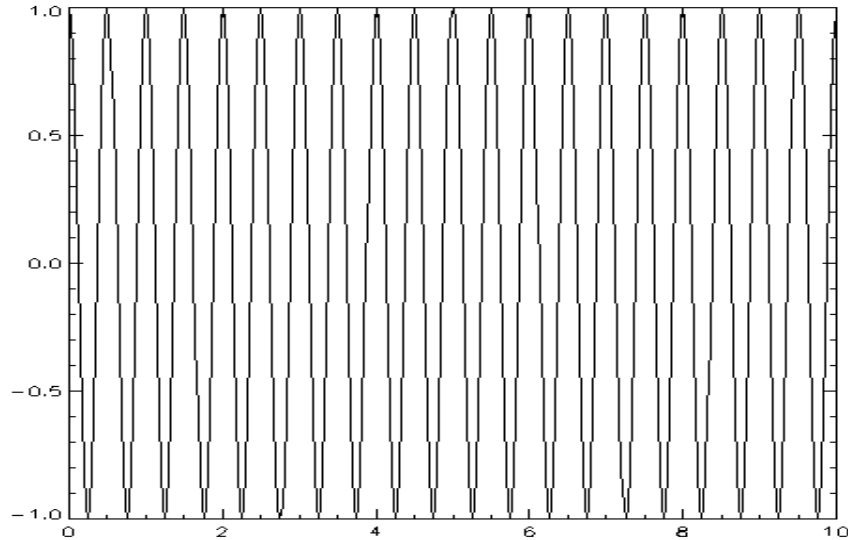
$$\Delta\varphi = 0 \Rightarrow \Delta\varphi = k\Delta x - \omega\Delta t = 0 \Rightarrow \frac{\Delta\varphi(x, t)}{\Delta t} = k \frac{\Delta x}{\Delta t} - \omega = 0$$
$$0 \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} k \frac{dx}{dt} - \omega = 0 \Rightarrow v \equiv \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k} = \frac{\frac{2\pi}{T}}{\frac{2\pi}{\lambda}} = \frac{\lambda}{T}$$

Φασική ταχύτητα $v_p = \omega/k$

Είναι στην ουσία η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται ένα «μονοχρωματικό» κύμα (δηλ. μία συχνότητα, ένα μήκος κύματος) στο μέσο.



Η φασική ταχύτητα αναφέρεται στο αρμονικό κύμα, που είναι βέβαια μία μαθηματική οντότητα. Το αρμονικό κύμα έχει **άπειρη χρονική διάρκεια** και **άπειρη χωρική έκταση**, και δεν μεταφέρει κάποια πληροφορία (πέρα από τη συχνότητά του)

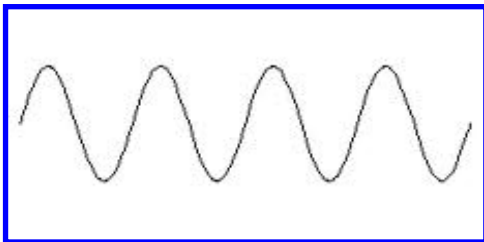


$$\Delta x = \infty$$

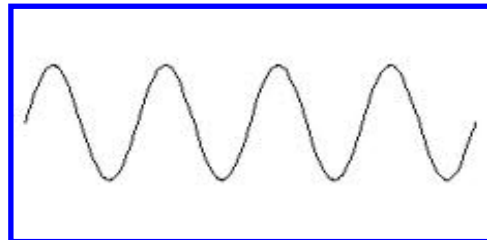
$$\Delta t = \infty$$

Τέτοιες διαταραχές δεν υπάρχουν στη φύση!

Οι πραγματικές διαταραχές έχουν **πεπερασμένη χρονική διάρκεια** και **πεπερασμένη χωρική έκταση**. Είναι **μη** περιοδικές!



Δt



Δx

Ακόμη και διαταραχές σαν αυτές του διπλανού σχήματος (πεπερασμένες), που μοιάζουν να είναι περιοδικές εντός των διαστημάτων Δx και Δt , είναι απεριοδικές, δεν είναι αρμονικά κύματα.

Επαλληλία δύο αρμονικών κυμάτων με ίσα πλάτη και διαφορετικές συχνότητες →
διαμόρφωση πλάτους → πληροφορία

Έστω τα δυο αρμονικά κύματα που διαδίδονται σε μία τεντωμένη χορδή, με ίδια φασική ταχύτητα $v = \sqrt{F/\mu}$

$$y_1(x, t) = A \sin(\omega_1 t - k_1 x)$$

$$y_2(x, t) = A \sin(\omega_2 t - k_2 x), \text{ με } \omega_1 = \omega_0 + \Delta\omega \text{ και } \omega_2 = \omega_0 - \Delta\omega \text{ και}$$

$$\text{αντίστοιχα } k_1 = k_0 + \Delta k \text{ και } k_2 = k_0 - \Delta k \text{ (με } \Delta\omega \text{ και } \Delta k \ll)$$

Αρχή της υπέρθεσης: $y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = A[\sin(\omega_1 t - k_1 x) + \sin(\omega_2 t - k_2 x)] =$
 $A\{\sin[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_0 + \Delta k)x] + \sin[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (k_0 - \Delta k)x]\} \Rightarrow$
(*)

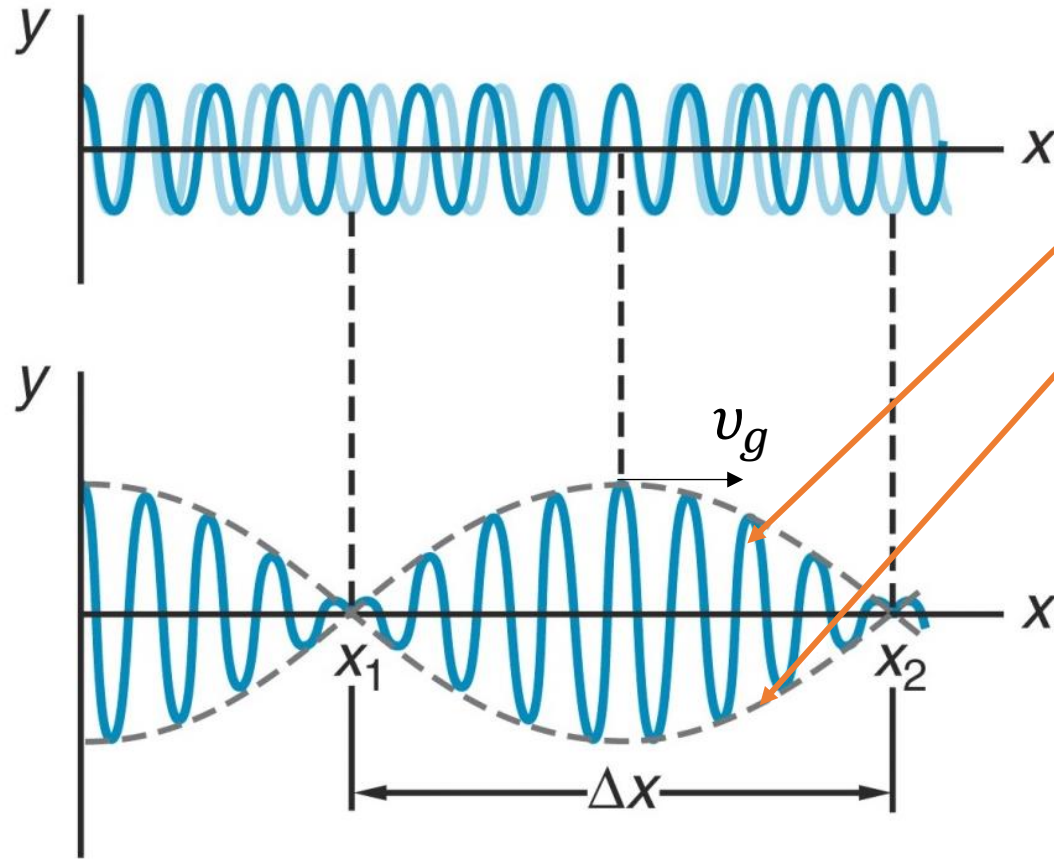
$$y(x, t) = 2A \sin\left(\frac{[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_0 + \Delta k)x] + [(\omega_0 - \Delta\omega)t - (k_0 - \Delta k)x]}{2}\right) \cos\left(\frac{[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_0 + \Delta k)x] - [(\omega_0 - \Delta\omega)t - (k_0 - \Delta k)x]}{2}\right) \Rightarrow$$

$$y(x, t) = 2A \sin(\omega_0 t - k_0 x) \cos[(\Delta\omega)t - (\Delta k)x] =$$

(*) $\sin a + \sin b = 2 \sin\left(\frac{a+b}{2}\right) \cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$

Μικρή συχνότητα → μεγάλη περίοδος, μικρό $\Delta k \rightarrow$ μεγάλο λ

Επαλληλία δύο αρμονικών κυμάτων με ίσα πλάτη και διαφορετικές συχνότητες →
διαμόρφωση πλάτους → πληροφορία



$$\sin(\omega_0 t - k_0 x)$$

Envelope – περίβλημα $2A \cos[(\Delta\omega)t - (\Delta k)x]$

→ Διαμόρφωση πλάτους
phase velocity

Η περιβάλλουσα είναι και αυτή κύμα που διαδίδεται
προς τα δεξιά (στο παράδειγμά μας) με ταχύτητα διάδοσης

$$\frac{\Delta\omega}{\Delta k} \xrightarrow{\Delta k \rightarrow 0}$$

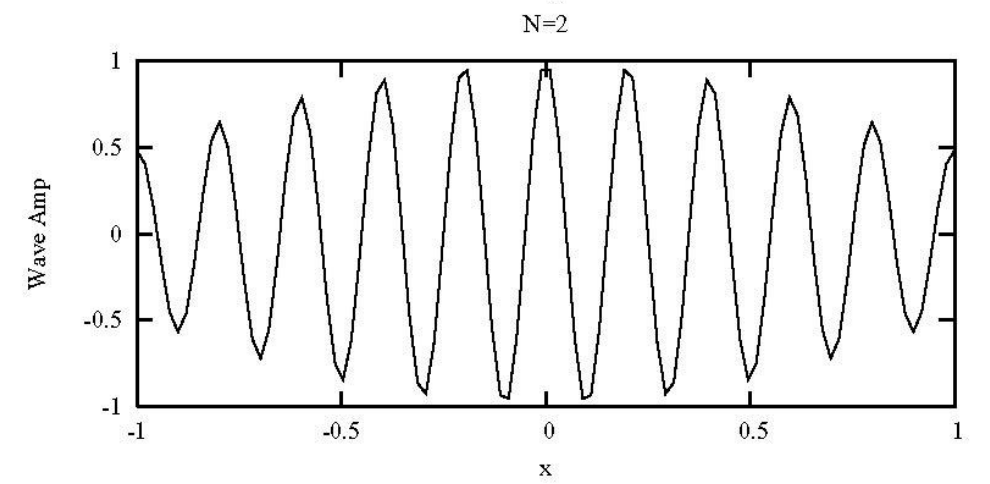
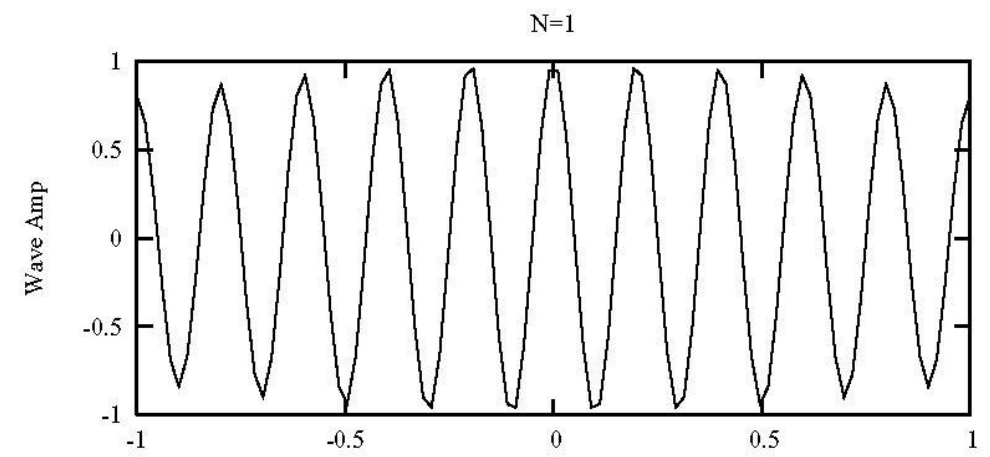
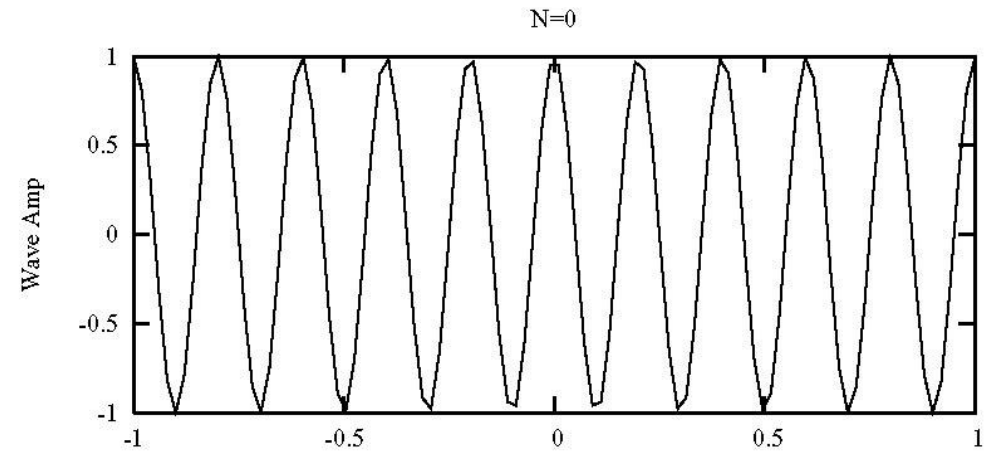
$$\boxed{\frac{d\omega}{dk} \equiv v_g}$$

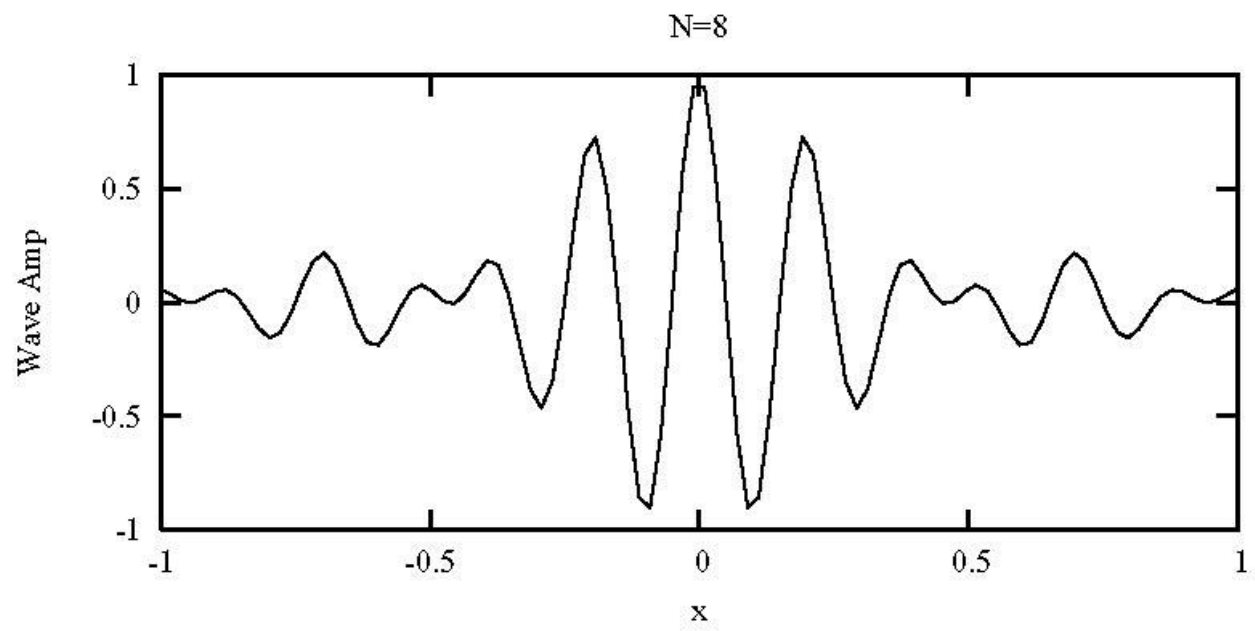
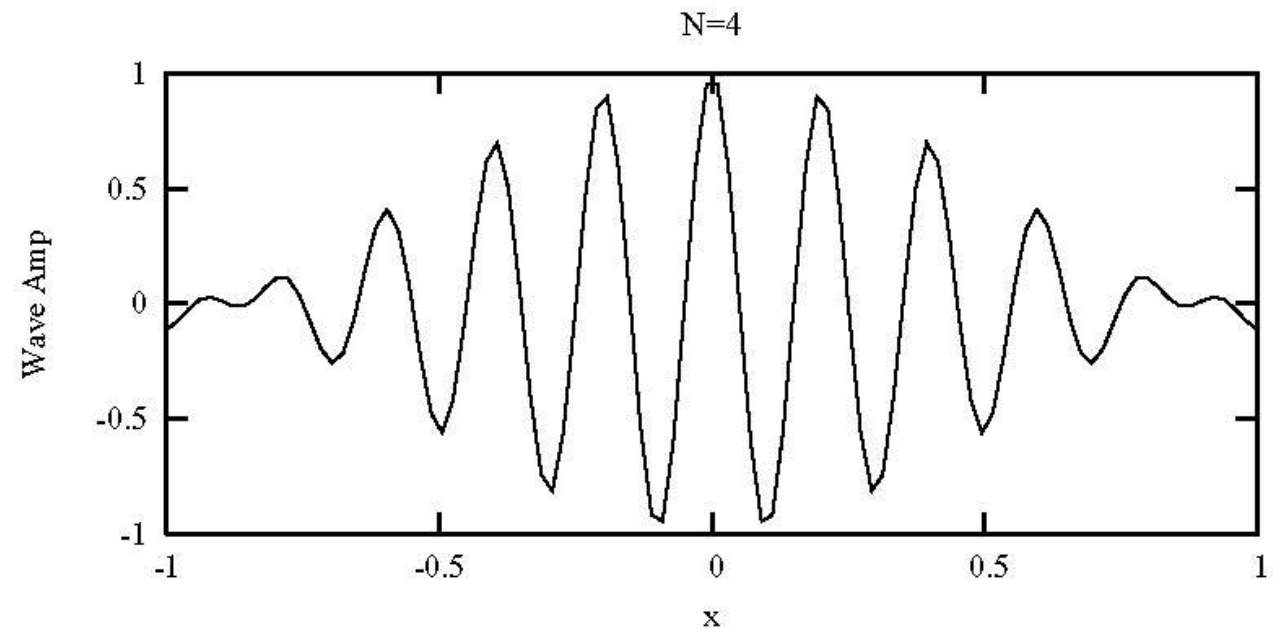
Ταχύτητα ομάδας
group velocity

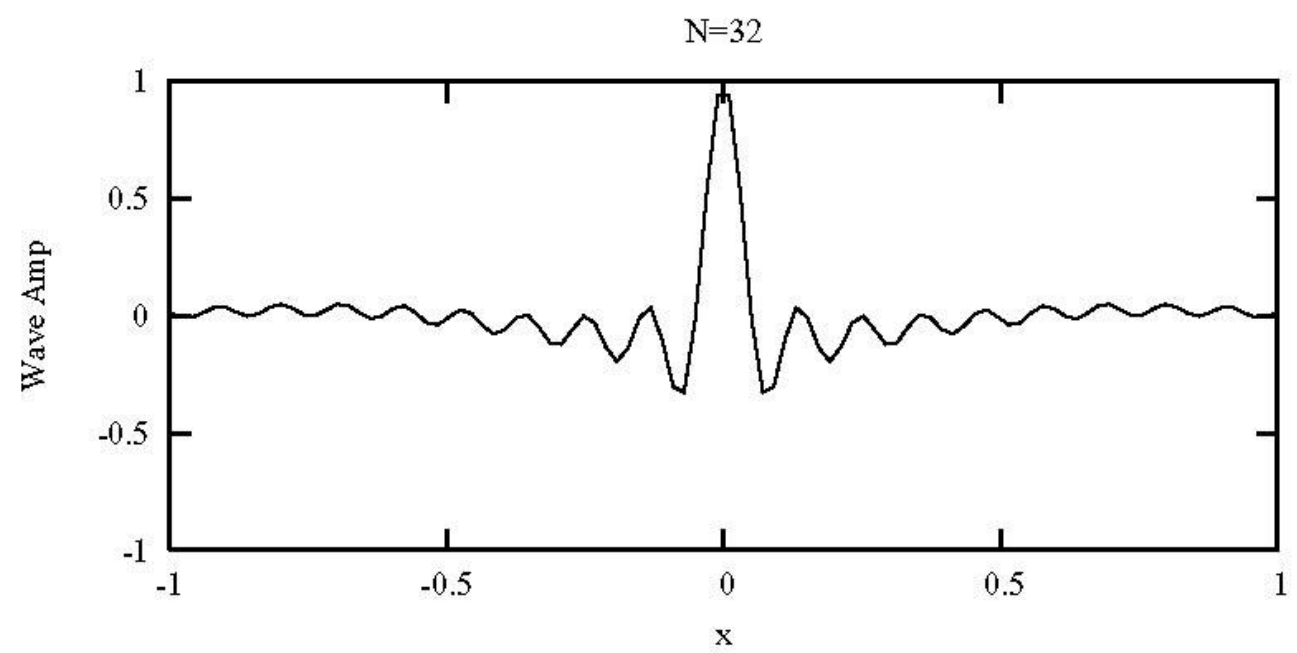
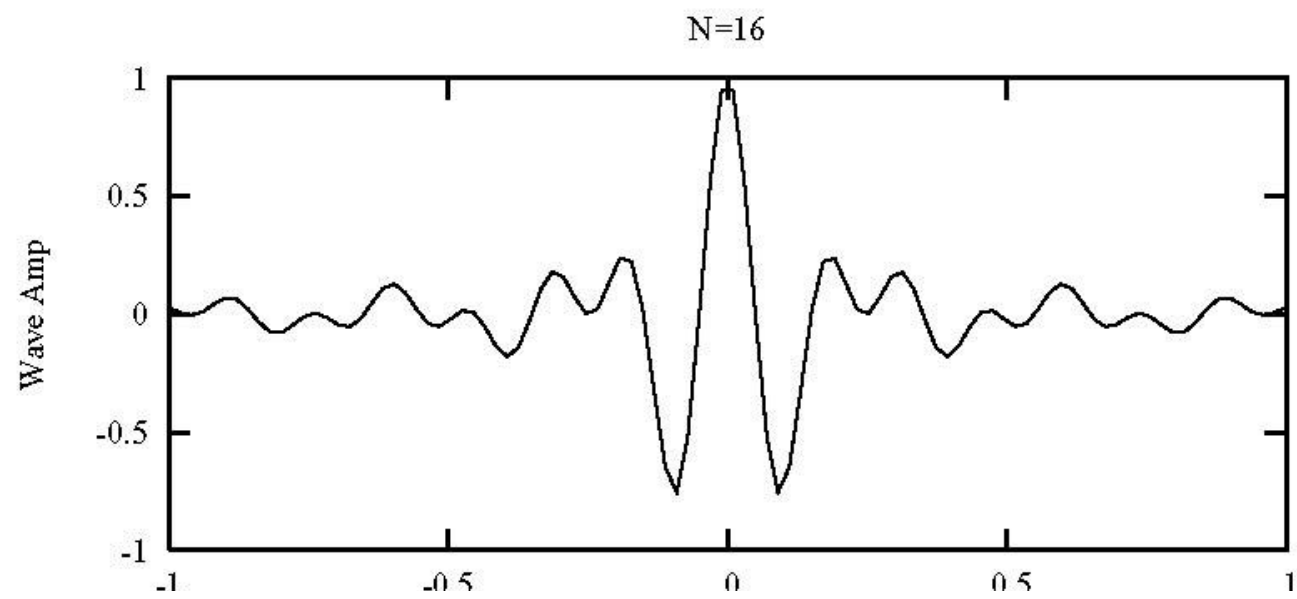
...τι θα γίνει αν προσθέσουμε και άλλα αρμονικά κύματα.....

Έστω ότι, ακολουθώντας το προηγούμενο παράδειγμα, συνεχίζουμε να προσθέτουμε αρμονικά κύματα με κυματάριθμους $\pm 2\Delta k$, $\pm 3\Delta k$ κλπ.

Στα παρακάτω διαγράμματα N είναι ο αριθμός των αρμονικών κυμάτων που προσθέτω στο αρχικό αρμονικό κύμα (ω_o, k_o)







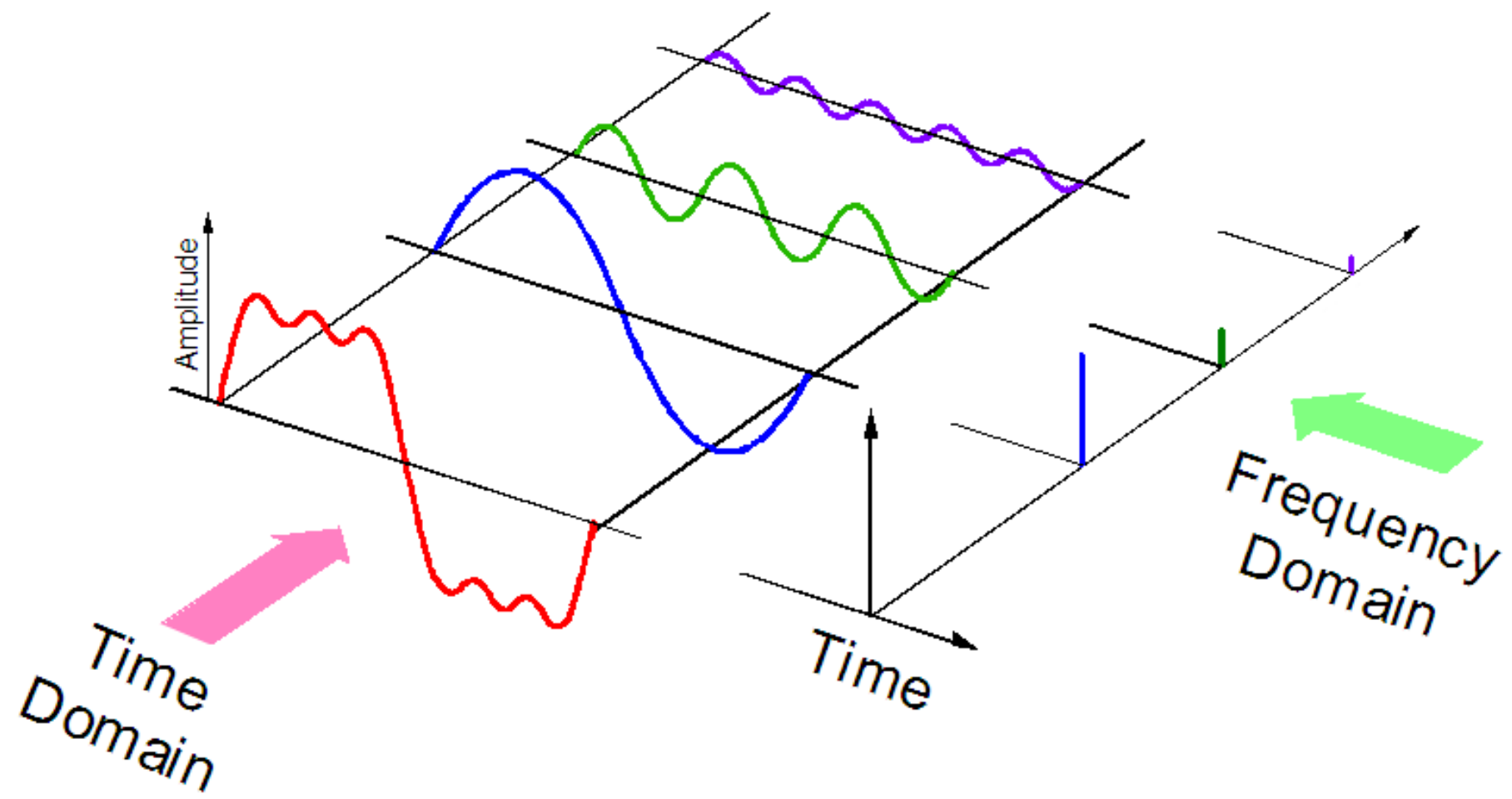
Ανάλυση Fourier

Θα μάθετε αργότερα ότι οποιαδήποτε πραγματική συνάρτηση (είτε περιοδική είτε όχι) μπορεί να προκύψει από την επαλληλία θεωρητικά άπειρων αρμονικών συναρτήσεων.

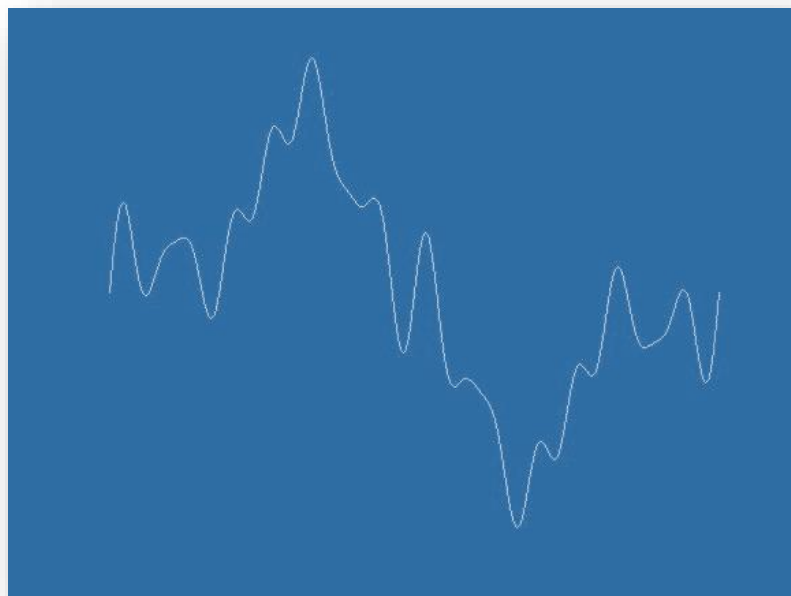
Για κάθε αρμονική συνιστώσα του μετασχηματισμού Fourier της συνάρτησης, όπως λέγεται, μπορούμε να βρούμε τη συχνότητα, το πλάτος και τη φάση της.

Κάθε συνάρτηση έχει τη δική της ξεχωριστή ανάλυση σε αρμονικές συνιστώσες.

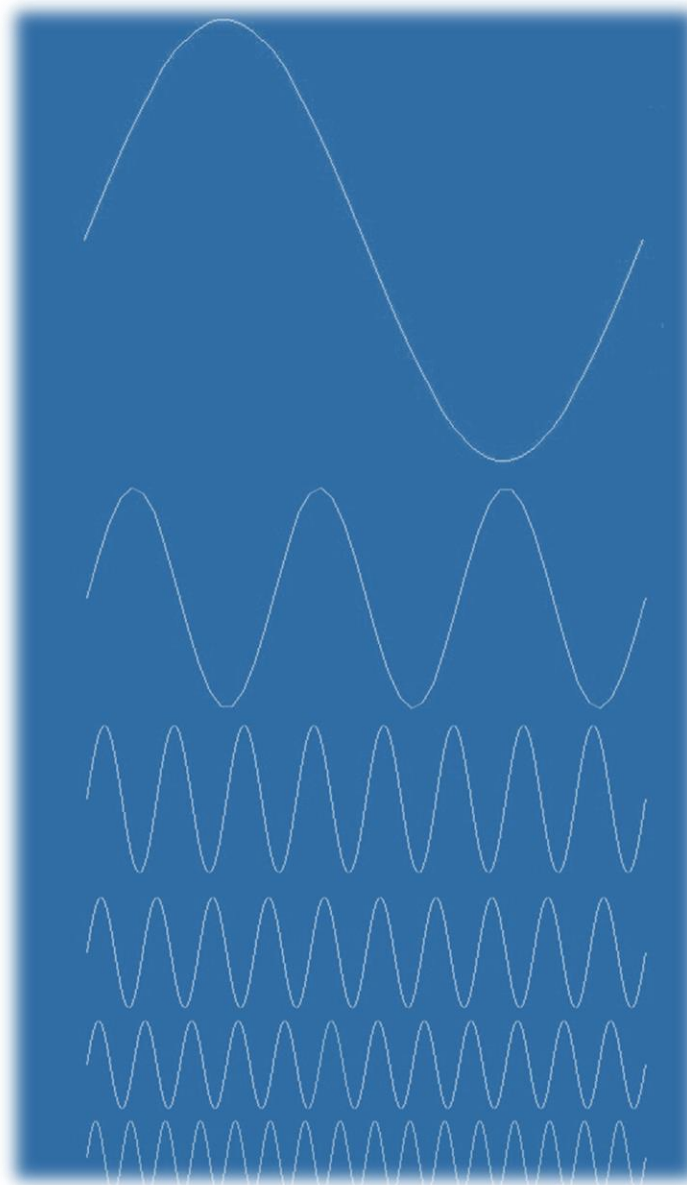
Καταλαβαίνουμε λοιπόν γιατί η εξιδανικευμένη ανάλυση που κάναμε για αρμονικά κύματα είναι χρήσιμη για τη μελέτη πραγματικών κυματικών φαινομένων.

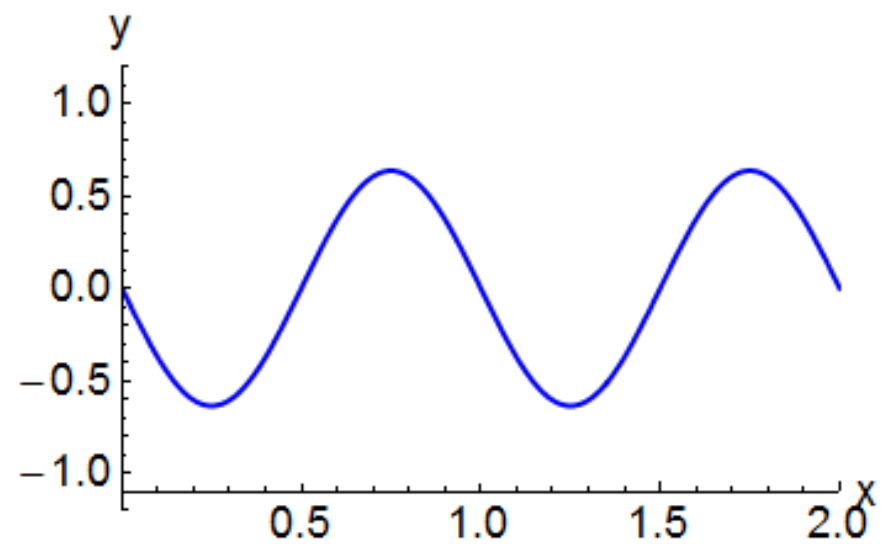
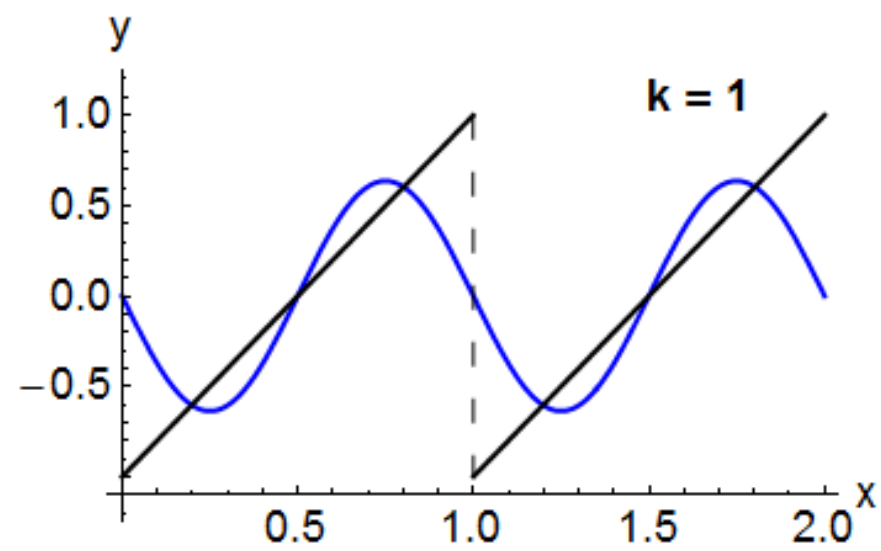


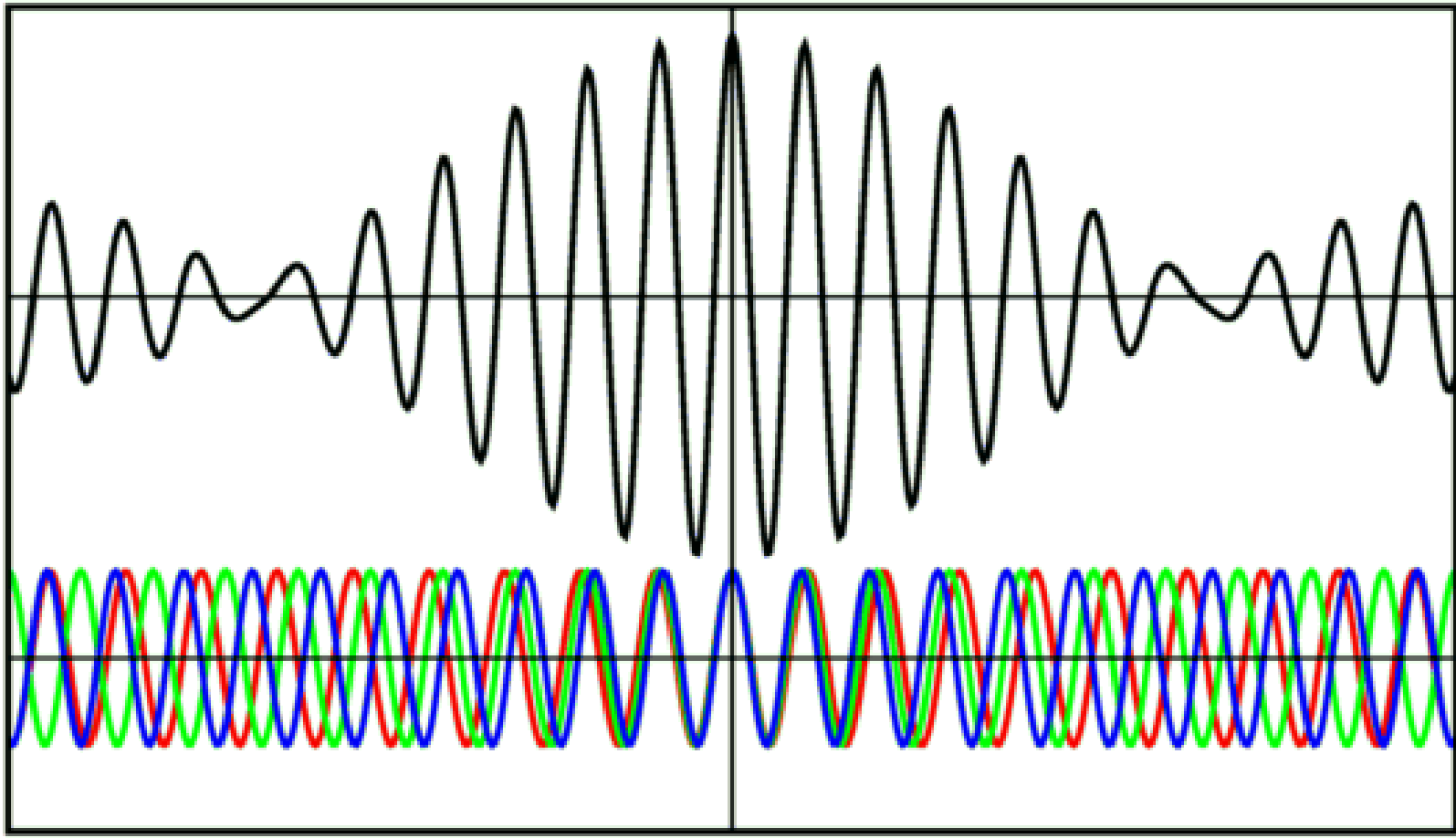
Σειρές Fourier



=

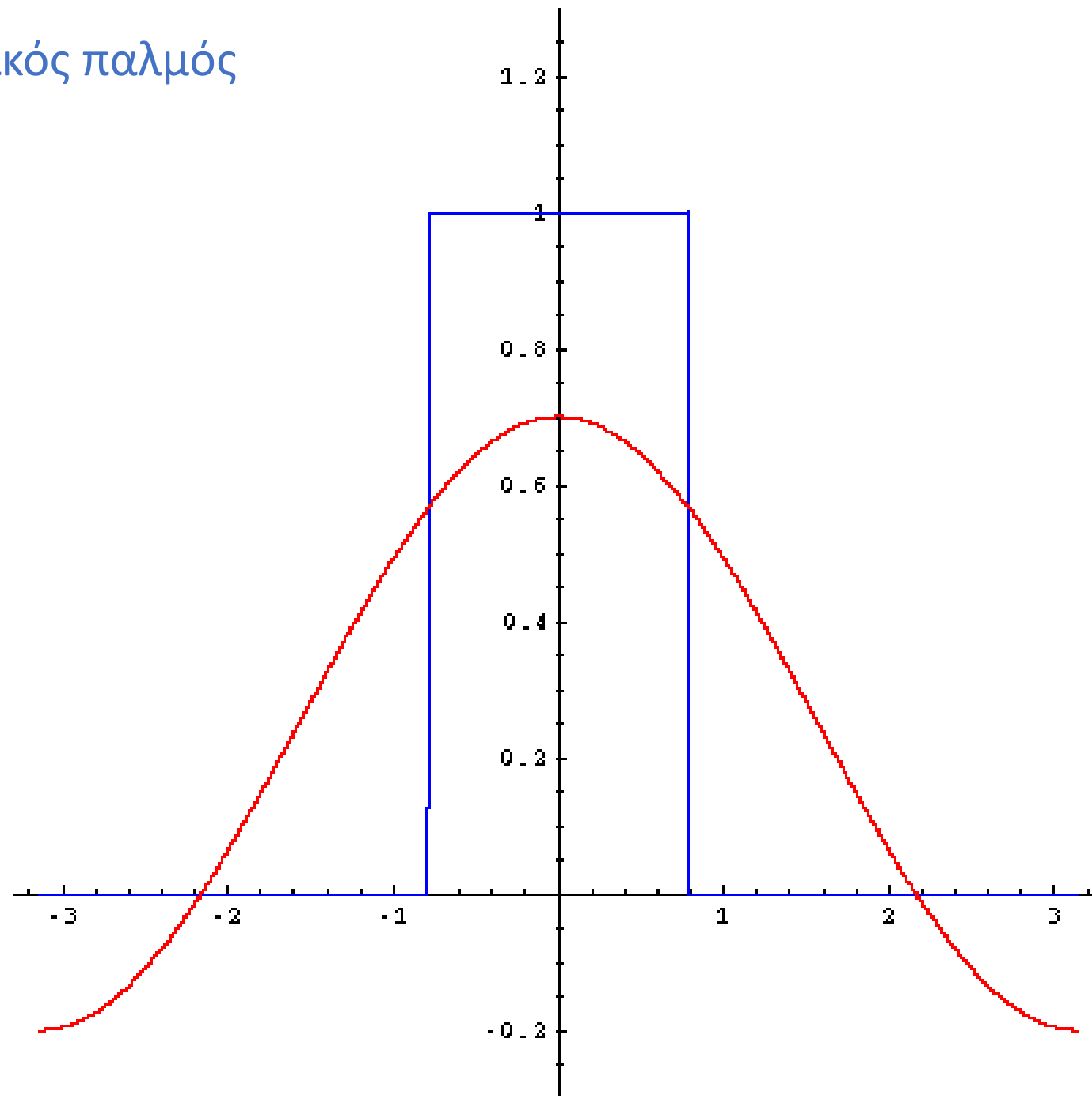






Η μαύρη διαταραχή προκύπτει από την επαλληλία των τριών έγχρωμων διαταραχών, που έχουν ίσα πλάτη, αλλά διαφορετικές συχνότητες

Τετραγωνικός παλμός



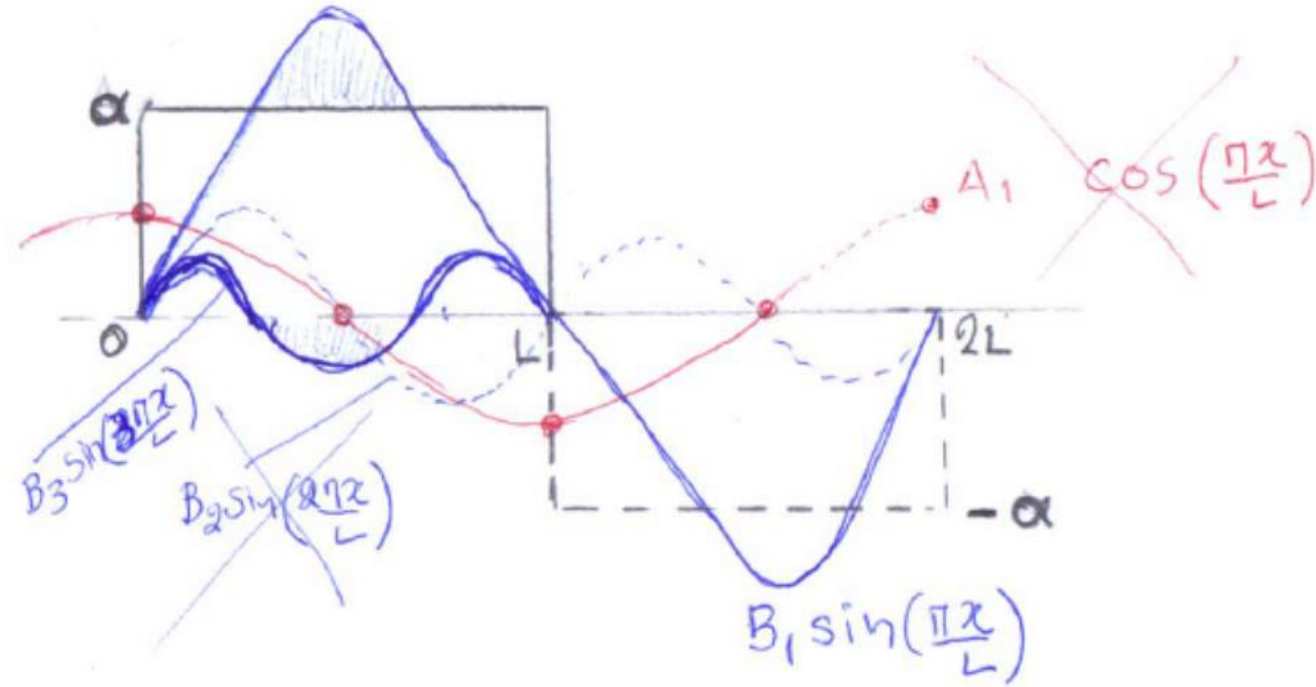
Εφαρμογή της ανάλυσης Σειρών Fourier σ' ένα τετραγωνικό παλμό.

$$F(x) = C + \sum_{m=1}^{\infty} A_m \cos(mx) + \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(mx), \quad (x \text{ σε rad})$$

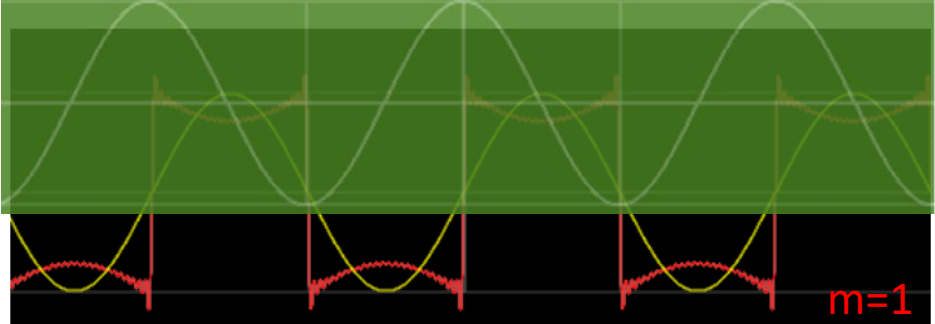
$$C = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx \quad (\text{μέση τιμή})$$

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

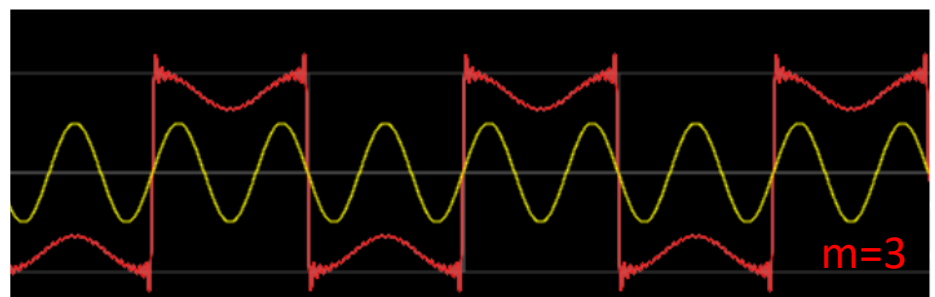
$$B_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin(mx) dx$$



Εάν x σε *meters* αντικαθιστούμε στις ανωτέρω σχέσεις το x με $\pi x/L$ (για $x=2L$ θα έχει κινηθεί $2\pi \text{ rad}$) όπου x σε m , και ολοκληρώνουμε από $-L$ έως L



Οι συναρτήσεις συνημίτονου ($\cos$) δεν συνεισφέρουν στην δημιουργία του τετραγωνικού παλμού όπως και καμία άρτια ($f(x)=f(-x)$) συνάρτηση



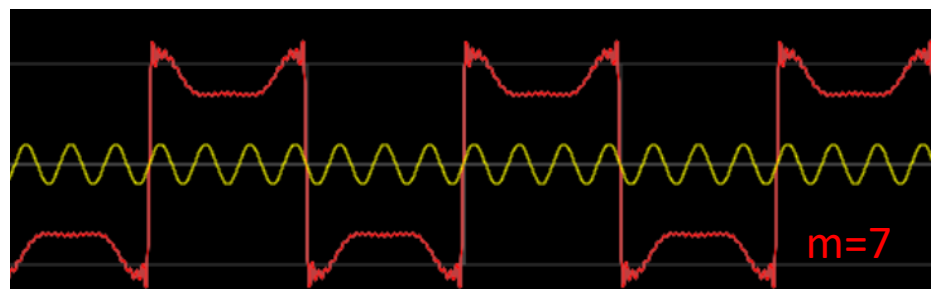
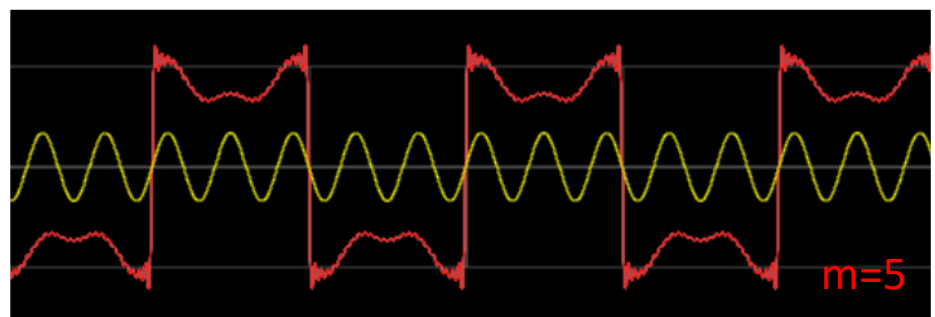
Οι συναρτήσεις ημίτονου ($\sin$) για περιττές τιμές του m ($=1, 3, 5, \dots$) συνεισφέρουν στην δημιουργία του τετραγωνικού παλμού καθώς η συνάρτησή μας είναι περιττή ($f(x)=-f(-x)$).

$$C = 0$$

$$A_m = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos(mx) dx$$

$$B_m = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin(m\pi x/L) dx, \text{ για } m = 1, 3, 5, \dots$$

$$B_m = \frac{a}{L} \int_0^L \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx - \frac{a}{L} \int_L^{2L} \sin\left(\frac{m\pi x}{L}\right) dx = \dots = \frac{4a}{m\pi}$$



$$y(x, 0) = \frac{4a}{\pi} \left[\sin\left(\frac{\pi x}{L}\right) + \frac{1}{3} \sin\left(\frac{3\pi x}{L}\right) + \frac{1}{5} \sin\left(\frac{5\pi x}{L}\right) + \dots \right]$$

ΣΥΝΕΠΩΣ



ΤΟ ΘΕΩΡΗΜΑ FOURIER

ΔΙΝΕΙ ΤΗ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΝΑ ΜΕΛΕΤΗΘΟΥΝ

ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ **ΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ** ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ

ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΟΝΤΟΤΗΤΩΝ-ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ.

Η ΑΡΜΟΝΙΚΗ ΔΙΑΤΑΡΑΧΗ

ΕΙΝΑΙ ΕΝΑ ΔΙΔΑΚΤΙΚΟ ΕΡΓΑΛΕΙΟ!



Ο Μετασχηματισμός FOURIER όμως

ΔΙΝΕΙ ΤΗ ΔΥΝΑΤΟΤΗΤΑ ΝΑ ΜΕΛΕΤΗΘΟΥΝ

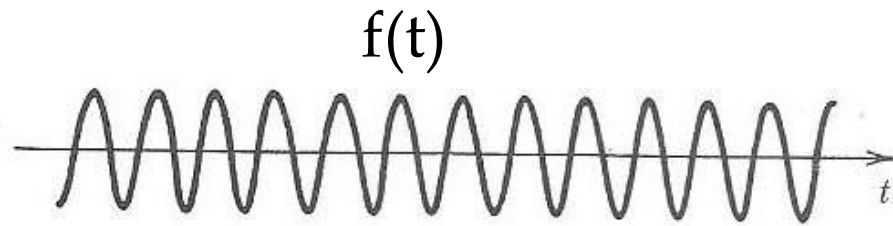
ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΕΣ ΑΠΕΡΙΟΔΙΚΕΣ ΔΙΑΤΑΡΑΧΕΣ

ΜΕΣΩ ΤΗΣ ΜΕΛΕΤΗΣ ΤΩΝ

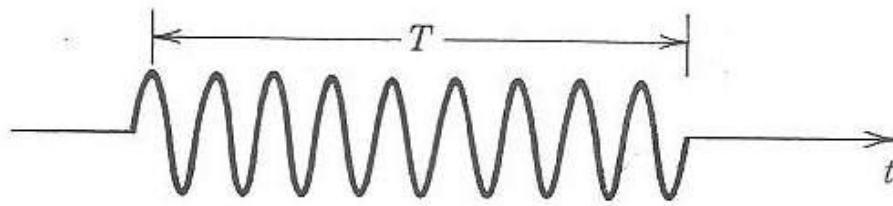
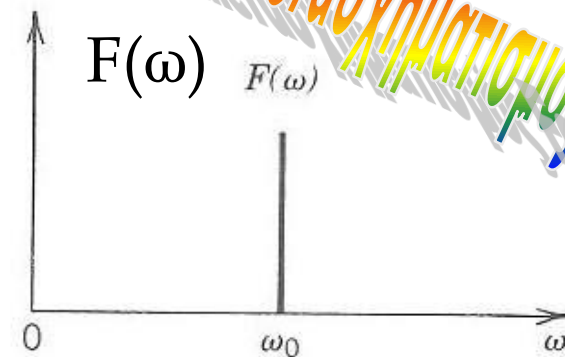
ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΟΝΤΟΤΗΤΩΝ-ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ.

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

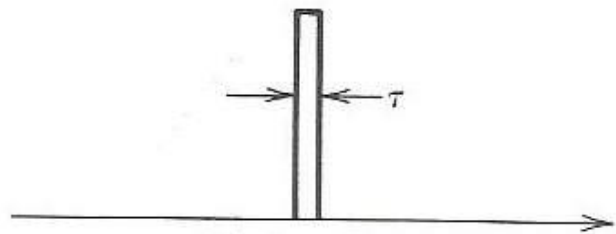
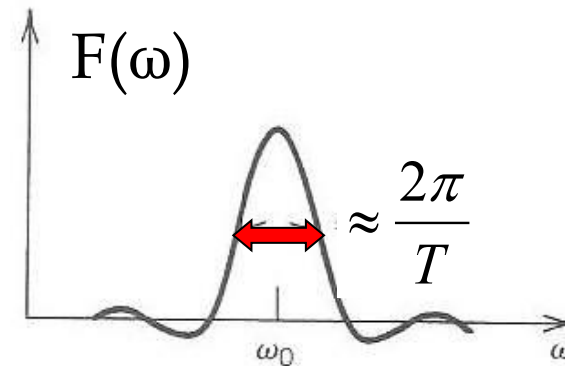
ΧΡΟΝΟΣ



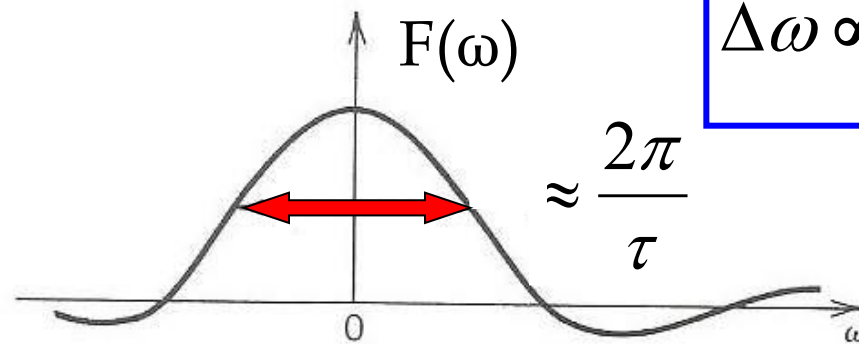
Συνεχές αρμονικό κύμα
συχνότητας ω_0



Κυματοσυρμός διάρκειας T
συχνότητας ω_0



Μοναδικός παλμός διάρκειας τ

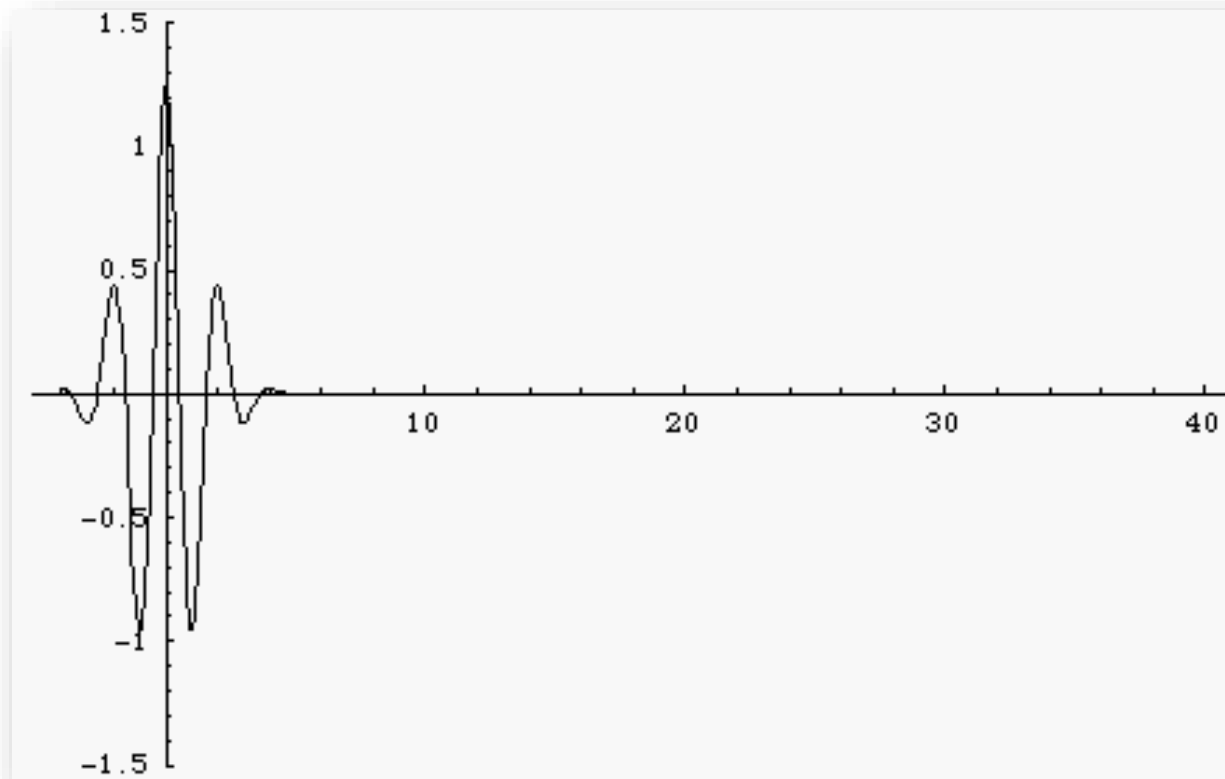


$$\Delta\omega \propto \frac{1}{T}$$

$$F(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) \exp(-i\omega t) dt$$

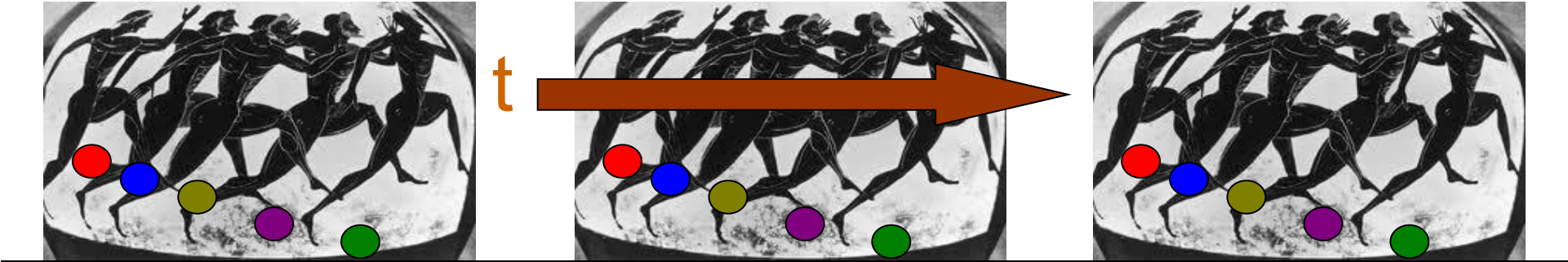
Μετασχηματισμός Fourier

- Κάθε αρμονική συνιστώσα μιας συνάρτησης που περιγράφει μια διαταραχή, έχει τη δική της **φασική ταχύτητα**.
- Η διαταραχή προκύπτει από την επαλληλία όλων των αρμονικών συνιστωσών
- **Αν η φασική ταχύτητα είναι η ίδια για όλες τις συχνότητες**, τότε όλα τα αρμονικά κύματα διαδίδονται με την ίδια φασική ταχύτητα και **το «σχήμα» της διαταραχής παραμένει αναλλοίωτο** κατά τη διάδοσή του στο μέσο (παραμένει αναλλοίωτη και η πληροφορία που μεταφέρει)

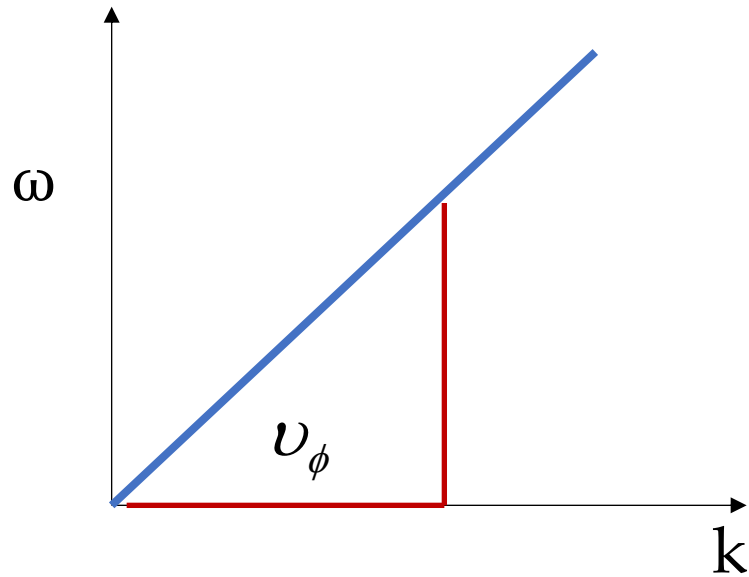


Αυτή η διαταραχή προκύπτει από την επαλληλία 100 αρμονικών κυμάτων διαφορετικών συχνοτήτων, που διαδίδονται με την ίδια ταχύτητα

...αθλητές ίδιας δυναμικότητας....



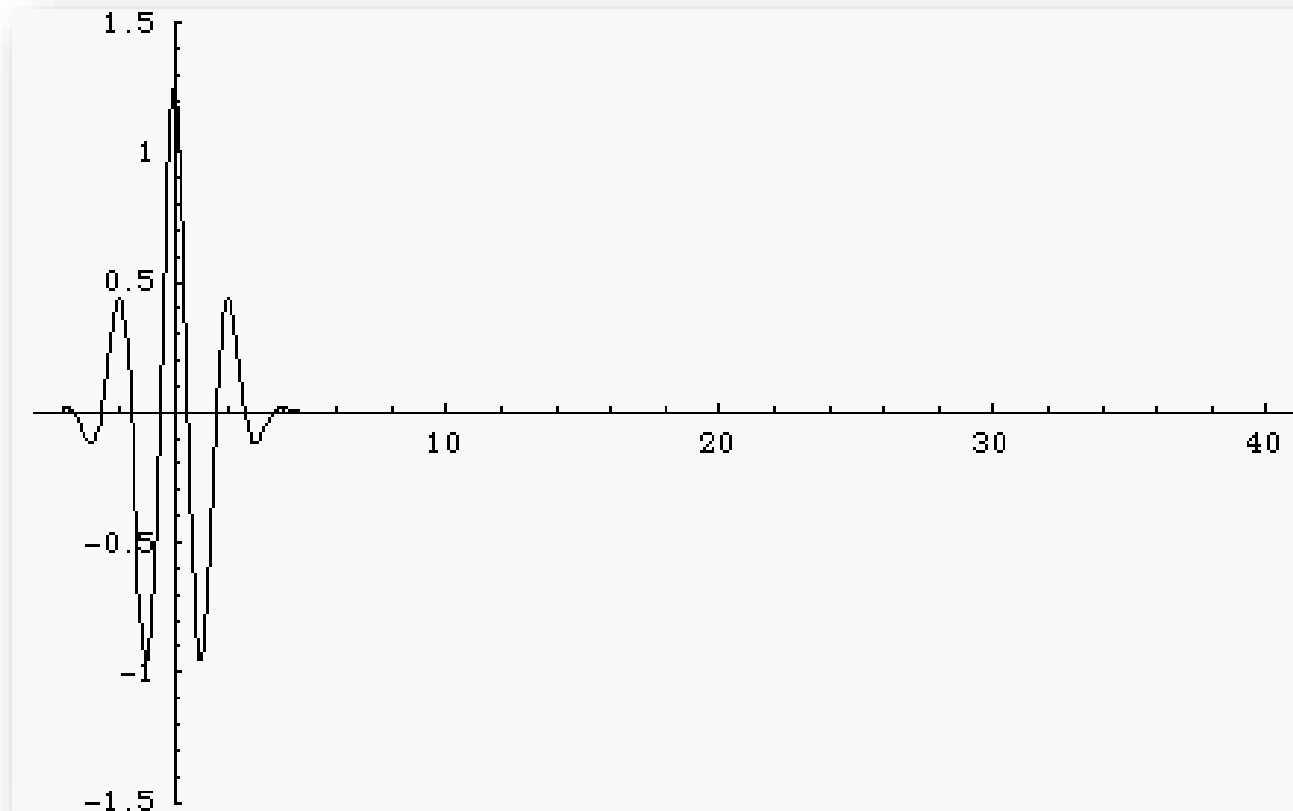
....η ομάδα δεν παραμορφώνεται...

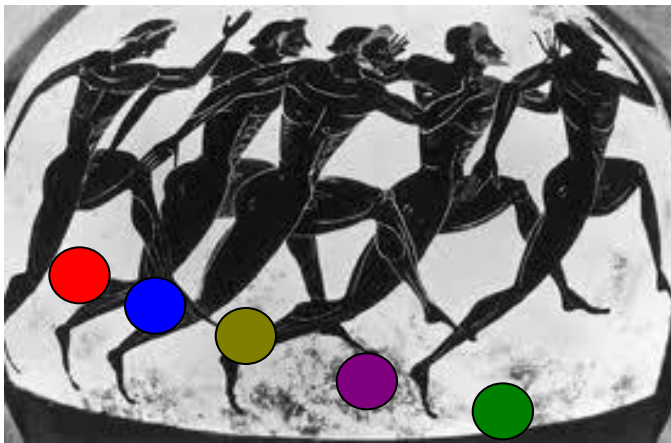


Αυτό συμβαίνει κατά τη διάδοση μίας διαταραχής σε τεντωμένη χορδή. Όλες οι αρμονικές συνιστώσες έχουν την ίδια φασική ταχύτητα $v_\phi = \frac{\omega}{k} = \sqrt{F/\mu} \Rightarrow$

$$\omega = v_\phi k$$

- Αν, όμως, η φασική ταχύτητα ΔΕΝ είναι η ίδια για όλες τις συχνότητες, τότε καθώς διαδίδεται το κύμα το «σχήμα» της διαταραχής παραμορφώνεται και στο τέλος χάνεται... (μαζί και η πληροφορία που μεταφέρει)
- Αυτό είναι το λεγόμενο **φαινόμενο της διασποράς ή του διασκεδασμού**
 $\omega = \omega(k)$

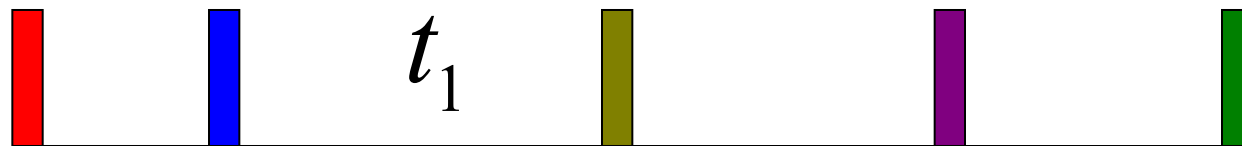




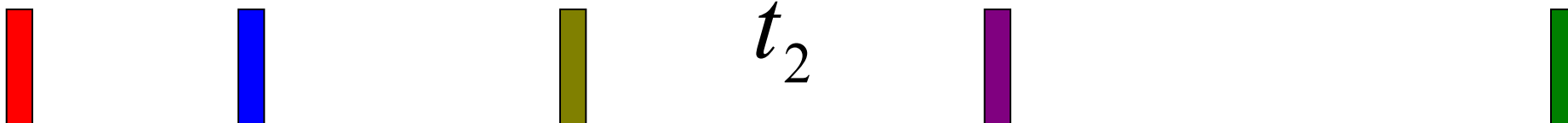
$t=0$

...ας φανταστούμε μία ομάδα αθλητών πολύ διαφορετικών
επιδόσεων...

Κατά την εκκίνηση αποτελούν μία ομάδα.



t_1



t_2

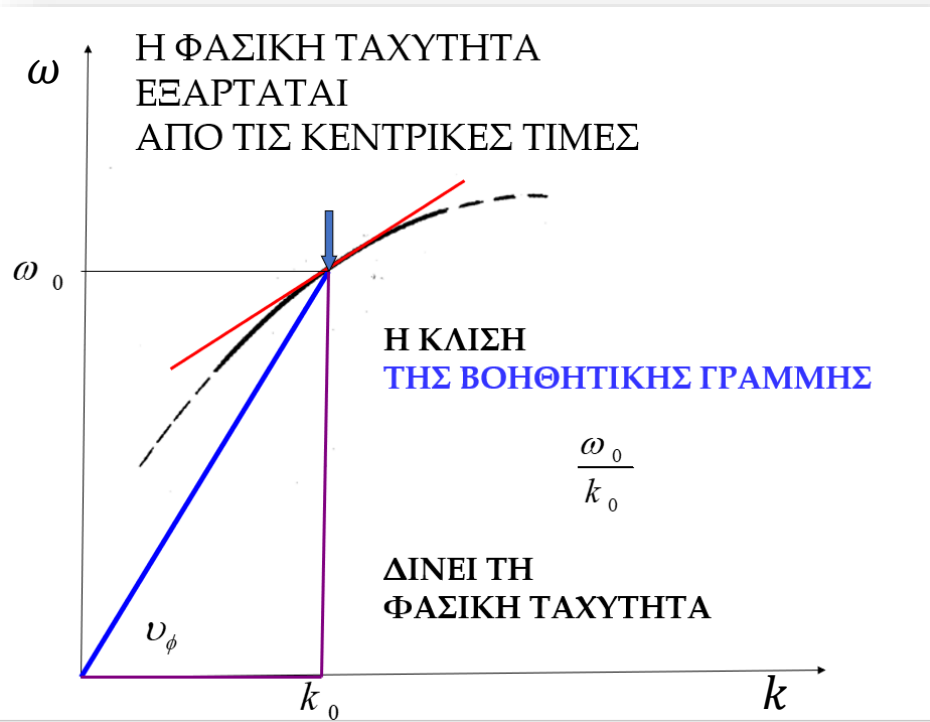
....με τη πάροδο του χρόνου η ομάδα διαλύεται...

Φασική ταχύτητα

$$\omega = \omega(k)$$

$$v_p = \frac{\omega_0}{k_0}$$

Η φασική ταχύτητα εξαρτάται
από τις κεντρικές τιμές ω_0, k_0



Ταχύτητα ομάδας

$$v_g = \left(\frac{d\omega(k)}{dk} \right)_{k_0}$$

Η φασική ταχύτητα εξαρτάται
από το πως μεταβάλλεται το ω
με το k (για $k = k_0$)



Σχέση διασποράς (ή διασκεδασμού) $\omega = \omega(k)$

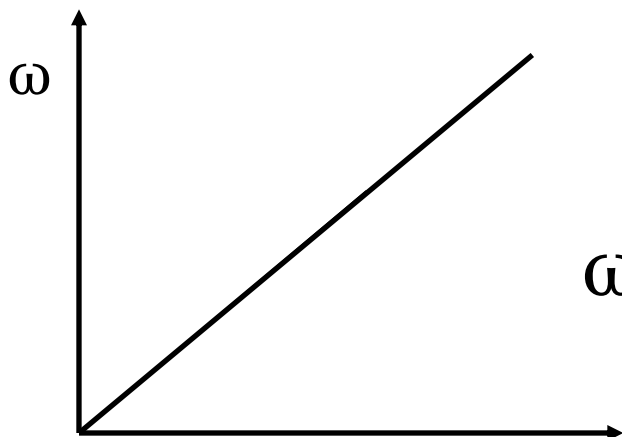
➤ $v_p = \frac{\omega_0}{k_0}, \quad v_g = \left(\frac{d\omega(k)}{dk} \right)_{k_0}$

Όταν $v_p = v_g$ δεν έχουμε διασπορά. Αυτό συμβαίνει στα κύματα που διαδίδονται στη τεντωμένη χορδή, όπου είδαμε ότι

$$\omega = \sqrt{F/\mu} k, \text{ οπότε } v_p = \frac{\omega}{k} = \sqrt{F/\mu} \text{ και } v_g = \frac{d\omega(k)}{dk} = \sqrt{F/\mu}, \text{ δηλ. } v_p = v_g$$

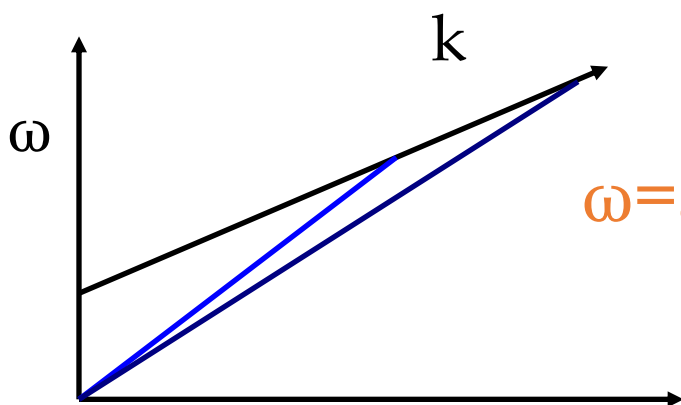
➤ όταν $v_p > v_g$ λέμε ότι έχουμε ομαλό διασκεδασμό

➤ όταν $v_p < v_g$ λέμε ότι έχουμε ανώμαλο διασκεδασμό



$$\omega = ak$$

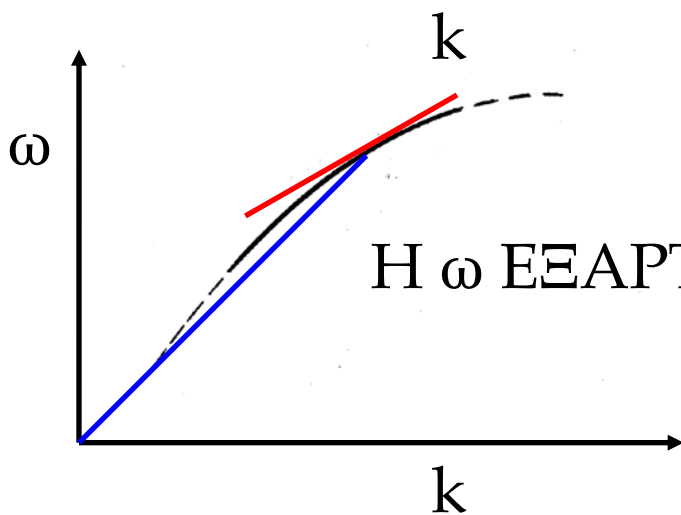
$$v_{ph} = v_g = \textit{const}$$



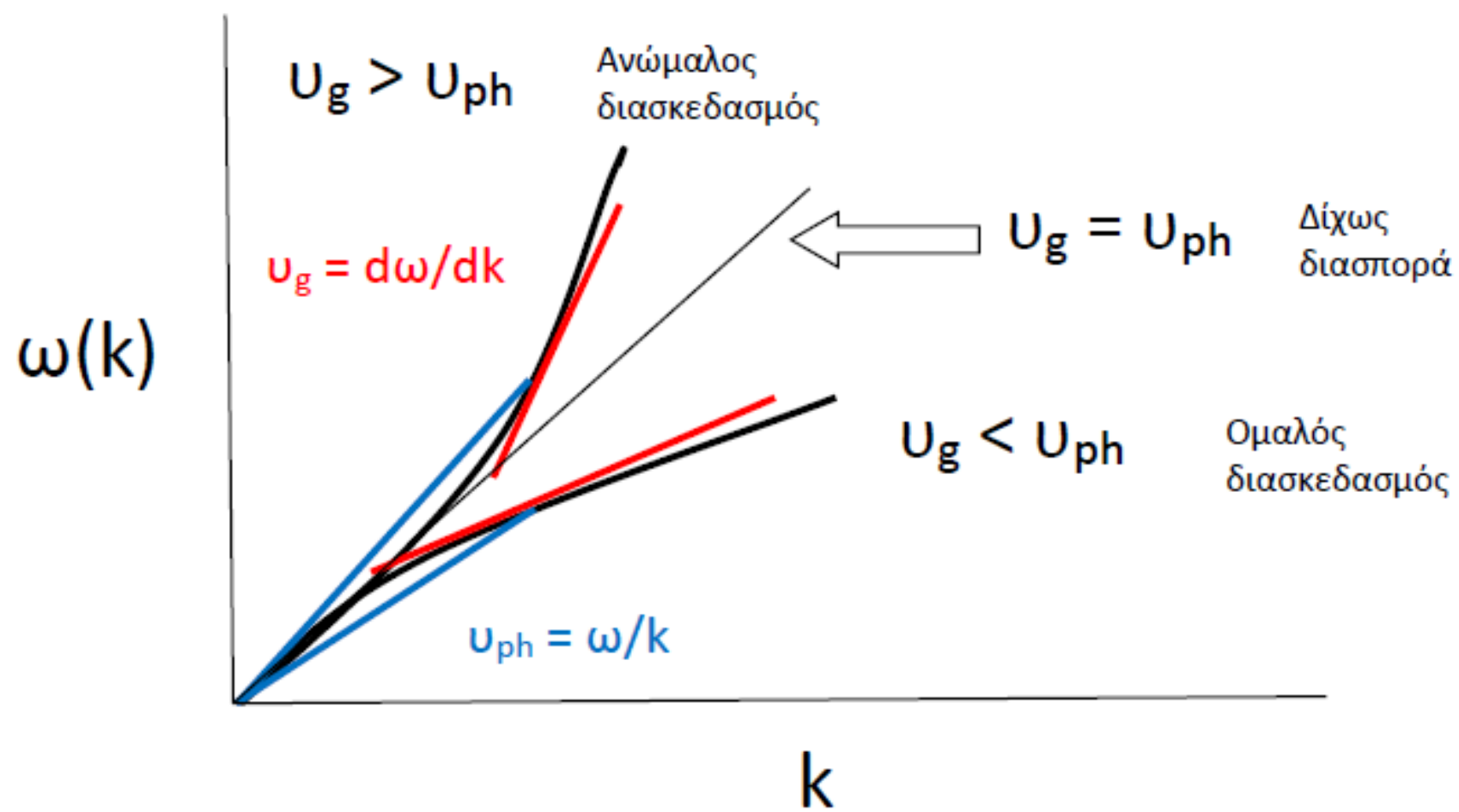
$$\omega = ak + b$$

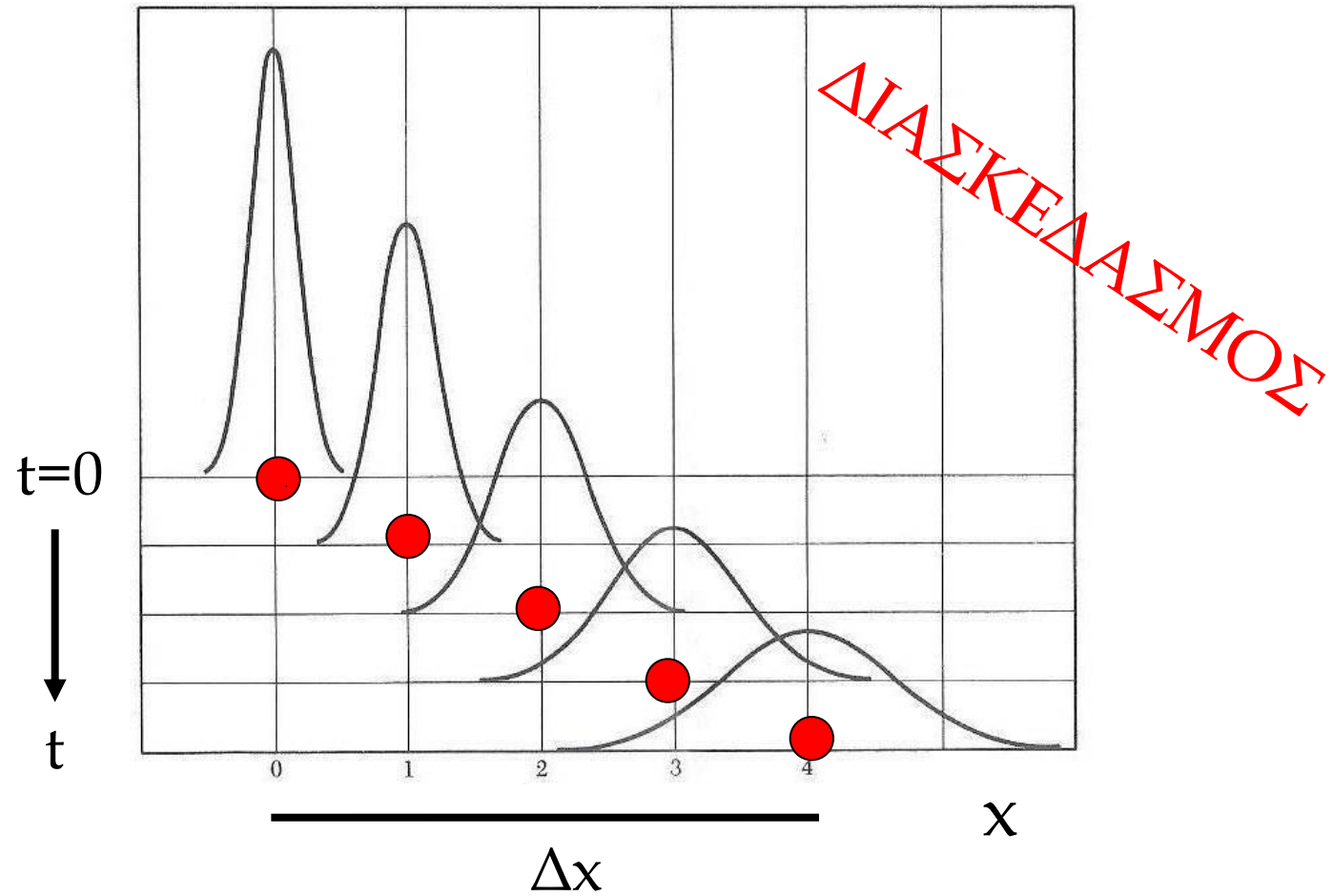
$$v_{ph} > v_g$$

$$v_g = \textit{const}$$



Η ω ΕΞΑΡΤΑΤΑΙ ΜΗ ΓΡΑΜΜΙΚΑ ΑΠΟ ΤΟΝ k

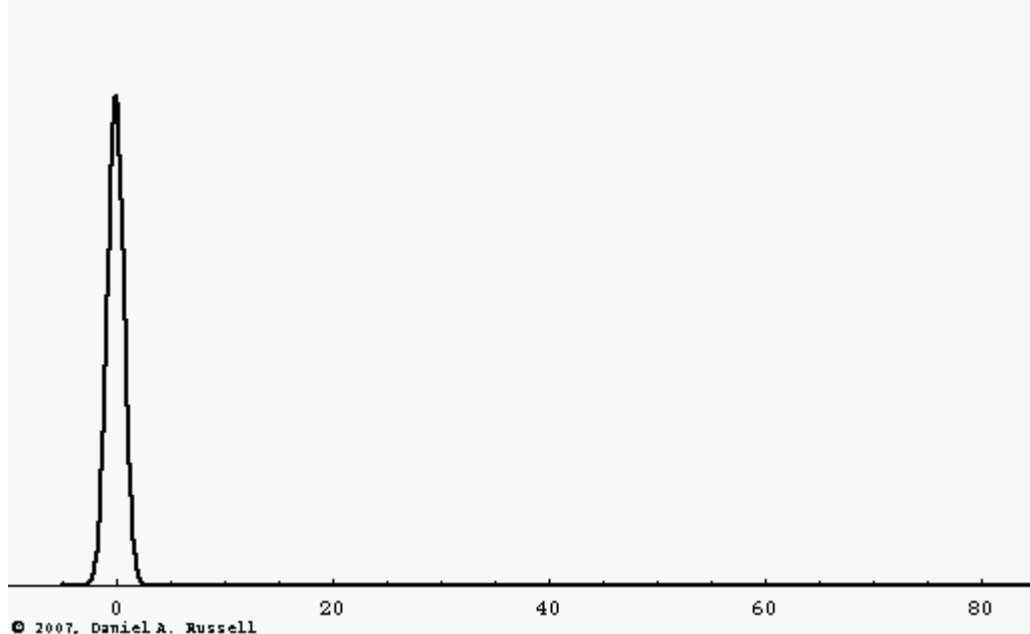




Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ ΟΜΑΔΟΣ
ΕΙΝΑΙ Η ΤΑΧΥΤΗΤΑ
ΤΟΥ ΚΕΝΤΡΟΕΙΔΟΥΣ
ΤΟΥ "ΦΑΚΕΛΟΥ"

$$v_g = \frac{\Delta x}{t}$$

Ο ΟΞΥΣ ΠΑΛΜΟΣ ΣΥΝΙΣΤΑΤΑΙ ΑΠΟ ΕΝΑ ΜΕΓΑΛΟ ΑΡΙΘΜΟ ΑΡΜΟΝΙΚΩΝ ΔΙΑΤΑΡΑΧΩΝ.



Ο παλμός μαύρου κύματος είναι μια συνάρτηση Gauss, που περιέχει πολλές συχνότητες. Δεδομένου ότι η ταχύτητα κύματος είναι σταθερή, όλες οι συχνότητες ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα και ο παλμός διατηρεί σταθερό σχήμα.

Ωστόσο, υπάρχουν πολλά παραδείγματα μέσω διασποράς όπου, για διάφορους λόγους, η ταχύτητα κύματος εξαρτάται από τη συχνότητα του κύματος. Ο μπλε παλμός, είναι η ίδια συνάρτηση Gauss με τον μαύρο παλμό, που αποτελείται από μεγάλο αριθμό συχνοτήτων που προστίθενται μαζί. Ωστόσο, τώρα η ταχύτητα κύματος εξαρτάται από τη συχνότητα, με υψηλότερες συχνότητες να ταξιδεύουν γρηγορότερα από τις χαμηλότερες συχνότητες. Ως αποτέλεσμα, ο παλμός των κυμάτων απλώνεται και αλλάζει σχήμα καθώς ταξιδεύει.

Τα «κεντροειδή» και των δύο παλμών κυμάτων ταξιδεύουν με την ίδια ταχύτητα. Αυτό το γεγονός οδηγεί στην έννοια της «ομαδικής ταχύτητας» που είναι η ταχύτητα με την οποία μεταφέρεται η ενέργεια από το κύμα. Η ταχύτητα της ομάδας είναι η ίδια για κάθε παλμό του κύματος.

Περίληψη

- **Η φασική ταχύτητα** είναι μαθηματική οντότητα και αναφέρεται στα αρμονικά κύματα (που είναι επίσης μαθηματικές οντότητες). Είναι η ταχύτητα κίνησης νοητών σημείων (για μονοδιάστατα κύματα) ίδιας φάσης.
Το αρμονικό κύμα δεν μεταδίδει πληροφορία (εκτός από εκείνη της ύπαρξής του).
- **Η ταχύτητα ομάδας** είναι φυσική οντότητα που αναφέρεται σε πραγματικές διαταραχές. Είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η ενέργεια του κύματος. Είναι η ταχύτητα με την οποία διαδίδεται η πληροφορία.

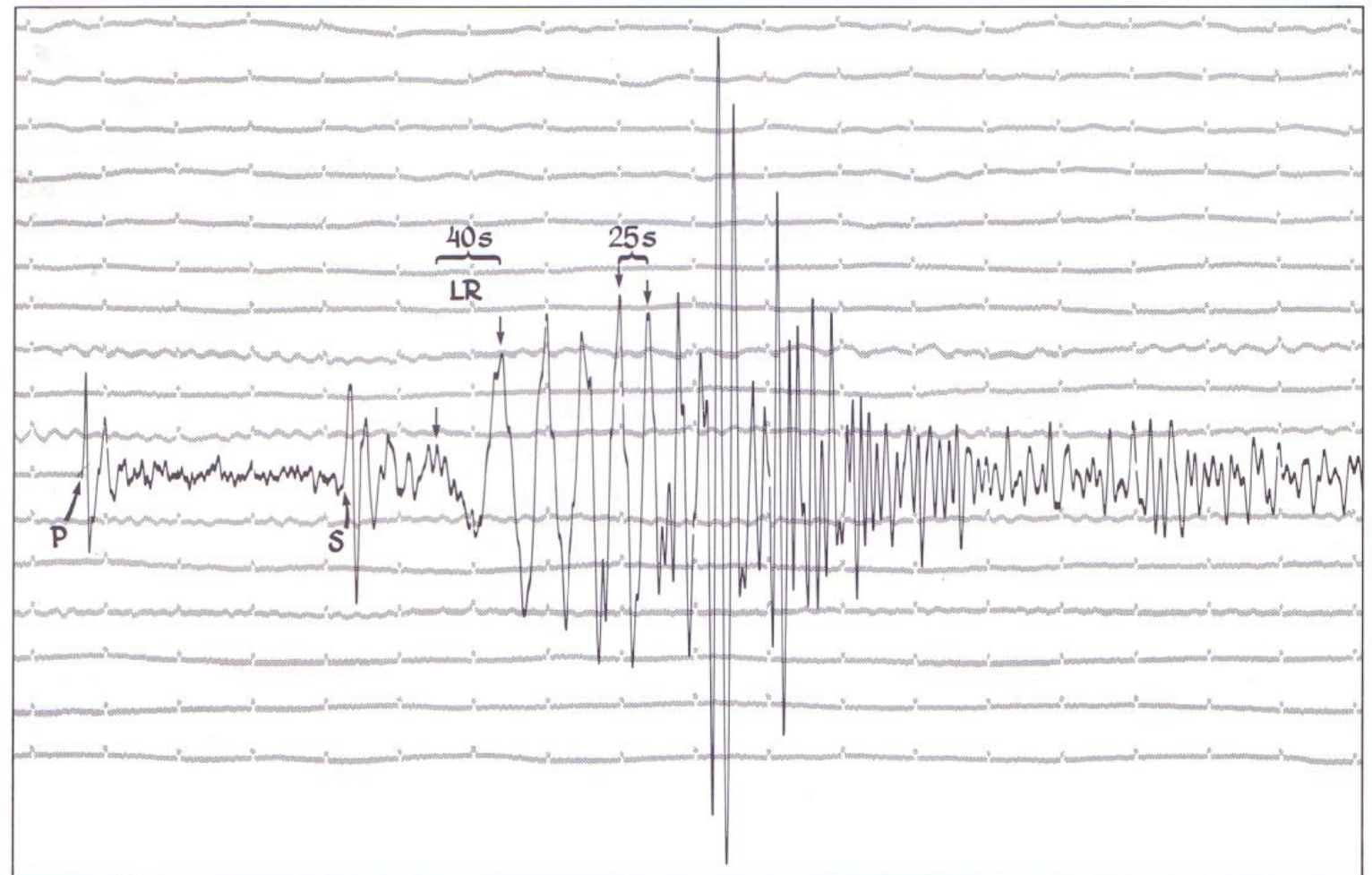
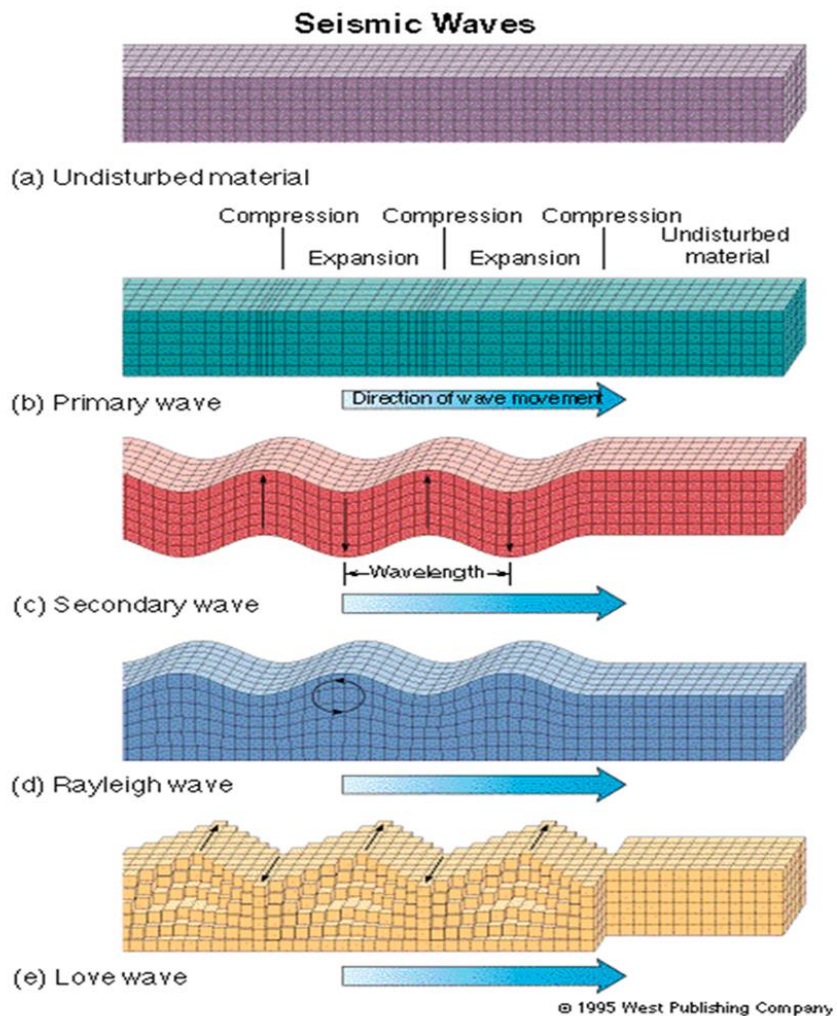
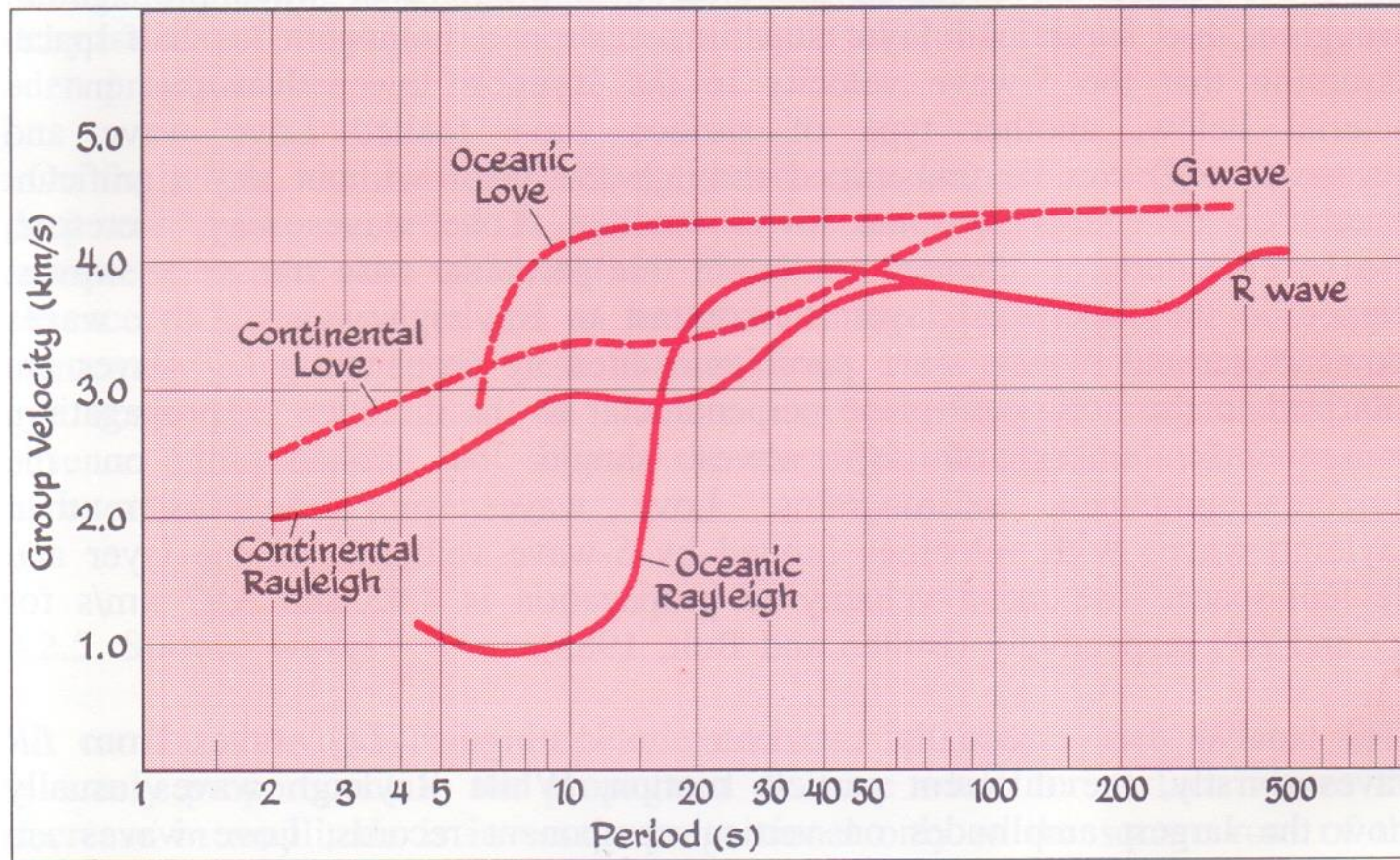


Fig. 7. Seismogram of the earthquake in northern Greece on May 23, 1978, (magnitude $M=5.7$, focal depth $h=9$ km), made at Uppsala, Sweden, at an epicentral distance of 2160 km. The trace has been made on a long-period Press-Ewing seismograph (see Chapter 6) and shows the vertical motion of the ground. Time advances from left to right and there is 1 minute between successive time marks (small upward offsets).

Πηγή: O. Kulháněk, *Anatomy of seismograms*, Elsevier, 1990



Διαγράμματα της ομαδικής ταχύτητας Επιφανειακών Κυμάτων ως συνάρτηση της περιόδου (καμπύλες διασποράς). Παρατηρείστε ότι το σχήμα των καμπύλων υπόκειται σε ισχυρή εξάρτηση από το είδος του δρόμου διάδοσης των σεισμικών κυμάτων.

Πηγή: O. Kulháněk, *Anatomy of seismograms*, Elsevier, 1990