



ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΟ ΑΘΗΝΩΝ  
ΤΜΗΜΑ ΦΥΣΙΚΗΣ  
ΕΡΓΑΣΤΗΡΙΟ ΦΥΣΙΚΗΣ  
«Καΐσαρ Δ. Αλεξόπουλος»  
<http://physlab.phys.uoa.gr>



# Βασικό Εργαστήριο Φυσικής II

ΑΘΗΝΑ 2024

Για την εγκατάσταση των Ασκήσεων και συγγραφή του αντιστοίχου Φυλλαδίου εργάστηκαν τα εξής υπηρετούντα μέλη ΔΕΠ, ΕΔΙΠ και ΕΤΕΠ (με αλφαβητική σειρά): Σπ. Γαρδέλης, Χρ. Γεωργάκη, Στ. Καρατάσου, Ν. Μαμαλούγκος, Ευ. Στυλιάρης, Στρ. Χατζηκωντής

Διευθυντής Εργαστηρίου Φυσικής: Καθηγητής Έκτωρ Νισταζάκης  
e-mail: enistaz@phys.uoa.gr, αρ.τηλ. 210 727 6710

Συντονιστής Εργ.Φ2: Αναπληρωτής Καθηγητής Σπυρίδων Γαρδέλης  
e-mail: sgardelis@phys.uoa.gr, αρ.τηλ. 210 727 6985, 6906

Δικτυακός τόπος Εργαστηρίου Φυσικής: <http://physlab.phys.uoa.gr>.  
Σχεδιασμός, κατασκευή, διαχείριση δικτυακού τόπου, επιμέλεια παρόντος φυλλαδίου και cd διδακτικού υλικού Εργαστηρίου Φυσικής: Νεκτάριος Μαμαλούγκος

## Περιεχόμενα

Κανονισμός λειτουργίας Εργαστηρίου Φυσικής .....	4
Ασφάλεια στο Εργαστήριο Φυσικής .....	8
B1. Μελέτη Στατιστικών Κατανομών .....	11
B2. Μελέτη της επιταχυνόμενης κίνησης, με την βοήθεια της μηχανής του Atwood.....	23
B3. Μέτρηση του συντελεστή εσωτερικής τριβής των υγρών με την πτώση μικρών σφαιρών... 29	
B4. Περιστροφική κίνηση στερεού σώματος ροπές αδράνειας - στροφορμή – κινητική ενέργεια – νόμοι διατήρησης.....	36
B5. Μέτρηση της Παγκόσμιας Σταθεράς της Βαρύτητας, $G$ .....	45
B6. Νόμοι Newton (B & Γ), Μελέτη Ορμής-Ωθησης, Κρούσεις .....	53
B7. Μελέτη απλής αρμονικής κίνησης.....	64
B8. Πειραματική επιβεβαίωση του νόμου του Hooke .....	71
Συμπλήρωμα .....	77

# Κανονισμός Λειτουργίας Εργαστηρίου Φυσικής

## Α. Γενικοί Κανόνες

Όλοι οι φοιτητές που παρακολουθούν το “Βασικό Εργαστήριο Φυσικής ΙΙ” θα **ΠΡΕΠΕΙ Ο-ΠΩΣΔΗΠΟΤΕ** να εγγραφούν στην ιστοσελίδα του στο [eclass, https://eclass.uoa.gr/courses/PHYS179/](https://eclass.uoa.gr/courses/PHYS179/), ώστε να ενημερώνονται άμεσα για κάθε ανακοίνωση που αναρτάται.

**ΕΓΓΡΑΦΗ και ΤΜΗΜΑΤΑ:** Οι φοιτητές/τριες εγγράφονται στο εργαστήριο σε ομάδες των δύο φοιτητών. Τρεις έως πέντε ομάδες συγκροτούν τμήμα το οποίο ασκείται συγκεκριμένη ημέρα και ώρα υπό την επίβλεψη ενός διδάσκοντα.

**ΕΠΙΒΛΕΠΩΝ:** Ο Επιβλέπων ενημερώνει τους φοιτητές/τριες για το όνομά του, το γραφείο του, τηλέφωνο, email, καθώς και ώρες στις οποίες θα μπορούσαν να έλθουν σε επαφή μαζί του για τυχόν απορίες.

**ΣΕΙΡΑ ΑΣΚΗΣΕΩΝ:** Κάθε φοιτητής/τρια εκτελεί αριθμό ασκήσεων, χωρισμένων σε κύκλους, ανάλογα με το Εργαστήριο, συνήθως κυκλικά. Οι φοιτητές/τριες πληροφορούνται κατά την εγγραφή την πρώτη άσκηση και τη σειρά διαδοχής των ασκήσεων. Ειδικά για το (νέο) Εργαστήριο Φ1 υπάρχει ιδιαίτερη διαδοχή των πρώτων εργαστηριακών ασκήσεων (βλέπε Ειδικό Κανόνες).

**ΠΡΟΣΕΛΕΥΣΗ:** Οι φοιτητές/τριες προσέρχονται στην θέση τους ως την επίσημη ώρα έναρξης, η οποία είναι «και τέταρτο» ή «παρά τέταρτο» ανάλογα με την ώρα έναρξης του Τμήματός τους. Για παράδειγμα το Τμήμα 10:00-12:30 ξεκινά στις **10:15** και το 11:30-14:00 στις **11:45 ακριβώς**. Αν η καθυστέρηση υπερβαίνει το όριο αυτό **δεν επιτρέπεται να ασκηθούν και χρεώνονται με απουσία**.

**ΠΡΟΕΤΟΙΜΑΣΙΑ:** Ο φοιτητής/τρια όταν προσέρχεται, θα πρέπει να είναι **προετοιμασμένος** για την Άσκηση που θα εκτελέσει, με βάση το κείμενο του Φυλλαδίου και σχετικές αναφορές. Ο Διδάσκων, με προφορική ή γραπτή εξέταση, αξιολογεί την μελέτη του φοιτητή στην άσκηση που πρόκειται να κάνει.

Αν φοιτητής/τρια δεν έχει προετοιμασθεί για την άσκηση που θα εκτελέσει, λαμβάνει μηδενικό βαθμό προφορικής εξέτασης.

**ΕΚΤΕΛΕΣΗ ΑΣΚΗΣΗΣ:** Το εργαστήριο διαρκεί 2 ½ ώρες και οι φοιτητές/τριες αξιοποιούν όλο τον χρόνο τους. Όταν έχουν ολοκληρώσει τις μετρήσεις τους, αρχίζουν τους υπολογισμούς, την επεξεργασία των μετρήσεων κλπ.

Για την εκτέλεση της εργαστηριακής ασκήσεως ο φοιτητής/τρια πρέπει να: **α.** Εκτελεί την άσκηση σύμφωνα με τις οδηγίες του φυλλαδίου και του διδάσκοντα καταχωρώντας τις μετρήσεις σε κατάλληλα φύλλα εργασίας. **β.** Απευθύνεται στον διδάσκοντα για κάθε απορία.

Μετά το πέρας της άσκησης οι φοιτητές/τριες ο Επιβλέπων υπογράφει τις μετρήσεις και πριν αποχωρήσουν τακτοποιούν την πειραματική διάταξη.

**ΓΡΑΠΤΗ ΕΡΓΑΣΙΑ:** Ακριβώς μία εβδομάδα μετά την εκτέλεση της άσκησης κάθε φοιτητής/τρια παραδίδει την γραπτή εργασία του. Κάθε φοιτητής/τρια υποβάλλει πρωτότυπη, διαφορετική εργασία, για την οποία ισχύουν τα ακόλουθα (η σειρά ενδεικτική, αλλά τα σημεία υποχρεωτικά):

Γράφεται σε φύλλα χαρτιού A4 τα οποία συρράπτονται στο Εξώφυλλο Εργαστηρίου εκτός και δοθούν ειδικά φύλλα από το Εργαστήριο.

Οι γραφικές παραστάσεις πρέπει να είναι σε χιλιοστομετρικό χαρτί (μιλλιμετρέ) ή σε ημιλογαριθμικό χαρτί (ανάλογα με το εύρος τιμών), να είναι φτιαγμένες με το χέρι εκτός από τις Ασκήσεις που εκτελούνται στο Εργαστήριο με την χρήση υπολογιστή.

Στην αρχή της Εργασίας σας γίνεται συνοπτική καταγραφή των φυσικών εννοιών, φαινομένων και μεγεθών οι οποίες χρησιμοποιούνται στην άσκηση.

Ακολουθεί σύντομη και περιεκτική περιγραφή της πειραματικής διάταξης και πειραματικής διαδικασίας με τα σχετικά σχήματα.

Οι πίνακες των δεδομένων, η επεξεργασία των μετρήσεων, οι απαραίτητες γραφικές παραστάσεις και τα τελικά αποτελέσματα με τις κατάλληλες μονάδες τους.

Ο σχολιασμός των αποτελεσμάτων.

Οι απαντήσεις στις ερωτήσεις του φυλλαδίου.

Στο τέλος επισυνάπτονται οι σελίδες με τις υπογεγραμμένες από τον Επιβλέποντα πειραματικές μετρήσεις.

**ΕΛΕΓΧΟΣ ΕΡΓΑΣΙΩΝ:** Ο Επιβλέπων στη διάρκεια μιας εβδομάδας ελέγχει τις εργασίες και στη συνέχεια δείχνει στους φοιτητές/τριες τις διορθώσεις του συζητώντας μαζί τους (με όλους ή ατομικά) τα προβλήματα που είχαν. Οι φοιτητές/τριες βλέπουν τα λάθη τους, αλλά δεν δικαιούνται να πάρουν μαζί τους την διορθωμένη εργασία.

**ΒΑΘΜΟΛΟΓΙΑ:** Οι φοιτητές/τριες βαθμολογούνται σε κάθε άσκηση. Ο βαθμός άσκησης προκύπτει από τον προφορικό βαθμό (δραστηριότητα στη άσκηση, γνώσεις κλπ., με βάρος 50%) και από την γραπτή εργασία (με βάρος 50%). Από τους βαθμούς των ασκήσεων κάθε κύκλου προκύπτει βαθμός κύκλου. Ο βαθμός ΔΕΝ είναι ακέραιος, αλλά έχει την μορφή #.#.

Ο τελικός βαθμός του εργαστηρίου προκύπτει από τους βαθμούς των κύκλων και είναι ακέραιος.

Αν φοιτητής/τρια δεν παραδώσει εγκαίρως την γραπτή εργασία, λαμβάνει μηδενικό βαθμό στην άσκηση (προφορικό & γραπτό).

Αν φοιτητής/τρια δεν παραδώσει περισσότερες από δύο γραπτές εργασίες στον κύκλο, **επαναλαμβάνει το εργαστήριο σε επόμενο ακαδημαϊκό έτος.**

Αν φοιτητής/τρια λάβει στο εργαστήριο βαθμό κάτω από την βάση (< 5), **επαναλαμβάνει το εργαστήριο σε επόμενο ακαδημαϊκό έτος.**

**ΑΠΟΥΣΙΑ:** Αν φοιτητής/τρια δεν προσέλθει σε άσκηση χρεώνεται με απουσία. Μία (1) μόνο απουσία αναπληρώνεται από τον φοιτητή/τρια μετά την ολοκλήρωση του συνόλου των Εργαστηριακών Ασκήσεων στην **Συμπληρωματική Εργαστηριακή Άσκηση**, σε ημέρα και ώρα που καθορίζεται από το Συντονιστή του αντίστοιχου Εργαστηρίου. Αν ο φοιτητής/τρια χρεωθεί περισσότερες από μία απουσίες (ανεξάρτητα από ποιο κύκλο τις έχασε), **επαναλαμβάνει όλο το Εργαστήριο σε επόμενο ακαδημαϊκό έτος.**

**ΑΝΑΦΟΡΑ ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΩΝ:** Σε περίπτωση μη καλής λειτουργίας των οργάνων και/ή για κάθε άλλο πρόβλημα οι φοιτητές/τριες απευθύνονται **άμεσα** στον διδάσκοντα, ο οποίος, ή επιλύει το πρόβλημα, ή καλεί τα μέλη ΕΤΕΠ (Ηλεκτρονικοί Μηχανικοί στο Παρασκευαστήριο).

**ΠΡΟΣΟΧΗ!** Δεν επιτρέπεται το κάπνισμα και τα τρόφιμα κλπ. στις αίθουσες και στους διαδρόμους των Εργαστηρίων.

---

## B. Ειδικό Κανόνες

### Εργαστήριο Φυσικής I

- Ειδικό εισαγωγικό Εργαστήριο 1<sup>ου</sup> εξαμήνου
- Τέσσερις δίωρες Εισαγωγικές Διαλέξεις στο Αμφιθέατρο Αρίσταρχος

- Μία εισαγωγική άσκηση εφαρμογής της θεωρίας σφαλμάτων από τις Διαλέξεις (A1).
- Δύο βασικές εργαστηριακές ασκήσεις για το τρόπο διεξαγωγής της πειραματικής μέτρησης και τα λογισμικά εργαλεία για την λήψη και την επεξεργασία των μετρήσεων (A2 και A3)
- Γραπτή δīωρη εξέταση σε όλη την παραπάνω ύλη και βαθμός 1<sup>ου</sup> κύκλου
- Τρεις ασκήσεις (A4, A5 και A6) σε κυκλική σειρά που σχετίζονται: (α) με χρήση νέων τεχνολογιών στις μετρήσεις (αισθητήρες, διεπαφές, Η/Υ και κατάλληλο λογισμικό), (β) βασική εξοικείωση με θέματα ηλεκτρισμού, κυκλωμάτων και αντίστοιχης οργανολογίας και (γ) μέτρηση διαστάσεων αντικειμένων, όγκου αυτών, μάζας και προσδιορισμό πυκνοτήτων, με χρήση παχυμέτρων και μικρομέτρων, καταλλήλων ζυγών μάζας και άνωσης σωμάτων, με υπολογισμό συνθέτων σχετικών σφαλμάτων με την μέθοδο της διάδοσης σφάλματος
- Ασκούνται δύο φοιτητές ανά διάταξη.
- Η διάρκεια κάθε άσκησης είναι 3h.

### **Εργαστήριο Φυσικής II**

- Θεματικό περιεχόμενο κυρίως η Μηχανική και η Θερμοδυναμική.
- Δύο κύκλοι των τεσσάρων ασκήσεων έκαστος.
- Ασκούνται δύο φοιτητές ανά διάταξη.
- Η διάρκεια κάθε άσκησης είναι 3h.

### **Εργαστήριο Φυσικής III**

- Θεματικό περιεχόμενο η Θερμοδυναμική και κυρίως η Κυματική-Οπτική.
- Δύο κύκλοι των τεσσάρων ασκήσεων έκαστος.
- Ασκούνται δύο φοιτητές ανά διάταξη.
- Η διάρκεια κάθε άσκησης είναι 3h.

### **Εργαστήριο Φυσικής IV**

- Θεματικό περιεχόμενο ο Ηλεκτρομαγνητισμός και η Σύγχρονη Φυσική.
- Δύο κύκλοι των τεσσάρων ασκήσεων έκαστος.
- Ασκούνται δύο φοιτητές ανά διάταξη.
- Η διάρκεια κάθε άσκησης είναι 3h.

### **Εργαστήριο Φυσικής Τμήματος Γεωλογίας**

- Μία εισαγωγική άσκηση εφαρμογής της θεωρίας σφαλμάτων.
- Δύο κύκλοι των τριών ασκήσεων έκαστος.
- Ασκούνται δύο φοιτητές ανά διάταξη.
- Η διάρκεια κάθε άσκησης είναι 2h.

### **Εργαστήριο Φυσικής Τμήματος Βιολογίας**

- Μία εισαγωγική άσκηση εφαρμογής της θεωρίας σφαλμάτων.
- Δύο κύκλοι των τριών ασκήσεων έκαστος.

- Ασκούνται δύο φοιτητές ανά διάταξη.
- Η διάρκεια κάθε άσκησης είναι 1.5h.

## Άλλες Πληροφορίες για το Εργαστήριο Φυσικής

Το Εργαστήριο Φυσικής βρίσκεται στο Ισόγειο της Δυτικής πτέρυγας του Κτηρίου IV, δεξιά των εισερχομένων στην κυρία είσοδο του Τμήματος Φυσικής.

Το Εργαστήριο Φυσικής είναι το μεγαλύτερο εκπαιδευτικό εργαστήριο του Πανεπιστημίου Αθηνών και μία από τις μεγαλύτερες εκπαιδευτικές μονάδες της χώρας. Υπάγεται διοικητικώς στο Τμήμα Φυσικής, το οποίο εκλέγει τον Διευθυντή και τον Αναπληρωτή Διευθυντή του Εργαστηρίου Φυσικής και το στελεχώνει με διδακτικό, διοικητικό και τεχνικό προσωπικό.

Το Εργαστήριο Φυσικής σήμερα εκπαιδεύει κάθε ακαδημαϊκό έτος συνολικά πάνω από 800 φοιτητές (Α, Β, Γ και Δ εξάμηνο του Τμήματος Φυσικής, καθώς και στο Α εξάμηνο των Τμημάτων Βιολογίας και Γεωλογίας). Στην εκπαιδευτική αυτή διαδικασία εμπλέκονται μέλη ΔΕΠ του Τμήματος Φυσικής, μεταπτυχιακοί φοιτητές, μεταδιδακτορικοί ερευνητές και το προσωπικό του Εργαστηρίου.

Στο Εργαστήριο Φυσικής υπάγεται το Μηχανουργείο του Τμήματος, στο οποίο πραγματοποιούνται κατασκευές, απαραίτητες τόσο για την λειτουργία του Εργαστηρίου, όσο και για διάφορες ερευνητικές δραστηριότητες του Τμήματος.

Το Εργαστήριο Φυσικής δίνει επίσης την δυνατότητα εκπόνησης διπλωματικών εργασιών (Ειδικό Θέμα), κυρίως στην Εκπαίδευση, με θέματα που αφορούν στην Διδακτική της Φυσικής και ιδιαιτέρως στον ρόλο της εργαστηριακής εκπαίδευσης. Άλλωστε στους τομείς αυτούς εκπονούνται και ερευνητικά έργα με τα προαναφερθέντα θεματικά περιεχόμενα.

## Ασφάλεια στο Εργαστήριο Φυσικής

Σε κάθε Εργαστηριακό χώρο ισχύουν μερικοί απλοί και αποτελεσματικοί κανόνες που σκοπό έχουν την αποφυγή ατυχημάτων ή τις φθορές εξοπλισμού και την παροχή βοήθειας σε περίπτωση ανάγκης.

Επισημαίνουμε ότι οι κύριοι κίνδυνοι στο Βασικό Εργαστήριο ΦΥΣΙΚΗΣ I, II, III και IV, πηγάζουν από την **φωτιά, τον ηλεκτρισμό** και την **χρήση ειδικών υλικών**. Σε κάθε περίπτωση οι Επιβλέποντες και το προσωπικό του Εργαστηρίου θα σας βοηθήσουν όπου χρειαστεί.

Η δομή των χώρων του Εργαστηρίου είναι απλή· υπάρχουν δύο έξοδοι στα αντίστοιχα δύο άκρα του διαδρόμου του εργαστηρίου. **Αν χρειασθεί να γίνει εκκένωση των χώρων κινούμαστε αντίστοιχα προς την κατάλληλη ασφαλή έξοδο.**

### Ασθένεια - ατύχημα

Είναι δυνατόν κάποιος από εσάς να αρρωστήσει και να αισθανθεί άσχημα ή ακόμα και να πάθει ένα μικρό ατύχημα κλπ.. Ανάλογα με την περίπτωση η βοήθεια από τον Επιβλέποντα, η μεταφορά στο Ιατρείο της Πανεπιστημιούπολης (Τηλ. **210 7277873**) ή η κλήση ασθενοφόρου στο 166 (**διευκρινίζοντας που ακριβώς ευρίσκεται το άτομο**), είναι κάτι που πρέπει να σταθμιστεί άμεσα και ανάλογα.

Η συνδρομή του ίδιου του ασθενούς με πληροφόρηση, ειδοποίηση οικείου προσώπου αν χρειαστεί ή πληροφόρηση από φίλου/ης είναι επίσης ουσιαστική για την γρηγορότερη ανακούφιση του.

Επίσης, έξω από το Γραφείο των Ηλεκτρονικών Μηχανικών του Εργαστηρίου (Παρασκευαστήριο) υπάρχει ένα μικρό φαρμακείο εξοπλισμένο με τα βασικά για την παροχή πρώτων βοηθειών.

<http://www.redcross.gr>

### Ηλεκτρισμός

Στα κυκλώματα των ασκήσεων του Εργαστηρίου χρησιμοποιούνται χαμηλές τάσεις. Παρόλο που ο κίνδυνος ηλεκτροπληξίας είναι σαφώς μικρότερος του αντίστοιχου που έχουμε στο σπίτι μας, είναι απαραίτητη η προσοχή μας ιδίως στην σύνδεση οργάνων στο δίκτυο. **Ποτέ δεν βάζουμε στη πρίζα ένα κύκλωμα πριν ο Επιβλέπων το ελέγξει!**

**Σε περίπτωση ηλεκτροπληξίας θα πρέπει πρώτα να αποκόπτεται το ρεύμα από τους ασφαλειοδιακόπτες** που είναι καταμετρημένοι κοντά στις παροχές· αν αυτό δεν είναι εφικτό, τότε **πρέπει να απομακρύνεται το άτομο με κατάλληλο μονωτικό υλικό (π.χ. ένα στεγνό ρούχο)**. Ο χρόνος εδώ είναι βασικό στοιχείο. Άμεσα θα πρέπει να γίνει κλήση για ασθενοφόρο στο 166 περιγράφοντας το τι έχει συμβεί και **που ακριβώς ευρίσκεται το άτομο**. Η επαγγελματική γνώση τεχνητής αναπνοής μπορεί σε κάποια σοβαρή περίπτωση να σώσει ζωή.

[http://www.electronics-lab.com/articles/files/electric\\_shock.pdf](http://www.electronics-lab.com/articles/files/electric_shock.pdf)

### Ραδιενέργεια

**Χρήση ραδιενεργών πηγών:** Η χρήση των ειδικών στην εκπαίδευση ραδιενεργών πηγών γίνεται με τις κατάλληλες οδηγίες του Διδάσκοντα. Θα τις χρησιμοποιήσετε στο Εργαστήριο Φυσικής II και αργότερα στο Εργαστήριο της Πυρηνικής Φυσικής. Στα Εργαστήρια Φυσικής ο φοιτητής πρέπει να υπογράψει σε κατάλληλο φύλλο την παραλαβή και μετά την χρήση, αντίστοιχα για την επιστροφή της πηγής στο Παρασκευαστήριο.

Οι πηγές αυτές είναι ασφαλείς. Ωστόσο δεν πρέπει να τις χειριζόμαστε χωρίς λόγο, να κοιτάζουμε από κοντά την έξοδο των σωματιδίων ή να τις τοποθετούμε έτσι ώστε τα σωματίδια να κατευθύνονται σε μάς ή στους συμφοιτητές μας. **Ποτέ** δεν τις κρατούμε με τα δάχτυλα στο «**παράθυρο**» της πηγής. Σε περίπτωση που δείτε ότι το ειδικό προστατευτικό παράθυρο είναι χαλαγμένο ή



σπασμένο να το αναφέρετε αμέσως στον Επιβλέποντα. Αστειότητες με τις ραδιενεργές πηγές συνεπάγεται άμεση διαγραφή από το Εργαστήριο.

<http://www.eeae.gr>

### Ακτινοβολίες Laser

**Χρήση συσκευών παραγωγής Laser:** Οι συσκευές παραγωγής ακτινών Laser χρησιμοποιούνται στα νέα Εργαστήρια Φυσικής II, III και IV. **Απαγορεύεται** να κατευθύνουμε την δέσμη τους στα μάτια μας είτε στα μάτια κάποιου συνάδελφου. Ιδιαίτερη προσοχή χρειάζεται ώστε να μη συμβεί αυτό και από ισχυρή ανάκλαση της δέσμης από ιδιαίτερα στιλπνή επιφάνεια ή καθρέπτη. Ο Επιβλέπων θα σας δώσει οδηγίες για την ασφαλή χρήση του laser του πειράματός σας.

[http://www.osha.gov/SLTC/etools/eyeandface/ppe/laser\\_safety.html](http://www.osha.gov/SLTC/etools/eyeandface/ppe/laser_safety.html)

### Υλικά

**Χρήση υγρού αζώτου:** Το υγρό άζωτο (LN<sub>2</sub>) βρίσκεται (σε ατμοσφαιρική πίεση) σε θερμοκρασία -196°C!! Διατηρείται και μεταφέρεται μέσα σε ειδικά θερμομονωτικά δοχεία (δοχεία Dewar – παρόμοια με τα γνωστά μας "θερμός"). **Κατά την διαδικασία ενός πειράματος με υγρό άζωτο ακολουθείτε τις οδηγίες του Επιβλέποντα αποφεύγοντας απότομες κινήσεις που θα οδηγούσαν στο να χυθεί ποσότητα LN<sub>2</sub> πάνω σας.** Η δράση του αν πέσει μεγάλη ποσότητα πάνω σας είναι σαν να έχετε πάθει ένα έγκαυμα. Στα ρούχα επιφέρει μερική καταστροφή. Αν από ατύχημα πάθετε έγκαυμα θα πρέπει να ειδοποιηθεί το 166 (**διευκρινίζοντας που ακριβώς βρίσκεται το άτομο**) Ασθενοφόρο για την παροχή επαγγελματικής και υπεύθυνης βοήθειας.

<http://www.matheson-trigas.com/msds/00202589.pdf>

### Πυρκαγιά

Να θυμάστε ότι για να έχουμε φωτιά, χρειάζεται να συνυπάρχουν 3 προϋποθέσεις **(α) το κατάλληλο εύφλεκτο υλικό (β) το οξυγόνο και (γ) η υψηλή θερμοκρασία.** Όταν έστω και ένας από τους παραπάνω 3 παράγοντες δεν υπάρχει τότε δεν έχουμε φωτιά. Ειδικά πρέπει να προσέχουμε τα εύφλεκτα υλικά (π.χ. οινόπνευμα). Φυσικά οι δύο πρώτοι παράγοντες πάντα υπάρχουν, άρα ο τρίτος είναι ο κύριος κίνδυνος ώστε να εκδηλωθεί φωτιά στο εργαστήριο.

Αν απομακρύνουμε έναν από τους τρεις αυτούς παράγοντες τότε η φωτιά θα σβήσει. Στο χώρο του Εργαστηρίου, λόγω της ύπαρξης ηλεκτρικού ρεύματος, απομακρύνουμε το οξυγόνο από την φωτιά με την χρήση των ειδικών πυροσβεστήρων. Υπάρχουν πολλοί πυροσβεστήρες κατάλληλου τύπου (CO<sub>2</sub>) που μπορούν να χρησιμοποιηθούν με παρουσία ηλεκτρικού ρεύματος.

**Να θυμάστε ότι το πυροσβεστικό υλικό για να έχει αποτελεσματικότητα θα πρέπει να κατευθύνεται στη βάση της φωτιάς** (όπου γίνεται η καύση του υλικού) και ότι ο χρόνος εκροής από ένα πυροσβεστήρα είναι ~30- 40 δευτερόλεπτα **μόνο!**

Ακόμη μία καλά βρεγμένη (προσοχή να μην χρησιμοποιείται τίποτα το βρεγμένο αν η φωτιά είναι συνδυασμένη με υπό τάση συσκευή) πετσέτα ή ρούχο αποτελούν έναν απλό και αποτελεσματικό τρόπο κατάσβεσης πυρκαγιάς σε αρχικό στάδιο.

Να θυμάστε επίσης ότι **ο χρόνος** είναι ουσιαστικό στοιχείο της αντιμετώπισης μιας πυρκαγιάς. Οι πυροσβέστες, για να τονίσουν το θέμα της άμεσης αντίδρασης σε περίπτωση φωτιάς, αναφέρουν μισοσοβαρά – μισοαστεία ότι «το πρώτο λεπτό η φωτιά σβήνει με ...ένα ποτήρι νερό, το 5' με πυροσβεστήρα και μετά από 15-20 λεπτά μόνο με παρέμβασή τους!». Προφανώς άμεση πρέπει να είναι, εφόσον απαιτείται, και η κλήση της Πυροσβεστικής Υπηρεσίας στο 199, προσδιορίζοντας με ακρίβεια τόπο και ειδικές συνθήκες / υλικά στο χώρο της φωτιάς.

<http://www.fireservice.gr>

## Σεισμός

Ισχύουν οι γενικές οδηγίες του Οργανισμού Αντισεισμικού Σχεδιασμού και Προστασίας προς τον πληθυσμό. Την ώρα του σεισμού καλυφθείτε αμέσως κάτω από μία εργαστηριακή έδρα (πάγκο) και απομακρυνθείτε από τζαμαρίες και βαριές οργανοθήκες. Μη τρέξετε προς την έξοδο. Μετά το πέρας του σεισμού, αν χρειάζεται, εξέρχεστε χωρίς πανικό από το κτίριο και αν υπάρχει ανάγκη βοήθειας προς άλλα άτομα, προσπαθείτε να την προσφέρετε στο μέτρο του δυνατού. Καλέστε ασθενοφόρο, εφόσον απαιτείται. Καταφύγετε στην συνέχεια σε ανοικτό ασφαλές χώρο, είτε προς την πλευρά του Κοιμητηρίου Ζωγράφου, είτε προς το ανοικτό μέρος της Φιλοσοφικής Σχολής, είτε προς τον ανοικτό χώρο σταθμεύσεως της Σχολής Θετικών Επιστημών.

<http://www.oasp.gr/defaultflash.htm>

## Ιοί - Γρίπη

Οδηγίες σχετικά με την κοινή γρίπη:

[http://www.keel.org.gr/keelpno/2009/id994/afisa\\_mv.pdf](http://www.keel.org.gr/keelpno/2009/id994/afisa_mv.pdf)

**ΠΡΟΣΟΧΗ:** Προστατεύστε τον εαυτό σας και τους γύρω σας από την γρίπη. Μη διασπείρετε τα μικρόβια: Καλύψτε το στόμα και την μύτη σας με χαρτομάντιλο, όταν βήχετε ή φταρνίζετε. Πετάξτε αμέσως το χαρτομάντιλο στο καλάθι των απορριμμάτων. Αν δεν έχετε χαρτομάντιλο; Φταρνιστείτε στον αγκώνα σας και όχι στα χέρια σας. Πλύνετε τα χέρια σας με σαπούνι και νερό ή χρησιμοποιήστε αλκοολούχο αντισηπτικό διάλυμα. Μην αγγίζετε τα μάτια, την μύτη και το στόμα σας.

Υπουργείο Υγείας & Κοινωνικής Αλληλεγγύης, Κέντρο Ελέγχου & Πρόληψης Νοσημάτων (ΚΕ.ΕΛ.Π.ΝΟ.) <http://www.keel.org.gr>

Πληροφορίες για την νέα γρίπη Α (H1N1) στον ιστοχώρο του Πανεπιστημίου Αθηνών: <http://www.uoa.gr/h1n1/> και στην τηλεφωνική γραμμή: **210-3689797**

## Ιός του Δυτικού Νείλου

Πληροφορίες κλπ. Για την λοίμωξη από τον ιό του Δυτικού Νείλου: Τι είναι, πώς μεταδίδεται, ποια τα συμπτώματα, ποια η θεραπεία, πώς αποφεύγεται η μόλυνση, στην διεύθυνση:

<http://news.in.gr/files/1/2010/WNV.pdf>

## CoVid 19

Εθνικός Οργανισμός Δημόσιας Υγείας <https://eody.gov.gr/>

Επικαιροποιημένες πληροφορίες για CoVid19: <https://eody.gov.gr/neos-koronaio-covid-19/>

Γενικές οδηγίες:

Πλένουμε συχνά και σχολαστικά τα χέρια μας με σαπούνι και νερό ή αλκοολούχο διάλυμα.

Αποφεύγουμε να αγγίζουμε με τα χέρια μας, τη μύτη, το στόμα και τα μάτια μας.

Όταν βήχουμε ή φτερνιζόμαστε καλύπτουμε το στόμα και τη μύτη μας με τον αγκώνα ή με ένα χαρτομάντιλο και πλένουμε αμέσως μετά τα χέρια μας. Απορρίπτουμε το χαρτομάντιλο αμέσως σε κλειστό κάδο.

Αποφεύγουμε κοντινές επαφές.

Αν παρουσιάσουμε συμπτώματα πυρετού, βήχα, ή δυσκολίας στην αναπνοή, επικοινωνούμε με το γιατρό μας ή τον ΕΟΔΥ 210 5212054 και <https://eody.gov.gr/> και παραμένουμε στο σπίτι μας.

# B1. Μελέτη Στατιστικών Κατανομών

## Σκοπός της ασκήσεως

Τόσο στην καθημερινή μας ζωή, όσο και στη Φυσική υπάρχουν πολλά γεγονότα, τα οποία είτε θεωρούμε, είτε είναι τυχαία. Αποδεικνύεται ότι τα τυχαία γεγονότα διέπονται από ορισμένους κανόνες, με άλλα λόγια περιγράφονται από κάποιες «κατανομές». Κάποιες από αυτές, τις πιο διαδεδομένες θα μελετήσουμε στην παρούσα άσκηση.

**A. Κατανομές Gauss, Maxwell με χρήση μηχανικών μοντέλων.** Στο πρώτο μέρος, χρησιμοποιώντας απλά μηχανικά μοντέλα, λαμβάνονται παραστατικά οι κατανομές Gauss και Maxwell για διάφορες περιπτώσεις και μελετώνται μερικά χαρακτηριστικά των «ισοδύναμων αερίων», δηλαδή «αερίων», για τα οποία οι κατανομές τους συμπίπτουν με τις κατανομές που λαμβάνουμε πειραματικά.

**B: Κατανομές με χρήση ραδιενεργού πηγής και απαριθμητή Geiger-Müller.** Στο δεύτερο μέρος γίνεται επαλήθευση διάφορων στατιστικών κατανομών με την αξιοποίηση του γεγονότος, ότι η διάσπαση των ραδιενεργών πυρήνων είναι φαινόμενο που υπόκειται στους νόμους της στατιστικής. Για την μελέτη του φαινομένου χρησιμοποιείται ραδιενεργός πηγή και τα προϊόντα της διάσπασης των πυρήνων καταγράφονται με τον απαριθμητή Geiger-Müller.

## Στοιχεία από την θεωρία

### Διωνυμική κατανομή

Είναι γνωστό, ότι αν υπάρχει κάποιος γηγόνος το οποίο μπορεί να συμβεί (επιτυχία) ή να μη συμβεί (αποτυχία) κατά την διάρκεια μιας «δοκιμής» (π.χ. να πάρουμε «γράμματα» όταν στρίβουμε ένα νόμισμα, να έλθει 3 όταν ρίχνουμε ένα ζάρι κλπ.), τότε η πιθανότητα να έχουμε  $m$  «επιτυχίες» σε  $n$  δοκιμές δίδεται από τον τύπο της **διωνυμικής κατανομής**:

$$P(m, n) = \frac{n!}{m!(n-m)!} p^m (1-p)^{n-m}, \quad 0 \leq m \leq n \quad (1)$$

όπου  $p$  η πιθανότητα να έχουμε επιτυχία σε μια δοκιμή (π.χ. για το νόμισμα  $p=1/2$ , για το ζάρι  $p=1/6$  κλπ.). Μπορεί να αποδειχθεί, αλλά και λογικά φαίνεται ότι η κατανομή  $P(m, n)$ , όπως εκφράζεται από την παραπάνω σχέση, είναι κανονικοποιημένη, δηλαδή ισχύει:  $\sum_{m=0}^n p(m, n) = 1$ .

Από την (1) βρίσκουμε<sup>1</sup> ότι ο μέσος αριθμός των επιτυχών γεγονότων σε  $n$  δοκιμές είναι:

$$m_o = np \quad (2)$$

και είναι προφανές ότι αν κάνουμε σειρά πειραμάτων με  $n$  δοκιμές στο καθένα η μέση τιμή των διάφορων  $m$  που θα βρούμε θα δίνεται επίσης από την (2).

Ιδιαίτερο ενδιαφέρον παρουσιάζει η διωνυμική κατανομή όταν  $n \rightarrow \infty$ . Τότε τείνει σε όριο που η μορφή του εξαρτάται από τον τρόπο με τον οποίο το  $n \rightarrow \infty$ . Δύο είναι οι πιο ενδιαφέρουσες περιπτώσεις:

<sup>1</sup> Η απόδειξη αυτού και άλλων τύπων της άσκησης περιέχεται στη σχετική βιβλιογραφία.

## Κατανομή Poisson

α)  $n \rightarrow \infty$  και  $np = \text{const}$ . Τότε έχουμε την **κατανομή Poisson**:

$$P(m, \langle m \rangle) = \frac{\langle m \rangle^m}{m!} e^{-\langle m \rangle}, \quad 0 \leq m \leq \infty \quad (3)$$

που μάς δίδει την πιθανότητα να λάβουμε γεγονότα κι είναι ανεξάρτητη από τον αριθμό των δοκιμών  $n$ , εφόσον μπορούμε να υπολογίσουμε (πειραματικά ή θεωρητικά) το  $\langle m \rangle$ . Μπορεί να αποδειχθεί ότι και η κατανομή Poisson, όπως εκφράζεται από την παραπάνω σχέση είναι κανο-

νικοποιημένη, δηλαδή ισχύει:  $\sum_{m=0}^{\infty} p(m, \langle m \rangle) = 1$ .

## Κατανομή Gauss

β)  $n \rightarrow \infty$  και  $p = \text{const}$ . Τότε έχουμε την **κανονική κατανομή** ή **κατανομή Gauss** που σε ένα μεγάλο πλήθος μάς αποδίδει την πιθανότητα να έχουμε την τιμή  $m$ :

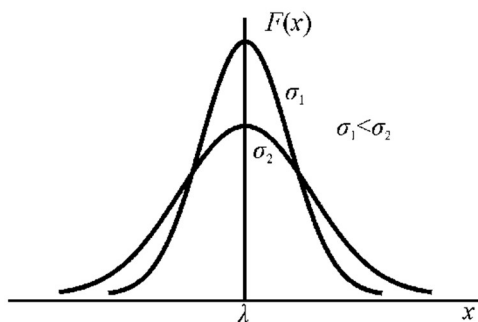
$$P(m) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\langle x \rangle)^2}{2\sigma^2}} \quad (4)$$

όπου  $\langle x \rangle$  είναι η μέση τιμή του  $x$  και  $\sigma$  η μέση τετραγωνική απόκλιση (διασπορά):

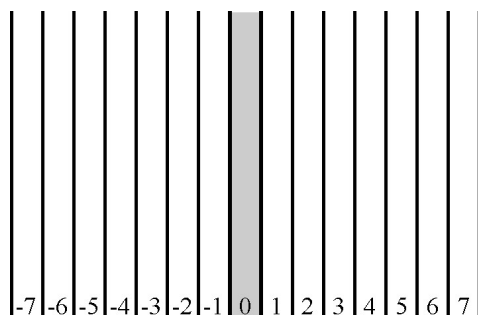
$$\sigma = \sqrt{\langle x^2 \rangle - \langle x \rangle^2} \quad (5)$$

Οι τύποι ισχύουν για μεγέθη που λαμβάνουν συνεχείς τιμές, πολλές φορές όμως χρησιμοποιούνται και για διακριτές. Πρόκειται για τον πιο διαδεδομένο στη φύση νόμο κατανομής τυχαίων ποσοτήτων. Ισχύει στην περίπτωση που η τυχαία ποσότητα εξαρτάται από μεγάλο αριθμό παραγόντων που μπορούν να προκαλέσουν με την ίδια πιθανότητα θετικές ή αρνητικές αποκλίσεις γύρω από την μέση («πραγματική») τιμή.

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης  $P(x)$  για δυο διαφορετικά  $\sigma$  φαίνεται στο σχ. 1. Ας δούμε μερικά παραδείγματα.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Έχουμε ένα συγκεκριμένο σώμα και μετρούμε το χρόνο που χρειάζεται για να διανύσει μια, πάντα την ίδια, απόσταση. Αν ο αριθμός των μετρήσεών μας είναι πολύ μεγάλος ( $\rightarrow \infty$ ) και στον οριζόντιο άξονα μιας γραφικής παράστασης βάλουμε το χρόνο, ενώ στον κατακόρυφο αριθμό που να μάς δείχνει πόσες φορές βρήκαμε χρόνο μεταξύ  $t$  και  $t+dt$  θα πάρουμε κατανομή παρόμοια με αυτή του σχ. 1.

Το ίδιο θα έχουμε αν μετρήσουμε το ύψος ενός πολύ μεγάλου αριθμού ανθρώπων και στον οριζόντιο άξονα βάλουμε το ύψος, ενώ στον κατακόρυφο το πλήθος των ανθρώπων που βρήκαμε να έχουν το ίδιο ύψος.

Παρόμοιο αποτέλεσμα θα πάρουμε αν φιάξουμε έναν στόχο σαν αυτόν του σχ. 2 και διαρκώς σκοπεύουμε με ένα βελάκι από μια απόσταση μερικών μέτρων την στήλη 0. Τότε θα πρέπει στον οριζόντιο άξονα να τοποθετήσουμε την απόσταση από το κέντρο 0, ενώ στον κατακόρυφο το πόσες φορές χτυπήσαμε στην αντίστοιχη υποδοχή.

## Κατανομή Maxwell

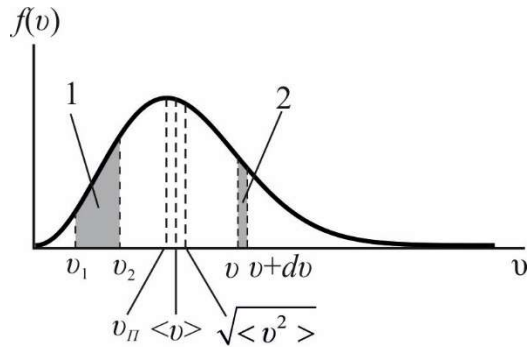
Τυχαιές μπορούμε να θεωρήσουμε και τις ταχύτητες των μορίων ενός αερίου. Στην περίπτωση αυτή η πιθανότητα για κάθε μόριο να έχει ταχύτητα το μέτρο της οποίας βρίσκεται στην περιοχή μεταξύ  $u$  και  $u+du$  (ή με άλλα λόγια το ποσοστό των μορίων με ταχύτητες μεταξύ  $u$  και  $u+du$ ) δίνεται από την **κατανομή Maxwell**:

$$f(v)dv = 4\pi \left( \frac{m}{2\pi kT} \right)^{3/2} v^2 e^{-mv^2/2kT} dv \quad (6)$$

όπου  $m$  η μάζα κάθε μορίου,  $k$  η σταθερά Boltzmann ( $k=1,3807 \cdot 10^{-23} \text{ J/K}$ ) και  $T$  η απόλυτη θερμοκρασία Kelvin.

Η συνάρτηση  $f(u)$  της (6) που είναι η πυκνότητα της πιθανότητας παριστάνεται γραφικά στο σχήμα 3. Από την ίδια σχέση καταλαβαίνουμε ότι η γραμμοσκιασμένη περιοχή 1 του σχήματος μάς δίνει την πιθανότητα η ταχύτητα του σωματιδίου να είναι μεταξύ  $u_1$  και  $u_2$ , ενώ η γραμμοσκιασμένη περιοχή 2 η πιθανότητα να έχει ταχύτητες μεταξύ  $u$  και  $u+du$ .

Από αυτά γίνεται σαφές ότι το εμβαδόν του σχήματος που περικλείεται μεταξύ της καμπύλης  $f(u)$  και του άξονα των  $u$  θα πρέπει να είναι ίσο με την μονάδα. Από την (6) υπολογίζουμε:



Σχήμα 3

την πιθανότερη ταχύτητα:

$$v_{II} = \sqrt{\frac{2kT}{m}} \quad (7)$$

την μέση ταχύτητα:

$$\langle v \rangle = \sqrt{\frac{8kT}{\pi m}} \quad (8)$$

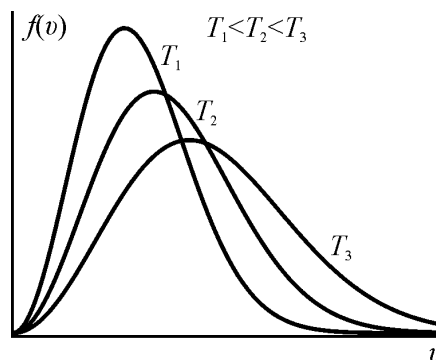
και την μέση τετραγ. ταχύτητα:

$$\sqrt{\langle v^2 \rangle} = \sqrt{\frac{3kT}{m}} \quad (9)$$

Αν χρησιμοποιήσουμε την πιθανότερη ταχύτητα, η κατανομή Maxwell μπορεί να γραφεί:

$$f(v) = \frac{4}{\sqrt{\pi}} \frac{v^2}{v_{II}^3} e^{-v^2/v_{II}^2} \quad (10)$$

Η γραφική παράσταση της κατανομής Maxwell για διαφορετικές θερμοκρασίες φαίνεται στο σχήμα 4.



Σχήμα 4

## Συσχέτιση και Παλινδρόμηση

Υπάρχουν περιπτώσεις που θα ασχοληθούμε με δύο τυχαίες μεταβλητές αντί για μία και σε αυτές τις περιπτώσεις είναι αναγκαίο να εξετάσουμε αν υπάρχει σχέση μεταξύ αυτών των μεταβλητών. Ανάλογα με τον αριθμό  $n$  των δεδομένων έχουμε και τα αντίστοιχα ζεύγη  $(X, Y)$ , όπου  $X$  η ανεξάρτητη και  $Y$  η εξαρτημένη μεταβλητή. Αναλύοντας τη συσχέτιση μεταξύ των δύο μεταβλητών μπορούμε να μελετήσουμε την παλινδρόμηση, ένα θεωρητικό μοντέλο ουσιαστικά το οποίο θα μας προβλέπει τις τιμές που μπορεί να πάρει η εξαρτημένη μεταβλητή  $Y$  για δοσμένες τιμές της  $X$ .

Ανάλογα τώρα τη συσχέτιση που θα παρουσιάσουν οι  $X$  και  $Y$  μπορούμε να καταλήξουμε σε γραμμική, σε πολυωνυμική ή σε εκθετική παλινδρόμηση. Εμείς θα ασχοληθούμε με την απλή γραμμική παλινδρόμηση και συσχέτιση, οι μεταβλητές μας δηλαδή θα συνδέονται από μία εξίσωση της μορφής  $Y=a+bX$ . Όπως καταλαβαίνουμε είναι αδύνατο δύο τυχαίες μεταβλητές να βρίσκονται σε απόλυτη ευθεία μεταξύ τους γι' αυτό χρησιμοποιούμε έναν όρο  $r$  τον οποίο τον καλούμε **συντελεστή συσχέτισης** και μας δείχνει το πόσο έντονα συσχετισμένες είναι οι  $X$  και  $Y$ . Ο  $r$  υπολογίζεται από την σχέση:

$$r = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{\sqrt{[n(\sum X^2) - (\sum X)^2][n(\sum Y^2) - (\sum Y)^2]}} \quad (11)$$

όπου:

$n$  το μέγεθος των δειγμάτων (ζεύγη τιμών)

$X$  οι τιμές της ανεξάρτητης μεταβλητής

$Y$  οι τιμές της εξαρτημένης μεταβλητής

Όπως μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ο συντελεστής συσχέτισης είναι καθαρός αριθμός και μπορεί να πάρει τιμές από το  $-1$  έως το  $+1$ . Όταν η τιμή του  $r$  είναι κοντά στο  $0$  τότε οι μεταβλητές μας συσχετίζονται ασθενώς γραμμικά. Όσο η τιμή πλησιάζει στη μονάδα τόσο πιο ισχυρή θεωρείται η γραμμική συσχέτιση μεταξύ των μεταβλητών με τιμές κοντά στο  $+1$  να δηλώνουν έντονη θετική συσχέτιση και στο  $-1$  έντονη αρνητική.

Εφόσον πλέον βρήκαμε πως οι μεταβλητές μας συσχετίζονται γραμμικά, ήρθε η ώρα να ασχοληθούμε με την ανάλυση της παλινδρόμησης όπου θα περιγράψουμε αυτή τη σχέση. Το μοντέλο που χρησιμοποιούμε για αυτήν την περιγραφή έχει την εξής μορφή:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i \quad (12)$$

όπου:

$Y_i$  η τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής

$X_i$  η τιμή της ανεξάρτητης μεταβλητής

$\beta_0$  το σημείο τομής της γραμμής παλινδρόμησης με τον άξονα  $Y$

$\beta_1$  η κλίση της γραμμής παλινδρόμησης

$\varepsilon_i$  το σφάλμα ή κατάλοιπο, δηλαδή η διαφορά μεταξύ της πραγματικής  $Y$  και της πρόβλεψης που προκύπτει από το μοντέλο

Το μοντέλο της εξίσωσης παλινδρόμησης που περιγράφεται από την (12) βασίζεται σε τέσσερις υποθέσεις:

- Οι παρατηρήσεις της εξαρτημένης μεταβλητής  $Y$  είναι μεταξύ τους ανεξάρτητες
- Σε κάθε τιμή  $X_i$  αντιστοιχούν πολλές τιμές της  $Y$  που κατανέμονται κανονικά
- Για δείγμα μεγέθους  $n$  αντιστοιχούν  $n$  κανονικές κατανομές της  $Y$  με την ίδια μεταξύ τους διασπορά  $\sigma^2$
- Ο μέσος της κάθε κανονικής κατανομής της  $Y_i$  ισούται με  $E(Y_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$ . Όλοι οι μέσοι βρίσκονται σε μία ευθεία που αποτελεί τη γραμμή παλινδρόμησης του πληθυσμού

Η ευθεία της γραμμής παλινδρόμησης συνδέει τους μέσους της μεταβλητής  $Y$  που αντιστοιχούν στις τιμές  $X$ . Όπως είπαμε και παραπάνω αυτή η ευθεία γραμμή προσδιορίζεται από τους δύο συντελεστές  $\beta_0$  και  $\beta_1$  που ονομάζονται συντελεστές παλινδρόμησης. Ο  $\beta_0$  θα μας έδινε την αναμενόμενη (μέση) τιμή της εξαρτημένης μεταβλητής  $Y$  για  $X=0$ . Επομένως και ο συντελεστής  $\beta_1$  δε θα μπορούσε να είναι κάτι πέρα από μία μέση τιμή, πιο συγκεκριμένα είναι η μέση μεταβολή της εξαρτημένης μεταβλητής  $Y$  για κάθε μονάδα που μεταβάλλεται η  $X$ . Για να τους προσδιορίσουμε χρησιμοποιούμε τους συντελεστές  $b_0$  και  $b_1$  αντίστοιχα, οι οποίοι ονομάζονται εκτιμήτριες ελαχίστων τετραγώνων των  $\beta_0$  και  $\beta_1$  (Μέθοδος ελαχίστων τετραγώνων).

Οι συντελεστές  $b_1$  και  $b_0$  υπολογίζονται από τις παρακάτω εξισώσεις:

$$b_1 = \frac{n \sum XY - \sum X \sum Y}{n \sum (X^2) - (\sum X)^2} \quad (13)$$

και:

$$b_0 = \frac{1}{n} \sum Y - \frac{b_1}{n} \sum X \quad (14)$$

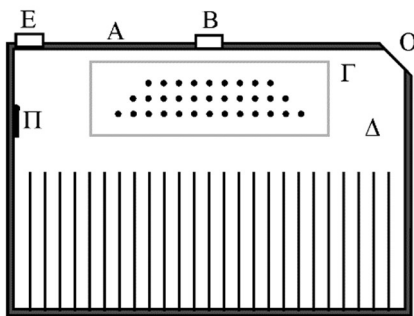
και η εξίσωση παλινδρόμησης πλέον γράφεται:

$$\bar{Y} = b_0 + b_1 X \quad (15)$$

όπου με  $\bar{Y}$  συμβολίζουμε την εκτίμηση της αναμενόμενης (μέσης) τιμής του  $Y$ . Πλέον, με την σχέση (15) μπορούμε να εκτιμήσουμε την τιμή της  $Y$  για δεδομένες τιμές της  $X$ .

## Πειραματική διάταξη

### Διατάξεις μηχανικών μοντέλων

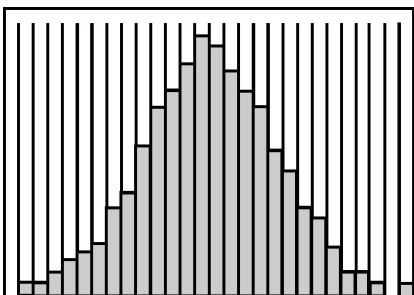


Σχήμα 5

Για την μελέτη της κατανομής Gauss χρησιμοποιούμε την διάταξη του σχ. 4. Αυτή περιλαμβάνει ένα ορθογώνιο κουτί A, το εμπρός μέρος του οποίου είναι καλυμμένο με διαφανές υλικό (Plexiglas). Στο κάτω μέρος υπάρχουν υποδοχές Δ, σε ίση απόσταση η μια από την άλλη. Στο πίσω μέρος του κουτιού υπάρχει υποδοχή, στην οποία μπορεί να τοποθετηθεί μεταλλικό δίκτυο Γ με διαφορετικό αριθμό σειρών από καρφιά. Το κουτί έχει στο επάνω μέρος του δύο οπές, την B και την E. Στο εσωτερικό του δοχείου υπάρχει και μικρή πλατφόρμα Π, η οποία μπορεί να περιστρέφεται με την βοήθεια βίδας στο πίσω μέρος του δοχείου.

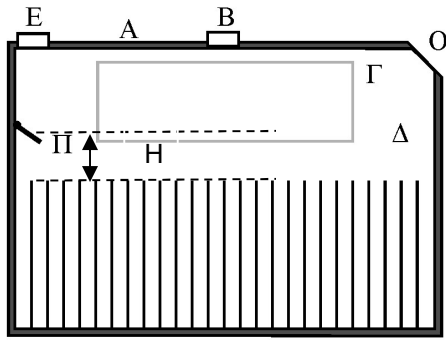
Κατά την μελέτη της κατανομής Gauss, η πλατφόρμα αυτή πρέπει να είναι κατακόρυφη.

Τοποθετούμε το δίκτυο Γ και ρίχνουμε από την οπή B μικρά σωμάτια (π.χ. σφαιρίδια). Τότε στις υποδοχές Δ σχηματίζεται κατανομή, παρόμοια με αυτή του σχ. 6 που είναι και η κατανομή Gauss. Το ύψος στο οποίο έχει γεμίσει κάθε υποδοχή μετρείται με την βοήθεια χιλιοστομετρικού χαρτιού που είναι κολλημένο στο κουτί. Το κουτί αδειάζει από την οπή O.



Σχήμα 6





Σχήμα 7

Για την μελέτη της κατανομής Maxwell χρησιμοποιούμε την ίδια συσκευή με τις εξής μικρές τροποποιήσεις (βλέπε σχ. 7): Στην θέση του πλέγματος με τα καρφιά Γ τοποθετούμε καπάκι χωρίς καρφιά, ώστε να κλείσει η οπή.

Στρέφουμε την πλατφόρμα Π ώστε να σχηματίζει γωνία περίπου ίση με  $45^\circ$  με την κατακόρυφο. Χρησιμοποιούμε την οπή E αντί της οπής B. Ειδικός σωλήνας επιτρέπει να ρίχνουμε τα σφαιρίδια από διαφορετικό ύψος. Όταν τα σφαιρίδια πέσουν από την οπή προσκρούουν στην πλατφόρμα, αναπηδούν και εκτελούν οριζόντια βολή.

Είναι γνωστό πως το βεληνεκές της οριζόντιας βολής  $s$ , όταν το βλήμα εκτοξεύεται με ταχύτητα  $u$  στο πεδίο βαρύτητας της γης, όπου  $g$  η επιτάχυνση της βαρύτητας, δίδεται από την σχέση:

$$s = u \sqrt{\frac{2H}{g}} \quad (16)$$

Αν τώρα υποθέσουμε πως τα σωματίδια προσκρούοντας στην Π αναπηδούν με διαφορετικές ταχύτητες, οι οποίες ακολουθούν την κατανομή Maxwell, μπορούμε να βρούμε πως θα πρέπει να κατανέμονται τα σωματίδια στις υποδοχές της συσκευής μας.

Για να βρούμε την κατανομή των σωματιδίων ως συνάρτηση του βεληνεκούς, θα πρέπει να υπολογίσουμε την πιθανότητα που έχει ένα σωματίδιο να πέσει σε απόσταση μεταξύ  $s$  και  $s+ds$ . Επειδή όπως είδαμε στη (16) το βεληνεκές εξαρτάται από την ταχύτητα θα πρέπει να ισχύει:

$$f(s)ds = f(u)du \quad (17)$$

όπου  $f(u)$  η συνάρτηση πυκνότητας πιθανότητας της κατανομής Maxwell που δίνεται στην (6). Τώρα μπορούμε εύκολα να υπολογίσουμε την  $f(s)$  χρησιμοποιώντας τις (6), (16) και (17). Από την (6) έχουμε ότι:

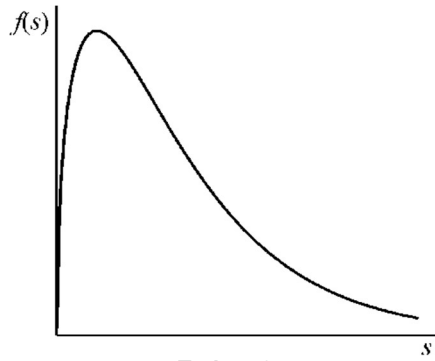
$$u = s \sqrt{\frac{g}{2H}} \Rightarrow du = \sqrt{\frac{g}{2H}} ds \quad (18)$$

Εύκολα βρίσκουμε ότι:

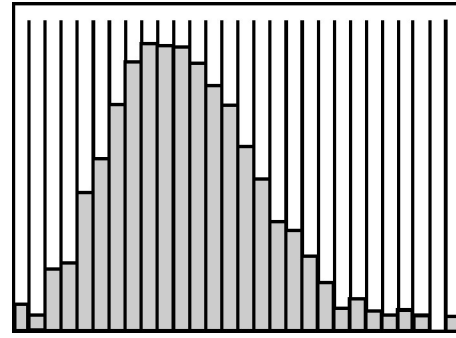
$$f(s) = 4\pi \left( \frac{mg}{4\pi HkT} \right)^{3/2} s^2 e^{-ms^2g/4HkT} \quad (19)$$

Η γραφική παράσταση της συνάρτησης (19) παριστάνεται στο σχ. 8. Όπως βλέπουμε είναι εντελώς ανάλογη της συνάρτησης (6) (βλέπε σχ. 3). Επομένως αν οι αρχικές ταχύτητες των σωματιδίων ακολουθούν την κατανομή Maxwell θα πρέπει να περιμένουμε, πως την ίδια κατανομή ακολουθεί και το βεληνεκές τους καθώς αναπηδούν από την πλατφόρμα. Πράγματι, η εικόνα που παίρνουμε είναι παρόμοια με αυτή που απεικονίζεται στο σχ. 9.





Σχήμα 8



Σχήμα 9

Από την (19) εύκολα μπορούμε να υπολογίσουμε και το πιθανότερο βεληνεκές, δηλαδή την τιμή του  $s$  για την οποία η συνάρτηση  $f(s)$  έχει μέγιστο:

$$s_{II} = \sqrt{\frac{4HkT}{mg}} \quad (20)$$

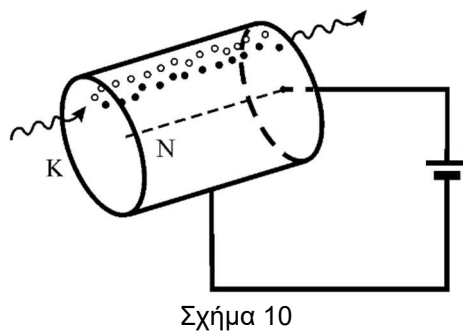
### Ραδιενεργός Πηγή (περιγραφή)

Στο πείραμα χρησιμοποιείται ραδιενεργή πηγή ηλεκτρονίων μικρής έντασης. Ακολουθως, αναγράφεται το προσφερόμενο για την χρήση αυτή ραδιενεργό ισότοπο (Sr/Y<sup>90</sup>).

Ισότοπο	Εκπεμπόμενο σωματίδιο	Ενέργεια MeV <sup>2</sup>	Χρόνος ημιζωής <sup>3</sup>	Σύμβολο ισότοπου
Στρόντιο-90	β	0.54	28 έτη	Sr/Y90

Οι πηγές που χρησιμοποιούνται στο πείραμα **δεν ενέχουν κανένα κίνδυνο**. Παρόλα αυτά συνίσταται στους φοιτητές **να μην εγγίζουν το ενεργό μέρος τους** (αυτό που δεν είναι καλυμμένο με πλεξιγκλάς) και **να μην τις φέρνουν κοντά στα μάτια τους**.

### Απαριθμητής Geiger-Müller (αρχή λειτουργίας)



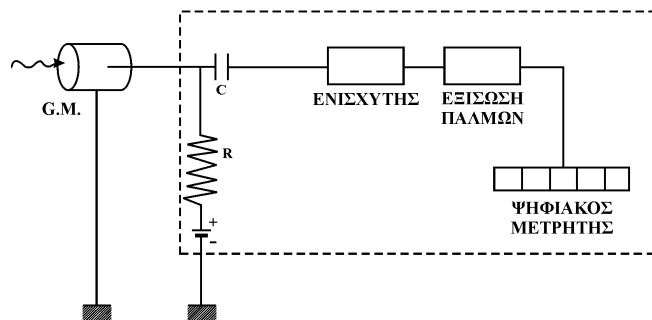
Σχήμα 10

Ο απαριθμητής Geiger-Müller αποτελείται από έναν μεταλλικό κύλινδρο  $K$  (κάθοδος) γεμάτο με ευγενές αέριο. Στον άξονα του κυλίνδρου διέρχεται λεπτό μεταλλικό νήμα  $N$  (άνοδος) (βλ. σχ. 10).

Όταν το σωματίδιο περάσει από τον απαριθμητή ionίζει τα άτομα του αερίου. Τα ηλεκτρόνια που δημιουργούνται έλκονται από την άνοδο, ενώ τα θετικά ιόντα από την κάθοδο. Στην πορεία τους τα ηλεκτρόνια και τα ιόντα ionίζουν και άλλα άτομα του αερίου και βγάζουν ηλεκτρόνια από το μέταλλο.

<sup>2</sup> Ηλεκτρονβόλτ (eV) - η ενέργεια που αποκτά ένα ηλεκτρόνιο όταν επιταχυνθεί από ηλεκτρικό πεδίο με διαφορά δυναμικού 1 V (1 eV =  $1.602 \cdot 10^{-19}$  J). 1 MeV =  $10^6$  eV.

<sup>3</sup> Χρόνος ημιζωής - ο χρόνος, στη διάρκεια του οποίου διασπάται ο μισός αρχικός αριθμός των ραδιενεργών πυρήνων.

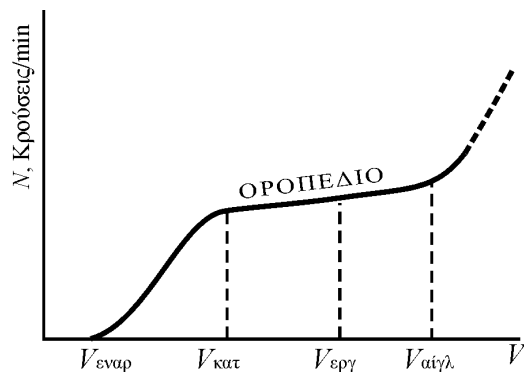


Σχήμα 11

Έτσι δημιουργείται ηλεκτρική εκκένωση, την οποία κόβουμε με την βοήθεια RC κυκλώματος (βλ. σχ. 11).

Έτσι δημιουργούνται παλμοί τάσης, που στη συνέχεια ενισχύονται από τον ενισχυτή και εξισώνονται τα ύψη τους.

Κατόπιν οδηγούνται στον ψηφιακό μετρητή όπου και καταγράφονται.



Σχήμα 12

Ο μέσος αριθμός των σωματιδίων που εισέρχεται στον απαριθμητή μεταβάλλεται συναρτήσει της τάσης στα ηλεκτρόδιά του, (βλ. σχ. 12).

Πριν από την τάση έναρξης  $V_{\text{εναρ}}$  δεν καταγράφεται κανένα σωματίδιο. Από την τάση κατωφλίου  $V_{\text{κατ}}$  μέχρι την τάση αίγλης  $V_{\text{αίγλ}}$  ο ρυθμός είναι περίπου σταθερός (οροπέδιο). Η τάση εργασίας  $V_{\text{εργ}}$  που δίνεται στην εγκατάστασή σας αντιστοιχεί περίπου στο μέσον του οροπέδιου, όπου συνήθως δουλεύουν οι απαριθμητές. Μετά την τάση αίγλης ο ρυθμός αυξάνεται πολύ και ο απαριθμητής καταστρέφεται.

### Διάταξη πειράματος μελέτης παλινδρόμησης

- Πέντε (5) όμοια δοχεία
- Θερμόμετρα
- Ηλεκτρονικός ζυγός ακριβείας
- Ένα μικρό κύπελο για να μας βοηθήσει στη ζύγιση
- Βραστήρες



## Πειραματική Διαδικασία

### Πείραμα 1. Μελέτη της κατανομής Gauss

1. Τοποθετήστε το δίκτυο με τα λίγα καρφιά με την σειρά των καρφιών προς το μέρος των χωρισμάτων (κάτω). Με την βοήθεια του πρόσθετου σωλήνα και χρησιμοποιώντας την οπή Β ρίξτε σιγά-σιγά N σφαιρίδια που καταλήγουν στις υποδοχές προσέχοντας το κάτω μέρος του σωλήνα να είναι 2-3 mm πιο πάνω από την πρώτη σειρά των καρφιών ώστε όλα τα σφαιρίδια να διανύουν ίδια διαδρομή ελεύθερης πτώσης. Φροντίζετε ώστε το ύψος των σφαιριδίων στην κεντρική υποδοχή να μην φτάνει κατά 1-2 cm το μέγιστο ύψος.
2. Μετρήστε το ύψος των σφαιριδίων σε κάθε υποδοχή και φτιάξτε το ιστόγραμμα  $y_i=f(x_i)$ , όπου  $y_i$  το ύψος των σφαιριδίων στην υποδοχή  $x_i$  (η μέτρηση αρχίζει από το κέντρο, δηλαδή από την υποδοχή με τα περισσότερα σφαιρίδια, για την οποία θεωρούμε  $x=0$ ).
3. Αδειάστε το πλήθος αυτών των σφαιριδίων (N) σε ξεχωριστό δοχείο.
4. Επαναλαμβάνετε το ίδιο πείραμα χρησιμοποιώντας το δίκτυο με τα πολλά καρφιά όπως πριν και χρησιμοποιώντας τον ίδιο αριθμό σφαιριδίων N. Επομένως στην περίπτωση αυτή το μέγιστο θα είναι οπωσδήποτε χαμηλότερα του προηγούμενου (γιατί;).
5. Υπολογίστε το  $\sigma$  από την σχέση  $\sigma = \sqrt{\sum y_i x_i^2 / \sum y_i}$  (βλ. Συμπλήρωμα) και για τις δύο περιπτώσεις και σχολιάστε συγκριτικά τις τιμές τους.
6. Συγκρίνετε τα δύο ιστογράμματα και εξηγήστε τις διαφορές τους.
7. Για κάθε ένα από τα δύο ιστογράμματα χαράξτε και την θεωρητική καμπύλη με την διαδικασία της κανονικοποίησης. Αυτή συνίσταται στο να υπολογίσετε σε πρώτο στάδιο για κάθε  $x_i$  το αντίστοιχο  $y_i$  (αρκεί μόνο για τις θετικές τιμές των  $x_i$  –γιατί;) χρησιμοποιώντας τον τύπο (4) με  $\langle x \rangle = 0$ . Ο υπολογισμός για κάθε  $x_i$  του αντίστοιχου  $y_i$  αποδίδει τιμές πολύ μικρότερες των αντιστοίχων τιμών  $y_i$  από το ιστόγραμμα (π.χ. 0.03 έναντι 16.3). Αυτό οφείλεται στο γεγονός ότι το πειραματικό ιστόγραμμά σας δεν είναι κανονικοποιημένο, δηλαδή το εμβαδόν του δεν είναι ίσο με την μονάδα. Η κανονικοποίηση συνίσταται στο να «διορθώσετε» τις θεωρητικές τιμές ως προς το πείραμα προσομοίωσης με τα καρφιά. Τούτο μπορεί να γίνει είτε αυξάνοντας το εμβαδόν της θεωρητικής έτσι που να συμπίπτει με το εμβαδόν της πειραματικής, είτε μειώνοντας το εμβαδόν της πειραματικής ώστε να ισούται με μονάδα. Σε κάθε περίπτωση πρέπει να βρείτε το εμβαδόν του πειραματικού σας ιστογράμματος. Αυτό μπορεί να γίνει πολύ εύκολα αν πάρετε υπόψη σας ότι όλες οι στήλες του ιστογράμματός έχουν το ίδιο εύρος 1 cm. Τότε το εμβαδόν θα ισούται με  $S = \sum_{i=1}^k y_i$ , όπου  $k$  το πλήθος των στηλών με σφαιρίδια. Σχεδιάζετε τότε την πειραματική σας καμπύλη, αντικαθιστώντας τα  $y_i$  με  $y_i/S$  στο ίδιο διάγραμμα με την θεωρητική.
8. Συγκρίνετε και σχολιάστε για τις δύο διαφορετικές περιπτώσεις διακυμάνσεων την μορφή της καμπύλης έναντι των πειραματικών δεδομένων.

### Πείραμα 2. Μελέτη της κατανομής Maxwell

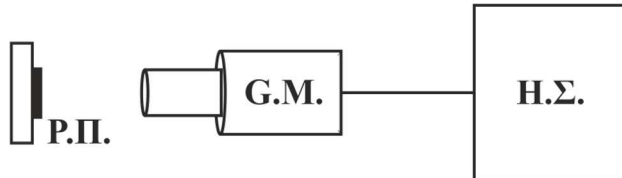
1. Αντικαταστήστε το πλέγμα με τα καρφιά και τοποθετήστε το απλό κάλυμμα στη θέση του. Ανυψώστε την πλατφόρμα έτσι, ώστε να σχηματίζει γωνία  $\sim 45^\circ$  με την κατακόρυφο.
2. Ζυγίστε μαζί μερικά σφαιρίδια ( $\sim 20$ ) και διαιρώντας με το πλήθος τους προσδιορίστε την μάζα του καθενός. Μετρήστε το ύψος H (σχ. 7)
3. Ρίξτε πολλά σφαιρίδια από την οπή E, φροντίζοντας να μην υπερβείτε το μέγιστο στην υποδοχή, στην οποία θα συγκεντρωθούν τα περισσότερα σφαιρίδια.
4. Από το αντίστοιχο ιστόγραμμα υπολογίστε την πιθανότερη απόσταση  $s_n$  (προσοχή στην επιλογή της αρχής του άξονα των  $s$ ). Τώρα μπορείτε να υπολογίστε την «θερμοκρασία» του

«ισοδύναμου αερίου» (δηλαδή ενός υποθετικού αερίου η μάζα των μορίων του οποίου θα ήταν ίση με την μάζα των σφαιριδίων).

5. Αδειάστε σε ξεχωριστό δοχείο τα σφαιρίδια N.
6. Επαναλαμβάνετε τα βήματα (3) και (4) ρίχνοντας τα ίδια σφαιρίδια N από μεγαλύτερο ύψος με την βοήθεια του πρόσθετου σωλήνα. Το μέγιστο θα είναι χαμηλότερο τώρα (γιατί;).
7. Συγκρίνετε τα πειραματικά αποτελέσματα για κάθε περίπτωση και εξηγήστε τυχόν διαφορές.

### Πείραμα 3. Κατανομές με πηγή και απαριθμητή

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από ραδιενεργό πηγή (P.Π.), τον απαριθμητή Geiger-Müller (G.M.), το ηλεκτρονικό σύστημα καταγραφής γεγονότων (H.Σ.), έναν αυτόματο χρονοδιακόπτη κι ένα χρονόμετρο, βλ. σχ. 13.



Σχήμα 13

Το H.Σ., εκτός των άλλων χρησιμοποιείται για την τροφοδοσία του G.M. και για να δείχνει με ψηφιακό μετρητή τα σωματίδια που προέρχονται από τις διασπάσεις των πυρήνων της P.Π. και προσκρούουν στον G.M.

1. Αρχικά παραλαμβάνετε την ραδιενεργό πηγή από το Παρασκευαστήριο υπογράφοντας.
  2. Ενεργοποιήστε το H.Σ. και ρυθμίστε την τάση στην **αναγραφόμενη** στην εγκατάσταση τιμή Προσοχή! Μην αυξάνετε την τάση, διότι υπάρχει κίνδυνος καταστροφής του G.M.
  3. Τοποθετήστε την P.Π. σε τέτοια απόσταση από τον G.M., λαμβάνοντας δοκιμαστικές μετρήσεις, ώστε να έχουμε κατά μέσο όρο περίπου 15 μετρήσεις ανά 10 δευτερόλεπτα.
  4. Μετρήστε με την βοήθεια του αυτόματου χρονοδιακόπτη τον αριθμό των γεγονότων σε 10 s. Η διαδικασία επαναλαμβάνεται **120** φορές.
  5. Καταγράφετε κάθε μέτρηση στην καρτέλα «Γεγονότα» του βιβλίου υπολογισμών Excel. Ο πίνακας περιέχει τα αντίστοιχα κελιά για την πληκτρολόγηση της εκάστοτε ένδειξης του απαριθμητή Geiger-Müller.
  6. Στο τέλος της ενότητας, για λόγους ασφαλείας σε περίπτωση ηλεκτρικών βλαβών, υπάρχει ένας ακόμη κενός προς συμπλήρωση πίνακας. Αυτόν να τον χρησιμοποιήσετε μόνον όταν δεν μπορείτε να χρησιμοποιήσετε το λογισμικό.
  7. Η αριθμητική επεξεργασία των αποτελεσμάτων γίνεται με το λογισμικό, στο οποίο καταχωρίζονται οι μετρήσεις: Όταν ολοκληρωθεί η καταχώριση όλων των 120 μετρήσεων, επιλέξτε στο Excel «Στατιστική» και το λογισμικό υπολογίζει τα πειραματικά και τα θεωρητικά αποτελέσματα για χρόνους  $t = 10s$ , δηλαδή για τα χρονικά διαστήματα για τα οποία μετρήθηκαν τα γεγονότα. Τα αποτελέσματα εμφανίζονται στην οθόνη και τον εκτυπωτή με την μορφή πινάκων, όπου περιλαμβάνονται τα πειραματικά αποτελέσματα ( $\langle m \rangle$ ,  $\langle m^2 \rangle$  και οι τιμές  $P(m)/N$  για κάθε  $m$ ), καθώς και οι τιμές των αντίστοιχων κατανομών Poisson και Gauss.
- Προσοχή! Μετά το πέρας της ασκήσεως, πρέπει οπωσδήποτε να επιστραφεί ενυπόγραφα η ραδιενεργός πηγή.

Σχεδιάστε ένα μόνον ιστόγραμμα, όπου απεικονίζονται: τα πειραματικά δεδομένα, καθώς και οι αντίστοιχες κατανομές Poisson και Gauss.

### Πείραμα 4. Συσχέτιση και Παλινδρόμηση

Μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε 5 δοχεία τα οποία θα έχουν ορισμένη ποσότητα νερού της βρύσης. Σε κάθε δοχείο θα βάλουμε ξεχωριστή ογκομετρημένη ποσότητα βραστό νερού. Προφανώς η ποσότητα βραστό νερού θα αντιστοιχεί στην ανεξάρτητη μεταβλητή  $X$ . Μετρούμε την μεταβολή της θερμοκρασίας σε κάθε δοχείο (εξαρτημένη μεταβλητή  $Y$ ).

Οι φοιτητές θα πρέπει να συλλέξουν τα 4 ζεύγη δεδομένων από τις υπόλοιπες 4 ομάδες και να εργαστούν κατάλληλα ώστε να ελέγξουν αν οι μεταβλητές  $X$  και  $Y$  συσχετίζονται, να βρουν τον συντελεστή συσχέτισης  $r$  και έπειτα να φτιάξουν ένα μοντέλο πρόβλεψης για τη δική τους 5<sup>η</sup> μεταβλητή  $Y$ . Κάθε ομάδα φοιτητών επιβλέπει ένα δοχείο και στο τέλος οι ομάδες ενημερώνονται για όλες τις μετρήσεις.

1. Γεμίστε με ορισμένη ποσότητα νερού καθένα από τα πέντε δοχεία (σε αντιστοιχία κάθε ομάδα 1000 ml, 800 ml, 600 ml, 400 ml, 200 ml) και τοποθετήστε τα θερμομέτρα σε κάθε δοχείο ώστε να καταγράψετε την αρχική θερμοκρασία του νερού, η οποία πρέπει να είναι η ίδια σε όλα τα δοχεία.
2. Προσθέστε σε κάθε δοχείο ορισμένη ποσότητα βραστού νερού (σε αντιστοιχία με την προηγούμενη οδηγία 1, δηλ. 200 ml, 400 ml, 600 ml, 800 ml, 1000 ml) έτσι ώστε σε όλες τις ομάδες ο συνολικός όγκος του νερού να είναι 1200 ml. Καταγράψτε την ένδειξη της θερμοκρασίας.
3. Σημειώστε τις τιμές στον παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 1

Δοχεία	Ποσότητα βραστού νερού (ml)	Αρχική θερμοκρασία (°C)	Τελική θερμοκρασία (°C)
1	200		
2	400		
3	600		
4	800		
5	1000		

4. Κάθε ομάδα φοιτητών θα αγνοήσει το δοχείο, το οποίο επέβλεπε, και με τη βοήθεια του μοντέλου γραμμικής παλινδρόμησης θα προσπαθήσει να προβλέψει την άνοδο της θερμοκρασίας που θα είχε για την ίδια ποσότητα βραστού νερού, με τη βοήθεια του παρακάτω πίνακα.

Πίνακας 2

Δοχεία	$X$ βραστό νερό (ml)	$Y$ άνοδος της θερμοκρασίας (°C)	$XY$	$Y^2$	$X^2$
Σύνολο					

5. Σχολιάστε τα αποτελέσματα.

### Συμπλήρωμα

Η πιθανότητα να λάβουμε τιμές  $x_1, x_2, \dots, x_n$  σε  $n$  μετρήσεις είναι:

$$Y = y(x_1) \cdot y(x_2) \cdot \dots \cdot y(x_n) = \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right]^n \exp\left( -\frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{2\sigma^2} \right) = \left[ \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \right]^n \exp\left( -\frac{1}{2\sigma^2} \sum x_i^2 \right)$$

το  $\sigma$  προσδιορίζεται

από την συνθήκη μεγιστοποίησης της πιθανότητας  $\mathbf{Y}$ , δηλαδή  $d\mathbf{Y}/d\boldsymbol{\sigma}=\mathbf{0}$  και  $d^2\mathbf{Y}/d\boldsymbol{\sigma}^2<0$ . Από αυ-

τές τις συνθήκες έχουμε: 
$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum x_i^2}{n}}$$

Εν προκειμένω, το  $n$  είναι ίσο με τον αριθμό των σφαιριδίων ( $n = \sum \mu y_i$ , όπου  $\mu$  κάποια σταθερά που δίνει τον αριθμό των σφαιριδίων ανά μονάδα ύψους της υποδοχής), ενώ κάθε τιμή  $x_i$  περιλαμβάνεται στη μέτρηση  $n_i$  φορές ( $n_i = \mu y_i$ ).

Επομένως, λαμβάνουμε την σχέση: 
$$\sigma = \sqrt{\frac{\mu \sum y_i x_i^2}{\mu \sum y_i}} = \sqrt{\frac{\sum y_i x_i^2}{\sum y_i}}.$$

## Ερωτήσεις

1. Με τη βοήθεια της (4) εξηγήστε την εξάρτηση των καμπυλών κατανομής Gauss από το  $\sigma$ .
2. Αποδείξτε την σχέση (7).
3. Εξηγήστε το σχήμα 4 (εξάρτηση της κατανομής Maxwell από την θερμοκρασία)
4. Εξηγήστε γιατί στο πείραμα 2 η συγκεκριμένη διάταξη αποδίδει κατανομή Maxwell.
5. Ένα ποιε αζώτου  $N_2$  βρίσκεται σε κατάσταση ισορροπίας σε θερμοκρασία  $T=300K$ . Υπολογίστε: α) Το άθροισμα των μέτρων των ταχυτήτων όλων των μορίων  $\sum v_i$ . β) το άθροισμα των τετραγώνων των ταχυτήτων  $\sum v_i^2$ . [υπόδειξη: Χρησιμοποιήστε τις σχέσεις (8) και (9)]

## Βιβλιογραφία

- Alonso-Finn, ΘΕΜΕΛΙΩΔΗΣ ΠΑΝΕΠΙΣΤΗΜΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ τ. 1 (ΜΗΧΑΝΙΚΗ) § 14.7
- Berkeley, ΜΑΘΗΜΑΤΑ ΦΥΣΙΚΗΣ τ. 5 (ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ) §§ 2.1, 2.6, Π1, Π2.
- Ιωάννης Χαλικιάς, ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ, Κεφ. 3 παρ. 3.3, Κεφ. 8. Παρ. 8.1-8.4

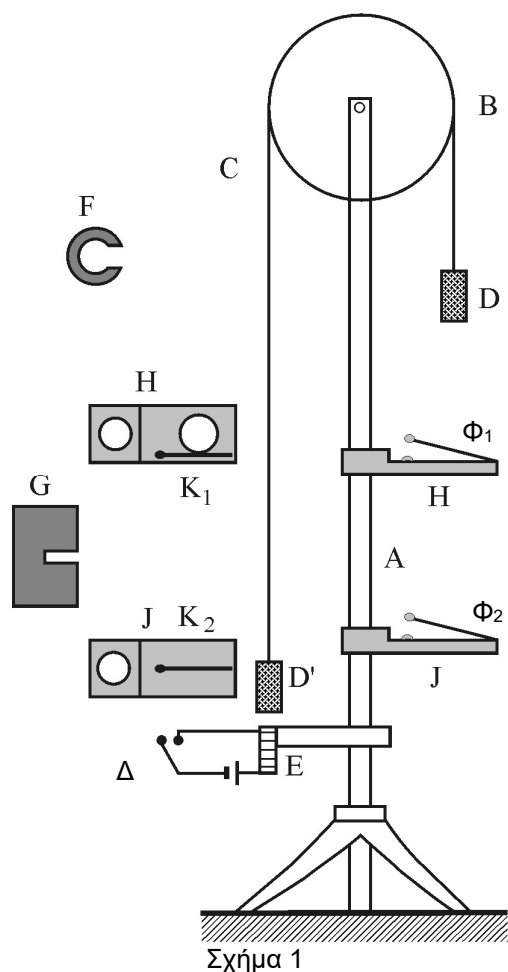
### Πίνακας καταγραφής γεγονότων

1		13		25		37		49		61		73		85		97		109	
2		14		26		38		50		62		74		86		98		110	
3		15		27		39		51		63		75		87		99		111	
4		16		28		40		52		64		76		88		100		112	
5		17		29		41		53		65		77		89		101		113	
6		18		30		42		54		66		78		90		102		114	
7		19		31		43		55		67		79		91		103		115	
8		20		32		44		56		68		80		92		104		116	
9		21		33		45		57		69		81		93		105		117	
10		22		34		46		58		70		82		94		106		118	
11		23		35		47		59		71		83		95		107		119	
12		24		36		48		60		72		84		96		108		120	

## B2. Μελέτη της επιταχυνόμενης κίνησης, με την βοήθεια της μηχανής του Atwood

### Σκοπός της άσκησης

Με την μηχανή του Atwood επαληθεύονται πειραματικά οι νόμοι της επιταχυνόμενης κίνησης και επιβεβαιώνεται ο δεύτερος νόμος του Newton. Τούτο επιτυγχάνεται μέσω μιας σχετικά απλής συσκευής (τροχαλίας), μετρώντας μήκη και χρόνους και χρησιμοποιώντας σχέσεις που προκύπτουν από τον Β΄ νόμο του Newton (δηλαδή τους νόμους της επιταχυνόμενης κίνησης).



### Αρχή λειτουργίας της μηχανής Atwood

Η μηχανή του Atwood αποτελείται από μία μεταλλική ράβδο A (βλ. Σχ. 1). Στο επάνω μέρος της ράβδου είναι η τροχαλία B που μπορεί να περιστρέφεται με ελάχιστη τριβή. Στην τροχαλία είναι περασμένο λεπτό και πολύ μικρού βάρους νήμα C στα άκρα του οποίου κρέμονται κύλινδροι D και D' που έχουν περίπου ίσες και γνωστές μάζες  $m$ . Οι κύλινδροι D, D' είναι από σίδηρο για να μπορούν να συγκρατούνται από τον ηλεκτρομαγνήτη E.

Η μάζα  $m$  των D και D' μπορεί να αυξηθεί με την βοήθεια προσθέτων μικρών μαζών  $m_1$  και  $m_2$  που έχουν διαφορετική μορφή (F και G όπως φαίνονται σε κάτοψη και στο Σχήμα 1). Αν στο D τοποθετήσουμε μία από τις μάζες F ή G το σύστημα θα αρχίσει να κινείται με ομαλά μεταβαλλόμενη κίνηση.

Τα H και J είναι πλατφόρμες διέλευσης και τερματισμού της κίνησης των μαζών εφοδιασμένες με κατάλληλες **φωτοπύλες**  $\Phi_1$  και  $\Phi_2$ , που είναι συνδεδεμένες με το χρονόμετρο X. Οι μάζες F μπορούν να διέρχονται από την πλατφόρμα H και δεν μεταβάλλουν την κατάσταση της φωτοπύλης  $\Phi_1$ , ενώ οι μάζες G σταματούν σ' αυτήν κλείνοντας την φωτοπύλη  $\Phi_1$ . Ο διακόπτης  $\Delta$  χρησιμεύει για την έναρξη της κίνησης (απελευθερώνει την μεταλλική μάζα D') και είναι συνδεδεμένος με το χρονόμετρο για την έναρξη μέτρησης του χρόνου.

### Στοιχεία από την θεωρία

Μελετώντας τον δεύτερο νόμο Newton θα χρειασθεί να υπολογίσουμε την επιτάχυνση στο σύστημά μας. Η επιτάχυνση μπορεί να βρεθεί ως εξής: σε κάθε σώμα ασκούνται δύο δυνάμεις, το βάρος και η τάση του νήματος (θεωρούμε ότι οι δυνάμεις τριβής είναι αμελητέες και το νήμα αβαρές). Κάτω από την επίδρασή τους οι μάζες θα αρχίσουν να κινούνται. Αν υποθέσουμε ότι το νήμα είναι μη εκτατό τότε οι επιταχύνσεις των μαζών D και D' θα είναι ίσες και αντίθετης φοράς.

Θεωρώντας ότι η μάζα της τροχαλίας είναι αμελητέα συμπεραίνουμε ότι η τάση του νήματος αριστερά και δεξιά της τροχαλίας θα είναι η ίδια. Προσθέτουμε μία από τις μάζες F ή G στο D και τότε με βάση τον δεύτερο νόμο του Newton έχουμε:

$$\text{για το D:} \quad (m+m_1)a = (m+m_1)g-T, \quad (1)$$

$$\text{ενώ για το D':} \quad -ma = mg-T, \quad (2)$$

όπου  $\mathbf{a}$  η επιτάχυνση του συστήματος,  $\mathbf{T}$  η τάση του νήματος,  $\mathbf{g}$  η επιτάχυνση της βαρύτητας,  $\mathbf{m}$  η μάζα καθενός από τα σώματα D και D' και  $\mathbf{m}_1$  η μάζα του πρόσθετου βάρους F ή G. Η λύση των εξισώσεων αυτών μάς αποδίδει τις ακόλουθες σχέσεις:

$$\alpha = \frac{m_1}{2m + m_1} g \quad (3)$$

$$T = \frac{2m(m + m_1)}{2m + m_1} g = mg \frac{1 + m_1 / m}{1 + m_1 / (2m)} \quad (4)$$

Για να βρούμε με μεγαλύτερη ακρίβεια την επιτάχυνση θα πρέπει να πάρουμε υπόψη μας και την μάζα της τροχαλίας  $\mathbf{m}_0$ . Σε αυτή την περίπτωση οι τάσεις του νήματος από τις δύο πλευρές της τροχαλίας δεν θα είναι ίσες.

Επομένως οι εξισώσεις που γράψαμε προηγούμενα αλλάζουν και επιπλέον προστίθεται μία που περιγράφει την περιστροφική κίνηση της τροχαλίας:

$$(m + m_1)\alpha_1 = (m + m_1)g - T_2 \quad (5)$$

$$-m\alpha_1 = mg - T_1 \quad (6)$$

$$I \frac{d\omega}{dt} = (T_2 - T_1)R \quad (7)$$

όπου  $\mathbf{R}$  η ακτίνα της τροχαλίας και  $d\omega/dt$  η γωνιακή επιτάχυνση της, επειδή το νήμα δεν ολισθαίνει στην τροχαλία μπορούμε να γράψουμε  $(d\omega/dt)R = \alpha_1$ . Η ποσότητα  $\mathbf{I}$  είναι η ροπή αδράνειας της τροχαλίας ως προς τον άξονα περιστροφής.

Αν θεωρήσουμε ότι η τροχαλία είναι κύλινδρος ακτίνας  $\mathbf{R}$ , τότε εύκολα βρίσκουμε ότι η ροπή

αδράνειας της είναι:  $I_K = \frac{1}{2} m_0 R^2$  (βλ. το «Συμπλήρωμα» στο τέλος του φυλλαδίου)

Η λύση του συστήματος των εξισώσεων (5), (6) και (7) μάς αποδίδει τις τιμές των τάσεων  $T_1$  και  $T_2$  και την επιτάχυνση  $\alpha_1$  που είναι:

$$\alpha_1 = \frac{m_1}{2m + m_1 + m_0 / 2} g \quad (8)$$

Πρέπει να σημειωθεί ότι οι τριβές μειώνουν την τιμή της επιτάχυνσης. Επίσης το γεγονός ότι η τροχαλία δεν είναι ομογενής κύλινδρος μεταβάλλει την σχέση (8). Όπως φαίνεται από την εξίσωση αυτή το σύστημα θα κινείται με επιτάχυνση που είναι πάντα μικρότερη από την επιτάχυνση της βαρύτητας. Με την αύξηση του βάρους της μάζας  $m_1$  μπορούμε να αυξήσουμε την επιτάχυνση του συστήματος. Αν στη διάρκεια της κίνησης αφαιρέσουμε την μάζα  $m_1$  το σύστημα θα κινείται με σταθερή ταχύτητα ίση με την ταχύτητα την στιγμή της αφαίρεσης της  $m_1$ .



## Πειραματική διάταξη

Η πειραματική διάταξη αποτελείται από: την Μηχανή του Atwood (περιγράφηκε στην αρχή), Πλατφόρμες, Ηλεκτρομαγνήτη, Διάφορες πρόσθετες μάζες, Ηλεκτρονικό χρονόμετρο ακρίβειας 0.01s, φωτοπύλες, μετροταινία και ζυγό ακρίβειας 1g.

## Πειραματική διαδικασία

### Πείραμα 1

#### Επαλήθευση της σχέσης $S = \frac{1}{2} at^2$

1. Τοποθετούμε μία μάζα τύπου F στη μάζα D και ενεργοποιούμε τον ηλεκτρομαγνήτη έτσι ώστε να συγκρατεί την μάζα D' στην αρχική του θέση. Την πλατφόρμα J την τοποθετούμε σε γνωστή απόσταση S από το κάτω μέρος του D ενώ έχουμε την πλατφόρμα H εκτός διαδρομής. Διακόπτοντας την τροφοδοσία του ηλεκτρομαγνήτη το σύστημα με τις δυο μάζες αρχίζει να κινείται ενώ ενεργοποιείται αυτόματα το χρονόμετρο, που σταματάει επίσης αυτόματα την στιγμή που το D χτυπάει την πλατφόρμα J.
2. Αλλάζοντας το ύψος της πλατφόρμας στη ράβδο έχουμε για διάφορες αποστάσεις S, διαφορετικούς χρόνους t. Με την ίδια μάζα το σύστημα θα έχει την ίδια επιτάχυνση, όπως προκύπτει από τις σχέσεις (3) και (10) και γι' αυτό θα πρέπει να ισχύει η σχέση:

$$\alpha = \frac{2S_1}{t_1^2} = \frac{2S_2}{t_2^2} = \dots = \frac{2S_N}{t_N^2} \quad (9)$$

3. Χρησιμοποιώντας την ίδια μάζα m για τρεις (3) τουλάχιστον διαφορετικές αποστάσεις S μετρούμε το χρόνο, πέντε (5) φορές για κάθε S, και συμπληρώνουμε τον Πίνακα 1.

Πίνακας 1.

$S \pm \delta S$ [m]	$t_1$ [s]	$t_2$ [s]	$t_3$ [s]	$t_4$ [s]	$t_5$ [s]	$t \pm \delta t$ [s]	$\alpha \pm \delta \alpha$ [m/s <sup>2</sup> ]

4. Επαληθεύουμε την εγκυρότητα της σχέσης (9) συγκρίνοντας τις τιμές και τα σφάλματα των επιταχύνσεων α.

### Πείραμα 2

#### Επαλήθευση του 2ου νόμου του Newton $F = ma$

Αν μεταφέρουμε τις πρόσθετες μάζες από την μία πλευρά του συστήματος στην άλλη, η μάζα του συστήματος δεν αλλάζει, αλλάζει όμως η συνισταμένη εξωτερική δύναμη· μαζί μ' αυτήν η επιτάχυνση του συστήματος. Για δύο τέτοιες περιπτώσεις έχουμε:  $F_1 = m\alpha_1$ ,  $F_2 = m\alpha_2$

$$S_1 = \frac{1}{2} \alpha_1 t_1^2 \quad S_2 = \frac{1}{2} \alpha_2 t_2^2 \quad (10)$$

Διαιρώντας κατά μέλη λαμβάνουμε:

$$\frac{F_1}{F_2} = \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \quad \text{και} \quad \frac{\alpha_1 t_1^2}{\alpha_2 t_2^2} = \frac{S_1}{S_2} \quad (11)$$

$$\rightarrow \frac{F_1}{F_2} = \frac{S_1 t_2^2}{S_2 t_1^2} \quad (12)$$

Σκοπός του Πειράματος 2 είναι η επαλήθευση της σχέσης (12):

1. Αρχικά ζυγίζουμε τις μάζες D, D',  $m_1$ ,  $m_2$ . Τοποθετούμε στην D' μάζα  $m_1$  και στο D μάζα  $m_2$ . Αυτό μάς αποδίδει:  $F_1 = (m_2 - m_1)g$ . Στερεώνουμε την πλατφόρμα J σε μία ορισμένη θέση και με αυτή την διάταξη λαμβάνουμε τις μετρήσεις για τα  $t_1$  και τις καταχωρούμε στον Πίνακα 2.
2. Τοποθετώντας όλες τις πρόσθετες μάζες  $(m_1 + m_2)$  μόνο στο D, έχουμε:  $F_2 = (m_1 + m_2)g$ . Και σ' αυτή την περίπτωση λαμβάνουμε τις μετρήσεις για τα  $t_2$  και τις καταχωρούμε στον Πίνακα 2. Υπολογίζουμε την σχέση  $S_1 t_2^2 / S_2 t_1^2$  με το σφάλμα της (λαμβάνοντας υπόψη ότι για κάθε ζεύγος  $(t_1, t_2)$  τα αντίστοιχα S είναι ίσα).

**Πίνακας 2.**

		1	2	3	4	5	$\pm \delta t$	$t_2^2 / t_1^2 \pm \delta(t_2^2 / t_1^2)$
S=.....[m]	$t_1$ [s]							
$\pm \delta S = \dots\dots$	$t_2$ [s]							
S=.....[m]	$t_1$ [s]							
$\pm \delta S = \dots\dots$	$t_2$ [s]							

2. Υπολογίζουμε την ποσότητα  $(m_2 - m_1)/(m_1 + m_2)$  με το σφάλμα της και τη συγκρίνουμε με την σχέση  $S_1 t_2^2 / S_2 t_1^2$ . Η σχέση αυτή πρέπει να μάς δίνει σταθερό αποτέλεσμα (εντός του εύρους των σφαλμάτων) για όλες τις μετρήσεις, πράγμα που αποδεικνύει τον δεύτερο νόμο του Newton.
3. Επαναλαμβάνουμε τα βήματα (1) και (2) για διαφορετικό S και καταχωρούμε τις μετρήσεις.
4. Σχολιάζουμε τα αποτελέσματα και εξηγούμε σε τι οφείλονται οι τυχόν αποκλίσεις.
5. Από την σχέση (8):  $\alpha_1 = m_1 g / (2m + m_1 + m_0/2)$ , έχουμε  $\alpha_1 = \alpha_1(m, m_1, m_0)$ .

Βάσει του τύπου:  $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{[g(x)]^2}$  θα έχουμε για το σχετικό σφάλμα στο  $\alpha_1$ :

$$\begin{aligned} \delta \alpha_1 &= \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial m} \delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial m_1} \delta m_1\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial m_0} \delta m_0\right)^2} \Rightarrow \\ \delta \alpha_1 &= \sqrt{\left(\frac{0 - m_1 g \cdot (2)}{(2m + m_1 + m_0/2)^2} \delta m\right)^2 + \left(\frac{g \cdot (2m + m_1 + m_0/2) - m_1 g \cdot (1)}{(2m + m_1 + m_0/2)^2} \delta m_1\right)^2 + \left(\frac{0 - m_1 g \cdot (1/2)}{(2m + m_1 + m_0/2)^2} \delta m_0\right)^2} \Rightarrow \\ \delta \alpha_1 &= \sqrt{\left(\frac{\alpha_1 \cdot (-2)}{2m + m_1 + m_0/2} \delta m\right)^2 + \left(\frac{\alpha_1 \cdot (2m + m_0/2)}{2m + m_1 + m_0/2} \delta m_1\right)^2 + \left(\frac{\alpha_1 \cdot (-1/2)}{2m + m_1 + m_0/2} \delta m_0\right)^2} \Rightarrow \\ \frac{\delta \alpha_1}{\alpha_1} &= \sqrt{\frac{4\delta m^2 + \delta m_1^2 + (1/4)\delta m_0^2}{(2m + m_1 + m_0/2)^2}} = \sqrt{\frac{4\delta m^2}{(2m + m_1 + m_0/2)^2} + \frac{\delta m_1^2}{(2m + m_1 + m_0/2)^2} + \frac{\delta m_0^2 / 4}{(2m + m_1 + m_0/2)^2}} \quad (13) \end{aligned}$$

6. Σχολιάζουμε την συμμετοχή των επί μέρους σφαλμάτων στο συνολικό σφάλμα.

### Πείραμα 3. Επαλήθευση του νόμου $u = at$

1. Ζυγίζουμε την μάζα G. Την τοποθετούμε πάνω στη D και συγκρατούμε το σύστημα στην αρχική του θέση με τον ηλεκτρομαγνήτη. Πιο κάτω στη ράβδο τοποθετούμε την πλατφόρμα H και ακόμα πιο κάτω την πλατφόρμα J. Έστω  $S_1$  η απόσταση μεταξύ της κάτω βάσης του D και της H,  $S_2$  η απόσταση μεταξύ H και J.
2. Απενεργοποιούμε τον ηλεκτρομαγνήτη, οπότε και το σύστημα αρχίζει να κινείται και να λειτουργεί το χρονόμετρο. Μετρούμε το χρόνο  $t'$  από την αφαίρεση της μάζας G μέχρι το τέλος. Επίσης τον χρόνο  $t$  από την αρχή της κίνησης μέχρι την στιγμή που η D φτάνει στην πλατφόρμα J. Επειδή ξέρουμε την απόσταση ανάμεσα στις πλατφόρμες και το ύψος της D (έστω  $h$ ) βρίσκουμε την ταχύτητα της ομαλής κίνησης του συστήματος. Αυξάνοντας την απόσταση μεταξύ της D και της H αυξάνεται και η ταχύτητα της ομαλής κίνησης. Για την ίδια μάζα θα έχουμε την ίδια επιτάχυνση του συστήματος και θα πρέπει να ισχύει και πειραματικά η παρακάτω σχέση (όπου  $\Delta t = t - t'$ ):

$$\alpha = \frac{v_1}{\Delta t_1} = \frac{v_2}{\Delta t_2} = \dots = \frac{v_N}{\Delta t_N} \quad (14)$$

3. Συμπληρώνουμε τον πίνακα 3:

**Πίνακας 3.**

$m_G = \dots\dots$ [Kg] $\pm \delta m = \dots\dots$		1	2	3	4	5	$t \pm \delta t$	$u \pm \delta u$	$a \pm \delta a$
$S_1 = \dots\dots$ [m] $\pm \delta S_1 = \dots\dots$	$t$ [s]								
$S_2 = \dots\dots$ [m] $\pm \delta S_2 = \dots\dots$	$t'$ [s]								
	$\Delta t$ [s]								
$S_1 = \dots\dots$ [m] $\pm \delta S_1 = \dots\dots$	$t$ [s]								
$S_2 = \dots\dots$ [m] $\pm \delta S_2 = \dots\dots$	$t'$ [s]								
	$\Delta t$ [s]								
$S_1 = \dots\dots$ [m] $\pm \delta S_1 = \dots\dots$	$t$ [s]								
$S_2 = \dots\dots$ [m] $\pm \delta S_2 = \dots\dots$	$t'$ [s]								
	$\Delta t$ [s]								

4. Σχολιάζουμε την εγκυρότητα της σχέσης (14) συγκρίνοντας τις τιμές των επιταχύνσεων  $a$  με τη βοήθεια των σφαλμάτων.

## Ερωτήσεις

1. Τι συμβαίνει στην κίνηση του Πειράματος 1 αν η πρόσθετη μάζα  $F$  με την πάροδο του χρόνου κατά την κίνηση τείνει στο μηδέν;
2. Συγκρίνετε τις πειραματικές τιμές του 1<sup>ου</sup> πειράματος με τις θεωρητικές τιμές των σχέσεων (3) και (8).
3. Ποια συστηματικά & ποια τυχαία σφάλματα αναμένετε ως πιο σημαντικά στη διεξαγωγή του 3<sup>ου</sup> πειράματος; Τι μπορεί να γίνει για την ελαχιστοποίησή τους;
4. Μελετήσετε την συνάρτηση  $a(m_1)$ , όπου  $a=m_1/(2m+m_1)*g$ , και χαράξτε τη γραφική παράσταση του  $a$ . Ποιά είναι η συμπεριφορά της συνάρτησης όταν  $m_1 \rightarrow \infty$  ?

## Βιβλιογραφία

- Alonso-Finn τ. 1 §§ 5.3-5.4, 5.7, 7.6-7.7, 10.2-10.4.
- H.D. Young τ. 1 §§ 2.1-2.4, 4.2-4.3, 9.5, 10.1-10.2
- O'hanian τ. 1 §§ 2.1-2.6, 5.1-5.3, 12.4, 13.2
- Serway τ. 1 §§ 3.1-3.4, 5.5, 5.6, 10.5, 10.7.
- Berkeley τ. 1 §§ 3.1-3.2, 8.1.
- Συμπλήρωμα 1 του παρόντος φυλλαδίου.

## Οδηγίες εκτελέσεως πειραμάτων B2

### Προετοιμασία Πειράματος

- Εξοικειωθείτε με τις φωτοπύλες, τις πλατφόρμες και τις πρόσθετες μάζες
- Επίσης, εξοικειωθείτε με την σχέση διακοπών και διπλής χρονομέτρησης

#### Πείραμα 1

- Τοποθετήστε μάζα τύπου  $F$  στην  $D$ . Μετρήστε για 3 αποστάσεις  $S$  μεταξύ πλατφόρμας  $J$  και διακόπτη από 5 φορές για κάθε απόσταση. Η ελάχιστη απόσταση  $S$  όχι μικρότερη από 25 cm. Η πλατφόρμα  $H$  είναι εκτός διαδρομής

#### Πείραμα 2

- Με μάζες τύπου  $F$  και στην  $D$  και στην  $D'$  για δύο (2) διαφορετικές θέσεις της  $J$
- Σε κάθε θέση αρχικά οι μάζες στην  $D$  και στην  $D'$
- Χωρίς να αλλάξουμε θέση το άθροισμα των μαζών μόνο στο  $D$  (επίσης 5 μετρήσεις)

#### Πείραμα 3

- Με την μάζα  $G$  στο  $D$  επαναφέρουμε την πλατφόρμα  $H$  ανάμεσα στο  $D$  και την πλατφόρμα  $J$ , ενώ η πλατφόρμα  $J$  πρέπει να είναι στο κατώτερο δυνατό σημείο και η απόσταση μεταξύ  $D$  και  $H$  να είναι τουλάχιστον 20 cm
- Λαμβάνουμε πέντε (5) μετρήσεις χρόνου
- Μετακινούμε την  $H$  σε δύο (2) ακόμη θέσεις (δεν μεταβάλλουμε την  $J$ ) και λαμβάνουμε πέντε (5) μετρήσεις για κάθε θέση

## B3. Μέτρηση του συντελεστή εσωτερικής τριβής των υγρών με την πτώση μικρών σφαιρών

### Σκοπός της ασκήσεως

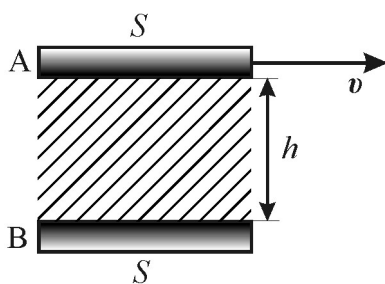
Με τη βοήθεια της μεθόδου θα υπολογίσουμε τον συντελεστή εσωτερικής τριβής κάποιων υγρών και θα προσπαθήσουμε να κατανοήσουμε τους διάφορους παράγοντες από τους οποίους αυτός εξαρτάται.

### Στοιχεία από τη θεωρία

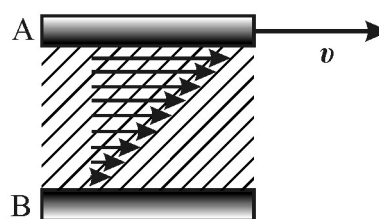
Είναι γνωστό πως ο διαχωρισμός των υλικών σε αέρια, υγρά και στερεά από μικροσκοπική άποψη βασίζεται στη σχέση που υπάρχει ανάμεσα στην κινητική ( $E_K$ ) και δυναμική ( $E_P$ ) ενέργεια των μορίων τους. Έτσι για τα αέρια  $E_K \gg E_P$ , για τα υγρά  $E_K \sim E_P$ , για τα στερεά  $E_K \ll E_P$ .

Είναι προφανές πως αν θέλουμε ν' αλλάξουμε την κατάσταση των μορίων κάποιου υλικού, π.χ. την ταχύτητά τους (την κινητική τους ενέργεια) ή τη θέση τους μέσα στο σύνολο των άλλων μορίων (τη δυναμική τους ενέργεια), πρέπει να προσφέρουμε κάποιο έργο. Η δύναμη που αντιστέκεται στη μεταβολή της ορμής των μορίων λέγεται εσωτερική τριβή των υλικών.

Ας υποθέσουμε τώρα ότι μεταβάλλουμε την κινητική κατάσταση ενός υγρού. Έστω ότι ανάμεσα σε δύο πλάκες A και B εμβαδού  $S$  που αρχικά ηρεμούν περιέχεται κάποιο υγρό. Αν η πλάκα A κινηθεί με ταχύτητα  $u$  (σχ. 1) τα μόρια του υγρού που αλληλεπιδρούν άμεσα με τα μόρια της πλάκας θα τείνουν να κινηθούν με ταχύτητα  $u$ . Θα συμπαρασύρουν όμως μέσω ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων και τα γειτονικά μόρια τα οποία επειδή με τη σειρά τους αλληλεπιδρούν με τα αμέσως επόμενα θα αποκτήσουν ταχύτητα  $u' < u$ . Είναι κατανοητό πως αν η πλάκα B είναι σταθερή, τα μόρια που αλληλεπιδρούν μ' αυτή θα έχουν "μηδενική" ταχύτητα. Σχηματικά η κατανομή των ταχυτήτων στα διάφορα στρώματα του υγρού φαίνεται στο σχ. 2.



Σχήμα 1



Σχήμα 2

Όλη αυτή η διαδικασία μας δείχνει ότι κάθε στρώμα του υγρού αντιστέκεται στη μεταβολή της ορμής του και η πραγματοποίησή του πειράματος του σχ. 1 απαιτεί να ασκούμε στην πλάκα A για να μην σταματήσει διαρκώς μια δύναμη  $F$ . Η ελάχιστη δύναμη την οποία πρέπει να ασκούμε ώστε  $u = \text{const}$  ονομάζεται **δύναμη εσωτερικής τριβής**. Στην περίπτωση αυτή, ο Newton απέδειξε πως για  $h \ll \sqrt{S}$  ισχύει\*:

\* Στον τύπο δεν χρησιμοποιήσαμε το μείον που υπάρχει στα βιβλία, γιατί θεωρήσαμε σκόπιμο να το συμπεριλάβουμε στην παράγωγο  $du/dh$ . Το μείον δείχνει ότι η ορμή (η ταχύτητα) μεταδίδεται από τις περιοχές όπου είναι υψηλότερη προς τις περιοχές όπου είναι χαμηλότερη.

$$F = F_T = \eta S \frac{dv}{dh} \approx \eta S \frac{v}{h} \quad (1)$$

όπου  $\eta$  σταθερά που εξαρτάται από τη φύση του υγρού και ονομάζεται **συντελεστής εσωτερικής τριβής** ή **ιξώδες** του υγρού. Αποδεικνύεται επίσης πως το ιξώδες εξαρτάται από τη θερμοκρασία. Στον Πίνακα I δίνεται το ιξώδες μερικών ρευστών για συγκεκριμένες θερμοκρασίες.

**Πίνακας I**

Υλικό	Θερμ. (°C)	$\eta$ (g/cm·s)
Αέρας	16	$1.8 \cdot 10^{-4}$
Ακετόνη	20	$3.3 \cdot 10^{-3}$
Βενζίνη	20	$6.49 \cdot 10^{-3}$
Νερό	18	$1.05 \cdot 10^{-2}$
Ελαιόλαδο	20	0.84
Καστορέλαιο	20	9.86
Γλυκερίνη	18	13.93

Την ίδια, από άποψη αρχών, εικόνα με αυτή που περιγράψαμε πιο πάνω έχουμε και κατά την κίνηση κάποιου σώματος μέσα σε ρευστό. Αν το σώμα μας είναι σφαίρα μικρής ακτίνας που κινείται με μικρή ταχύτητα σε ένα υγρό που βρίσκεται σε δοχείο απείρων διαστάσεων, τότε η δύναμη της τριβής δίνεται από τον τύπο του Stokes:

$$F_T = 6\pi\eta r v \quad (2)$$

όπου  $v$  η ταχύτητα και  $r$  η ακτίνα της σφαίρας.

Η απόδειξη της σχέσης αυτής είναι αρκετά πολύπλοκη και βγαίνει έξω από τα όρια του μαθήματός μας. Μπορούμε όμως να την αποδείξουμε και ποιοτικά, χρησιμοποιώντας κάποια πειραματικά δεδομένα.

Από το πείραμα βρίσκουμε ότι η  $F_T$  είναι ανάλογη του  $\eta$ , του  $v^y$  και του  $r^x$ , όπου  $x$  και  $y$  άγνωστες σταθερές, τις οποίες πρέπει να προσδιορίσουμε. Άρα, μπορούμε να γράψουμε:

$$F_T = A\eta r^x v^y \quad (3)$$

Αλλά από το γενικό τύπο των φαινομένων μεταφοράς

$$F_T = \eta S \frac{dv}{dh} \quad (4)$$

Αν εξετάσουμε τις διαστάσεις των δύο τύπων έχουμε από την σχέση (3):

$$\left[ r^x v^y \right] = \left[ m^x \frac{m^y}{s^y} \right] = \left[ \frac{m^{x+y}}{s^y} \right].$$

και από την σχέση (4) η εξής:  $\left[ S \frac{dv}{dh} \right] = \left[ m^2 \frac{s}{m} \right] = \left[ \frac{m^2}{s} \right].$

Άρα τελικά  $y=1$ ,  $x=1$  και επομένως:

$$F_T = A\eta r v.$$

Ο συντελεστής  $A$  από αυτή τη μέθοδο δεν μπορεί να υπολογισθεί. Τελικά η θεωρία δίνει (και το πείραμα επαληθεύει)  $A=6\pi$ .

Έστω τώρα σφαίρα η οποία πέφτει μέσα σε ρευστό. Πάνω της ασκούνται 3 δυνάμεις: α) Η δύναμη της βαρύτητας  $\rho Vg$ , β) η δύναμη της άνωσης  $\rho_v Vg$  και γ) η δύναμη της τριβής  $F_T$  ( $\rho$  - η πυκνότητα της σφαίρας,  $V$  - ο όγκος της,  $V=4\pi r^3/3$ ,  $\rho_v$  η πυκνότητα του ρευστού). Τότε έχουμε

$$m \frac{dv}{dt} = (\rho - \rho_v) Vg - 6\pi\eta r v \quad (5)$$

ή

$$\frac{dv}{dt} = \frac{\rho - \rho_v}{\rho} g - \frac{9}{2r^2} \frac{\eta}{\rho} v. \quad (6)$$

Από την (6) βλέπουμε πως η επιτάχυνση μειώνεται με την αύξηση της  $v$ , όμως η ταχύτητα δεν μπορεί να γίνει μεγαλύτερη από μια **οριακή** τιμή:

$$v_{op} = \frac{\rho - \rho_v}{\eta} \frac{2r^2 g}{9}, \quad (7)$$

για την οποία  $dv/dt=0$ .

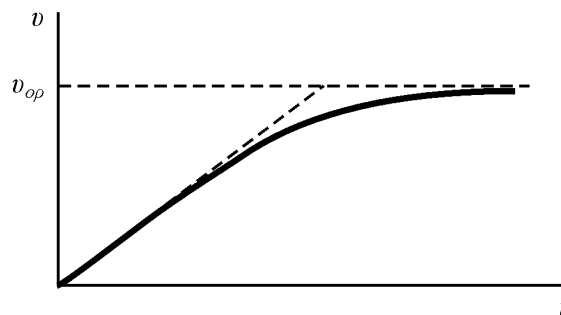
Την εξίσωση (6) τη γράφουμε τώρα:

$$\beta \frac{dv}{dt} = v_{op} - v, \quad (8)$$

όπου  $\beta=2r^2\rho/9\eta$ , και λύνοντας την παίρνουμε:

$$v = v_{op} (1 - e^{-t/\beta}) \quad (9)$$

Η καμπύλη  $v(t)$  φαίνεται στο σχήμα 3. Από όλα αυτά βγάζουμε το συμπέρασμα πως η κίνηση της σφαίρας θα είναι πολύπλοκη. Μόνο στην αρχή, για  $t \ll \beta$  θα είναι ομαλά επιταχυνόμενη. Ύστερα η επιτάχυνση θα μειώνεται σταδιακά και τελικά, για  $t \gg \beta$ , η κίνηση γίνεται σχεδόν ισοταχής.



Σχήμα 3

Αν, για παράδειγμα, έχουμε ασάλινο σφαιρίδιο ( $\rho=7.88 \text{ g/cm}^3$ ) ακτίνας 2.5cm που πέφτει στην ατμόσφαιρα,  $\beta \approx 6.08 \cdot 10^4 \text{ s}$ , δηλαδή  $\beta \approx 16 \text{ h}$ . Αν τώρα  $r=1\text{mm}$  και η σφαίρα πέφτει σε γλυκερίνη,  $\beta \approx 1.26 \cdot 10^{-3} \text{ s}$  και  $v_{op} \approx 1.06 \text{ cm/s}$ .

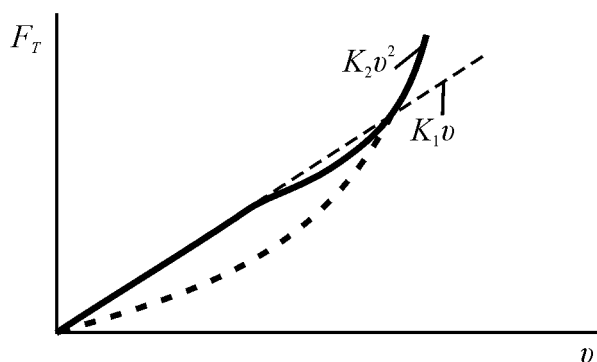
Είναι προφανές πως αν μετρήσουμε την οριακή ταχύτητα μιας σφαίρας που πέφτει σε ρευστό που περιέχεται σε δοχείο, μπορούμε, από τον τύπο (7), να υπολογίσουμε το  $\eta$ . Επειδή όμως το δοχείο έχει πεπερασμένες διαστάσεις, χρειάζεται να συνυπολογίσουμε και την επίδραση των τοιχωμάτων (γιατί;). Αυτό μπορεί να γίνει για κυλινδρικό δοχείο ακτίνας  $R$ , οπότε:

$$\eta = \frac{2}{9} g r^2 \frac{\rho - \rho_v}{v_{op} (1 + 2.4r/R)} \quad (10)$$

## Παρατήρηση

Υπάρχουν πολλές περιπτώσεις που η δύναμη της εσωτερικής τριβής δεν είναι ανάλογη της ταχύτητας, αλλά εξαρτάται πιο πολύπλοκα απ' αυτή. Πάντα όμως αυξάνεται με την αύξηση της ταχύτητας και το σώμα πάντα τείνει ν' αποκτήσει σταθερή ταχύτητα, διαφορετική βέβαια στις διάφορες περιπτώσεις.

Αυτό π.χ. συμβαίνει κατά την πτώση ανθρώπου στην ατμόσφαιρα με ανοιχτό ή κλειστό αλεξίπτωτο. Στην πρώτη περίπτωση  $u_{op} \approx 5-6$  m/s, ενώ στη δεύτερη  $u_{op} \approx 60$  m/s.



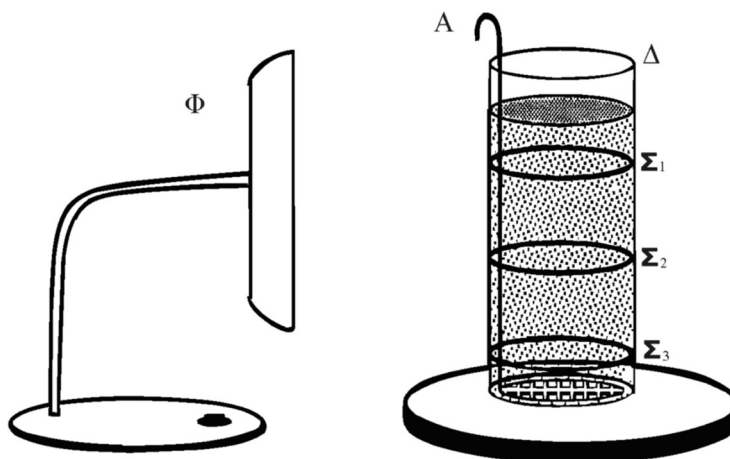
Σχήμα 4

Συνήθως η  $F_T$  εξαρτάται πιο πολύπλοκα από την  $v$  για μεγάλες ταχύτητες, όταν η ροή του ρευστού γύρω από τη σφαίρα παύει να είναι **στρωτή** και γίνεται **τυρβώδης**. Στις περισσότερες περιπτώσεις, από κάποια τιμή της ταχύτητας και μετά  $F_T \sim v^2$  (βλ. σχ. 4).

## Πειραματική Διάταξη

Η πειραματική διάταξη περιλαμβάνει:

α) Δυο ογκομετρικούς σωλήνες  $\Delta$  των 1000 ml με τα μελετούμενα υγρά. Τα δοχεία έχουν 3 ταινίες το καθένα που μας βοηθούν να προσδιορίσουμε τρεις αποστάσεις ( $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$  και  $\Sigma_3$  στο σχ. 5) και σύστημα περισυλλογής των σφαιρών A (Προσοχή! Το σύστημα περισυλλογής οι φοιτητές δεν το χρησιμοποιούν).



Σχήμα 5

β) Λάμπα φωτισμού  $\Phi$  για να βλέπουμε καλύτερα τη σφαίρα κατά την πτώση της. γ) Δυο ογκομετρικούς σωλήνες των 250ml με πυκνόμετρα για τη μέτρηση της πυκνότητας των μελετούμενων υγρών (δεν φαίνονται στο σχήμα).

δ) Χρονόμετρο.

ε) Υποδεκάμετρο.

στ) Μικρές σφαίρες  $d_{σφ}=1\text{mm}$ ,  $m_{σφ}=0.00467\text{g}$ .

## Πειραματική Διαδικασία

1. Στη διάταξη δίνονται οι ακτίνες των μικρών σφαιρών και οι μάζες τους. Πρέπει να μετρηθεί η ακτίνα του ογκομετρικού σωλήνα (με καταγραφή ακρίβειας και αβεβαιότητας).



- Μετρούμε την απόσταση ανάμεσα στις χαραγές  $\Sigma_1$ ,  $\Sigma_2$ ,  $\Sigma_3$ . Αφήνουμε μια σφαίρα να πέσει στο υγρό, όσο το δυνατόν κατά το κέντρο του σωλήνα. Μετρούμε το χρόνο στον οποίο η σφαίρα διανύει την απόσταση ανάμεσα στις χαραγές  $x_1 = \Sigma_1 - \Sigma_2$  και  $x_2 = \Sigma_2 - \Sigma_3$ .
- Με τη χρήση των πυκνόμετρων υπολογίζουμε την πυκνότητα των δύο υγρών.
- Υπολογίζουμε την ταχύτητα για τα δύο διαστήματα. Αν είναι η ίδια περίπου (τι σημαίνει «ίδια περίπου»;) και στις δυο περιπτώσεις χρησιμοποιούμε τη μέτρηση, διαφορετικά την απορρίπτουμε.
- Επαναλαμβάνουμε το πείραμα συνολικά για 10 σφαιρίδια. Τα αποτελέσματα τα καταχωρούμε στον Πίνακα. Από τη σχέση (10) υπολογίζουμε το ιξώδες και το σφάλμα του.

### Ηλιέλαιο

	$x_1$ (cm)	$t_1$ (s)	$v_1$ (cm/s)	$x_2$ (cm)	$t_2$ (s)	$v_2$ (cm/s)	$t_{ολ}$ (s)
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							

$g =$	9,807m/s <sup>2</sup>	
$x_1 =$		cm
$x_2 =$		cm
$m_{σφ} =$	0,00467g	= 4,67E-06kg
$d_{σφ} =$	1,00mm	= 1,00E-03m
$r_{σφ} =$	0,50mm	= 5,00E-04m
$d_{σωλ} =$		cm = m
$R_{σωλ} =$		cm = m
$\rho =$		kg/m <sup>3</sup>
$\rho_υ =$		kg/m <sup>3</sup>
$\langle v \rangle =$		cm/s = m/s
$\delta v =$		cm/s = m/s
$\eta =$		kg/(s.m)

### Ορυκτέλαιο

	$x_1$ (cm)	$t_1$ (s)	$v_1$ (cm/s)	$x_2$ (cm)	$t_2$ (s)	$v_2$ (cm/s)	$t_{ολ}$ (s)
1							
2							
3							
4							
5							
6							
7							
8							
9							
10							
11							
12							

$g =$	9,807m/s <sup>2</sup>	
$x_1 =$		cm
$x_2 =$		cm
$m_{σφ} =$	0,00467g	= 4,67E-06kg
$d_{σφ} =$	1,00mm	= 1,00E-03m
$r_{σφ} =$	0,50mm	= 5,00E-04m
$d_{σωλ} =$		cm = m
$R_{σωλ} =$		cm = m
$\rho =$		kg/m <sup>3</sup>
$\rho_υ =$		kg/m <sup>3</sup>
$\langle v \rangle =$		cm/s = m/s
$\delta v =$		cm/s = m/s
$\eta =$		kg/(s.m)

## Οδηγίες εκτέλεσης πειραμάτων B3

### Αρχικές ρυθμίσεις

- Εξοικειωθείτε με τη λειτουργία του χρονομέτρου (LAP/SPLIT time)
- Μετρήστε τις διαμέτρους και τις διαδρομές  $x_1$  και  $x_2$  και για τους δύο σωλήνες

### Πείραμα

- Ξεκινήστε, με το σκουρόχρωμο υγρό (λάδι μηχανής), μερικές δοκιμαστικές μετρήσεις με 3-4 σφαιρίδια, προσδιορίζοντας τους αντίστοιχους χρόνους
- Στη συνέχεια προχωρήστε στις 3-4 πρώτες μετρήσεις σας πολύ προσεκτικά. Υπολογίστε τις ταχύτητες  $v_1$  και  $v_2$  για κάθε σφαιρίδιο και συγκρίνατε. Συμπεράσματα για την οριακή ταχύτητα; Υπολογίστε και για τις υπόλοιπες αρχικές μετρήσεις σας. Συμπεράσματα;
- Εφόσον όλα είναι λογικά προχωρήστε στις υπόλοιπες (12) μετρήσεις. Αν οι ταχύτητες διαφέρουν σημαντικά τι σημαίνει αυτό και τι μπορείτε να κάνετε για να το βελτιώσετε;
- Επαναλάβετε την ίδια διαδικασία με το άλλο υγρό (ηλιέλαιο)
- Προσδιορίστε τις πυκνότητες των δύο υγρών με τα αντίστοιχα αραιόμετρα (η κλίμακα μέτρησης είναι σε  $\text{g/cm}^3$ )

### Ερωτήσεις

1. Ποιες είναι οι φυσικές διαφορές ανάμεσα στο ιξώδες των υγρών και των αερίων και ποιες οι συνέπειές τους; Πώς κατά τη γνώμη σας εξαρτάται το ιξώδες στα αέρια και στα υγρά από τη θερμοκρασία; Τεκμηριώστε την απάντησή σας ποιοτικά.
2. Στην επεξεργασία των αποτελεσμάτων σας έχετε τις εξής δυνατότητες: α) Υπολογίζετε χωριστά το  $\bar{v}_1$  από τις 10 μετρήσεις του  $v$  και το  $\bar{v}_2$  από τις 10 μετρήσεις του  $v_2$ . Από τις 2 τιμές βρίσκετε ένα  $\bar{v}_1$ . β) Από τα 10  $v_1$  και τα 10  $v_2$  υπολογίζετε ένα  $\bar{v}_1$ . Ποια από τις δύο θα χρησιμοποιήσετε και γιατί;
3. Αν  $F_T = K v^2$  και έχετε σφαιρίδιο που πέφτει στο υγρό βρείτε τη  $v(t)$  και τη  $v_{op}$ .
4. Αν στη θέση της μεταλλικής σφαίρας έχετε σταγόνα νερού με  $r=3\text{mm}$  υπολογίστε τη  $v_{op}$  για τις συνθήκες του πειράματός σας.
5. Γιατί τα τοιχώματα του δοχείου επιδρούν στο ιξώδες;
6. Χρησιμοποιώντας το συντελεστή εσωτερικής τριβής που βρήκατε για τα δύο υγρά εξετάστε το εξής πρόβλημα: Σφαιρίδιο (όπως αυτό του πειράματός σας) πέφτει σε υγρό από ύψος 10cm με  $v_0=0$ . Πόσο διάστημα θα διανύσει στο υγρό μέχρι να αποκτήσει ταχύτητα ίση (σχεδόν) με την οριακή;

## **Βιβλιογραφία**

1. Χ. Τρικαλινός, ΜΟΡΙΑΚΗ ΦΥΣΙΚΗ-ΘΕΡΜΟΔΥΝΑΜΙΚΗ, Κεφ. V, §§ 45, 50
2. Alonso-Finn, τ. 1, (ΜΗΧΑΝΙΚΗ), §§ 7.8, 15.1, 15.2, 15.4, 15.6, 15.7
3. Berkeley, τ. 5, (ΣΤΑΤΙΣΤΙΚΗ ΦΥΣΙΚΗ), §§ 8.1, 8.2

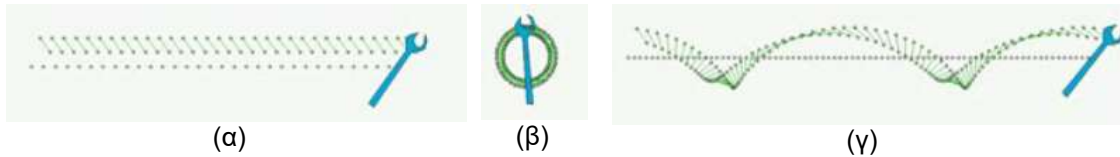
## B4. Περιστροφική κίνηση στερεού σώματος ροπές αδράνειας - στροφορμή – κινητική ε- νέργεια – νόμοι διατήρησης

### Σκοπός της άσκησης

Στην Άσκηση αυτή θα μελετήσουμε και θα υπολογίσουμε βασικές ιδιότητες και μεγέθη που αφορούν την περιστροφική κίνηση ενός στερεού σώματος. Η κίνηση στερεού σώματος γύρω από άξονα αναδεικνύει βασικές έννοιες, όπως την ροπή δύναμης, την ροπή αδράνειας, την στροφορμή, την κινητική ενέργεια περιστροφής, νόμους διατήρησης κλπ.

### Στοιχεία από την θεωρία

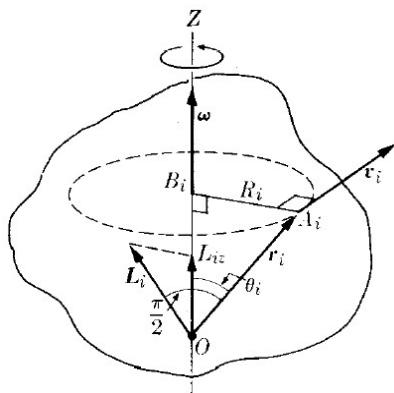
Σ' ένα στερεό σώμα έχουμε την δυνατότητα να διακρίνουμε δύο τύπου κίνησης. Έχουμε την μεταφορική κίνηση, όπου όλα τα σωματίδια διαγράφουν παράλληλες τροχιές έτσι ώστε οι γραμμές που ενώνουν οποιαδήποτε δύο σημεία του σώματος να παραμένουν πάντοτε παράλληλες προς την αρχική τους θέση. Αντίθετα η κίνηση είναι περιστροφική γύρω από ένα άξονα, όταν όλα τα σωματίδια διαγράφουν κυκλικές τροχιές γύρω από μια γραμμή που ονομάζεται άξονας περιστροφής. Ο άξονας αυτός μπορεί να παραμένει σταθερός ή να αλλάζει διεύθυνση κατά την διάρκεια της περιστροφής. Υπάρχει και η γενική περίπτωση (συνδυασμός των δύο κινήσεων)



Σχήμα 1. Στερεό σώμα: (α) μεταφορική κίνηση (β) περιστροφική κίνηση (γ) γενική κίνηση

Η κίνηση του Κέντρου Μάζας δίδεται από την σχέση:  $M \frac{du_{CM}}{dt} = F_{ext}$  (1)

όπου  $M$  είναι η μάζα του σώματος,  $u_{CM}$  η ταχύτητα του κέντρου μάζας και  $F_{ext}$  η συνισταμένη των ενασκούμενων εξωτερικών δυνάμεων.



Θεωρούμε ένα στερεό σώμα το οποίο και μπορεί να περιστρέφεται γύρω από σταθερό άξονα  $Z$  με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ . Το κάθε ένα από τα σωματίδια που αποτελούν το σώμα θα διαγράφει κυκλική τροχιά με το κέντρο της να βρίσκεται πάνω στον άξονα περιστροφής.

Το σωματίδιο  $A_i$  για παράδειγμα θα διαγράφει κύκλο με ακτίνα  $R_i = A_i B_i$  και ταχύτητα ίση με  $u_i = \omega \times r_i$ . Συμβολίζουμε με  $r_i$  την επιβατική ακτίνα ως προς την αρχή  $O$ . Η αλγεβρική τιμή της ταχύτητας είναι  $u_i = \omega r_i \sin \theta_i = \omega R_i$ .

Χρησιμοποιείται ο συμβολισμός  $\omega$  και όχι  $\omega_i$  διότι όλα τα

σωματίδια που απαρτίζουν το στερεό έχουν την ίδια γωνιακή ταχύτητα. Η **στροφορμή** του σω-

ματιδίου  $A_i$  ως προς την αρχή  $O$  είναι:  $L_i = m_i \bar{r}_i \times \bar{u}_i$  (2)

Η διεύθυνση της θα είναι κάθετη στο επίπεδο που σχηματίζουν τα διανύσματα  $\vec{r}_i$  και  $\vec{u}_i$ .

$$L_i = m_i r_i u_i \quad (3)$$

Τώρα για να πάρουμε την συνιστώσα της ολικής στροφορμής του περιστρεφόμενου σώματος κατά τον άξονα περιστροφής Z, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να προσθέσουμε την κάθε μια ξεχωριστά.

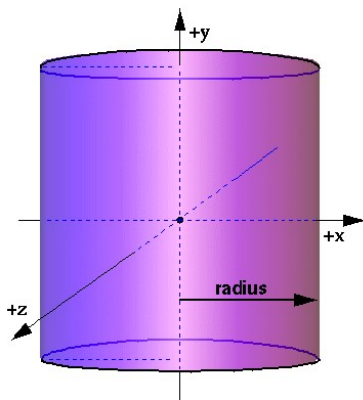
$$\text{Δηλαδή: } L_z = L_{1z} + L_{2z} + L_{3z} + \dots = \sum_i L_{iz} = (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \dots) \omega = \left( \sum_i m_i R_i^2 \right) \omega.$$

$$\text{Η ποσότητα: } I = (m_1 R_1^2 + m_2 R_2^2 + m_3 R_3^2 + \dots) = \left( \sum_i m_i R_i^2 \right) \quad (4)$$

ορίζεται ως **ροπή αδράνειας** του σώματος ως προς τον άξονα περιστροφής Z και είναι το άθροισμα των γινομένων της μάζας του κάθε σωματιδίου επί το τετράγωνο της απόστασης του από τον άξονα. Επομένως μεγαλύτερη ροπή θα εμφανίζουν τα ογκωδέστερα σώματα. Μπορούμε τώρα να ξανά γράψουμε την στροφορμή συνάρτηση πλέον την ροπής αδράνειας και τελικά έχουμε την μορφή:  $L_z = I \omega$ . Από την σχέση αυτή προκύπτει ότι, όσο μεγαλύτερη είναι η ροπή αδράνειας ενός σώματος, τόσο μεγαλύτερη θα είναι η στροφορμή του, για δεδομένη πάντα τιμή της γωνιακής ταχύτητας. Για την στροφορμή του στερεού σώματος, το μόνο που έχουμε να κάνουμε είναι να αθροίσουμε τις επιμέρους στροφορμές.

$$\text{Δηλαδή: } \vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \vec{L}_3 + \dots = \sum_i \vec{L}_i \quad (5)$$

γενικά δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής αφού κάθε μια από τις στροφορμές  $\vec{L}_i$  δεν είναι παράλληλη προς τον άξονα.



Για ένα οποιοδήποτε σώμα ανεξάρτητα από ποιο είναι το σχήμα του, έχουμε την δυνατότητα να αποδείξουμε ότι υπάρχουν τουλάχιστον τρεις, αμοιβαία κάθετες, κατευθύνσεις για τις οποίες η στροφορμή είναι παράλληλη προς τον άξονα περιστροφής. Οι κατευθύνσεις αυτές ορίζονται ως κύριοι αδρανειακοί άξονες περιστροφής. Με το ίδιο σκεπτικό και οι αντίστοιχες ροπές αδράνειας θα ονομάζονται κύριες ροπές αδράνειας και συμβολίζονται ως  $I_1$ ,  $I_2$  και  $I_3$ . Για σώματα στα οποία παρατηρείται κάποιου είδους συμμετρίας οι κύριοι άξονες συμπίπτουν με αυτούς τους άξονες συμμετρίας. Για παράδειγμα στα σώματα με κυλινδρική συμμετρία ο άξονας του κυλίνδρου και κάθε άξονας που περνάει από το κέντρο μάζας κάθετος προς αυτόν, είναι κύριος άξονας.

Στην περίπτωση που το σώμα περιστρέφεται γύρω από ένα κύριο άξονα αδράνειας, η ολική στροφορμή  $\vec{L}$  είναι παράλληλη με την γωνιακή ταχύτητα  $\vec{\omega}$ , που η διεύθυνση της είναι πάντοτε κατά τον άξονα περιστροφής. Στην περίπτωση αυτή μπορούμε να γράψουμε την διανυσματική σχέση:

$$\vec{L} = I \vec{\omega} \quad (6)$$

όπου  $I$  συμβολίζουμε την αντίστοιχη κύρια ροπή αδράνειας.

Το στερεό σώμα αποτελείται από ένα μεγάλο αριθμό σωματιδίων. Επομένως όταν θέλουμε να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας κάποιου στερεού θα πρέπει να αντικαταστήσουμε την σχέση  $I = \sum_i m_i R_i^2$  με ένα ολοκλήρωμα. Επομένως θα έχουμε:  $I = \int \rho R^2 dV$  (7)

Στην περίπτωση που η πυκνότητα του σώματος είναι σταθερή, τότε θα έχουμε:

$$I = \rho \int R^2 dV. \quad (8)$$

Οι ροπές αδρανείας ως προς παράλληλους άξονες περιστροφής σχετίζονται με ένα σχετικά απλό τύπο. Θεωρούμε  $Z$  ένα αυθαίρετο άξονα και  $Z_c$  έναν άξονα παράλληλο προς αυτόν που περνάει από το κέντρο μάζας του σώματος. Έστω  $b$  ότι είναι η απόσταση, μεταξύ των δύο αξόνων τότε θα ισχύει:

$$I = I_c + Mb^2 \quad (9)$$

όπου  $I$  και  $I_c$  είναι οι ροπές αδρανείας του σώματος προς τους άξονες  $Z$  και  $Z_c$ , αντιστοίχως, και  $M$  η μάζα του σώματος. Η πιο πάνω σχέση ονομάζεται **Θεώρημα Steiner**.

### Εξίσωση κίνησης για περιστροφή στερεού σώματος

Μας είναι γνωστό ότι η ολική στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων και η ολική ροπή των δυνάμεων που ασκούνται στα σωματίδια, όταν η ροπή και η στροφορμή αναφέρονται ως προς

το ίδιο σημείο, συνδέονται με την σχέση:

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{\tau} \quad (10)$$

όπου  $\bar{L} = \sum_i \bar{L}_i$ , είναι η ολική στροφορμή και  $\bar{\tau} = \sum_i \bar{\tau}_i$  είναι η ολική ροπή των εξωτερικών

δυνάμεων. Η σχέση αυτή θα μπορεί να χρησιμοποιηθεί και στην περίπτωση των στερεών αφού πρόκειται για ειδική περίπτωση συστήματος σωματιδίων.

Παίρνουμε την περίπτωση ενός στερεού σώματος που περιστρέφεται γύρω από ένα από τους κύριους άξονες του με ένα σημείο του σώματος σταθερό σε ένα αδρανειακό σύστημα. Τότε θα ισχύει  $\bar{L} = I\bar{\omega}$ . Η εξωτερική ροπή  $\bar{\tau}$  πρέπει να είναι η ροπή που μετρείται ως προς το σταθερό σημείο πάνω στον κύριο άξονα. Επομένως σε συνδυασμό με τα προηγούμενα προκύπτει ότι  $\frac{d(I\bar{\omega})}{dt} = \bar{\tau}$ . Η ροπή αδρανείας παραμένει σταθερή, αν ο άξονας παραμένει σταθερός ως προς

το στερεό σώμα και άρα μπορούμε να την βγάλουμε έξω από το διαφορικό. Δηλαδή:

$$I \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\tau} \quad (11)$$

$$\text{Όταν } \tau = 0 \Rightarrow I\bar{\omega} = \text{σταθ} \quad (12)$$

Και στην περίπτωση που η ροπή αδρανείας είναι σταθερή τότε και η γωνιακή ταχύτητα θα είναι σταθερή. Επομένως ένα στερεό σώμα περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα με σταθερή γωνιακή ταχύτητα όταν δεν επιδρούν πάνω του εξωτερικές ροπές,  $\rightarrow$  **διατήρηση στροφορμής**

Όταν το σώμα δεν περιστρέφεται γύρω από ένα άξονα έχουμε ότι  $\frac{d(I\bar{\omega})}{dt} = \bar{\tau}_z$  ή αν ο άξονας πε-

ριστροφής ως προς το σώμα είναι σταθερός τότε:  $I \frac{d\bar{\omega}}{dt} = \bar{\tau}_z \quad (13)$

Στην περίπτωση αυτή η  $\bar{\tau}_z$  αναφέρεται στην συνιστώσα της ολικής εξωτερικής ροπής γύρω από τον άξονα περιστροφής και όχι στην ολική ροπή. Είναι δυνατόν να απαιτούνται και άλλες ροπές για να διατηρήσουν το σώμα σε σταθερή θέση ως προς τον άξονα περιστροφής.

**Κινητική Ενέργεια Περιστροφής:** Μας είναι γνωστό ότι η κινητική ενέργεια συστήματος σωματιδίων δίνεται από την σχέση:

$$E_K = \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 \quad (14)$$

Μεταφερόμενοι τώρα στην περίπτωση του στερεού σώματος, το οποίο και περιστρέφεται γύρω από άξονα με γωνιακή ταχύτητα  $\omega$ , η ταχύτητα του κάθε σωματιδίου είναι  $u_i = \omega R_i$ . Με  $R_i$

συμβολίζουμε την απόσταση του σωματιδίου από τον άξονα περιστροφής. Επομένως αν αντικαταστήσουμε στην προηγούμενη σχέση θα πάρουμε τελικά:

$$E_k = \sum_i \frac{1}{2} m_i u_i^2 = \sum_i \frac{1}{2} m_i R_i^2 \omega^2 = \frac{1}{2} \left( \sum_i m_i R_i^2 \right) \omega^2 \quad (15)$$

Μπορούμε να προχωρήσουμε την σχέση αυτή ακόμα παρακάτω αν έχουμε κατά νου την σχέση  $I = \sum_i m_i R_i^2$ . Αν αντικαταστήσουμε την σχέση αυτή θα μας προκύψει τελικά ότι:

$$E_k = \frac{1}{2} I \omega^2 \quad (16)$$

Η σχέση ισχύει για κάθε άξονα, αφού η ταχύτητα είναι πάντα  $u_i = \omega R_i$ . Στην ειδική περίπτωση που η περιστροφή γίνεται γύρω από τον κύριο άξονα τότε μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε και την σχέση (6) οπότε θα προκύψει:

$$E_k = \frac{L^2}{2I} \quad (17)$$

## Πειραματική διάταξη

Οι συσκευές που χρησιμοποιούνται είναι οι εξής:

- Συσκευή με αισθητήρα γωνιακής ταχύτητας για ροπές αδράνειας (α)
- Συσκευή με αισθητήρα γωνιακής ταχύτητας για διατήρηση στροφορμής (β)
- Σετ διαφόρων δίσκων και σημειακών μαζών (για το β)
- Σετ μεγάλου δίσκου και δακτυλίου (γ)
- Παχύμετρο
- Διεπαφή LabPro των αισθητήρων
- Υπολογιστής με λογισμικό LoggerPro



(α)



(β)

## Πειραματική διαδικασία

### Πειραματική διάταξη

Το πείραμα αυτό θα πραγματοποιηθεί με τη συσκευή με αισθητήρα γωνιακής ταχύτητας για ροπές αδράνειας (εικόνα (α)), στην οποία θα προσαρμόσετε με τον κοχλία την κοίλη ράβδο αλουμινίου στον άξονα περιστροφής της συσκευής. Πάνω στη ράβδο προσαρμόζονται- συμμετρικά σε σχέση με τον άξονα περιστροφής της ράβδου- 2 κυλινδρικές μάζες.

### Θεωρητικοί υπολογισμοί

Για να υπολογίσουμε πειραματικά τη ροπή αδράνειας των μαζών που αναρτώνται στη ράβδο, εφαρμόζουμε μια γνωστή ροπή δύναμης  $\tau$  στο αντικείμενο και υπολογίζουμε στη συνέχεια την γωνιακή επιτάχυνση που αποκτά.

Είναι γνωστό ότι: 
$$\tau = I\alpha \Rightarrow I = \tau / \alpha \quad (18)$$

Η ροπή της δύναμης είναι: 
$$\tau = rT \quad (19)$$

όπου  $r$  είναι η ακτίνα του κυλίνδρου της κατακόρυφης τροχαλίας γύρω από τον οποίο στερεώνουμε το νήμα και  $T$  είναι η τάση του νήματος όταν η διάταξη περιστρέφεται.

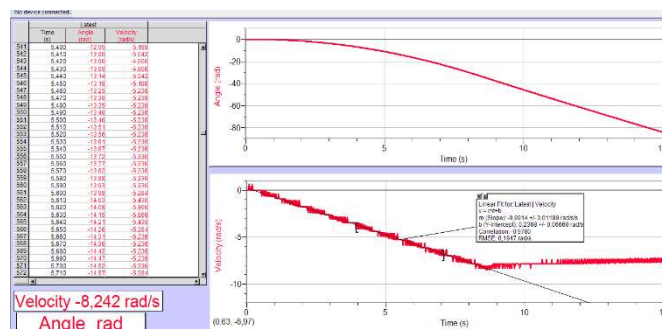
Για την αναρτώμενη πρόσθετη μάζα ισχύει:  $\Sigma F = mg - T = ma_{\gamma\rho}$ , όπου  $a_{\gamma\rho}$  η γραμμική επιτάχυνση που συνδέεται με την γωνιακή επιτάχυνση  $\alpha$  ως εξής:  $\alpha_{\gamma\rho} = \alpha \cdot r$ . Επιλύοντας ως προς την τάση του νήματος  $T$ :

$$T = m(g - a_{\gamma\rho}) \quad (20)$$

Η γωνιακή επιτάχυνση υπολογίζεται μέσω αισθητήρα συνδεδεμένου στην τροχαλία περιστροφής της ράβδου και καταγράφεται απευθείας στην οθόνη του Η/Υ.

### Πείραμα 1 – Ροπή αδράνειας

1. Συνδέστε τον αισθητήρα της συσκευής στη διεπαφή στο ψηφιακό κανάλι 1
2. Ζυγίστε και στη συνέχεια αναρτήστε πάνω στη ράβδο, σε συμμετρικές αποστάσεις από τον άξονα περιστροφής έως το κέντρο μάζας τους, τις δύο κυλινδρικές μάζες ( $m_1$  και  $m_2$ ) ξεκινώντας από απόσταση  $r \sim 0.1$  m. Καταγράψτε τις μάζες στον πίνακα 1 και την απόσταση  $r$  στον πίνακα 2.
3. Μετρήστε με τη βοήθεια παχυμέτρου, τη διάμετρο  $D$  της κάτω τροχαλίας του άξονα περιστροφής της συσκευής, πάνω στον οποίο στερεώνεται και τυλίγεται το νήμα και σημειώστε την τιμή της ακτίνας  $R=D/2$  στον Πίνακα 1.
4. Προσεκτικά τυλίξτε το νήμα στη κάτω τροχαλία του άξονα περιστροφής και δια μέσου της δεύτερης αβαρούς τροχαλίας, αναρτήστε πρόσθετη μάζα  $M=M_{\text{προσθ.βαρους}}+M_{\text{πλαστ.αναρτ.}}$  (αφού πρώτα ζυγίσετε τις μάζες  $M_{\text{προσθ.βαρους}}$  και  $M_{\text{πλαστ.αναρτ}}$  και καταγράψετε τις τιμές τους στον πίνακα 1). Κρατήστε ακίνητο το σύστημα.
5. Ανοίξτε στο πρόγραμμα Logger Pro το αρχείο **B4\_mom\_inertia**
6. Αφήστε το σύστημα να κινηθεί και **ταυτόχρονα** ξεκινήστε τη λήψη μετρήσεων στο ανοιγμένο αρχείο του Logger Pro. Κατά την κάθοδο της **μάζας M**, στην οθόνη του Η/Υ σχηματίζεται η γραφική παράσταση της **γωνιακής ταχύτητας με το χρόνο**. Προσδιορίστε με γραμμική προσαρμογή (linear fit) τη γωνιακή επιτάχυνση  $\alpha(t) = \frac{d\omega}{dt}$ .





7. Υπολογίστε τη ροπή αδράνειας από τη σχέση  $\tau = I \cdot \alpha = I \cdot \frac{d\omega}{dt} \Rightarrow I = \frac{\tau}{\alpha}$ , αφού πρώτα υπολογίσετε από την εξ. (20) την τάση T του νήματος κι από τη εξ. (19) τη ροπή  $\tau$ .
8. Επαναλάβετε τις μετρήσεις για δύο διαφορετικά r και καταχωρήστε τα αποτελέσματα στον πίνακα 2.

**Πίνακας 1**

R±δR [m]	M <sub>πρσοθ</sub> ±δM [kg]	M <sub>αναρτ</sub> ±δM [kg]	M±δM [kg]	m <sub>1</sub> ±δm <sub>1</sub>	m <sub>2</sub> ±δm <sub>2</sub>

**Πίνακας 2**

α/α	r [m]	$\alpha \pm \delta\alpha$ [rad/s <sup>2</sup> ]	$I \pm \delta I$ [kg m <sup>2</sup> ] (θεωρητική τιμή)	$I \pm \delta I$ [kg m <sup>2</sup> ] (πειραματική τιμή)	Απόκλιση % θεωρητικής και πειραματικής τιμής I (%)
1					
2					
3					

9. Υπολογίστε θεωρητικά τη ροπή αδράνειας θεωρώντας τη μάζα του κυλίνδρου αμελητέα και τις κυλινδρικές μάζες σημειακές και καταγράψτε την τιμή με το σφάλμα της στον πίνακα 2.
10. Συγκρίνετε τη θεωρητική με την πειραματική τιμή και υπολογίστε την % διαφορά μεταξύ τους. Καταγράψτε την τιμή με το σφάλμα της στον πίνακα 2.
11. Σχολιάστε τις αποκλίσεις.
12. Μετρήστε τη μάζα και τις διαστάσεις της ράβδου και των κυλινδρικών μαζών (και τις εσωτερικές και εξωτερικές ακτίνες) και καταγράψτε τις τιμές στον πίνακα 3.

**Πίνακας 3**

	Μάζα [kg]	Εσωτερική ακτίνα [m]	Εξωτερική ακτίνα [m]	Μήκος [m]
Ράβδος				
Μάζα m <sub>1</sub>				
Μάζα m <sub>2</sub>				

13. Θεωρήστε ότι στον υπολογισμό της θεωρητικής τιμής της ροπής αδράνειας η μάζα της ράβδου δεν είναι αμελητέα και ότι οι κυλινδρικές μάζες δεν είναι σημειακές. Συγκρίνετε ξανά τη θεωρητική με την πειραματική τιμή της ροπής αδράνειας του συστήματος και υπολογίστε την νέα απόκλιση μεταξύ τους. Καταγράψτε την τιμή στον πίνακα 4 και σχολιάστε τα αποτελέσματα.

Σημείωση. Η ροπή αδράνειας για κοίλο κύλινδρο, όπου ο άξονας περιστροφής διέρχεται από την διάμετρο του και περνάει από το κέντρο του δίνεται από τη σχέση:

$$I = \frac{1}{4} M (R_1^2 + R_2^2) + \frac{1}{12} M L^2$$



Πίνακας 4

α/α	$I$ [kg m <sup>2</sup> ] (θεωρητική τιμή)	$I$ [kg m <sup>2</sup> ] (πειραματική τιμή)	Απόκλιση % θεωρητικής και πειραματικής τιμής $I$ (%)
1			
2			
3			

14. Σχολιάστε συνολικά τα αποτελέσματα.

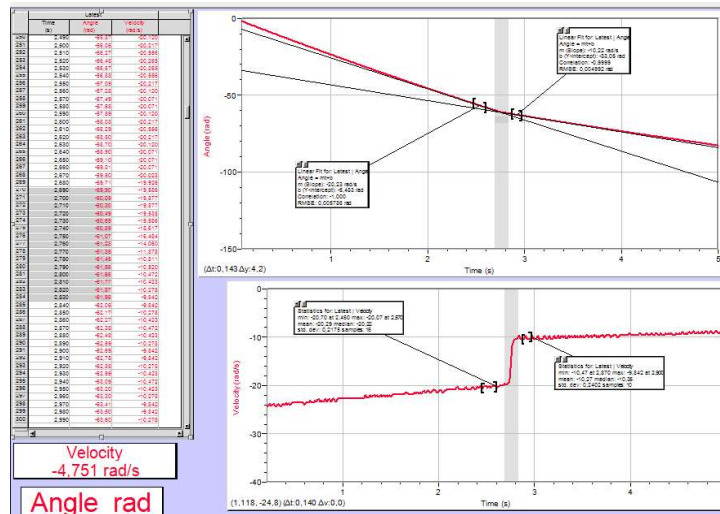
## Πείραμα 2 – Διατήρηση της Στροφομής

### Πειραματική διάταξη

Το πείραμα αυτό θα πραγματοποιηθεί με τη συσκευή με αισθητήρα γωνιακής ταχύτητας για διατήρηση στροφομής (εικόνα (β)), στην οποία θα προσαρμόσετε με τον κοχλία τον λείο δίσκο από αλουμίνιο στον άξονα της συσκευής.

### Πειραματική διαδικασία

1. Ζυγίστε τους δύο ίδιους δίσκους από αλουμίνιο (βλέπε φωτογραφία 1β) και μετρήστε την διάμετρό τους και σημειώστε τις τιμές τους στο Πίνακα 5 για τον θεωρητικό υπολογισμό της ροπής αδράνειας  $I$
2. Συνδέστε τον αισθητήρα της συσκευής στη διεπαφή στο ψηφιακό κανάλι 1
3. Ανοίξτε στο πρόγραμμα LoggerPro το αρχείο **B4\_ang\_mom\_conserv**
4. Έχοντας στο πλάι τον δεύτερο δίσκο με τους τρεις μικρούς δισκοειδείς φελλούς, δώστε μια περιστροφή με το χέρι σας στον αναρτημένο λείο δίσκο και με την βοήθεια του συνεργάτη σας ξεκινήστε την καταγραφή
5. Μετά από 2-3s αφήστε πολύ προσεκτικά και από πολύ μικρό ύψος το δεύτερο δίσκο αλουμινίου να πέσει και να «κολλήσει» με κοινό άξονα με τον πρώτο δίσκο διπλασιάζοντας ουσιαστικά την μάζα του περιστρεφόμενου σώματος
6. Με το πέρας των μετρήσεων στο πάνω γράφημα που είναι η γωνία στη μονάδα του χρόνου βλέπουμε μια ~ευθεία συμπεριφορά της με δύο διαφορετικές κλίσεις που αντιστοιχούν στην προ και μετά ενσωμάτωση του δεύτερου δίσκου στο σύστημα. Στο κάτω διάγραμμα είναι η γωνιακή ταχύτητα  $\omega$  «πριν και μετά» με το χαρακτηριστικό «άλμα» κατά την μετάβαση



- Από τον γνωστό τύπο  $I = \frac{1}{2} mR^2$  για την ροπή αδράνειας δίσκου υπολογίστε και συμπληρώστε στο Πίνακα 6 τα στοιχεία που περιέχει. Από την σχέση της αναμενόμενης διατήρησης της στροφορμής  $I_1\omega_1 = I_2\omega_2$  υπολογίστε την % απόκλιση των μετρήσεών σας
- Επαναλάβετε τις μετρήσεις σας δύο (2) φορές, προσπαθώντας να δώσετε διαφορετική αρχική ταχύτητα περιστροφής στον λείο δίσκο

Πίνακας 5

Μάζα δίσκων [kg] $M \pm \delta M$	Διάμετρος [m] $D \pm \delta D$

Πίνακας 6

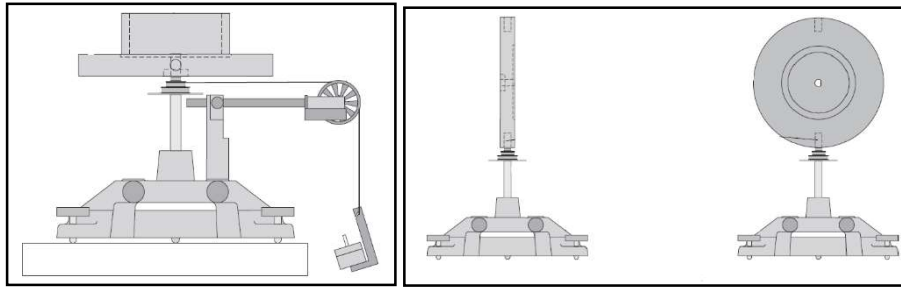
α/α	$I_1$ [kg m <sup>2</sup> ]	$\omega_1$ [rad/s]	$I_1\omega_1$ $\pm \delta (I_1\omega_1)$	$I_2$ [kg m <sup>2</sup> ]	$\omega_2$ [rad/s]	$I_2\omega_2$ $\pm \delta (I_2\omega_2)$	% απόκλιση
1							
2							
3							

- Σχολιάστε τα αποτελέσματά σας

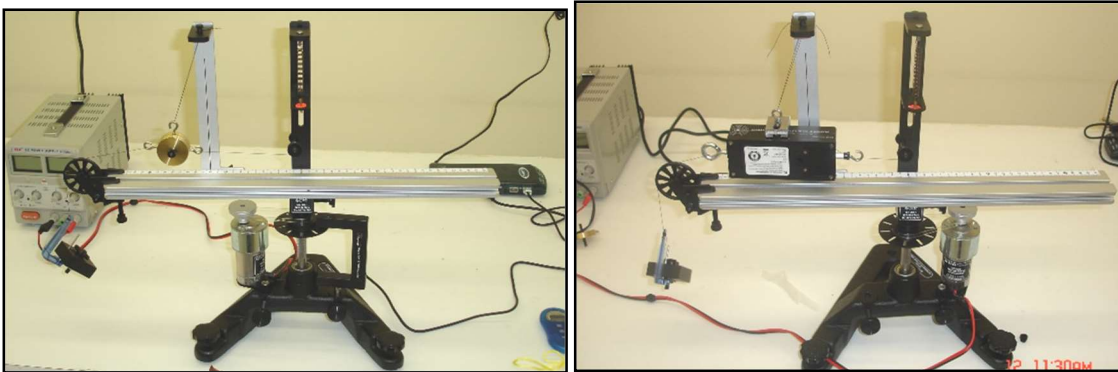
### Πρόσθετα πειράματα

Η οργανολογία που διαθέτουμε μάς επιτρέπει να γίνουν πρόσθετα πειράματα. Εσείς βέβαια θα περιοριστείτε στα παραπάνω. Απλά αναφέρουμε τις υπάρχουσες δυνατότητες:

- Με την βοήθεια του σετ **μεγάλου δίσκου** και **δακτυλίου** μπορούμε να μετρήσουμε την ροπή αδράνειας για μια σειρά περιπτώσεων, όπως ο δίσκος οριζόντιος, ο δίσκος με το δακτύλιο επάνω του και ο δίσκος κατακόρυφος (**διαφορετικός άξονας περιστροφής**)



2. Μελέτη **κεντρομόλου δύναμης** όπου η περιστρεφόμενη μάζα υπακούει στην εξίσωση της κεντρομόλου δύναμης  $F = \frac{4\pi^2 mr}{T^2}$  με σταθερό το  $\omega$  (μοτέρ) και με διαφοροποιήσεις στην ακτίνα, ή στην τιμή της περιστρεφόμενης μάζας. Ενδιαφέρον παρουσιάζει η δυνατότητα η μάζα να είναι η ίδια ασύρματης τεχνολογίας αισθητήρας που καταμετρά απευθείας την κεντρομόλο δύναμη κατά την περιστροφή



## Ερωτήσεις

1. Στο πείραμα 1 σχεδιάστε την γραφική παράσταση της  $I$  συναρτήσει της απόστασης των δύο μαζών και εξηγήστε την μορφή της.
2. Στο πείραμα 2 με την διατήρηση της στροφορμής, υπολογίστε την περιστροφική κινητική ενέργεια πριν και μετά την πρόσθεση της μάζας και εκτιμήστε το ποσοστό % της απώλειάς της.

## Βιβλιογραφία

- Alonso - Finn τ. 1 §§ 5.5-5.11, 10.1 - 10.4, 12.3 - 12.6
- H. D. Young τ. 1 §§ 3-1 – 3-3, 13-1 – 13-7
- Serway τ. 1 §§ 6.1, 6.2, 13.1, 13.4, 13.6 - 13.7
- Halliday - Resnick τ. 1 §§ 15.1 - 15.6

## B5. Μέτρηση της Παγκόσμιας Σταθεράς της Βαρύτητας, G

### Σκοπός της Άσκησης

Είναι ο προσδιορισμός της παγκόσμιας σταθεράς της βαρύτητας  $G$  με την βοήθεια συσκευής που βασίζεται στο κλασικό πείραμα του Cavendish.

### Στοιχεία από την θεωρία

Το πείραμα μελετάει το νόμο της βαρύτητας, τον οποίο διετύπωσε το 1686 ο Newton μελετώντας την κίνηση των πλανητών γύρω από τον Ήλιο.

Σύμφωνα με το νόμο αυτό κάθε μάζα έλκει μια άλλη μάζα με μια δύναμη  $F$  που είναι ανάλογη της μάζας  $M$  και  $m$  των σωμάτων. Είναι επίσης συνάρτηση της απόστασης  $r$  μεταξύ των δύο σωμάτων, δηλαδή:

$$F \propto Mmf(r) \quad (1)$$

όπου  $f(r)$  είναι μια συναρτησιακή εξάρτηση της δύναμης  $F$  από την  $r$ . Εργαζόμενοι πειραματικά είναι δυνατόν να προσδιορίσουμε την  $f(r)$  μετρώντας την δύναμη  $F$  σε διαφορετικές αποστάσεις. Για την μέτρηση αυτή χρειαζόμαστε μία πολύ ευαίσθητη συσκευή, διότι η βαρυτική αλληλεπίδραση για τις μάζες που είναι δυνατόν να χρησιμοποιηθούν σε εργαστηριακές συνθήκες είναι πάρα πολύ ασθενής και επομένως και οι αντίστοιχες δυνάμεις είναι ασθενείς. Αυτό προφανώς δεν ισχύει για μεγάλες μάζες όπως είναι η περίπτωση έλξης των πλανητών από τον Ήλιο.

Βρίσκεται λοιπόν πειραματικά ότι η  $f(r)$  είναι αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης μεταξύ των δύο μαζών, δηλαδή:

$$f(r) \propto (1/r^2) \quad (2)$$

οπότε η (1) γίνεται:

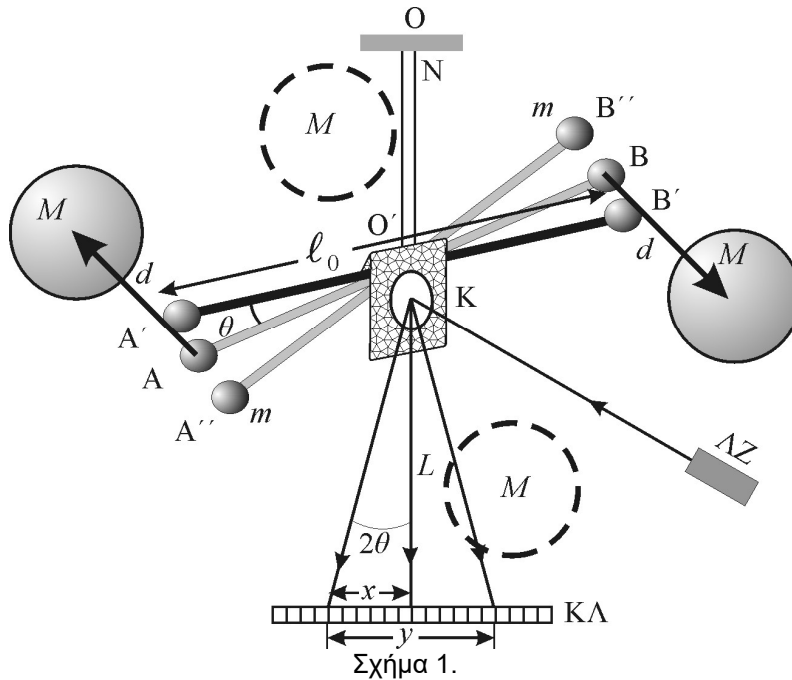
$$F = G \frac{Mm}{r^2} \quad (3)$$

όπου η σταθερά αναλογίας  $G$  ονομάζεται **παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας**. Η τιμή της έχει βρεθεί ότι είναι:

$$G=6.672 \cdot 10^{-11} \text{ N} \cdot \text{m}^2/\text{Kg}^2$$

### Πειραματική διάταξη

Προκειμένου να μετρήσουμε στο εργαστήριο το  $G$  χρησιμοποιούμε την διάταξη του πειράματος του Cavendish η οποία περιλαμβάνει τον ομώνυμο ζυγό στρέψης, διάταξη ΕΞΑΙΡΕΤΙΚΑ ευαίσθητη που θα απαιτήσει από μέρους σας πάρα πολύ μεγάλη προσοχή. Δεν θα πρέπει δηλαδή να ακουμπήσετε την διάταξη που βρίσκεται σε πολύ ευαίσθητη κατάσταση ισορροπίας διότι ο παραμικρός κραδασμός θα την καταστρέψει (οπότε και θα απαιτηθούν ώρες για να αποκατασταθεί η ισορροπία) ή ακόμα ενδεχομένως και να αποκόψει το λεπτότατο νήμα ανάρτησης των μικρών σφαιρών του ζυγού όπως θα δούμε και στην περιγραφή της συσκευής.



Η συσκευή που χρησιμοποιούμε στο πείραμα αποτελείται από ένα πολύ λεπτό νήμα στρέψης  $N$  που αναρτάται από το  $O$  και έχει ορθογώνια διατομή ενώ το άλλο άκρο στο σημείο  $O'$  είναι στερεωμένο στο μέσο μιας ράβδου  $AB$  μήκους  $\ell$ . Η ράβδος είναι στην ουσία ένας αλτήρας αφού φέρει στα άκρα τις σφαίρες μάζας  $m$  η κάθε μια. Στο μέσον της ράβδου υπάρχει επίσης στερεωμένος κατακόρυφα ένας μικρός καθρέπτης  $K$ . Στον καθρέπτη αυτό ανακλάται φωτεινή ακτίνα που προέρχεται από μια συσκευή Laser  $\Lambda Z$ .

Η ακτίνα καταλήγει μετά την ανάκλαση στη βαθμολογημένη κλίμακα  $K\Lambda$  που βρίσκεται σε απόσταση  $L$  ( $\sim 3m$ ) από τον καθρέπτη. Αν πλησιάσουμε κοντά στις μικρές σφαίρες  $m$  και σε απόσταση  $d$  δύο άλλες σφαίρες μεγάλης μάζας  $M$ , θα αναπτυχθεί βαρυτική αλληλεπίδραση και θα δημιουργηθεί ζεύγος δυνάμεων και κατά συνέπεια ροπή δύναμης  $\tau$ , το δε σύστημα θα αναζητήσει μια νέα θέση ισορροπίας, αφού στρεφόμενη η ράβδος κατά γωνία  $\theta$  θα στρέψει αντίστοιχα και το νήμα  $N$  παραμορφώνοντας το τόσο όσο να ασκήσει με την σειρά του ίση και αντίθετη ροπή. Η ροπή  $\tau$  λοιπόν θα είναι:

$$\tau = 2F \frac{\ell}{2} \Rightarrow \tau = F \cdot \ell \quad (4)$$

Όμως το νήμα, όπως είπαμε, έχοντας στραφεί κατά γωνία  $\theta$ , θα ασκήσει στη ράβδο αντίθετη ροπή στρέψης ως προς  $OO''$ :

$$\tau' = C\theta \quad (5)$$

όπου  $C$  είναι ο συντελεστής στρέψης του νήματος. Οι δύο αντίθετες ροπές θα συντελέσουν στη δημιουργία ταλάντωσης, φθίνουσας κατά πλάτος λόγω τριβών, με περίοδο  $T$  μέχρις ότου ισοροπήσει το σύστημα σε νέα θέση  $A'B'$  (βλ. Σχήμα 1). Το laser με την δέσμη του θα δείχνει το ίχνος της φωτεινής κηλίδας στη κλίμακα  $K\Lambda$ . Η μεταβολή του πλάτους της ταλάντωσης σε σχέση με το χρόνο με βάση τις ενδείξεις της θέσης της κηλίδας φαίνεται στο Σχήμα 2 (οι τιμές σε mm δεν είναι πραγματικές αλλά ενδεικτικές).

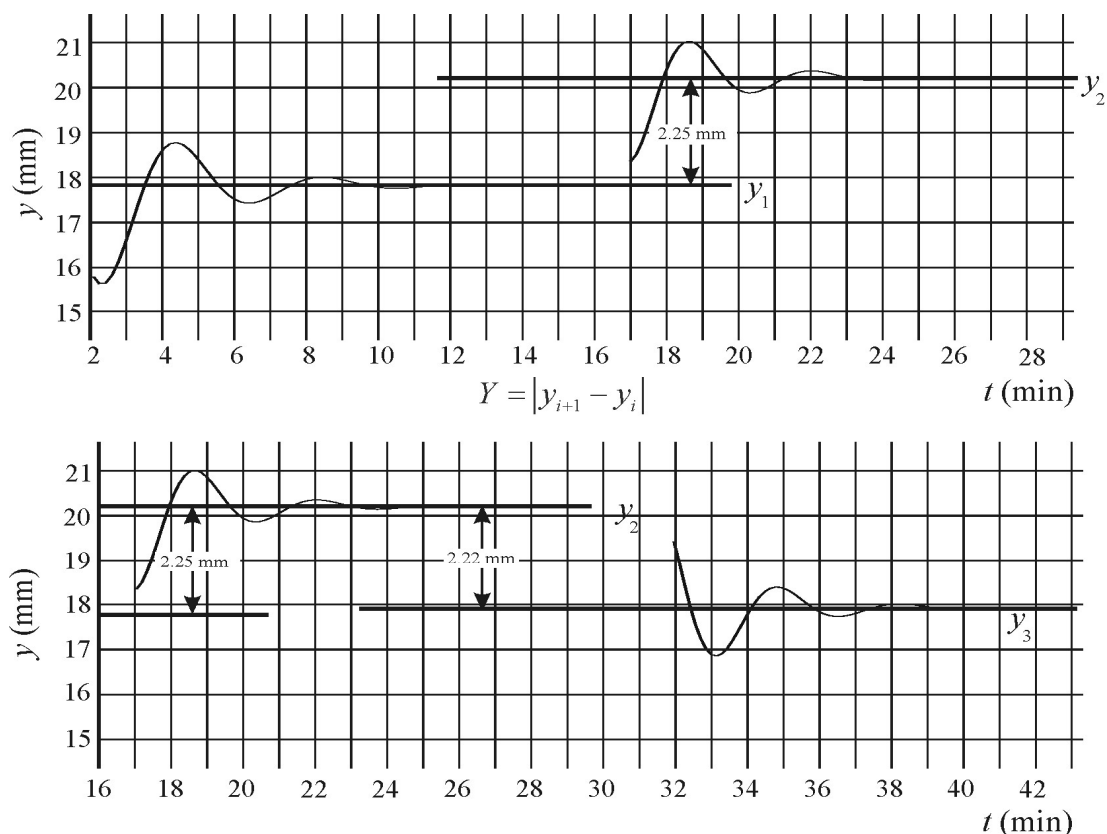
Όταν αποκατασταθεί η ισορροπία και επειδή  $\tau = \tau'$  θα έχουμε

$$F\ell = C\theta,$$

οπότε με βάση την (3) έχουμε

$$C \frac{\theta}{\ell} = F = G \frac{Mm}{d^2}, \quad (6) \text{ ή}$$

$$G = \frac{C\theta d^2}{Mm\ell} \quad (7)$$



Σχήμα 2

Από την (7) υπολογίζεται το  $G$  αρκεί να γνωρίζουμε πέραν των άλλων στοιχείων και την σταθερά στρέψης  $C$  και την γωνία  $\theta$ . Το δεξιό σκέλος της σχέσης (6) ισχύει προσεγγιστικά αφού δεν λαμβάνει υπόψη την επίδραση στη μικρή σφαίρα  $m$  και της άλλης μεγάλης σφαίρας  $M$  που είναι διαγώνια σε απόσταση  $X = \sqrt{(l^2 + d^2)}$ . Την διόρθωση αυτή θα την υπολογίσετε αργότερα στην επεξεργασία σας. Ο συντελεστής στρέψης  $C$  εκφράζει το μέτρο της στρέψης του νήματος, δηλαδή πόσο θα στραφεί (κατά πόση γωνία  $\theta$ ) το νήμα αν εφαρμόσουμε μια ροπή δύναμης  $\tau$ . Το  $C$  μπορεί να βρεθεί πειραματικά από την περίοδο  $T$  της φθίνουσας ταλάντωσης ως εξής:

Αν  $I$  είναι η ροπή αδράνειας του αλτήρα (ράβδος με τις σφαίρες) ως προς  $OO'$  τότε η περίοδος  $T$  δίνεται από την σχέση (βλ. και Άσκηση B7 Στροφικού Εκκρεμούς):

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{C}}. \quad (8)$$

Για την περίπτωση αλτήρα μήκους  $\ell$ , αν θεωρήσουμε την μάζα της ράβδου αμελητέα, η ροπή αδράνειας  $I$  είναι

$$I = m\ell^2 / 2, \quad (9)$$

οπότε το  $C$  δίνεται από την σχέση

$$C = 2\pi^2 \ell^2 m / T^2, \rightarrow C = C(T, \ell, m) \quad (10)$$

Το σχετικό σφάλμα στο  $C$  εξάγεται ως εξής:

$$\begin{aligned}
\delta C &= \sqrt{\left(\frac{\partial C}{\partial T} \delta T\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial l} \delta l\right)^2 + \left(\frac{\partial C}{\partial m} \delta m\right)^2} \Rightarrow \\
\delta C &= \sqrt{\left(\frac{4\pi^2 l^2 m}{T^3} \delta T\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2 l m}{T^2} \delta l\right)^2 + \left(\frac{2\pi^2 l^2}{T^2} \delta m\right)^2} \Rightarrow \\
\delta C &= \frac{2\pi^2 l^2 m}{T} \sqrt{\left(\frac{2}{T} \delta T\right)^2 + \left(\frac{2}{l} \delta l\right)^2 + \left(\frac{1}{m} \delta m\right)^2} \Rightarrow \delta C = C \sqrt{4\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\delta m}{m}\right)^2} \Rightarrow \\
\frac{\delta C}{C} &= \sqrt{4\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta l}{l}\right)^2 + \left(\frac{\delta m}{m}\right)^2} \quad (11)
\end{aligned}$$

Η (7) με την (10) προσδιορίζει το G συναρτήσει των l, d, u, M και T.

$$G = 2\pi^2 \ell d^2 \theta / (MT^2) \quad (12)$$

### Υπολογισμός του θ

Αν ο καθρέφτης στραφεί κατά γωνία  $\theta$  η ανακλώμενη ακτίνα στρέφεται κατά  $2\theta$ . Για μικρές γωνίες  $2\theta = Y/2L$  όπου  $Y = \frac{|Y_2 - Y_1| + |Y_3 - Y_2|}{2}$  (βλ. Σχήμα 2).

Στο Πείραμά μας θα μετρήσουμε την θέση ισορροπίας με τις μεγάλες σφαίρες σε διαγώνια θέση και στη συνέχεια στην άλλη δυνατή διαγώνια θέση.

Άρα η απόκλιση που θα βρούμε (βλ. Σχήμα 2) θα είναι  $Y = 2x$  και επομένως

$$\theta = \frac{Y}{4L} \quad (13)$$

και τελικά το G προσδιορίζεται από την σχέση

$$G = \frac{\pi^2 \ell d^2 Y}{2MLT^2} \Rightarrow G = G(Y, M, L, T) \quad (14)$$

Το σχετικό σφάλμα στο G εξάγεται ως εξής:

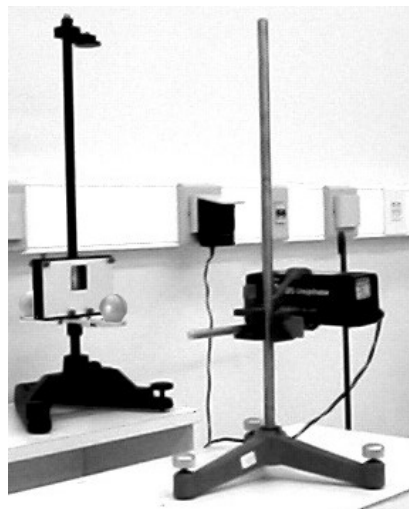
$$\begin{aligned}
\delta G &= \sqrt{\left(\frac{\partial G}{\partial Y} \delta Y\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial M} \delta M\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial L} \delta L\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial T} \delta T\right)^2} \Rightarrow \\
\delta G &= \sqrt{\left(\frac{\pi^2 \ell d^2}{2MLT^2} \delta Y\right)^2 + \left(\frac{\pi^2 \ell d^2 Y}{2M^2 L T^2} \delta M\right)^2 + \left(\frac{\pi^2 \ell d^2 Y}{2ML^2 T^2} \delta L\right)^2 + \left(\frac{2\pi^2 \ell d^2 Y}{2MLT^3} \delta T\right)^2} \Rightarrow \\
\delta G &= \frac{\pi^2 \ell d^2 Y}{2MLT^2} \sqrt{\left(\frac{1}{Y} \delta Y\right)^2 + \left(\frac{1}{M} \delta M\right)^2 + \left(\frac{1}{L} \delta L\right)^2 + \left(\frac{2}{T} \delta T\right)^2} \Rightarrow \\
\delta G &= G \sqrt{\left(\frac{1}{Y} \delta Y\right)^2 + \left(\frac{1}{M} \delta M\right)^2 + \left(\frac{1}{L} \delta L\right)^2 + \left(\frac{2}{T} \delta T\right)^2} \Rightarrow \\
\frac{\delta G}{G} &= \sqrt{\left(\frac{\delta Y}{Y}\right)^2 + \left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 + \left(\frac{\delta L}{L}\right)^2 + 4\left(\frac{\delta T}{T}\right)^2} \quad (15)
\end{aligned}$$



## Προετοιμασία της Άσκησης

**Προσοχή!** Η συσκευή όπως προαναφέραμε κινδυνεύει από τυχαίο κραδασμό που άθελά σας θα κάνετε, διότι τότε είτε εκτρέπεται δραματικά από την ισορροπία, είτε το νήμα N κόβεται. Έτσι όχι μόνο εσείς δεν θα μπορέσετε να κάνετε την Άσκηση, αλλά ούτε και οι συμφοιτητές σας του επόμενου εργαστηριακού τμήματος. **Επιμένουμε** λοιπόν στο να μην αγγίζετε το κομμάτι της συσκευής με το νήμα κλπ. παρά μόνο παρουσία του διδάσκοντα. Η εναλλαγή των σφαιρών θα πρέπει να γίνεται κάτω από την καθοδήγησή του.

Η συσκευή όπως θα διαπιστώσετε είναι γειωμένη σε μια προσπάθεια να ελαχιστοποιηθεί οποιαδήποτε επίδραση από στατικό ηλεκτρισμό. Επίσης μικρό ρεύμα αέρα έστω και από διερχόμενα άτομα μπορεί να επηρεάσει την χρονική εξέλιξη της φθίνουσας ταλάντωσης.



Σχήμα 4

Η περίοδος στο σύστημα του ζυγού στρέψης είναι της τάξης των ~ 8-10 min.

Στο Σχήμα 4 φαίνεται όλη η συσκευή (εκτός από την βαθμολογημένη κλίμακα που βρίσκεται σε μεγάλη απόσταση).

## Πειραματική διαδικασία

1. Μην αγγίζετε καθόλου την ανάρτηση, το μαρμαρίνο υποστήριγμα και το μεταλλικό ικρίωμα πάνω στο οποίο είναι το ευαίσθητο τμήμα της συσκευής.
2. Ελέγξτε με τον διδάσκοντα τα μέρη της διατάξεως και βεβαιωθείτε ότι όλα έχουν καλώς. Με οδηγίες του, ενεργοποιήστε ηλεκτρικά την πηγή laser και ρυθμίστε την ώστε να πάρετε ευκρινές το είδωλο της πάνω στη κλίμακα (ΚΛ). **Είναι πολύ πιθανό** πάντως να βρείτε την συσκευή ήδη αναμμένη και το είδωλο πάνω στη κλίμακα. Εξοικειωθείτε με την κλίμακα και τις διαστάσεις της κηλίδας. Με τι ακρίβεια μπορούμε να προσδιορίσουμε την θέση της;
3. Καταγράψτε το μήκος  $L$  για την συγκεκριμένη θέση εργασίας.
4. Ενεργοποιήστε τον υπολογιστή, εκκινήστε το λογισμικό LoggerPro και ανοίξτε το αρχείο για την άσκηση B5.
5. Παρατηρήστε επί δύο λεπτά την κηλίδα να διαπιστώσετε αν κινείται ή όχι. Αν είναι πρακτικά ακίνητη σημειώστε για το διαγώνιο συνδυασμό των σφαιρών που έχετε την θέση  $Y_0$  της πάνω στη κλίμακα. Αν το ίχνος της ακτίνας Laser για οποιοδήποτε λόγο ταλαντώνεται ακόμη, τότε αρχίστε αμέσως μετρήσεις για την θέση της κηλίδας **κάθε 30 s** καταχωρώντας τις τιμές στον παρακάτω πίνακα με στήλες **χρονική στιγμή  $t$  (s)** και **θέση κηλίδας  $x$  (cm)**.
6. Ταυτοχρόνως, καταχωρίστε τις μετρήσεις ηλεκτρονικά, στον πίνακα του λογισμικού LoggerPro.
7. Όταν πραγματοποιήσετε περίπου δύο τρεις (~3) περιόδους ταλαντώσεων, σταματήστε τις μετρήσεις και μηδενίστε το χρονόμετρο.
8. Με τις οδηγίες του διδάσκοντα, επιχειρήστε την προσαρμογή των καταγεγραμμένων στο λογισμικό μετρήσεων στην θεωρητική έκφραση μίας φθίνουσας αρμονικής ταλάντωσης, της μορφής:  $Y=Y_0+A*\exp(-Ct)\sin[(2*\pi/T)+\phi]$ , όπου  $Y_0$ ,  $A$ ,  $C$ ,  $T$ ,  $\phi$ : παράμετροι προς προσδιορισμό.
9. Εκτυπώστε τα προβαλλόμενα της οθόνης.

**Πίνακας 1.  $Y_0 = \dots\dots\dots$**

**A διάταξη σφαιρών**

t (s)	x (cm)	t (s)	x (cm)
0		780	
30		810	
60		840	
90		870	
120		900	
150		930	
180		960	
210		990	
240		1020	
270		1050	
300		1080	
330		1110	
360		1140	
390		1170	
420		1200	
450		1230	
480		1260	
510		1290	
540		1320	
570		1350	
600		1380	
630		1410	
660		1440	
690		1470	
720		1500	
750		.	

**B διάταξη σφαιρών**

t (s)	x (cm)	t (s)	x (cm)
0		780	
30		810	
60		840	
90		870	
120		900	
150		930	
180		960	
210		990	
240		1020	
270		1050	
300		1080	
330		1110	
360		1140	
390		1170	
420		1200	
450		1230	
480		1260	
510		1290	
540		1320	
570		1350	
600		1380	
630		1410	
660		1440	
690		1470	
720		1500	
750		.	

10. Συμβουλευόμενοι τον διδάσκοντα, αλλάξτε τις θέσεις στις δυο μεγάλες σφαίρες προσέχοντας **να μην ακουμπήσετε** κατά λάθος το ορθογώνιο κουτί προστασίας.
11. Στη συνέχεια ξεκινήστε το χρονόμετρο.
12. Μετά από τα πρώτα 30s σημειώνετε την νέα θέση του ίχνους της κηλίδας πάνω στην κλίμακα. Συνεχίζετε έτσι κάθε 30s. Το χρονόμετρο θα λειτουργεί συνεχώς και θα καταγράφετε τις μετρήσεις στον Πίνακα 1. Αφού καταγραφούν κάποιες ταλαντώσεις που να αντιστοιχούν σε περίπου τρεις (~3) πλήρεις περιόδους T, περατώνετε το Πείραμα.
13. Στη συνέχεια μηδενίζετε το χρονόμετρο και πάλι πολύ προσεκτικά αντιμεταθέτετε εκ νέου τις θέσεις των μεγάλων σφαιρών και ξεκινάτε το χρονόμετρο. Επαναλαμβάνουμε όπως και πριν τις μετρήσεις.

14. Επειδή κάθε πείραμα διαρκεί περίπου 25 λεπτά, μπορούμε να προλάβουμε να κάνουμε δύο φορές αλλαγές των σφαιρών, δηλαδή τρεις ενότητες μετρήσεων, με το αρχικό  $Y_0$ .
15. Εναλλακτικά, μπορούμε να προσδιορίσουμε την περίοδο  $T$  και το  $Y$ , ως εξής: Σε χιλιοστομετρικό χαρτί σχεδιάζουμε την γραφική παράσταση πλάτος ταλάντωσης  $Y(\text{cm})$  συναρτήσει του χρόνου  $t(\text{s})$ . Προσοχή στην επιλογή των αξόνων και του μεγέθους του χαρτιού για την γραφική παράσταση. Μετά την αναπαράσταση των σημείων σε αυτή, φέρουμε με το χέρι την βέλτιστη δυνατή φθίνουσα αρμονική ταλάντωση, με οδηγό τα πειραματικά μας σημεία. Είναι φανερό ότι στη προσπάθειά μας αυτή κάποια σημεία θα κείνται πάνω στη καμπύλη και κάποια ενδεχομένως όχι. Προσδιορίζουμε έτσι εύκολα από την φθίνουσα μορφή της ταλάντωσης τις θέσεις ισορροπίας για κάθε πείραμα. Υπολογίζουμε το  $Y_i$  κάθε πειράματος από την διαφορά ενδείξεων των δύο πειραμάτων και εξαγάγουμε τον μέσο όρο  $\langle Y \rangle$ .
16. Από το ίδιο γράφημα υπολογίζουμε επίσης από τα διαδοχικά μέγιστα ή ελάχιστα της ταλάντωσης και την περίοδο  $T_i$  της ταλάντωσης. Από κάθε πείραμα προσδιορίζουμε 2-3 τιμές  $T_i$  και από εκεί τελικά την  $\bar{T}$  με το σφάλμα της.
17. Μετρούμε την απόσταση  $L$  (ίσως παρέχεται σε κάθε θέση), και αντιγράφουμε από την πινακίδα της Άσκησης τα στοιχεία της συσκευής, δηλαδή τα  $l$ ,  $d$  και  $m$ .
18. Με γνωστά τα  $L$ ,  $l$ ,  $d$  και  $m$  υπολογίζουμε την σταθερά στρέψης του νήματος  $C$  και το σχετικό το σφάλμα της  $\delta C/C$  από τις εξισώσεις (10) και (11). Πόσο % συνεισφέρει κάθε μέγεθος από τα  $L$ ,  $l$  και  $m$  στο σφάλμα  $\delta C$ ; Που θα επεμβαίνατε για να μειώσετε το συνολικό σφάλμα στο  $C$ ;
19. Από την εξίσωση (14) υπολογίζουμε το  $G$  και από την (15) το σχετικό σφάλμα του ( $\delta G/G$ ). Πόσο % συνεισφέρει κάθε μέγεθος από τα  $Y$ ,  $M$ ,  $L$  και  $T$  στο σφάλμα  $\delta G$ ; Που θα επεμβαίνατε για να μειώσετε το συνολικό σφάλμα στο  $G$ ;
20. Υπολογίστε την αλληλεπίδραση (θεωρητικό **συστηματικό** σφάλμα) που εισάγεται στον υπολογισμό του  $G$  επειδή **δεν** λάβαμε υπ' όψη μας στη θεωρία (εξίσωση 3) την επίδραση της άλλης διαγώνιας μεγάλης σφαίρας στη μικρή που είναι σε απόσταση  $X = \sqrt{(l^2 + d^2)}$ . Δώστε την **νέα (τελική) τιμή του G δικαιολογώντας το πρόσημο (+ ή -) στη διόρθωση**.

## Ερωτήσεις

1. Το πείραμα της μέτρησης του  $G$  επανελήφθη από τους αστροναύτες του Apollo στην επιφάνεια της σελήνης. Σας δίδονται οι μάζες της γης/σελήνης (ως  $M/m$ ) και οι ακτίνες γης/σελήνης ( $R/r$ ). Στην γη, η μέτρηση δίνει (προφανώς)  $G$ . Ποιο πρέπει να είναι το αποτέλεσμα της μέτρησης στη σελήνη; Δικαιολογήστε πλήρως την απάντησή σας.
2. Κατά την εκσκαφή του υπόγειου χώρου στάθμευσης στην πλατεία Κάνιγγος, οι εργαζόμενοι, γνωρίζοντας πως βρίσκονται πιο κοντά στο κέντρο της γης, δηλώνουν πως νιώθουν πιο «βαρείς» -- και ζητούν ειδικό επίδομα «υποστήριξης αυξημένου βάρους». Θεωρώντας το βάθος της εκσκαφής,  $h$ , γνωστό, και την πυκνότητα της γης σταθερή, πόση είναι η ποσοστιαία αύξηση του βάρους τους; Έχουν δίκιο να νιώθουν πιο βαρείς; Προσοχή: η μάζα της γης που τους έλκει δεν είναι η ίδια! Για ένα άτομο 80kg, πόση είναι η διαφορά του βάρους ( $g=10\text{m/s}^2$ ); Σε πόσο βάθος θα πρέπει να έχει φθάσει το parking για να νιώσει μία μεταβολή 1% στο βάρος του ( $R_{\text{γης}}=6400\text{km}$ );
3. Υπολογίστε την επιρροή του παρατηρητή, μάζας  $\sim 80$  kg, στον υπολογισμό του  $G$ . Είναι σημαντικός; Η επιρροή αυτή προσθέτει στατιστικό ή συστηματικό σφάλμα στην μέτρηση; Έστω ότι για να εκμηδενίσει την επιρροή του, ο παρατηρητής κινείται γύρω-γύρω από την συσκευή -- ή δεξιά-αριστερά. Ποια κίνηση εκμηδενίζει την επιρροή πιο αποτελεσματικά;

## Βιβλιογραφία

1. Alonso - Finn τ. 1 §§ 10.3, 10.4, 12.6, 13.2 – 13.6
2. H. D. Young τ. 1 §§ 9.5, 10.2, 12.1–12.4, 13.6
3. Ohanian τ. 1 §§ 9.1 – 9.2, 12.4, 13.2, 15.5
4. Serway τ. 1 §§ 10.5, 13.4, 14.1 – 14.3
5. Berkeley τ. 1 §§ 8.1, 9.1-9.3
6. Άσκηση A4 του παρόντος φυλλαδίου εργαστηριακών ασκήσεων

## Οδηγίες εκτέλεσης πειραμάτων B5

### Στοιχεία της Άσκησης B5

- Μάζα και ακτίνα μεγάλης σφαίρας:  $1500 \pm 10\text{g}$  και  $31.9\text{mm}$
- Μάζα και ακτίνα μικρής σφαίρας:  $38.3 \pm 0.2\text{g}$  και  $9,53\text{mm}$
- Απόσταση κέντρου μικρής σφαίρας από σύρμα στρέψης:  $l/2 = 50\text{mm}$  ( $l=100\text{mm}$ )
- Απόσταση κέντρου μεγάλης σφαίρας από κέντρο μικρής σφαίρας στην ισορροπία και με την μεγάλη να απέχει  $1\text{mm}$  από το κουτί  $d=46.5\text{mm}$
- Απόσταση  $L$  καθρέπτη – κλίμακας υπάρχει στη θέση εργασίας σας (διαφορετικό για κάθε άσκηση)

### Πείραμα

- Αν κατά την εκκίνηση του πειράματός σας υπάρχει ακόμη ταλάντωση από προηγουμένως, αρχίστε να λαμβάνετε μετρήσεις για  $\sim 10\text{-}20\text{min}$  (αναλόγως του πλάτους ταλάντωσης) κάθε  $30\text{s}$ . Καταγράψτε τις μετρήσεις σε Πίνακα
- Στη συνέχεια (**παρουσία του διδάσκοντα**) εναλλάξτε την θέση των σφαιρών και συνεχίστε τις μετρήσεις για  $25\text{min}$  περίπου ανά  $30\text{s}$
- Ακολουθώς, **επαναλάβετε** μία (1) φορά τα παραπάνω βήματα

### Πρόσθετα πληροφοριακά στοιχεία

- Απόσταση καθρέπτη από την εξωτερική επιφάνεια παραθύρου  $11.4\text{mm}$
- Υλικό σύρματος: Χαλκός με βηρύλλιο ορθογώνιας διατομής ( $0.017 \times 0.150\text{mm}^2$ ) και μήκους  $260\text{mm}$
- Laser Helium-Neon:  $\lambda=633\text{nm}$ , διάμετρος δέσμης στην έξοδο  $0.48\text{mm}$  και γωνιακή απόκλιση  $1.7\text{mrad}$
- Προσοχή! Η εργαστηριακή διάταξη είναι ιδιαίτερα ευαίσθητη σε κραδασμούς. Η εναλλαγή των σφαιρών στη νέα τους θέση πρέπει να τελείται μόνον παρουσία και εγκρίσει του επιβλέποντα.

## B6. Νόμοι Newton (B & Γ), Μελέτη Ορμής-Ωθησης, Κρούσεις

### Σκοπός της άσκησης

Η χρήση του ηλεκτρονικού υπολογιστή-αισθητήρων αποτελεί σήμερα την πιο διαδεδομένη μέθοδο μετρήσεων στα σύγχρονα πειράματα φυσικής. Εντυπωσιακό παράδειγμα των δυνατοτήτων που δίνει η σύγχρονη τεχνολογία είναι η ευκολία με την οποία θα μπορέσετε να επιβεβαιώσετε τον δεύτερο νόμο του Newton, κάνοντας χρήση των αισθητήρων δύναμης και επιτάχυνσης.

Προκειμένου να επιβεβαιώσετε ποσοτικά ότι η ώθηση μιας δύναμης ισούται με την μεταβολή της ορμής που προκαλεί αυτή η δύναμη σε ένα σώμα θα χρησιμοποιήσετε επίσης διατάξεις νέων τεχνολογιών οι οποίες δίνουν την δυνατότητα αυτόματης λήψης μετρήσεων. Η σχέση αυτή βρίσκει άμεση εφαρμογή στις κρούσεις και σε συνδυασμό με τον **τρίτο νόμο του Newton** (δράσης-αντίδρασης) καθορίζει την κίνηση των σωμάτων μετά την κρούση.

### Στοιχεία από την θεωρία

Σύμφωνα με το δεύτερο νόμο του Newton όταν σε ένα σώμα ασκείται κάποια δύναμη, το σώμα αυτό επιταχύνεται με επιτάχυνση ανάλογη της ασκούμενης δύναμης, δηλαδή:

$$a = kF .$$

Η σταθερά αναλογίας  $k$  εξαρτάται αποκλειστικά από το σώμα και το αντίστροφο αυτής είναι αυτό που αποκαλούμε μάζα του σώματος  $m$ . Επομένως αν γνωρίζετε την δύναμη που ασκείται σε ένα σώμα και την επιτάχυνση που δέχεται αυτό, εξαιτίας της δύναμης, μπορούμε να μετρήσουμε την μάζα του σώματος. (Στην πραγματικότητα η επιτάχυνση και η ασκούμενη δύναμη είναι διανυσματικά μεγέθη τα οποία έχουν κοινή διεύθυνση και φορά, εκτός της παραπάνω σχέσης των μέτρων τους. Στην άσκησή σας, που η κίνηση πραγματοποιείται σε μια διάσταση, δεν μας ενδιαφέρει η διανυσματική σχέση δύναμης – επιτάχυνσης παρά μόνο η σχέση των μέτρων αυτών των δύο ποσοτήτων.)

Κατά την εκτέλεση του πειράματος πρέπει να είναι κανείς ιδιαίτερα προσεκτικός ως προς το ποια δύναμη μετρά ο αισθητήρας δύναμης, ποια επιτάχυνση ο αισθητήρας επιτάχυνσης και ποιο είναι το σώμα στο οποίο ασκείται η μετρούμενη δύναμη. Αν αυτές οι δύο ποσότητες καθοριστούν καλά, τότε η σχέση δύναμης – επιτάχυνσης, όσο περίεργα και αν εξελίσσεται η δύναμη μπορεί να προσδιορίσει την μάζα του σώματος στο οποίο ασκείται η δύναμη.

Μια άλλη διατύπωση του παραπάνω νόμου είναι η ακόλουθη: Η ώθηση της συνολικής δύναμης η οποία ασκείται σε ένα σώμα και η οποία ορίζεται ως το χρονικό ολοκλήρωμα της δράσης της δύναμης

$$\vec{I} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{F} dt \quad (1)$$

ισούται με την συνολική μεταβολή της ορμής του σώματος

$$\vec{I} = \Delta\vec{p} = \vec{p}_2 - \vec{p}_1, \quad (2)$$

όπου ορμή ενός σώματος ορίζεται σαν το γινόμενο μάζα επί την ταχύτητα αυτού ( $\vec{p} = m\vec{u}$ ).

Παράλληλα ο τρίτος νόμος του Newton έρχεται να συμπληρώσει τις δυναμικές σχέσεις που καθορίζουν την εξέλιξη ενός συστήματος σωμάτων όταν αυτά αλληλεπιδρούν το ένα με το άλλο.

Συγκεκριμένα για κάθε ζεύγος σωμάτων που αλληλεπιδρούν η δύναμη που ασκεί το πρώτο στο δεύτερο είναι ίση και αντίθετη με την δύναμη που ασκεί το δεύτερο στο πρώτο, δηλαδή

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}. \quad (3)$$

Σαν κρούσεις των σωμάτων μπορούν να θεωρηθούν εκείνες οι φυσικές διεργασίες κατά τις οποίες εμφανίζονται δυνάμεις αλληλεπίδρασης πολύ μεγάλου μέτρου μεταξύ σωμάτων και ταυτόχρονα πολύ μικρής διάρκειας. Βέβαια η έννοια του μεγάλου και του μικρού είναι σχετικές. Για παράδειγμα, κρούση έχετε προφανώς όταν ένα αυτοκίνητο συγκρούεται με ένα άλλο αφού οι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την παραμόρφωση του μετάλλου των δύο αυτοκινήτων είναι τεράστια σε σχέση με τις δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την κίνηση του αυτοκινήτου (συνιστώσα του βάρους στη διεύθυνση κίνησης, τριβή των ελαστικών με το δρόμο, αντίσταση του αέρα), ενώ ο χρόνος που διαρκούν αυτές είναι μόλις κλάσματα του δευτερολέπτου, απειροελάχιστος σε σχέση με το χρόνο κίνησης του αυτοκινήτου.

Θα μπορούσαμε να θεωρήσει όμως ως κρούση και την αλλαγή πορείας ενός διαστημοπλοίου όταν αυτό οδηγείται να περάσει κοντά σε κάποιο μεγάλο πλανητικό σώμα, αφού η βαρυτική δύναμη που αναπτύσσεται στο διαστημόπλοιο από το πλανητικό σώμα κατά την διέλευσή του κοντά σε αυτό είναι πολύ μεγαλύτερη από την βαρυτική δύναμη του Ήλιου όταν αυτό ταξιδεύει στο διαπλανητικό χώρο μακριά από τα διάφορα πλανητικά σώματα, ενώ ο χρόνος διέλευσης στο βαρυτικό πεδίο του πλανήτη είναι της τάξης των μερικών ημερών σε σχέση με την πολυετή πορεία του διαστημοπλοίου στο Ηλιακό σύστημα. **Όταν αναφερόμαστε σε κρούσεις θα πρέπει να απαλλαχτούμε από την εμπειρική συνθήκη ότι τα συγκρουόμενα σώματα πρέπει να ακουμπήσουν το ένα στο άλλο** (εξάλλου ακόμη και στην περίπτωση των συγκρουόμενων αυτοκινήτων τα μόρια του ενός αυτοκινήτου όχι μόνο δεν ακουμπούν στα μόρια του άλλου αλλά περνούν σε μεγάλες ατομικές αποστάσεις τα μεν από τα δε).

Όταν δύο σώματα συγκρούονται, χωρίς να αναπτύσσεται σε κανένα από τα δύο κάποια άλλη εξωτερική δύναμη έντασης τόσο μεγάλης όσο η δύναμη κρούσης, τότε η συνολική δύναμη που αναπτύσσεται στο σύστημα των δύο σωμάτων μπορεί να θεωρηθεί μηδενική (το ζεύγος των δύο δυνάμεων αλληλεπίδρασης που ασκούνται στα δύο σώματα αλληλοαναιρούνται, λόγω του τρίτου νόμου του Newton), ή ακόμη και αν δεν είναι μηδενική λόγω του μικρού χρόνου κρούσης μπορεί να θεωρηθεί ότι έχει μηδενική ώθηση. Επομένως η ορμή του συστήματος πριν και μετά την κρούση πρέπει να είναι η ίδια

$$\vec{p}_1^{\text{πριν}} + \vec{p}_2^{\text{πριν}} \cong \vec{p}_1^{\text{μετά}} + \vec{p}_2^{\text{μετά}} \quad (4)$$

ανεξαρτήτως του πως πραγματοποιείται η κρούση. Μπορούμε να διακρίνουμε δύο ακραίες περιπτώσεις κρούσης: (α) την ελαστική κρούση, όπου η κινητική ενέργεια του συστήματος δεν αλλάζει κατά την κρούση και (β) την πλαστική κρούση όταν δύο σώματα κολλούν και κινούνται με κοινή ταχύτητα μετά την κρούση. Έτσι για την **ελαστική κρούση** θα έχετε για κινήσεις σε μία διάσταση

$$\begin{aligned} m_1 u_1 + m_2 u_2 &= m_1 u_1' + m_2 u_2' \\ m_1 u_1^2 + m_2 u_2^2 &= m_1 u_1'^2 + m_2 u_2'^2 \end{aligned} \quad (5)$$

όπου οι **τονούμενες** ποσότητες αναφέρονται στις ταχύτητες **μετά** την κρούση. Με απλή ανάλυση του παραπάνω συστήματος βρίσκετε

$$\begin{aligned} u_1' &= \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} u_1 + \frac{2m_2}{m_1 + m_2} u_2 \\ u_2' &= \frac{m_2 - m_1}{m_1 + m_2} u_2 + \frac{2m_1}{m_1 + m_2} u_1 \end{aligned} \quad (6)$$

Για την **πλαστική κρούση**, όπου μετά την κρούση υπάρχει μόνο μία ταχύτητα, αυτή του συσσωματώματος  $u'$ , η διατήρηση της ορμής (πρώτη εξίσωση της σχέσης (5)), διαμορφώνεται ως ακολούθως

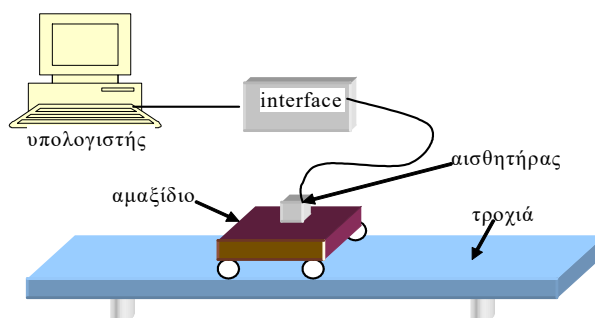
$$m_1 u_1 + m_2 u_2 = (m_1 + m_2) v' \Rightarrow u' = \frac{m_1 u_1 + m_2 u_2}{m_1 + m_2} \quad (7)$$

Στην πράξη οι κρούσεις μακροσκοπικών σωμάτων είναι ημιελαστικές (μέρος της ενέργειας χάνεται κατά την κρούση) ή πλαστικές.

## Πειραματική διάταξη

Η διάταξη των νέων τεχνολογιών που χρησιμοποιείται αποτελείται από μια οριζοντιωμένη τροχιά, επί της οποίας μπορούν να κινούνται ομαλά (σχεδόν ομαλά) αμαξίδια χαμηλής τριβής. Στη πειραματική μας διάταξη υπάρχουν και ειδικοί αισθητήρες (π.χ. απόστασης, δύναμης).

Περί αισθητήρων αναλυτικά στην αντίστοιχη άσκηση του Εργ.Φ1 (A4).



Οι αισθητήρες αυτοί είναι συνδεδεμένοι μέσω ειδικού interface με υπολογιστή ο οποίος λαμβάνει μετρήσεις των ενδείξεων αυτών των αισθητήρων με κάποιο προκαθορισμένο ρυθμό. Ο υπολογιστής στη συνέχεια, μέσω ενός προγράμματος (LoggerPro) κατασκευάζει πίνακες και διαγράμματα των μετρήσεων, τα οποία μπορείτε να επεξεργαστείτε προκειμένου να εξάγετε ποσοτικά συμπεράσματα για τις διάφορες φυσικές ποσότητες που μετράτε.

1. Υπολογιστής με κατάλληλο λογισμικό λήψης και επεξεργασίας δεδομένων *LoggerPro*.
2. Διεπαφή (Interface) *LabPro* για την σύνδεση αισθητήρων με τον υπολογιστή
3. Αμαξίδιο A με ενσωματωμένους αισθητήρες δύναμης και επιτάχυνσης
4. Αμαξίδιο B με μαγνήτες και στα δύο άκρα
5. Αμαξίδιο Γ με μαγνήτη στο ένα άκρο
6. Αισθητήρες μέτρησης δύναμης και απόστασης
7. Τροχιά χαμηλής τριβής κίνησης αμαξιδίων στο ένα άκρο της οποίας είναι στερεωμένος αισθητήρας δύναμης
8. Ηλεκτρονική ζυγαριά και πρόσθετα βάρη

## Πειραματική διαδικασία

### Πείραμα 1. Βαθμονόμηση των αισθητήρων

Οι αισθητήρες είναι μετρητικά όργανα τα οποία μπορούμε να αναγνώσουμε με την βοήθεια ηλεκτρονικού υπολογιστή. Αν υποθέσουμε γραμμική συμπεριφορά ( $y = mx + b$ ) των αισθητήρων (σύμφωνα με τις οδηγίες του κατασκευαστή) αρκούν δύο σημεία μέτρησης για να βαθμονομηθούν.

Το πρόγραμμα *Logger Pro* περιλαμβάνει την δυνατότητα **βαθμονόμησης** με την παρακάτω διαδικασία την οποία και θα πραγματοποιήσετε πριν αρχίσετε τις μετρήσεις σας για τους αισθητήρες δύναμης και επιτάχυνσης. Η διαδικασία βαθμονόμησης του αισθητήρα θέσης είναι πιο περίπλοκη και χρονοβόρα - θα θεωρήσετε ότι είναι βαθμονομημένος.

Για τον αισθητήρα δύναμης:

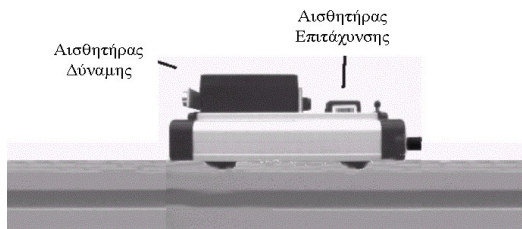


1. Χρησιμοποιήστε το αμαξίδιο A με τους αισθητήρες δύναμης και επιτάχυνσης που θα βρείτε στο πάγκο του Εργαστηρίου σας.
2. Επιλέξτε από το μενού του Προγράμματος Logger-Pro την επιλογή “Experiment” και στη συνέχεια το “Calibrate CH1: Dual Range Force” (βαθμονόμηση του πρώτου αισθητήρα, της δύναμης).
3. Χωρίς καμία πίεση πάνω του επιλέξτε το “perform now” και στη δημιουργουμένη επιλογή τιμής εισάγεται το μηδέν (0) (καμία δύναμη δεν επιδρά στον αισθητήρα). Πατήστε την επιλογή “keep” για να κρατηθεί η τιμή.
4. Στη συνέχεια με την βοήθεια ενός νήματος, ενός γνωστού βάρους και μιας τροχαλίας που υπάρχουν στο πάγκο εργασίας σας, αναρτήστε μια μάζα (περίπου  $\sim$ ) 0.5kg κρατώντας ακίνητο το αμαξίδιο. Όταν ισορροπήσει η ένδειξη εισάγετε την τιμή 4.9(N) που αντιστοιχεί στο βάρος μάζας 0.5kg. ή την υπολογιζόμενη τιμή από το γινόμενο  $m \cdot g$ ,  $g$ : η τιμή της επιτάχυνσης της βαρύτητας στο εργαστήριο, όπως έχει μετρηθεί, 9.807(m/s<sup>2</sup>). Πατήστε Ok για να αποθηκευτεί και η δεύτερη αυτή τιμή. Ο αισθητήρας της δύναμης είναι έτοιμος για χρήση.

Για τον αισθητήρα επιτάχυνσης:

1. Ενεργοποιήστε όπως περιγράφηκε πριν **τον αισθητήρα της επιτάχυνσης (Low Acceleration)** στο δεύτερο κανάλι (CH2).
2. Κρατώντας το αμαξίδιο με τον αισθητήρα αυστηρά κατακόρυφα και με το **βέλος** που υπάρχει χαραγμένο πάνω σε αυτόν **προς τα κάτω** επιλέξτε το “perform now” και εισάγετε όταν σταθεροποιηθούν οι ενδείξεις την τιμή  $-9.807(m/s^2)$ . Πατήστε “keep” για να αποθηκευτεί η τιμή.
3. Ακολούθως κρατήστε το αμαξίδιο πάλι κατακόρυφα, αλλά με το βέλος **προς τα πάνω** και εισάγετε όταν σταθεροποιηθούν οι ενδείξεις την τιμή  $9.807(m/s^2)$ . Πατήστε OK για να αποθηκευτεί και η δεύτερη αυτή τιμή.
4. Ο αισθητήρας έχει τώρα βαθμονομηθεί για επιτάχυνση σε οριζόντια κίνηση και είναι έτοιμος προς χρήση.

## Πείραμα 2. Μέτρηση αδρανειακής μάζας: Επιβεβαίωση Β΄ νόμου Newton



Σχήμα 1

Σε αυτό το πείραμα, για την μέτρηση της αδρανειακής μάζας του αμαξιδίου, θα χρησιμοποιήσουμε το αμαξίδιο με τους αισθητήρες δύναμης και επιτάχυνσης (βλ. Σχ.1). Θα επιβεβαιώσουμε τον δεύτερο νόμο του Newton, ότι ο λόγος της δύναμης που ασκείται σε ένα σώμα προς την αναπτυσσόμενη επιτάχυνση είναι σταθερός: αυτό που καλούμε **αδρανειακή μάζα** του σώματος.

Θα πρέπει να κινήσουμε π.χ. με το χέρι μας μπρος – πίσω το αμαξίδιο κρατώντας το από το άκρο του αισθητήρα δύναμης για να δούμε την παραπάνω συσχέτιση. Η διαδικασία είναι απλή.

1. Ανοίγουμε το αρχείο **b6\_2\_Newton2** (στον πίνακα **Sensor Confirmation** επιλέγουμε **connect**).
2. Από τον κατάλογο εντολών (command menu) **Experiment** → **zero** επιλέγουμε και μηδενίζουμε τους αισθητήρες δύναμης και επιτάχυνσης καθώς βρίσκονται σε ηρεμία και οριζόντια.
3. Η διαδικασία μέτρησης διαρκεί 10 s. Κρατώντας με το χέρι μας το άκρο του αισθητήρα δύναμης κινούμε με προσοχή το αμαξίδιο πάνω σε μια επίπεδη επιφάνεια μπρος – πίσω ενώ αρχίζουμε την συλλογή δεδομένων επιλέγοντας collect.
4. Ταυτόχρονα βλέπουμε στα γραφήματα την δύναμη και την αντίστοιχη επιτάχυνση. **Ποιο σχόλιο** έχετε να κάνετε παρατηρώντας τις δύο αυτές γραφικές παραστάσεις;



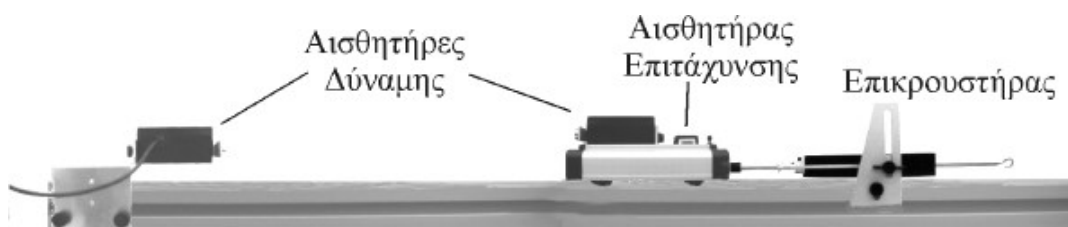
5. Στο τρίτο, διπλανό τους γράφημα εμφανίζονται ταυτόχρονα (online δηλαδή) ένα προς ένα τα σημεία μέτρησης δύναμης – επιτάχυνσης.
6. Τέλος στο διπλανό των γραφημάτων ΠΙΝΑΚΑ εμφανίζονται οι τιμές κάθε μέτρησης του χρόνου, της δύναμης και της επιτάχυνσης σε s, N και  $m/s^2$  αντίστοιχα.
7. Στο γράφημα εφαρμόζουμε την επιλογή «προσαρμογή καμπύλης  $f(x)=$ » (Analyze Curve Fit) προκειμένου να βρούμε την κλίση της άριστης δυνατής ευθείας που περιγράφει τα πειραματικά της σημεία και το σφάλμα της κλίσης. Για τον σκοπό αυτό επιλέγοντας σαν εξίσωση προσαρμογής την εξίσωση ευθείας,  $y = mx + b$ . Προφανώς το είναι η μάζα του συστήματος αμαξίδιο και αισθητήρες.
8. Σημειώστε την τιμή του m και με την βοήθεια των σφαλμάτων **συγκρίνετέ την** με την μάζα του αμαξιδίου με χρήση ηλεκτρονικού ζυγού. **Σχολιάστε.** (Τι πραγματικά μετρά ο ζυγός;)

### Πίνακας 1. Δεύτερος νόμος Newton

Τιμή & σφάλμα μάζας αμαξιδίου	Κλίση ευθείας & σφάλμα κλίσης

### Πείραμα 3. Επιβεβαίωση Γ' νόμου Newton ( $\vec{F}_1 = -\vec{F}_2$ )

1. Ανοίξτε το αρχείο **b6\_3\_Newton3**. Κανονικά θα έπρεπε να βαθμονομήσετε τους δύο αισθητήρες δύναμης (τον #1 στο αμαξίδιο A και τον ακίνητο #2) χρησιμοποιώντας γνωστές μάζες (να τις ζυγίσετε) με την διαδικασία που μάθατε στην Άσκηση 1. Τούτο έχει ήδη γίνει οπότε προχωρήστε στη διαδικασία της Άσκησης.
2. Τοποθετήστε το αμαξίδιο A ώστε η πλευρά του με τον αισθητήρα δύναμης να είναι απέναντι από τον ακίνητο άλλο αισθητήρα (βλέπε σχ. 2).



Σχήμα 2.

3. Πατήστε στο menu το “zero” και μηδενίστε και τους δύο αισθητήρες δύναμης. Στη συνέχεια πατήστε το “collect” και αμέσως μετά προκαλέστε **χειροκίνητα** κρούση του αμαξιδίου A με τον ακίνητο αισθητήρα δύναμης #2. Η κρούση που ακολουθεί είναι σχεδόν ελαστική και θα την μελετήσετε στη συνέχεια και στο Πείραμα 3. Στο γράφημα των δύο δυνάμεων συναρτήσει του χρόνου εμφανίζεται ποσοτικά η  $F_1(t)$  και  $F_2(t)$  δύναμη στον αισθητήρα 1 του κινούμενου A αμαξιδίου και στον ακίνητο αισθητήρα 2 αντίστοιχα.
4. Συγκρίνετε τα μεγέθη και την μορφή που έχει το γράφημα. Διαπιστώστε ότι οι δυνάμεις εφαρμόζονται για κάποιο μικρό χρονικό διάστημα άλλα είναι ίσες κάθε χρονική στιγμή;
5. Καταγράψτε τις μετρήσεις σε ένα Πίνακα (βλέπε ενδεικτικά το Πίνακα 1) σημειώνοντας και τα σφάλματα στις μετρήσεις σας.
6. Στο τρίτο γράφημα  $\vec{F}_1 = f(\vec{F}_2)$  λαμβάνετε μια γραμμική σχέση της οποίας η κλίση μας ελέγχει κατά πόσο το  $|\vec{F}_1| = |\vec{F}_2|$ . Για τον σκοπό αυτό εφαρμόσετε μία γραμμική προσαρμογή στο

γράφημα επιλέγοντας το εικονίδιο “f(x)=” (Curve Fit) και στην συνέχεια το “mx+b linear”. Ποια η αναμενόμενη τιμή της κλίσης αυτής; Με τι πρόσημο;

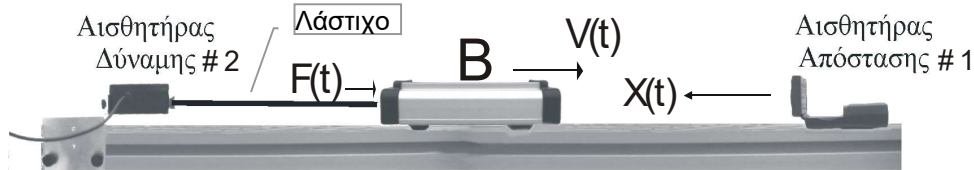
7. Ποιο το εύρος του χρόνου μέσα στον οποίο γίνεται η κρούση; Ποιο μέγεθος ορίζει το εμβαδόν αυτό κάτω από την καμπύλη;

**Πίνακας 2. 3ος νόμος του Newton**

Μάζα [kg]	$F_1$ [N]	$F_2$ [N]	$\int_{t_1}^{t_2} F_1 \cdot dt$ [N·s]	$\int_{t_1}^{t_2} F_2 \cdot dt$ [N·s]	κλίση $\vec{F}_1 = f(\vec{F}_2)$

#### Πείραμα 4. Προσδιορισμός ώθησης δύναμης και σύγκριση με την μεταβολή της ορμής

1. Τοποθετήστε το αμαξίδιο B (με τους μαγνήτες) στην τροχιά με ένα από τα πρόσθετα ~ 0.5kg βάρη πάνω που θα διπλασιάσει την μάζα και την διάρκεια της κρούσης.
2. Συνδέστε το ένα άκρο του λάστιχου με τον αισθητήρα δύναμης (τον #2) που είναι πακτωμένος στο αριστερό άκρο της τροχιάς προσαρμόζοντας το κατάλληλο ύψος του και το άλλο άκρο του με το αμαξίδιο B με την βοήθεια των αγκίστρων (βλ. σχ. 3).
3. Τοποθετήστε τον αισθητήρα απόστασης #1 πάνω στην τροχιά, σε απόσταση  $L \sim 150$  cm από τον στερεωμένο αισθητήρα και το αμαξίδιο B πάνω στην τροχιά, κοντά στον αισθητήρα δύναμης με το λάστιχο χαλαρό.



Σχήμα 3: Διάταξη για τον προσδιορισμό της ώθησης

4. Ανοίξτε το αρχείο **b6\_4\_dP\_impulse**. Στην οθόνη του Η/Υ βλέπετε τρία διαγράμματα: της απόστασης,  $x(t)$ , της ταχύτητας του αμαξιδίου,  $v(t)$  και της δύναμης,  $F(t)$  που ασκείται από το λάστιχο στον αισθητήρα, καθώς επίσης και τον Πίνακα μετρήσεων των παραπάνω μεγεθών.
5. Για τον μηδενισμό της αρχικής ένδειξης στους δύο αισθητήρες δύναμης, επιλέξτε “zero”.
6. Ενεργοποιήστε την συλλογή δεδομένων “collect” και αμέσως μετά προκαλέστε την κίνηση του αμαξιδίου, χτυπώντας το απαλά προς τα δεξιά με το χέρι σας ώστε να τεντωθεί το λάστιχο και να επαναφέρει το αμαξίδιο πίσω (προσέξτε να μην χτυπάει τον αισθητήρα δύναμης το αμαξίδιο A κατά την επαναφορά του). Τα μεγέθη  $x(t)$ ,  $v(t)$  και  $F(t)$  καταγράφονται συγχρόνως (on line) αυτόματα κατά την κίνηση. Από την συνάρτηση  $x(t)$  προσδιορίζεται η ταχύτητα  $v(t)$  που απεικονίζεται επίσης στην οθόνη.
7. Από τα γραφήματα θα πρέπει να συνάγετε τα ακόλουθα: Το αμαξίδιο κινείται για κάποιο διάστημα με (σχεδόν) σταθερή ταχύτητα, μέχρι να τεντωθεί το λάστιχο. Στη συνέχεια ασκείται πάνω του δύναμη  $F(t)$  από το λάστιχο, αυξανόμενου μέτρου, με αποτέλεσμα την αρνητική του επιτάχυνση μέχρι και τον μηδενισμό της ταχύτητάς του. Με την περαιτέρω επίδραση της δύναμης το αμαξίδιο επιταχύνεται στην αντίθετη κατεύθυνση μέχρι τον μηδενισμό της δύναμης αυτής. Η κίνηση του, τότε, γίνεται πάλι (σχεδόν) ευθύγραμμη και ομαλή.
8. Προσδιορίστε την ταχύτητα  $v_\alpha$ , του αμαξιδίου **πριν** την εξάσκηση δύναμης από το λάστιχο, με γραμμική προσαρμογή (fx Curve Fit και επιλογή Linear) στο γράφημα  $x(t)$ . Με την ίδια

διαδικασία προσδιορίστε την ταχύτητα  $v_\tau$ , του αμαξιδίου **μετά** την εξάσκηση της δύναμης από το λάστιχο (το βάρος του λάστιχου και οι τριβές θεωρούνται αμελητέες).

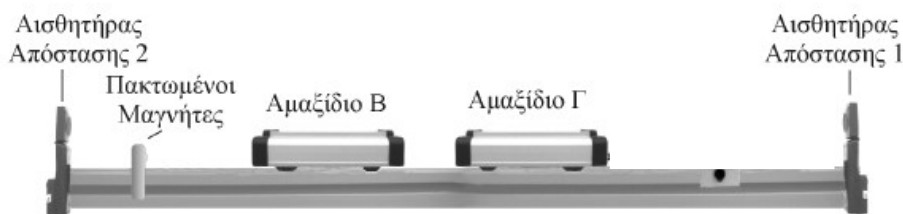
9. Προσδιορίστε τις τιμές της ταχύτητας για τις δύο παραπάνω περιπτώσεις χρησιμοποιώντας το διάγραμμα  $v(t)$ . Συγκρίνετε τις τιμές με αυτές που βρήκατε στο βήμα 8 αντίστοιχα.
10. Προσδιορίστε την ώθηση της δύναμης  $I$  από το διάγραμμα  $F(t)$ , ολοκληρώνοντας με την βοήθεια του Η/Υ την επιφάνεια  $I = \int_1^2 dI = \int_{t_1}^{t_2} F \cdot dt$ . Προσδιορίστε σε ms το χρονικό διάστημα  $\Delta t$  που ασκείται δύναμη στο βαγόνι.
11. Καταχωρίστε τις παραπάνω τιμές με τα σφάλματά τους σε Πίνακα 3.
12. Συμπληρώστε στον Πίνακα 3 την μεταβολή της ταχύτητας  $\Delta v = v_\tau - v_\alpha$  του αμαξιδίου και την μεταβολή της ορμής του,  $\Delta P = M \cdot \Delta v$ , με  $M$  την μάζα του βαγονιού (ζυγίστε την).
13. Συγκρίνετε τις τιμές της ώθησης,  $I$ , που προσδιορίσατε και τις αντίστοιχες μεταβολές της ορμής  $\Delta P$  που υπολογίσθηκαν. Υπολογίστε την % σχετική διαφορά τους. Επιβεβαιώνεται - με βάση τα πειραματικά σας αποτελέσματα - η σχέση  $I = \Delta P$ ; Που οφείλεται η απόκλιση;

### Πίνακας 3. Μεταβολή της ορμής – ώθηση

$M \pm \delta M$ [Kg]	$v \pm \delta v$ [m/s]	$v_\tau \pm \delta v_\tau$ [m/s]	$\Delta v \pm \delta \Delta v$ [m/s]	$I$ [N· s]	$\Delta P \pm \delta \Delta P$ [N· s]	% από- κλιση

### Πείραμα 5. Μελέτη ελαστικής κρούσης

1. Η πειραματική διάταξη παρουσιάζεται σχηματικά στο Σχήμα 3. Αφαιρέστε το σύστημα ανάρτησης και τον αισθητήρα δύναμης #2.



Σχήμα 3.

2. Ανοίξτε το αρχείο "**b6\_5\_Collisions**". Εμφανίζονται δύο γραφήματα (των αποστάσεων των δύο αμαξιδίων από τους αντίστοιχους αισθητήρες) και ο Πίνακας μετρήσεων. Η διάρκεια των μετρήσεων σε αυτό το πείραμα διαρκούν 5 s. Τοποθετήστε τους αισθητήρες κίνησης στα δύο άκρα της τροχιάς. Σε ικανή απόσταση από τον δεύτερο αισθητήρα στερεώνετε το σύστημα ανάρτησης των μαγνητών.

### Ελαστική κρούση

1. Τοποθετήστε το αμαξίδιο Γ στην τροχιά αφού το φέρετε έτσι ώστε η πλευρά του που έχει **μαγνήτες** να είναι προς την αντίθετη πλευρά. Τοποθετήστε το αμαξίδιο Β σε απόσταση  $L \approx 30-50\text{cm}$  από το αμαξίδιο Γ. Ενεργοποιήστε την συλλογή δεδομένων "**collect**" (ακούγεται χαρακτηριστικός ήχος, που δηλώνει την έναρξη καταγραφής δεδομένων) και αμέσως μετά δώστε μια ώθηση στο αμαξίδιο Γ.

2. Τα μεγέθη  $d_1(t)$  και  $d_2(t)$  που καταγράφονται, συγχρόνως με την κίνηση στην οθόνη του υπολογιστή, περιγράφουν την απόσταση αισθητήρα #1–αμαξιδίου Γ και την απόσταση αισθητήρα #2–αμαξιδίου Β αντίστοιχα, σαν συνάρτηση του χρόνου. Από τις συναρτήσεις  $d_1(t)$  και  $d_2(t)$  με γραμμική προσαρμογή (fx Curve Fit και επιλογή Linear), προσδιορίστε την κλίση δηλαδή την ταχύτητα των αμαξιδίων λίγο πριν  $(v_1, v_2)$  και  $(v_1', v_2')$  λίγο μετά την κρούση. Επίσης υπολογίστε την ταχύτητα  $v_2''$  του αμαξιδίου Β μετά την ανάκρουσή του στους πακτωμένους μαγνήτες. Για να γίνει αυτό, πρέπει να εκτιμήσετε από τα διαγράμματα  $d_1(t)$  και  $d_2(t)$  σε ποια χρονικά σημεία λαμβάνουν χώρα οι δύο παραπάνω **σχεδόν** ελαστικές κρούσεις. Τις τιμές των  $v$  συγκεντρώστε στον Πίνακα 4 με τα σφάλματα στις μετρήσεις σας.

**Πίνακας 4. Ταχύτητες πριν και μετά την ελαστική κρούση**

α/α	$m_1 \pm \delta m_1$ [kg]	$m_2 \pm \delta m_2$ [kg]	$v_1 \pm \delta v_1$ [m/s]	$v_1' \pm \delta v_1'$ [m/s]	$v_2 \pm \delta v_2$ [m/s]	$v_2' \pm \delta v_2'$ [m/s]	$v_2'' \pm \delta v_2''$ [m/s]
1.							
2.							
3.							

3. Από τα διαγράμματα των αποστάσεων κάνετε μία εκτίμηση σε ms για την χρονική διάρκεια της ελαστικής κρούσης όπως αυτή υλοποιείται από την πειραματική σας διάταξη.
4. Δοκιμάσετε να κάνετε τις γραμμικές προσαρμογές σε λίγο διαφοροποιημένα χρονικά διαστήματα σε σχέση με την κρούση. Διαπιστώνετε διαφορές; Μπορείτε να τις ερμηνεύσετε ποιοτικά; Συγκρίνετε το σφάλμα στη μέτρηση των ταχυτήτων που προκύπτει από αυτές τις διαφοροποιήσεις με το σφάλμα της προσαρμογής. Εκτυπώστε την Οθόνη με τα δύο γραφήματα και τον Πίνακα μετρήσεων στην περιοχή που μας ενδιαφέρει.
5. Επαναλάβετε τα βήματα 1-4 προσθέτοντας **δύο επιπλέον βάρη** στο αμαξίδιο Γ. Επαναλάβετε τα βήματα 1-4 έχοντας **αφαιρέσει** τα επιπλέον βάρη από το αμαξίδιο Γ και προσθέτοντάς τα στο αμαξίδιο Β. Τι παρατηρείτε;
6. Σε μια ιδανικά ελαστική κρούση σε στόχο άπειρης μάζας, από την αρχή διατήρησης της ορμής θα προέκυπτε ότι  $v_2'' = -v_2'$ . Υπολογίστε το λόγο και την μέση τιμή του  $(v_2' - v_2'') / v_2'$  και συγκρίνετε με την ιδανική περίπτωση.
7. Υπολογίστε την ορμή κάθε αμαξιδίου και την συνολική ορμή πριν και μετά την μεταξύ τους κρούση, με σφάλματα, και αναγράψτε τις τιμές στον πίνακα 5. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι στις ελαστικές κρούσεις ισχύει η αρχή διατήρησης της ορμής;

**Πίνακας 5. Ορμές πριν και μετά την ελαστική κρούση**

α/α	$P_1 \pm \delta P_1$ [Kg·m/s]	$P_2 \pm \delta P_2$ [Kg·m/s]	$P_1' \pm \delta P_1'$ [Kg·m/s]	$P_2' \pm \delta P_2'$ [Kg·m/s]	$P_{ολ} \pm \delta P_{ολ}$ [Kg·m/s]	$P_{ολ}' \pm \delta P_{ολ}'$ [Kg·m/s]	$\Delta P / P_{ολ}$ (%)
1.							
2.							
3.							

8. Υπολογίστε την κινητική ενέργεια κάθε αμαξιδίου και την συνολική κινητική ενέργεια πριν και μετά την μεταξύ τους κρούση, με σφάλματα, και καταχωρίστε στον πίνακα 6. Μπορούμε να ισχυριστούμε ότι στις ελαστικές κρούσεις ισχύει η αρχή διατήρησης της ενέργειας;

**Πίνακας 6. Ενέργειες πριν και μετά την ελαστική κρούση**

$\alpha/\alpha$	$E_1 \pm \delta E_1$ (J)	$E_2 \pm \delta E_2$ (J)	$E'_1 \pm \delta E'_1$ (J)	$E'_2 \pm \delta E'_2$ (J)	$E_{ολ} \pm \delta E_{ολ}$ (J)	$E'_{ολ} \pm \delta E'_{ολ}$ (J)	$\Delta E / E_{ολ}$ (%)
1.							
2.							
3.							

9. Μπορείτε να αναφέρετε μερικές πηγές συστηματικών σφαλμάτων στις παραπάνω μετρήσεις; Περιγράψτε ποιοτικά τον τρόπο με τον οποίο οι πηγές που αναφέρετε επιδρούν στη συγκεκριμένη μέτρηση.

## Ερωτήσεις

1. Σε σύγκρουση αυτοκινήτου ποιος ο ρόλος του αερόσακου; Τι δύναμη δέχεται ο οδηγός αυτός σε αντίθεση με οδηγό σε αυτοκίνητο χωρίς αερόσακο;
2. Με τι θα επιχειρήσετε να κλείσετε μια πόρτα, μια μπάλα του μπάσκετ, ή με στόκο ίδιας μάζας; αν και τα δύο υλικά εκσφενδονιστούν με την ίδια αρχική ταχύτητα και κτυπήσουν στο ίδιο σημείο. Γιατί;
3. Ταξιδεύοντας με αυτοκίνητο στην εξοχή συχνά έχουμε την περίπτωση όπου κάποιο μικρό έντομο συνθλίβεται στον εμπρόσθιο υαλοπίνακα (παρμπρίζ). Ποιες δυνάμεις εμφανίζονται στη πρόσκρουση αυτή στο έντομο και στο αυτοκίνητο; Γιατί συνθλίβεται το έντομο;

## Βιβλιογραφία

9. H.D. Young τ. 1 §§ 4.3
10. Ohanian τ. 1 §§ 5.2
11. Serway τ. 1 §§ 9.1-9.4

## Οδηγίες για την εκτέλεση των πειραμάτων B6

### 1. Προετοιμασία πειράματος

Έλεγχος αισθητήρων και σύνδεσής των στο Interface του PC:




Αισθητήρας - είδος	Logger-Pro περιγραφή	Σύνδεση Interface	Σχόλια
Δύναμης #1 (στο αμαξίδιο)	Force-Dual Range 50N	CH1	Διακόπτης στο $\pm 50N$
Δύναμης #2 (ο ακίνητος)	Force-Dual Range 50N	CH2	Διακόπτης στο $\pm 50N$
Απόστασης #1 (προ του αισθητήρα δύναμης)	Motion Detector	DIG/SONIC2	$0.4 \text{ m} \leq S \leq 3\text{m}$
Απόστασης #2 (άλλο άκρο τροχιάς)	Motion Detector	DIG/SONIC1	$0.4 \text{ m} \leq S \leq 3\text{m}$

### 2. Πειραματική Διαδικασία (χρήση υπολογιστή και λογισμικού Logger Pro)




#### Πείραμα 1. Βαθμονόμηση

1	Έλεγχος αισθητήρων και σύνδεσής των στο Interface του υπολογιστή	Αμαξίδιο, αισθητήρας δύναμης, αισθητήρας επιτάχυνσης
2	Ενεργοποίηση λογισμικού Άνοιγμα αρχείου	Διπλό Click στο εικονίδιο Logger Pro File → Open → F1 → Open → <b>b6_1_Calibration</b> → Open
3	Βαθμονόμηση αισθητήρα δύναμης (Force-Dual Range 50N)	
4	Βαθμονόμηση αισθητήρα επιτάχυνσης (Low-g Accelerometer)	




#### Πείραμα 2. Μέτρηση αδρανειακής μάζας: Επιβεβαίωση του 2<sup>ου</sup> νόμου του Newton

1	Αισθητήρες - υλικά	Αμαξίδιο A με τους αισθητήρες δύναμης & επιτάχυνσης
2	Ενεργοποίηση λογισμικού Άνοιγμα αρχείου	Διπλό Click στο εικονίδιο Logger Pro File → Open → F1 → Open → <b>b6_2_Newton2</b> → Open
3	Λήψη δεδομένων	Μηδενισμός του αισθητήρα δύναμης (Zero) →  : 10 με 20 samples/s →  Collect
4	Γραφήματα	Τριπλό γράφημα: (α) Επιτάχυνσης-Χρόνου a-t (β) Δύναμης-Χρόνου F-t και (γ) Δύναμης-Επιτάχυνσης F-a → Προσαρμογή (fit) ευθείας στο γράφημα F-a και προσδιορισμός της κλίσης (μάζας) → Click στο γράφημα F-a → Επιλογή περιοχής ενδιαφέροντος →  Curve Fit → $y=mx+b$ (linear) → Define function → OK → Try fit → OK → Εκτύπωση → Ζύγιση μάζας αμαξιδίου




**Πείραμα 3. Τρίτος νόμος του Newton**

1	Ενεργοποίηση λογισμικού Άνοιγμα αρχείου	Διπλό Click στο εικονίδιο Logger Pro File → Open → F1 → Open → b6_3_Newton3 → Open
2	Λήψη δεδομένων	Μηδενισμός των δύο αισθητήρων δύναμης (Zero)  : 3s & 1000 samples/s max →  Collect
3	Επιλογή γραφημάτων F1 & F2	Click στα γραφήματα F1 & F2 → Επιλογή περιοχής ενδιαφέροντος → μέτρηση μέγιστης τιμής & εύρους χρόνου κρούσης → υπολογισμός ολοκληρώματος
4	F1→F2	Click στο F1→F2 Παράθυρο
5	Προσαρμογή δεδομένων	Εικονίδιο για προσαρμογή  Curve Fit → $y=mx+b$ (linear) → Define function → OK → Try fit → OK → Εκτύπωση

**Πείραμα 4. Μέτρηση Μεταβολής της Ορμής – Ωθηση**

1	Αισθητήρες - υλικά	αισθητήρας σταθερής ανάρτησης δύναμης #2 & αμαξίδιο B με ελαστικό ιμάντα
2	Ενεργοποίηση λογισμικού Άνοιγμα αρχείου	Διπλό Click στο εικονίδιο Logger Pro File → Open → F1 → Open → <b>b6_4_ΔP_Impulse</b> → Open
3	Λήψη δεδομένων	Μηδενισμός του σταθερού αισθητήρα δύναμης #2  : 4s & ~30 samples/s →  Collect
4	Γραφήματα	Επιλογή περιοχής ενδιαφέροντος → υπολογισμός κλίσεων πριν και μετά την κρούση με  Curve Fit → υπολογισμός ολοκληρώματος → Εκτύπωση → Ζύγιση μάζας αμαξιδίου

**Πείραμα 5. Κρούσεις: Ελαστικές – (Πλαστικές)**

1	Ενεργοποίηση λογισμικού	Διπλό Click στο εικονίδιο Logger Pro File → Open → F1 → Open → b6_5_Collisions → Open
1	Αισθητήρες - υλικά	Χρήση αμαξιδίων B, Γ & αισθητήρων απόστασης #1 και #2
2	Ελαστική κρούση Λήψη δεδομένων	 : 4s & ~30 samples/s →  Collect → Ελαστική κρούση ίσες μάζες: Γ (στον επικρουστήρα) με πλευρά <b>μαγνητών</b> έναντι μαγνητών του B και το B ακίνητο → Εκτύπωση → Επανάληψη με 2 πρόσθετες μάζες στο Γ → Εκτύπωση → Επανάληψη με 2 πρόσθετες μάζες στο B → Εκτύπωση
3	πλαστική κρούση (εφόσον υπάρχει χρόνος, για επίδειξη μόνο)	 Collect → Ανελαστική κρούση με ίσες μάζες & → με 2 block στο ακίνητο. Εκτυπώσεις και στις δύο περιπτώσεις

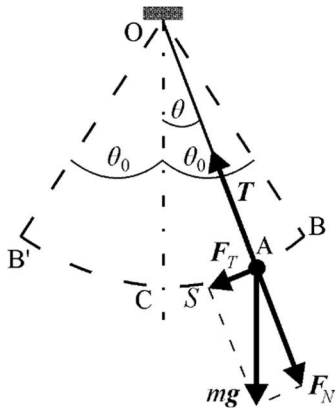
## B7. Μελέτη απλής αρμονικής κίνησης

### Σκοπός της άσκησης

**Απλό, φυσικό και στροφικό εκκρεμές.** Θα μελετήσουμε διάφορα είδη ταλαντωτών και με την βοήθεια τους θα βρούμε κάποια μεγέθη (το  $g$ , είτε μεγέθη που χαρακτηρίζουν τους ταλαντωτές). Προσπαθούμε να έχουμε ταλαντωτές που στο μέγιστο δυνατό βαθμό να προσεγγίζουν τους ιδανικούς. Έτσι το απλό εκκρεμές είναι πραγματικά απλό, ενώ στις υπόλοιπες περιπτώσεις προσπαθούμε να εξαλείψουμε διάφορα φαινόμενα, όπως π.χ. τριβές στους άξονες, σύνθεση ταλαντώσεων κλπ.

### Στοιχεία από την θεωρία

#### I. Το απλό εκκρεμές



Σύμφωνα με τον ορισμό «το απλό εκκρεμές αποτελείται από σώμα αμελητέων διαστάσεων και μάζας  $m$  που κρέμεται με νήμα μήκους  $\ell$  και αμελητέας μάζας από σταθερό σημείο  $O$ » (βλ. Σχ.1).

Αν το σώμα αυτό απομακρυνθεί αρχικά από την θέση ισορροπίας, στη θέση  $B$ , ώστε το νήμα να σχηματίζει γωνία  $\theta_0$  με την κατακόρυφο  $OC$  και αφεθεί ελεύθερο θα εκτελεί ταλαντώσεις μεταξύ του  $B$  και της συμμετρικής θέσης  $B'$  (αν αγνοήσουμε τις κάθε είδους τριβές). Αυτό σημαίνει ότι το σωματίδιο κινείται σε τόξο κύκλου που έχει ακτίνα  $\ell=OA$  και πάνω του ασκούνται το βάρος του  $mg$  και η τάση  $T$  του νήματος.

Η εφαπτομενική συνιστώσα της συνισταμένης δύναμης είναι, από το Σχ.1:  $F_T = -mg \sin \theta$

Η εξίσωση της εφαπτομενικής κίνησης είναι  $F_T = ma_T$  και επειδή το σωματίδιο κινείται σε κυκλική τροχιά θα ισχύει:  $a_T = d^2\theta/dt^2$ . Επομένως, αν πάρουμε υπόψη μας ότι η  $F_T$  έχει φορά αντίθετη της φοράς της μετατόπισης ( $S=CA$ ) και έτσι θα πρέπει να βάλουμε ένα  $(-)$ , βρίσκουμε:  $m\ell(d^2\theta/dt^2) = -mg \sin \theta$ , ή:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \sin \theta \quad (1)$$

Για μικρές γωνίες μπορούμε να γράψουμε  $\sin \theta \approx \theta$  και η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} = -\frac{g}{\ell} \theta \quad (2)$$

Λύση αυτής της διαφορικής εξίσωσης είναι η

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega t + \varphi) \quad (3)$$

όπου  $\omega = \sqrt{g/\ell}$  και το  $\varphi$  προσδιορίζεται από τις αρχικές συνθήκες. Από εδώ λαμβάνουμε:

$$T = 2\pi\omega \Rightarrow T = 2\pi\sqrt{\ell/g} \quad (4)$$

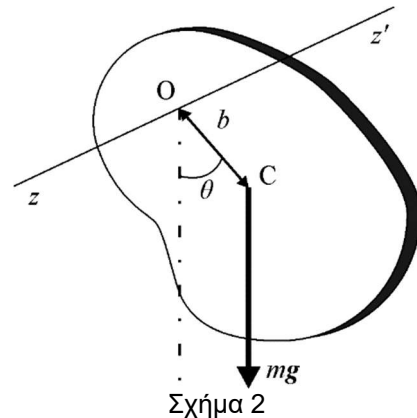


## II. Το φυσικό εκκρεμές

Έστω τώρα ότι έχουμε στερεό σώμα που μπορεί ελεύθερα να ταλαντώνεται γύρω από ένα οριζόντιο άξονα, ο οποίος δεν διέρχεται από το κέντρο μάζας του. Ο οριζόντιος άξονας (βλ. Σχήμα 2) είναι ο  $zz'$  και  $C$  το κέντρο μάζας (Κ.Μ.) του σώματος. Όταν η  $OC$  σχηματίζει γωνία  $\theta$  με την κατακόρυφο η  $z$ -συνιστώσα της ροπής που εξασκείται λόγω του βάρους στο σώμα είναι:

$$T_z = mgb \sin \theta$$

όπου  $b$  είναι η απόσταση ( $OC$ ) μεταξύ του άξονα  $zz'$  και του Κ.Μ.  $C$ .



Αν  $I$  είναι η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς τον άξονα  $zz'$  και  $d^2\theta/dt^2$  η γωνιακή επιτάχυνση, από την γενική σχέση  $Tz = I(d^2\theta/dt^2)$  έχουμε:

$$I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgb \sin \theta.$$

Υποθέτοντας και εδώ ότι το  $\theta$  είναι πολύ μικρό έχουμε ότι  $\sin \theta \approx \theta$  οπότε

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgb}{I} \theta = 0, \quad (5)$$

που είναι η διαφορική εξίσωση της αρμονικής ταλάντωσης με περίοδο

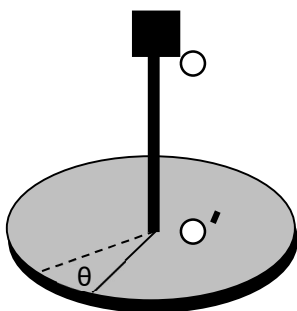
$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mgb}}. \quad (6)$$

Η ποσότητα  $L = I/mgb$  ονομάζεται **ισοδύναμο μήκος** του φυσικού εκκρεμούς, έχει διαστάσεις μήκους και εκφράζει το μήκος απλού εκκρεμούς το οποίο έχει την ίδια περίοδο με το φυσικό.

Ένα άλλο είδος φυσικού εκκρεμούς είναι και το αντιστρεπτό, το οποίο ονομάζεται έτσι διότι μπορεί να αναρτηθεί και να εκτελέσει ταλάντωση και από τα δύο άκρα του. Περισσότερα για το αντιστρεπτό εκκρεμές θα δούμε πιο κάτω.

## III. Το στροφικό εκκρεμές

Αυτό αποτελείται από ένα σώμα που αναρτάται από ένα σύρμα ή μία λεπτή ράβδο κατά τέτοιο τρόπο ώστε το σύρμα ή η ράβδος να είναι στερεωμένη στο κέντρο μάζας του σώματος.



Σχήμα 3

Όταν το σώμα που παριστάνεται στο σχήμα 3 περιστραφεί κατά γωνία  $\theta$  από την θέση ισορροπίας του, τότε το σύρμα ή η ράβδος συστρέφεται και εξασκεί στο σώμα ροπή στρέψης  $\tau$  γύρω από τον άξονα  $OO'$ , που τείνει να επαναφέρει το σώμα στην αρχική του θέση. Η ροπή αυτή αντιτίθεται στη στροφή κατά γωνία  $\theta$  και το μέτρο της είναι ανάλογο προς αυτήν

$$\tau = -C\theta, \quad (7)$$

όπου  $C$  είναι ο **συντελεστής στρέψης** του σύρματος ή της ράβδου που χαρακτηρίζει το υλικό και τις διαστάσεις του.

Αν  $I$  είναι η ροπή αδράνειας του σώματος γύρω από τον άξονα  $OO'$  η εξίσωση κίνησης για ένα

$$\text{τέτοιο σύστημα έχει την μορφή: } \tau = I \frac{d^2\theta}{dt^2}, \quad (8)$$

$$\text{δηλαδή: } I \frac{d^2\theta}{dt^2} = -C\theta \quad (9)$$

$$\text{και επομένως: } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{C}{I}\theta = 0 \quad (10)$$

$$\text{Βρίσκουμε την διαφορική: } \frac{d^2\theta}{dt^2} + \omega^2\theta = 0 \quad (11)$$

που μάς δίνει ότι η κυκλική κίνηση του στροφικού εκκρεμούς είναι απλή αρμονική ταλάντωση με

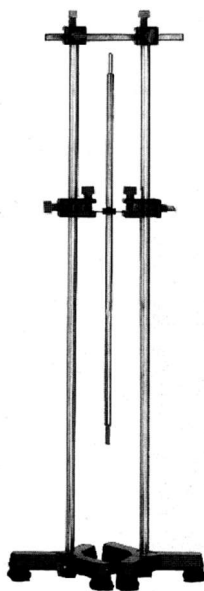
$$\omega = \sqrt{\frac{C}{I}} \quad (12)$$

Η περίοδος της ταλάντωσης επομένως είναι:

$$T = 2\pi\omega = 2\pi\sqrt{\frac{I}{C}} \quad (13)$$

Το αποτέλεσμα αυτό είναι ενδιαφέρον γιατί μπορούμε να το χρησιμοποιήσουμε για να μετρήσουμε πειραματικά την ροπή αδράνειας ενός σώματος, αρκεί να γνωρίζουμε το  $C$  του σώματος ανάρτησης και την περίοδο  $T$  της ταλάντωσης.

#### IV. Το αντιστρεπτό εκκρεμές



Σχήμα 5

Μια άλλη μορφή εκκρεμούς είναι το αντιστρεπτό εκκρεμές που αποτελείται από μια ομογενή ράβδο μήκους  $L$  όπου υπάρχει η δυνατότητα να μεταβάλλουμε το σημείο ανάρτησης από  $0$  έως  $L$ . Σε αυτή την περίπτωση ισχύουν τα εξής (βλ. Σχήμα 5):

Αν αφήσουμε την ράβδο να εκτελέσει μικρές ταλαντώσεις γύρω από άξονα που απέχει  $a$  από το κέντρο μάζας της, τότε [σύμφωνα με την σχέση (8) και το θεώρημα Steiner] για την περίοδο θα ισχύει:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I_0 + ma^2}{mg a}} = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \quad (14)$$

όπου  $m$  η μάζα της ράβδου,  $I_0$  η ροπή αδράνειας της ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο μάζας της και το ισοδύναμο μήκος:

$$L = \frac{I_0 + ma^2}{m a}. \text{ Αν λάβουμε υπόψη ότι για ράβδο μήκους } \ell \text{ ισχύει: } I_0$$

$$I_0 = \frac{mL^2}{12} = m\alpha_0^2 \text{ (Βλέπε Συμπλήρωμα 1 στο τέλος του Φυλλαδίου),}$$

όπου  $\alpha_0$  η ακτίνα αδρανείας, τότε βρίσκουμε:

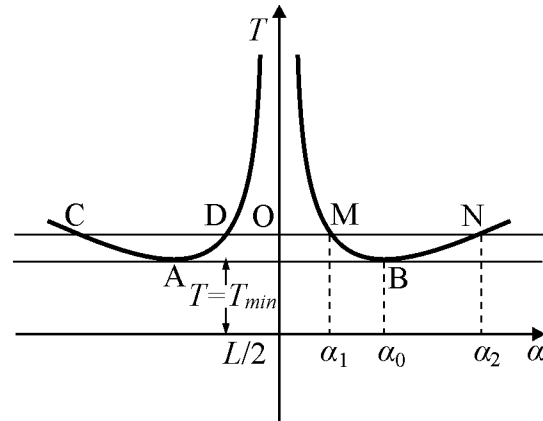
$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\alpha_0^2 + a^2}{g a}} \quad (15)$$

Από την σχέση (15) φαίνεται ότι η περίοδος της ταλάντωσης τείνει στο άπειρο όταν  $a=0$  ή  $a \rightarrow \infty$ . (εξηγήστε το τόσο μαθηματικά όσο και φυσικά).

Το  $T$  σαν συνάρτηση του  $\alpha$  παριστάνεται στο Σχ. 6 και όπως βλέπουμε αποτελείται από δυο συμμετρικούς (ως προς το κέντρο μάζας της ράβδου) κλάδους. Κάθε κλάδος έχει ένα ελάχιστο το οποίο μπορούμε εύκολα να βρούμε από την σχέση (15) και είναι  $\alpha_{\min} = \alpha_0 \approx 0,29L$ .

Από την γραφική παράσταση φαίνεται ότι σε μία ευρεία περιοχή τιμών έχουμε για δυο μήκη την ίδια περίοδο.

Για παράδειγμα στα μήκη  $(OD) = \alpha_1 < \alpha_0$  και  $(OC) = \alpha_2 > \alpha_0$  αντιστοιχεί η ίδια περίοδος  $T$  και γι' αυτήν ισχύει:



Σχήμα 6

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}{g\alpha_1}} = 2\pi \sqrt{\frac{\alpha_0^2 + \alpha_2^2}{g\alpha_2}} \quad (16)$$

Η παραπάνω σχέση μάς οδηγεί στην ισότητα  $\alpha_1 \cdot \alpha_2 = \alpha_0^2$ .

Από εδώ εύκολα βρίσκουμε ότι το ισοδύναμο μήκος ισούται με:

$$L = \frac{\alpha_0^2 + \alpha_1^2}{\alpha_1} = \alpha_1 + \alpha_2 \quad (18)$$

Στο αντιστρεπτό εκκρεμές μπορούμε να βρούμε μεγάλο αριθμό ζευγών αποστάσεων που έχουν την ίδια περίοδο είτε δεξιά του Κ.Μ., είτε αριστερά. Εύκολα επίσης κατανοούμε πως το ισοδύναμο μήκος ισούται με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος CM ή DN, είτε με τα μήκη των αντίστοιχων ευθύγραμμων τμημάτων που προκύπτουν από την τομή ευθείας παράλληλης προς τον άξονα των μηκών με τις καμπύλες  $T(\alpha)$ . Επόμενους από την γραφική παράσταση μπορούμε να υπολογίσουμε το ισοδύναμο μήκος  $L$  και την περίοδο  $T$  και από τον γνωστό τύπο  $g = 4\pi^2 L/T^2$  να βρούμε το  $g$ . Στο Εργαστήριο θα γίνει μόνο επίδειξη της λειτουργίας του από τον διδάσκοντα.

## Πειραματική διάταξη

Στη θέση της άσκησης υπάρχουν:

1. "Απλό" εκκρεμές που αποτελείται από μία μεταλλική σφαίρα που κρέμεται από ακίνητο στήριγμα με εύκαμπτο και μη έκτατο ελαφρό νήμα. Η ανάρτηση δίνει την δυνατότητα μεταβολής του μήκους του εκκρεμούς.
2. Φυσικό εκκρεμές που είναι ένας δακτύλιος ακτινών  $R_1$  και  $R_2$  με δυνατότητα ανάρτησης στο στήριγμα του απλού εκκρεμούς.
3. Στροφικό εκκρεμές.
4. Αντιστρεπτό εκκρεμές (για επίδειξη)
5. Χρονόμετρο.
6. Μετροταινία (ακρίβειας χιλιοστού).

## Πειραματική διαδικασία

### Πείραμα 1. Μελέτη του φυσικού εκκρεμούς (Δακτύλιος)

- Υπολογίστε την ροπή αδράνειας του φυσικού εκκρεμούς, που αποτελείται από δακτύλιο με ακτίνες  $R_1$  και  $R_2$ , ως προς το σημείο ανάρτησης του.
- Από την ροπή αδράνειας υπολογίστε θεωρητικά την περίοδο  $T_\Theta$  και το σφάλμα της.
- Μετρήστε πειραματικά χρόνο 20 περιόδων 5 φορές και προσδιορίστε την περίοδο  $\bar{T}_\Pi [s]$ .

**Πίνακας 1.**

Αρ. μέτρησης	20T[s]	$\bar{T}_\Pi \pm \delta\bar{T}_\Pi [s]$	$\bar{T}_\Theta \pm \delta\bar{T}_\Theta [s]$
1 <sup>n</sup>			
2 <sup>n</sup>			
3 <sup>n</sup>			
4 <sup>n</sup>			
5 <sup>n</sup>			
1 <sup>n</sup>		$\bar{T}_{απλό} \pm \delta\bar{T}_{απλό} [s]$	←Απλό εκκρεμές

- Συγκρίνετε και σχολιάστε τις δύο τιμές ( $T_\Theta [s]$  και  $\bar{T}_\Pi [s]$ ).
- Υπολογίστε θεωρητικά, από την  $T_\Theta [s]$  το ισοδύναμο μήκος του απλού εκκρεμούς. Ακολουθώντας, στο απλό εκκρεμές που υπάρχει στην αίθουσα βάζετε μήκος ίσο προς το ισοδύναμο μήκος που υπολογίσατε και μετράτε μια φορά 20 περιόδους του και από εκεί την  $\bar{T}_{απλό} [s]$ .
- Συγκρίνετε τα αποτελέσματα με την  $\bar{T}_\Pi [s]$  που μετρήσατε πριν και σχολιάστε.

### Πείραμα 2. Μελέτη του στροφικού εκκρεμούς (δίσκος)

- Μετρήστε την περίοδο  $T_{σπρ}$  της ταλάντωσης του στροφικού εκκρεμούς για δεδομένη ράβδο και δίσκο μάζας  $M$  με γνωστή ροπή αδράνειας ( $I_\Delta$ ). Λάβετε τρεις μετρήσεις 10 περιόδων. Η γωνία εκτροπής  $\theta$  να είναι μικρότερη από  $10^\circ$  (Πίνακας 2, στήλη του  $M$ ). Υπολογίστε το συντελεστή στρέψης  $C$  και το σφάλμα του  $\delta C$ .
- Τοποθετήστε διαδοχικά διάφορες επιπλέον μάζες  $m$  (να τις ζυγίστε διότι υπάρχουν μικροδιαφορές) στο δίσκο του στροφικού εκκρεμούς (ανά δυο και συμμετρικά απέναντι), αλλάζοντας έτσι την ροπή αδράνειας και μετρήστε 3 φορές την περίοδο ταλάντωσης (8 μάζες σε 4 μετρήσεις από 10 περιόδους). Συμπληρώστε τις υπόλοιπες στήλες στον Πίνακα 2.

**Πίνακας 2.**

Πρόσθετη μάζα [kg]	M	+2m	+4m	+6m	+8m
10T [s] 1η					
10T [s] 2η					
10T [s] 3η					
$\bar{T}_\Pi \pm \delta\bar{T}_\Pi [s]$					
$\bar{T}_\Theta \pm \delta\bar{T}_\Theta [s]$					

- Υπολογίστε (και θεωρητικά) την περίοδο  $T$  για κάθε περίπτωση ζυγίζοντας τις πρόσθετες μάζες και μετρώντας τις αποστάσεις τους από τον άξονα περιστροφής.
- Σχεδιάστε σε χιλιοστομετρικό χαρτί την  $T = T(I)$  από τις μετρήσεις μας και από τους θεωρητικούς υπολογισμούς μας. Σχολιάστε.
- Υπολογίστε και το σχετικό σφάλμα στη ροπή αδράνειας και την περίοδο θεωρώντας το  $C$  αμελητέας αβεβαιότητας:

$$\text{Για συμπαγή κύλινδρο, είναι: } \left. \begin{array}{l} I = \frac{1}{2}MR^2 \\ M = \rho\pi R^2 h \end{array} \right\} \rightarrow I = \frac{\pi}{2}\rho R^4 h$$

Αφού,  $I = I(\rho, R, h) \rightarrow$  θα έχουμε για το σχετικό σφάλμα του  $I$ :

$$\delta I = \sqrt{\left(\frac{\partial I}{\partial \rho} \delta \rho\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial R} \delta R\right)^2 + \left(\frac{\partial I}{\partial h} \delta h\right)^2} \Rightarrow$$

$$\delta I = \sqrt{\left(\frac{\pi R^4 h}{2} \delta \rho\right)^2 + \left(2\pi \rho R^3 h \delta R\right)^2 + \left(\frac{\pi \rho R^4}{2} \delta h\right)^2} \Rightarrow$$

$$\delta I = \frac{\pi \rho R^4 h}{2} \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} \delta \rho\right)^2 + \left(\frac{4}{R} \delta R\right)^2 + \left(\frac{1}{h} \delta h\right)^2} \Rightarrow$$

$$\delta I = I \sqrt{\left(\frac{1}{\rho} \delta \rho\right)^2 + \left(\frac{4}{R} \delta R\right)^2 + \left(\frac{1}{h} \delta h\right)^2} \Rightarrow \frac{\delta I}{I} = \sqrt{\left(\frac{\delta \rho}{\rho}\right)^2 + 16\left(\frac{\delta R}{R}\right)^2 + \left(\frac{\delta h}{h}\right)^2}$$

- Υπολογίστε την % συμβολή στο συνολικό σχετικό σφάλμα ( $\delta I/I$ ) από τα τρία επί μέρους σχετικά σφάλματα στο  $\rho$ ,  $R$  και  $h$ . Ποιο είναι το μέγεθος που κυρίως συνεισφέρει στο συνολικό σφάλμα; Σχολιάστε.

## Ερωτήσεις

- Η ταλάντωση είναι αυστηρά αρμονική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- Μετρήστε το αρχικό πλάτος αιώρησης  $S_0$  (μεγάλο πλάτος) και το πλάτος  $S$  μετά από πολλές αιωρήσεις (π.χ. 40 ή 50). Τι απόσβεση έχετε; Που οφείλεται; Επηηρεάζεται πρακτικά η περίοδος από την απόσβεση;
- Έστω ομογενής ράβδος μήκους  $L$ . Σε ποιο σημείο της θα την αναρτήσετε ώστε να έχετε την μέγιστη δυνατή περίοδο και σε ποιο για την ελάχιστη;
- Φυσικό εκκρεμές αποτελείται από αβαρές νήμα και ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο δοχείο γεμάτο αρχικά με άμμο. Το σύστημα ταλαντώνεται και ανοίγουμε μια μικρή οπή στον πυθμένα του δοχείου, από όπου εξέρχεται η άμμος. Να χαράξετε ποιοτικά την γραφική παράσταση της περιόδου  $T$  με το χρόνο, έως ότου αδειάσει όλο το δοχείο από την άμμο. Δικαιολογήστε την απάντησή σας.
- Αναλογιστείτε το απλό εκκρεμές με την σφαίρα πυκνότητας  $\rho_{\text{σφαίρας}}$  να ταλαντώνεται μέσα σε ένα υγρό πυκνότητας  $\rho_{\text{υγρού}}$ . Διερευνήστε ποιοτικά τι θα συμβεί αν η  $\rho_{\text{σφαίρας}}$  είναι μικρότερη, ίση ή μεγαλύτερη του  $\rho_{\text{υγρού}}$ ; Αγνοήστε την αντίσταση του υγρού.

## Βιβλιογραφία

- Alonso - Finn            τ. 1 §§ 5.5-5.11, 10.1 - 10.4, 12.3 - 12.6
- H.D. Young            τ. 1 §§ 3-1 – 3-3, 13-1 – 13-7
- Ohanian                τ. 1 §§ 4.1 – 4.4, 15.1 – 15.6
- Serway                 τ. 1 §§ 6.1, 6.2, 13.1, 13.4, 13.6 - 13.7
- Berkeley                τ. 1 §. 7. 1
- Halliday - Resnick    τ. 1 §§ 15.1 - 15.6
- Συμπλήρωμα 1 του παρόντος φυλλαδίου

## Οδηγίες εκτέλεσης πειραμάτων Β7

### Πείραμα 1 - Φυσικό εκκρεμές

- Από την σχέση υπολογισμού της περιόδου  $T$  του φυσικού εκκρεμούς, προσδιορίζονται οι αιτίες σφάλματος και πώς επιδρούν στο τελικό προσδιορισμό της περιόδου αυτής
- Μετρήστε την εξωτερική και εσωτερική ακτίνα του δακτυλίου  $R_1$  και  $R_2$  στη θέση της άσκησης
- Μετρήστε 5 φορές, από 10 περιόδους (γωνίες μεταξύ  $5^\circ$  και  $10^\circ$ )
- **Υπολογίστε θεωρητικώς** το μήκος του ισοδύναμου εκκρεμούς (υπολογίζοντας την ροπή αδράνειας)
- Μετρήστε χρόνο 10 περιόδων με το αντίστοιχο απλό εκκρεμές αυτού του μήκους. Συγκρίνατε, σχολιάστε

### Πείραμα 2 – Στροφικό εκκρεμές

- Από την σχέση που προσδιορίζεται η περίοδος ταλάντωσης του Στροφικού εκκρεμούς **προσδιορίζονται οι αιτίες σφάλματος** και υπολογίστε την επίδρασή τους στη τελική διαμόρφωση της αβεβαιότητας
- Μετρήστε την διάμετρο του δίσκου  $d$ . Η  $M_{\text{δίσκου}} = 5\text{kg}$  (εκτός και αναγράφεται διαφορετική τιμή)
- Μετρήστε πέντε (5) φορές το χρόνο δέκα (10) ταλαντώσεων χωρίς πρόσθετο βάρος
- Ζυγίστε τις οκτώ (8) πρόσθετες μάζες
- Στη συνέχεια προσθέστε στον δίσκο αυτές τις μάζες ανά δύο (2) και αντιδιαμετρικά (1+1), (2+2) κλπ. και πάλι μετρήστε πέντε (5) φορές τον χρόνο δέκα (10) περιόδων κάθε φορά (συνολικώς, 1+4=5 μετρήσεις)

Προσοχή! Μην έχετε τα πόδια σας κάτω από το δίσκο του Στροφικού εκκρεμούς, διότι υπάρχει ενδεχόμενο τραυματισμού

## B8. Πειραματική επιβεβαίωση του νόμου του Hooke

### Σκοπός της άσκησης

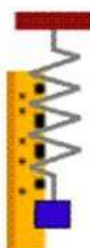
Θα μελετήσουμε την συμπεριφορά ελατηρίων με διαφορετική ελαστικότητα (διαφορετικές τιμές της σταθεράς  $k$ ) και θα επιβεβαιώσουμε πειραματικά την γραμμική σχέση ανάμεσα στην εφαρμοζόμενη δύναμη και την επιμήκυνση του ελατηρίου. Η σταθερά  $k$  του ελατηρίου θα υπολογιστεί με δύο διαφορετικές μεθοδολογίες: **στατικά**, μετρώντας την επιμήκυνση του ελατηρίου όταν υπόκειται στην επίδραση ενός βάρους, αλλά και **δυναμικά**, μετρώντας την περίοδο της κατακόρυφης ταλάντωσης που εκτελεί μάζα αναρτημένη από το κάτω άκρο του ελατηρίου. Θα μετρήσουμε χρησιμοποιώντας δύο διαφορετικές διατάξεις οργάνων.

### Στοιχεία θεωρίας

Η δύναμη που ασκείται σ' ένα ελαστικό σώμα, όπως ένα κοινό σπειροειδές ελατήριο, προκαλεί παραμόρφωση που είναι ανάλογη της δύναμης αυτής και περιγράφεται από το γνωστό νόμο του Hooke:

$$F = -k \cdot x \quad (1)$$

όπου  $F$  είναι η εφαρμοζόμενη δύναμη, και  $x$  η μετατόπιση του ελατηρίου από την θέση ισορροπίας. Η σταθερά αναλογίας  $k$  χαρακτηρίζει το ελαστικό σώμα και ονομάζεται στην περίπτωση αυτή σταθερά του ελατηρίου.



Για την πειραματική επιβεβαίωση του νόμου του Hooke χρησιμοποιείται η διάταξη του σχήματος, η οποία περιλαμβάνει αβαρές ελατήριο σταθεράς  $k$  και σύστημα ανάρτησης βάρους. Η κατακόρυφη επιμήκυνση του ελατηρίου μετριέται με μετροταινία που τοποθετείται παράλληλα στον άξονά του. Για γνωστές μάζες  $m$ , είναι δυνατό να μετρηθεί η επιμήκυνση  $x$  που προκαλείται στο ελατήριο υπό την επίδραση του βάρους ενός σώματος και έτσι να επαληθευτεί η γραμμικότητα του νόμου του Hooke. Επίσης, όπως αποδεικνύεται, η ελεύθερη κίνηση μιας αναρτημένης μάζας σε ελατήριο είναι μια αρμονική ταλάντωση, η περίοδος της οποίας συνδέεται με την σταθερά του ελατηρίου  $k$  μέσω της σχέσης:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} \quad (2)$$

ως άμεση συνέπεια του νόμου του Hooke. Η μέτρηση, λοιπόν, της περιόδου  $T$  της κατακόρυφης ταλάντωσης για δεδομένη **συνολική μάζα  $M$**  μπορεί να προσδιορίσει την σταθερά του ελατηρίου. Η μάζα  $M$  αποτελείται από την αναρτώμενη στο ελατήριο μάζα (πλατφόρμα για την τοποθέτηση των πρόσθετων βαρών) αλλά και από την ίδια την μάζα του ελατηρίου  $m_{\text{ελατ}}$ , δεδομένου ότι και αυτή συμμετέχει στην αρμονική ταλάντωση. Όμως η  $m_{\text{ελατ}}$  συνεισφέρει στη ταλάντωση αναλογικά με την  $n$ -ιοστή σπείρα από το σημείο ανάρτησης. Μια σχετικά καλή προσέγγιση (βλ. Παράρτημα στο τέλος του Φυλλαδίου) υποδεικνύει ότι στη συνολική μάζα  $M$  πρέπει να προσθέσουμε και το  $1/3$  της μάζας του ελατηρίου ( $m_{\text{ελατ}}/3$ ). Εξ άλλου, η γραμμική εξάρτηση της μάζας από το τετράγωνο της περιόδου ( $M \approx T^2$ ) αποτελεί επιπλέον επαλήθευση του νόμου Hooke.

Οι δύο αυτές εξισώσεις δίνουν δύο, εντελώς διαφορετικούς, τρόπους προσδιορισμού της σταθεράς ελατηρίου και επιβεβαίωσης του νόμου Hooke. Στην συνέχεια, αναλύονται οι δύο αυτές μέθοδοι καθώς και η διάδοση σφαλμάτων από τις μετρούμενες ποσότητες.

## Μεθοδολογία

### Μέθοδος της Ισορροπίας (Στατική μέθοδος)

Σύμφωνα με την μέθοδο αυτή, θέτοντας απόλυτες τιμές στα μεγέθη της δύναμης και της απόστασης, για την σταθερά  $k$  του ελατηρίου ισχύει:

$$k = \frac{|F|}{|x|} = \frac{|m \cdot g|}{|x|} \Rightarrow k = \frac{m \cdot g}{x} \quad (3)$$

Κατά συνέπεια, ο τύπος για τον υπολογισμό της διάδοσης του σφάλματος είναι:

$$\delta k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial m} \delta m\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial g} \delta g\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial x} \delta x\right)^2}$$

Δεδομένου ότι:

$$\frac{\partial k}{\partial m} = \frac{g}{x}, \quad \frac{\partial k}{\partial g} = \frac{m}{x}, \quad \frac{\partial k}{\partial x} = -\frac{mg}{x^2}$$

η παραπάνω σχέση για την διάδοση του σφάλματος γράφεται:

$$\delta k = \sqrt{\left(\frac{g}{x} \delta m\right)^2 + \left(\frac{m}{x} \delta g\right)^2 + \left(\frac{mg}{x^2} \delta x\right)^2} = \frac{m \cdot g}{x} \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\delta x}{x}\right)^2}$$

οπότε τελικά το **σχετικό σφάλμα** της σταθεράς του ελατηρίου δίδεται από την σχέση:

$$\frac{\delta k}{k} = \sqrt{\left(\frac{\delta m}{m}\right)^2 + \left(\frac{\delta g}{g}\right)^2 + \left(\frac{\delta x}{x}\right)^2} \quad (4)$$

Παρατηρούμε από την σχέση αυτή, ότι τα επί μέρους σχετικά σφάλματα των μετρούμενων ποσοτήτων  $m$  και  $x$ , καθώς και της επιτάχυνσης της βαρύτητας  $g$ , υπεισέρχονται ισοδύναμα στον προσδιορισμό του σχετικού σφάλματος της σταθεράς του ελατηρίου  $k$ .

### Μέθοδος της Ταλάντωσης (Δυναμική Μέθοδος)

Η περίοδος ταλάντωσης  $T$  ενός αβαρούς ελατηρίου συνδέεται με την συνολικά αναρτημένη μάζα  $M$  και την σταθερά του ελατηρίου  $k$  μέσω της σχέσης:

$$T = 2\pi \cdot \sqrt{\frac{M}{k}} \Leftrightarrow k = \frac{4\pi^2 \cdot M}{T^2} \quad (5)$$

Συνεπώς η μέτρηση της περιόδου για δεδομένη αναρτώμενη μάζα επιτρέπει τον υπολογισμό της σταθεράς του ελατηρίου  $k$ . Το σφάλμα στην περίπτωση αυτή θα δίνεται από την σχέση:

$$\delta k = \sqrt{\left(\frac{\partial k}{\partial M} \delta M\right)^2 + \left(\frac{\partial k}{\partial T} \delta T\right)^2} = \sqrt{\left(\frac{4\pi^2}{T^2} \delta M\right)^2 + \left(\frac{4\pi^2 \cdot 2}{T^3} \delta T\right)^2} = \frac{4\pi^2 \cdot M}{T^2} \sqrt{\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 + \left(2\frac{\delta T}{T}\right)^2}$$

Οπότε τελικά, το **σχετικό σφάλμα** της σταθεράς του ελατηρίου υπολογίζεται από την σχέση:

$$\frac{\delta k}{k} = \sqrt{\left(\frac{\delta M}{M}\right)^2 + \left(2\frac{\delta T}{T}\right)^2} \quad (6)$$

Από την σχέση αυτή φαίνεται πως το σχετικό σφάλμα στην περίοδο έχει διπλάσιο συντελεστή βαρύτητας από τον αντίστοιχο της μάζας στον προσδιορισμό του  $k$ .



## Εκτίμηση Σφαλμάτων

Οι κυριότερες πηγές των σφαλμάτων που υπεισέρχονται στο πείραμα αυτό μπορούν να χωριστούν στις παρακάτω κατηγορίες:

- Σφάλματα Ανάγνωσης & Ακρίβειας των οργάνων
- Σφάλματα Βαθμονόμησης των οργάνων
- Σφάλματα Οργανολογίας (Μάζα ελατηρίου)
- Σφάλματα αστάθμητων παραγόντων (Αντίσταση αέρα, Μεταβολές θερμοκρασίας, Κατακόρυφο της ταλάντωσης)

Τόσο για τα σφάλματα ανάγνωσης (ακρίβειας οργάνων), όσο και για τα σφάλματα βαθμονόμησης των μετρούμενων φυσικών μεγεθών και των υπεισερχόμενων στο πείραμα σταθερών, βρίσκουμε ότι ισχύουν τα παρακάτω:

Φυσικό μέγεθος	Σφάλμα ανάγνωσης	Σφάλμα βαθμονόμησης	Περιοχή μέτρησης	Σχετικό σφάλμα
Θέση	$\delta x = 0.05 \text{ cm}$	$\delta x = 0.02 \text{ cm}$	(3, 30) cm	$0.002 < \delta x/x < 0.017$
Συνολική Μάζα	$\delta m = 0.005 \text{ g}$	$\delta m = 0.02 \text{ g}$	(10, 120) g	$0.0002 < \delta m/m < 0.002$
Χρόνος	$\delta T = 0.005 \text{ s}$	$\delta T = 0.005 \text{ s}$	(0.75, 1.33) s	$0.004 < \delta T/T < 0.007$
Επιτ. Βαρ. g		$\delta g = 0.020 \text{ m/s}^2$	9.807 m/s <sup>2</sup>	$\delta g/g \approx 0.002$

## Πειραματική διάταξη και διαδικασία

Στη θέση της άσκησης υπάρχει σύστημα ανάρτησης ελατηρίων διαφορετικής ελαστικότητας (διαφορετικού  $k$ ), μετροταινία, χρονόμετρο και ζυγός. Επίσης υπάρχει σύστημα μέτρησης αποστάσεων με κατάλληλο αισθητήρα, διεπαφή και λογισμικό. Οι μετρήσεις που θα γίνουν κατανέμονται σε επί μέρους πειράματα ως εξής:

### Πείραμα I. Μελέτη συστήματος ελατηρίων

Χρησιμοποιούμε τέσσερα (4) ίδια ελατήρια (και με ίδιο χρώμα) σε διαφορετικές συζεύξεις προκειμένου να μελετήσουμε την συμπεριφορά τους, η οποία εκφράζεται μέσα από ένα ολικό συντελεστή  $k$ . Πιο αναλυτικά, προσθέτοντας διαδοχικά γνωστά βάρη μετράμε την επιμήκυνση που αυτά επιφέρουν και χρησιμοποιώντας την εξίσωση (1) προσδιορίζουμε το  $k$  για τρεις διαφορετικές περιπτώσεις διάταξης των ίδιων ελατηρίων:

- ένα μόνο ελατήριο
- δύο ίδια ελατήρια συνδεδεμένα σε σειρά
- δύο ίδια ελατήρια συνδεδεμένα παράλληλα

Από την θεωρία περιμένουμε ότι στις περιπτώσεις (β) και (γ) η συμπεριφορά του συστήματος των δύο ελατηρίων θα είναι ανάλογη με την συμπεριφορά του συστήματος δύο πυκνωτών (από τον ηλεκτρισμό).

Για **δύο ίδια εν σειρά ελατήρια** με κοινό  $k$  το συνολικό είναι  $k/2$ , ενώ για εν παράλληλω  $2k$ .



Στον Πίνακα 1 καταγράφουμε τις μετρήσεις μας για κάθε μία από τις παραπάνω περιπτώσεις και επιβεβαιώνουμε **προσεγγιστικά** (δεδομένου ότι πραγματοποιούμε μια μόνο μέτρηση) τα αναμενόμενα για τις τιμές της σταθεράς  $k$ .

Πίνακας 1

Διάταξη	Πρόσθετη μάζα [kg]	Βάρος [N]	Επιμήκυνση [m]	k [N/m]
Ένα ελατήριο				
Δύο ελατήρια σε σειρά				
Δύο παράλληλα ελατήρια				

## Πείραμα II. Μελέτη Νόμου Hooke με μέθοδο ισορροπίας και ταλάντωσης

Ο προσδιορισμός της σταθεράς του ελατηρίου  $k$  πραγματοποιείται με την χρήση δύο ανεξάρτητων μεθόδων μέτρησης (ισορροπία και ταλάντωση) αλλά και με την χρήση δύο διαφορετικών διατάξεων οργάνων: (i) με την χρήση απλής μετροταινίας, χρονομέτρου και ζυγού (μέθοδος ισορροπίας και ταλάντωσης), (ii) με την χρήση αισθητήρα απόστασης, διεπαφής LabPro και λογισμικού LoggerPro (μέθοδος ισορροπίας και ταλάντωσης)

Έχουμε δηλαδή συνολικά **τέσσερις ανεξάρτητους τρόπους προσδιορισμού του  $k$** . Αυτό μάς παρέχει την δυνατότητα να υπολογίσουμε μία τελική τιμή για το  $k$  και το σφάλμα του, εφαρμόζοντας την αρχή συνυπολογισμού σφαλμάτων για μεγέθη που προσδιορίστηκαν με διαφορετικές και ανεξάρτητες μεθοδολογίες ή/και διατάξεις οργάνων. Οι αντίστοιχοι τύποι που προσδιορίζουν το αποτέλεσμα συμψηφισμού ανεξαρτήτων μετρήσεων ενός μεγέθους  $x$  και του σφάλματός του  $\delta x$  είναι (για ανεξάρτητες μετρήσεις πλήθους  $i$ ):

$$\bar{x}_i \pm \delta \bar{x}_i \Rightarrow x = \frac{\sum_{i=1}^N \bar{x}_i w_i}{\sum_{i=1}^N w_i} \quad \mu\epsilon \quad \delta x = \sqrt{\frac{1}{\sum_{i=1}^N w_i}} \quad \text{και} \quad w_i = \frac{1}{(\delta \bar{x})^2} \quad (7)$$

### A. Πείραμα προσδιορισμού του $k$ με μετροταινία, χρονόμετρο και ζυγό

#### (α) Μέθοδος Ισορροπίας

1. Τοποθετούμε την πλατφόρμα και σημειώνουμε την αρχική ένδειξη της μετροταινίας, χωρίς πρόσθετο βάρος
2. Τοποθετούμε πρόσθετη μάζα 20g και καταγράφουμε την επιμήκυνση του ελατηρίου
3. Συνεχίζουμε την διαδοχική προσθήκη μαζών έως ότου η συνολική μάζα να φτάσει τα 120g
4. Καταγράφουμε τις μετρήσεις μας στον Πίνακα 2

Πίνακας 2

Μάζα [g]	Επιμήκυνση [cm]	Βάρος F [N]	Μάζα [g]	Επιμήκυνση [cm]	Βάρος F [N]
+ μάζες			+ μάζες		
20			80		
40			100		
60			120		

5. Χαράσσουμε την γραφική παράσταση  $F=F(x)$  και από την κλίση της ευθείας προσδιορίζουμε το  $k$  και το σφάλμα του

**(β) Μέθοδος Ταλάντωσης**

1. Ζυγίζουμε το ελατήριο και την αντίστοιχη πλατφόρμα για την τοποθέτηση των βαρών  $M=(m_{\text{ελατ}}/3)+m_{\text{πλατφ}}$
2. Με την προσθήκη μιας μάζας  $m$  της τάξης των 50-60g, θέτουμε το σύστημα σε ταλάντωση
3. Με το χρονόμετρο μετρούμε συνολικό χρόνο είκοσι ταλαντώσεων (20T). Επαναλαμβάνουμε την διαδικασία τέσσερις φορές και συμπληρώνουμε στον Πίνακα 3

**Πίνακας 3**

α/α	20T [s]
1	
2	
3	

α/α	20T [s]
4	
5	

4. Γνωρίζοντας την περίοδο  $T$  και την συνολική μάζα  $M$ , υπολογίζουμε την σταθερά  $k$  και το σφάλμα της σφάλμα από τις εξισώσεις (5) και (6) αντιστοίχως. Συγκεκριμένα υπολογίζουμε τα εξής μεγέθη:

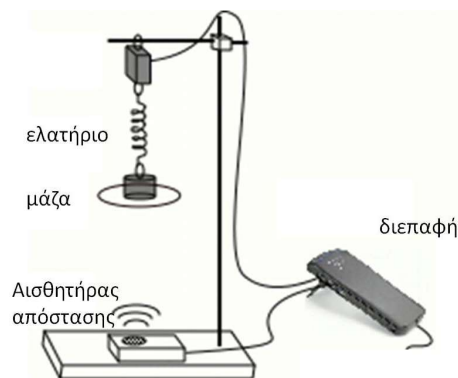
**Πίνακας 4**

$\langle T \rangle$ [s]	$\langle \delta T \rangle$ [s]	$M$ [g]	$\langle \delta M \rangle$ [g]	$k$	$\langle \delta k \rangle$

**B. Προσδιορισμός σταθεράς  $k$  με χρήση αισθητήρα απόστασης και ζυγού**

Η διαδικασία **μπορεί να γίνει ταυτόχρονα και για τις δύο μεθόδους** (μέθοδος ισορροπίας και ταλάντωσης) με την χρήση του αισθητήρα απόστασης.

1. Εκτελούμε το λογισμικό LoggerPro και ανοίγουμε το αρχείο B8 στην επιφάνεια εργασίας
2. Ανοίγει ένα παράθυρο της εφαρμογής του LoggerPro για τον αισθητήρα απόστασης
3. Με γνωστή την μάζα  $M_{\text{ταλ}}$  ρυθμίζουμε την διάταξη ώστε ο αισθητήρας απόστασης να «βλέπει» το κάτω μέρος της πλατφόρμας σε απόσταση περίπου 80 εκατ. από αυτήν
4. Προκαλούμε ταλάντωση στο σύστημα και ξεκινούμε την καταγραφή των δεδομένων. Στο γράφημα, εμφανίζεται η χαρακτηριστική ημιτοννοειδής ταλάντωση. Θεωρούμε ότι στο σύντομο διάστημα (λίγα sec) της μέτρησης η κίνηση του συστήματος είναι απλού αρμονικού ταλαντωτή
5. Όταν ολοκληρωθούν οι μετρήσεις, πραγματοποιούμε δύο προσαρμογές καμπύλης: **(α)** επιλέγοντας την περιοχή μετρήσεων, αναζητούμε στο εικονίδιο **STAT** την μέση τιμή της ταλάντωσης που αντιπροσωπεύει την επιμήκυνση για την αντίστοιχη μάζα και **(β)** επιλέγοντας προσαρμογή στο εικονίδιο **f(x)** της αρμονικής ταλάντωσης, προσδιορίζουμε την περίοδο  $T$
6. Επαναλαμβάνουμε την ίδια διαδικασία για πρόσθετες μάζες (20g έως 120 g) και συμπληρώνουμε τις τιμές που μετρήσαμε στον Πίνακα 5
7. Με βάση τις τιμές του πίνακα, προσδιορίζουμε το  $k$  και το σφάλμα του **(α)** για την μέθοδο ισορροπίας (από τα  $x$  και  $\delta x$ ) και **(β)** για την μέθοδο της ταλάντωσης (από τα  $T$  και  $\delta T$ ). Δηλαδή με την μέθοδο ισορροπίας χαράσσουμε την γραφική παράσταση  $F=F(x)$  και από την κλίση της ευθείας προσδιορίζουμε το  $k$  και το σφάλμα του



**Πίνακας 5**

α/α	M <sub>ταλ</sub> [g]	<x> [m]	<δx> [m]	<T> [s]	<δT> [s]
1					
2					
3					
4					
5					
6					

- Χρησιμοποιώντας την μέθοδο της ταλάντωσης, έχουμε προσδιορίσει πολλαπλές τιμές του T. Έτσι χρησιμοποιώντας την εξίσωση (5) προσδιορίζουμε πάλι το k και το σφάλμα του
- Συγκεντρώνουμε τα αποτελέσματα υπολογισμού του k με τις δύο διαφορετικές μεθοδολογίες αλλά και τις δύο διαφορετικές διατάξεις οργάνων στον Πίνακα 6

**Πίνακας 6**

Τρόπος μέτρησης	<k> [N/m]	<δk> [N/m]
Μετροταινία / ισορροπία		
Μετροταινία / ταλάντωση		
Αισθητήρας απόστασης / ισορροπία		
Αισθητήρας απόστασης / ταλάντωση		

- Εφαρμόζοντας την μέθοδο του συμψηφισμού μετρήσεων (τέσσερις ανεξάρτητες μεθοδολογίες / διατάξεις οργάνων), προσδιορίζουμε την τελική τιμή του k και το σφάλμα του, χρησιμοποιώντας τις σχέσεις της εξίσωσης (7):

$$\langle k_{\text{συμψ}} \rangle = \dots\dots\dots \text{ N/m και } \langle \delta k_{\text{συμψ}} \rangle = \dots\dots\dots \text{ N/m}$$

- Σχολιάζουμε το τελικό αποτέλεσμα σε σχέση με τις επί μέρους τιμές κάθε μεθόδου.

## Ερωτήσεις

- Η ταλάντωση είναι αυστηρά αρμονική; Δικαιολογήστε την απάντησή σας
- Αποδείξτε ότι για δύο εν σειρά ελατήρια με  $k_1$  και  $k_2$  αντίστοιχες τιμές των k, το συνολικό τους k είναι  $(k_1 \cdot k_2) / (k_1 + k_2)$ , ενώ για εν παραλλήλω  $k_1 + k_2$
- Αν επιδρά δύναμη τριβής ανάλογη της γραμμικής ταχύτητας, υπολογίστε το νέο  $\omega$

## Βιβλιογραφία

- Alonso - Finn            τ.1 §§ 5.5-5.11, 10.1 - 10.4, 12.3 - 12.6
- H.D. Young            τ.1 §§ 3-1 – 3-3, 13-1 – 13-7
- Serway                τ.1 §§ 6.1, 6.2, 13.1, 13.4, 13.6 - 13.7
- Berkeley              τ.1 §. 7.1
- Halliday - Resnick    τ.1 §§ 15.1 - 15.6

# Συμπλήρωμα

## Ροπή Αδράνειας

Η ροπή αδράνειας σώματος ως προς άξονα περιστροφής είναι:  $I = \sum_i \Delta m_i r_i^2$ , όπου  $\Delta m_i$  είναι μία στοιχειώδης μάζα που απέχει  $r_i$  από τον άξονα περιστροφής.

Με άλλες λέξεις, η ροπή αδράνειας είναι ένα μέγεθος που χαρακτηρίζει την κατανομή της μάζας γύρω από τον άξονα περιστροφής και είναι για την περιστροφική κίνηση ότι η μάζα για την μεταφορική κίνηση.

Όταν έχουμε ένα στερεό σώμα το οποίο αποτελείται από πολύ μεγάλο αριθμό σωματιδίων (στοιχειωδών μαζών) το σώμα μπορεί να θεωρηθεί συνεχές, οι μάζες  $\Delta m_i$  στοιχειώδεις μάζες  $dm$  και το άθροισμα του τύπου της ροπής αδράνειας αντικαθίσταται με ολοκλήρωμα, δηλαδή:

$$I = \sum_i \Delta m_i r_i^2 \Rightarrow I = \int_M r^2 dm,$$

όπου το  $M$  στο όριο της ολοκλήρωσης αποτελεί σύμβολο που μας δείχνει ότι πρέπει να ολοκληρώσουμε στα όρια όλης της μάζας  $M$ . Ανάλογα με το πρόβλημα, το  $M$  θα αντικαθίσταται με τα συγκεκριμένα όρια κάθε φορά.

Αν  $\rho$  είναι η πυκνότητα του σώματος τότε  $dm = \rho dV$  οπότε:

$$I = \int_V \rho r^2 dV, \quad (1)$$

όπου το  $V$  δείχνει τώρα ότι πρέπει να ολοκληρώσουμε στα όρια του όγκου  $V$ .

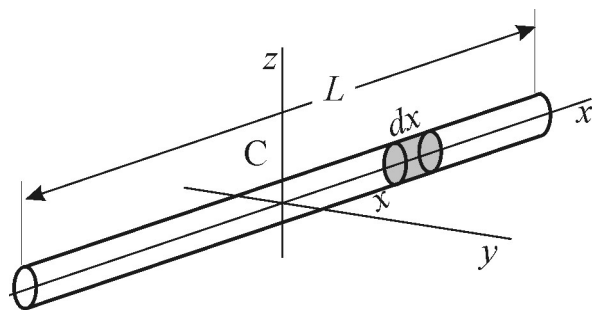
Για ένα ομογενές σώμα η πυκνότητα είναι σταθερή και μπορούμε να γράψουμε:

$$I = \rho \int_V r^2 dV \quad (2)$$

## Παραδείγματα Υπολογισμού της Ροπής Αδράνειας

### 1. Λεπτή ομογενής ράβδος

Έστω ότι θέλουμε να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειας λεπτής ράβδου μήκους  $L$  και μάζας  $m$ , ως προς άξονα κάθετο σ' αυτήν ο οποίος διέρχεται απ' το κέντρο μάζας της  $C$  (βλ. Σχ. 1). Ορίζουμε τους άξονες όπως στο Σχ. 1 και επιλέγουμε πάνω στον άξονα  $x$ , σε απόσταση  $x$  από το κέντρο μάζας, μικρό κομμάτι της ράβδου μήκους  $dx$ . Τότε, αν η διατομή της ράβδου είναι  $S$ , θα ισχύει:  $dV = S \cdot dx$



Σχήμα 1.

$$\text{Μέσω της (2) λαμβάνουμε: } I_z = \rho S \int_{-L/2}^{L/2} x^2 dx = \frac{1}{3} \rho S \frac{x^3}{3} \Big|_{-L/2}^{L/2} = \frac{1}{12} \rho S L^3 = \frac{1}{12} m L^2 \quad (3)$$

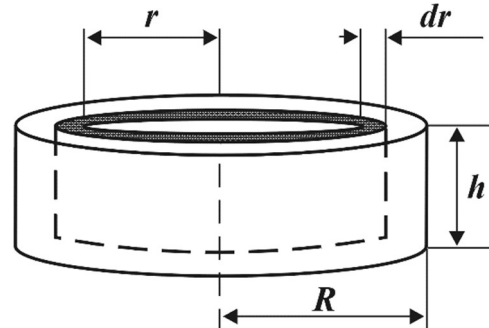
όπου ελήφθη υπόψη, ότι:  $\rho \cdot SL = m$ .

## 2. Ομογενής κύλινδρος (ή δίσκος) ως προς άξονα κάθετο στο κέντρο των βάσεων του

Από το σχήμα 2 βλέπουμε ότι η συμμετρία του προβλήματος μας υποδεικνύει να χρησιμοποιήσουμε σαν στοιχείο όγκου  $dV$  δακτύλιο ακτίνας  $r$  και πλάτους  $dr$ . Έτσι αν  $h$  είναι το πάχος του δίσκου ο όγκος του δακτυλίου είναι  $dV=2\pi hrdr$ .

Όλα τα σημεία του δακτυλίου βρίσκονται σε απόσταση  $r$  από τον άξονα  $z$ . Επομένως χρησιμοποιώντας την σχέση (2) έχουμε:

$$I_K = 2\pi h \rho \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} \pi \rho h R^4$$



Σχήμα 2.

Αλλά  $V = \pi h R^2$  ο όγκος του κυλίνδρου και  $m_0 = \rho V = \rho(\pi h R^2)$  η ολική του μάζα.

Επομένως:

$$I_K = \frac{1}{2} m_0 R^2 \quad (4)$$

## 3. Σφαίρα ως προς άξονα που διέρχεται από το κέντρο της

Έστω ότι η σφαίρα έχει ακτίνα  $R$  και μάζα  $m$  και θέλουμε να υπολογίσουμε την ροπή αδράνειάς της ως προς τον άξονα  $z$  (βλέπε σχήμα 3).

Σε ύψος  $z$  από το κέντρο της κόβουμε λεπτή «φέτα» πάχους  $dz$ . Επειδή το πάχος της είναι απειροστά μικρό, μπορούμε να την θεωρήσουμε κύλινδρο ακτίνας  $x$  και ύψους  $dz$  την ροπή αδράνειας του οποίου υπολογίσαμε λίγο πιο πάνω και για την περίπτωση μας θα είναι:

$$dI_z = \frac{1}{2} x^2 dm$$

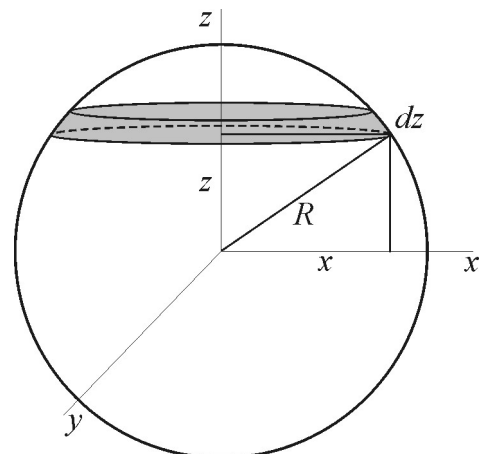
Επομένως η ροπή αδράνειας της σφαίρας θα είναι το άθροισμα (δηλαδή το ολοκλήρωμα) όλων των ροπών αυτών των κυλίνδρων με απειροστά μικρό όγκο.

$$\text{Έτσι θα έχουμε: } I_z = \int_{I_z} dI_z = \frac{1}{2} \int_m x^2 dm = \frac{1}{2} \rho \int_V x^2 dV$$

$$\text{Ξέρουμε όμως ότι ισχύει } dV = \pi x^2 dz. \text{ Δηλαδή θα έχουμε: } I_z = \frac{1}{2} \pi \rho \int_{-R}^R x^4 dz$$

Η τομή της σφαίρας με το επίπεδο  $xz$  είναι κύκλος ακτίνας  $R$ , για τον οποίο ισχύει:  $x^2 + z^2 = R^2$

Επομένως βρίσκουμε:



Σχήμα 3

$$\begin{aligned}
 I_z &= \frac{1}{2} \pi \rho \int_{-R}^R (R^2 - z^2)^2 dz = \frac{1}{2} \pi \rho \left( R^4 z - \frac{2}{3} R^2 z^3 + \frac{1}{5} z^5 \right) \Big|_{-R}^R = \\
 &= \frac{1}{2} \pi \rho \left( R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 + R^5 - \frac{2}{3} R^5 + \frac{1}{5} R^5 \right) = \frac{8}{15} \pi \rho R^5 = \frac{2}{m} m R^2
 \end{aligned} \tag{5}$$

Εδώ λάβαμε υπόψη μας, ότι  $V = (4/3)\pi R^3$ .

## Ακτίνα αδρανείας

Ορισμός: Αν για σώμα μάζας  $M$  η ροπή αδράνειας του ως προς άξονα δίνεται από την σχέση:

$$I = M k^2,$$

τότε το  $k$  ονομάζεται ακτίνα αδρανείας ως προς τον ίδιο άξονα. Προφανώς πάντα ισχύει:

$$k = \sqrt{\frac{I}{M}}$$

Η ακτίνα αδρανείας παριστάνει την απόσταση από τον άξονα περιστροφής, στην οποία θα μπορούσε να συγκεντρωθεί όλη η μάζα του σώματος, χωρίς να αλλάξει η ροπή αδρανείας του. Από τις σχέσεις (3), (4) και (5) βρίσκουμε εύκολα, ότι η ακτίνα αδρανείας είναι:

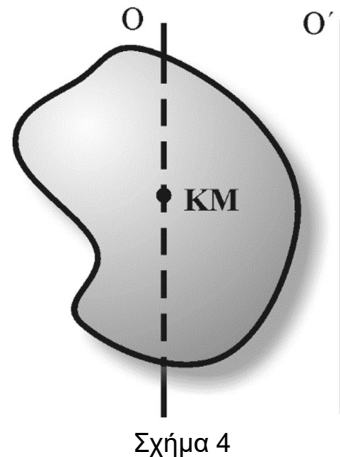
**Α) Για ράβδο:**  $k = \frac{L}{2\sqrt{3}}$ . **Β) Για κύλινδρο:**  $k = \frac{R}{\sqrt{2}}$ . **Γ) Για σφαίρα:**  $k = \sqrt{\frac{2}{5}}R$ .

## Το θεώρημα Steiner

Αν για στερεό σώμα ξέρουμε την ροπή αδράνειάς  $IKM$  του ως προς άξονα  $O$ , ο οποίος διέρχεται από το Κέντρο Μάζας του σώματος (βλέπε σχήμα 4), τότε η ροπή αδράνειας του σώματος ως προς κάθε άξονα,  $O'$  που είναι παράλληλος προς τον  $O$  και βρίσκεται σε απόσταση  $a$  από αυτόν θα δίνεται από την σχέση:

$$IO' = IKM + ma^2,$$

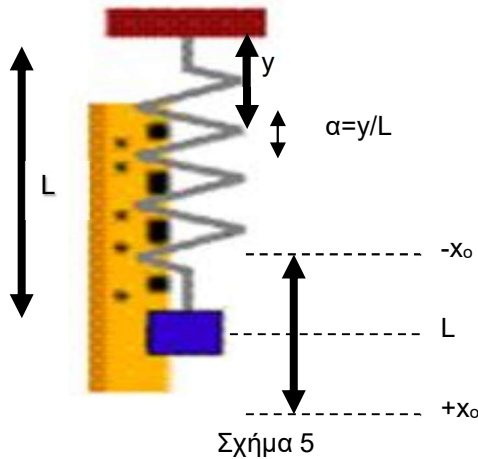
όπου  $m$  η μάζα του σώματος.



## Νόμος του Hooke

Συμμετοχή της μάζας του ελατηρίου στην μέθοδο ταλάντωσης (δυναμική μέθοδος)

Αν η μάζα του ελατηρίου  $m_{ελ}$  (~45-50g στο πείραμά σας) είναι συγκριτικά υπολογίσιμη προς την πρόσθετη μάζα  $m$  (~70-180g), τότε η συμμετοχή της στη δυναμική μέθοδο είναι σημαντική. Έστω ότι το ελατήριο ταλαντώνεται με συχνότητα  $\omega$  και πλάτος  $x_0$ . Για κάθε σπείρα του ελατηρίου, μήκους  $L$ , που βρίσκεται σε απόσταση  $y$  από το σημείο ανάρτησης το πλάτος ταλάντωσης  $\alpha$  θα είναι:



$$\alpha = \frac{y}{L} \quad (1)$$

Αν το ελατήριο είναι ομογενές με  $N$  το πλήθος σπείρες η εξίσωση (1) γίνεται:

$$\alpha_i = \frac{i}{N} x_0 \quad (2)$$

όπου  $i$  ο αριθμός της σπείρας του ελατηρίου μετρώντας από το σημείο ανάρτησης. Άρα, η ενέργεια του ελατηρίου όταν βρίσκεται σε μέγιστη απομάκρυνση από την θέση ισορροπίας θα είναι:

$$E_{mp}^m = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \frac{m_{ελ}}{N} \omega^2 \alpha_i^2 = \frac{1}{2} \frac{m_{ελ}}{N} \frac{\omega^2 x_0^2}{N^2} \sum_{i=1}^N i^2 = \frac{1}{2} \frac{m_{ελ}}{N} \frac{\omega^2 x_0^2}{N^2} \frac{N(N+1)(2N+1)}{6} \quad (3)$$

Οπότε αν  $N \gg 1$  (στην άσκηση είναι περίπου 120 σπείρες) θα είναι το  $N+1 \sim N$  και το  $2N+1 \sim 2N$  οπότε και η εξίσωση (3) γίνεται:

$$E_{mp}^m \cong \frac{1}{2} m_{ελ} \frac{1}{3} \omega^2 x_0^2 \quad (4)$$

Επομένως η ολική κινητική ενέργεια του συστήματος θα είναι αφού  $E_p^m = E_k$ :

$$E_k = \frac{1}{2} m \omega^2 x_0^2 + \frac{1}{2} \frac{m_{ελ}}{3} \omega^2 x_0^2 = \frac{1}{2} \left( m + \frac{m_{ελ}}{3} \right) \omega^2 x_0^2 \quad (5)$$

$$\alpha\lambda\lambda\acute{\alpha} \quad E_k = \frac{1}{2} k x_0^2 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow k = \left( m + \frac{m_{ελ}}{3} \right) \omega^2 \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{k}{\left( m + \frac{m_{ελ}}{3} \right)}} \quad (6)$$

Αυτός επομένως είναι ο πιο σωστός τύπος για να θέσουμε ως ταλαντούμενη μάζα στην εξίσωση της δυναμικής μεθόδου.



## Δείγμα γραπτής εργασίας

A.M.	Επώνυμο	Όνομα
2011 00 111	Παπαδάκης	Γεώργιος
Άσκηση	Ημερομηνία άσκησης	Ημερομηνία παράδοσης
B1	4/11/2011	11/11/2011
Τμήμα	Υπεύθυνος	
11:30-14:00	N. Μαμαλούγκος	

### Θεωρία

Περιέχει μια σύντομη και περιεκτική θεωρητική αναφορά στο πείραμα. (Προσοχή, όχι αντιγραφή του φυλλαδίου). Μπορείτε να συνθέσετε την δική σας περίληψη, χρησιμοποιώντας άλλα βιβλία και πηγές, όπως αυτά που αναφέρονται στη Βιβλιογραφία, στο τέλος κάθε Άσκησης, ή και διαδικτυακές σελίδες, αναφέροντας πάντοτε την προέλευση. Η θεωρητική ενότητα θα μπορούσε να εκτείνεται ενδεικτικά έως δύο σελίδες.

### Πειραματική μέθοδος – Συσκευή

Εδώ αναπτύσσεται περιγραφή της διάταξης – συσκευής – μεθοδολογίας που χρησιμοποιήθηκε κατά την εργαστηριακή άσκηση. Συνήθως συνοδεύεται από κάποιο σχήμα, ή σχέδιο. Ακολούθως, με περιεκτικό κείμενο περιγράφεται η πειραματική μέθοδος σε μία (ενδεικτικά) σελίδα.

### Διαδικασία – Μετρήσεις

Σύνοψη της διαδικασίας υπάρχει στο φυλλάδιο, σε κάθε Άσκηση, για την συνδρομή στην διαδικασία λήψης των μετρήσεων. Έτσι σε κάθε γραπτή εργασία πρέπει να περιέχονται τα ακόλουθα χαρακτηριστικά: **[α]** Πίνακες μετρήσεων (πρωτίστως καταγραφή ακρίβειας και αβεβαιότητας) **[β]** Υπολογισμοί, σφάλματα, στρογγυλοποιήσεις, μονάδες **[γ]** Γραφικές παραστάσεις (άξονες, κλίμακα, σημεία, προσαρμογή ευθειών και καμπυλών, κλίσεις) **[δ]** Αποτελέσματα - Σχόλια

### Τελικά αποτελέσματα – Συμπεράσματα – Συγκριτικά σχόλια

Είναι το πλέον βασικό σημείο της γραπτής εργασίας. Τα αποτελέσματα είναι πλέον σε μορφή τελική, με μονάδες και σφάλμα. Αναπτύσσεται σχολιασμός σε σχέση με το τι γνωρίζουμε ήδη από την βιβλιογραφία. Οι αποκλίσεις από τις αναμενόμενες τιμές (π.χ. το  $g \sim 9.81 \text{ m/s}^2$ ) θα πρέπει να εξηγηθούν ποιοτικά αρχικά και αν είναι δυνατό και ποσοτικά. Η τετριμμένη φράση ότι «τα αποτελέσματα απέχουν από τα αναμενόμενα και τούτο οφείλεται στα σφάλματα των οργάνων» κλπ. δεν είναι προφανώς αποδεκτή επιστημονική, αν το σφάλμα σας δεν το καλύπτει. Πρέπει παράγοντες που επηρεάζουν μία μέτρηση να εξηγούν και με το σωστό τρόπο τους ισχυρισμούς σας. Για παράδειγμα αν το  $g$  το βρείτε μεγαλύτερο και λέτε ότι τούτο οφείλεται στην ύπαρξη της αντίστασης του αέρα στη διαδικασία της ταλάντωσης, τότε αυτό είναι μεν σωστό ως προς το σκέλος ότι πράγματι επηρεάζει την μέτρηση της  $T$ , αλλά είναι εσφαλμένη εξήγηση στο ότι το βρήκατε μεγαλύτερο, αφού η αντίσταση του αέρα οδηγεί σε αύξηση της περιόδου  $T$  και επομένως σε μικρότερη τιμή του  $g$ ! Προσοχή λοιπόν στα συμπεράσματα.

### Απαντήσεις στις Ερωτήσεις του φυλλαδίου

Προσπαθείτε να απαντήσετε σε όλα τα ερωτήματα. Η βιβλιογραφία που παρατίθεται μπορεί να βοηθήσει. Σε κάθε περίπτωση ο διδάσκων μπορεί μετά να σας εξηγήσει την σωστή απάντηση.

## Φυσικές έννοιες, μεγέθη, φαινόμενα και διατάξεις των ασκήσεων

### B1

Μέση Τιμή, Τυπική Απόκλιση, Τυπική Απόκλιση Μέσης Τιμής, Διακύμανση, Διασπορά. Κατανομές: περιγραφή, τυπολόγιο και φυσική σημασία (κανονική διωνυμική Gauss Maxwell Poisson), Περιγραφή λειτουργίας καταμετρητή Geiger- Müller

### B2

Μάζα, Χρόνος, Θέση, Μετατόπιση, Ταχύτητα, Επιτάχυνση, Επιτάχυνση της βαρύτητας, Βάρος, Δύναμη, Ροπή δύναμης, Τριβή, Ευθύγραμμη ομαλώς επιταχυνόμενη κίνηση, Ροπή αδράνειας, Περιστροφή, Στροφορμή, Τροχαλία, Ηλεκτρομαγνήτης, Φωτοπύλη, Μηχανή Atwood

### B3

Ρευστό, Μάζα, Όγκος, Πυκνότητα ρευστού, Άνωση, Δύναμη εσωτερικής τριβής, Συντελεστής εσωτερικής τριβής ή ιξώδες, Στρωτή ροή, Τυρβώδης ροή

### B4

Στερεό σώμα, Μάζα, Χρόνος, Θέση, Μετατόπιση, Ταχύτητα, Επιτάχυνση, Επιτάχυνση της βαρύτητας, Βάρος, Δύναμη, Όγκος, Κινητική ενέργεια, Ροπή δύναμης, Γωνιακή ταχύτητα, Ροπή αδράνειας, Περιστροφή, Στροφορμή, Διατήρηση της στροφορμής

### B5

Μάζα, Χρόνος, Θέση, Μετατόπιση, Ταχύτητα, Επιτάχυνση, Επιτάχυνση της βαρύτητας, Βάρος, Δύναμη, Νόμος Παγκόσμιας έλξης, Παγκόσμια Σταθερά της βαρύτητας, Ζυγός στρέψης, Ταλάντωση, Περίοδος, Θέση ισορροπίας, Πλάτος ταλάντωσης, Γωνιακή ταχύτητα, Ροπή αδράνειας, Περιστροφή, Στροφορμή, Συντελεστής στρέψης, Διάταξη Cavendish

### B6

Μάζα, Χρόνος, Θέση, Μετατόπιση, Ταχύτητα, Επιτάχυνση, Επιτάχυνση της βαρύτητας, Βάρος, Δύναμη, Τριβή, Δεύτερος νόμος Newton, Κεκλιμένο επίπεδο, Ευθύγραμμη ομαλώς επιταχυνόμενη κίνηση, Ορμή, Κρούση, Ωθηση, Διατήρηση της ορμής, Διατήρηση της ενέργειας, Τρίτος νόμος Newton, Αισθητήρας δύναμης, Αισθητήρας επιτάχυνσης, Αισθητήρας θέσης

### B7

Μάζα, Χρόνος, Θέση, Μετατόπιση, Ταχύτητα, Επιτάχυνση, Επιτάχυνση της βαρύτητας, Βάρος, Περιοδικό φαινόμενο, Περίοδος, Συχνότητα, Ταλάντωση, Θέση ισορροπίας, Πλάτος ταλάντωσης, Απλή αρμονική ταλάντωση, Κέντρο μάζας, Απλό εκκρεμές, Γωνιακή ταχύτητα, Ροπή αδράνειας, Περιστροφή, Στροφορμή, Φυσικό εκκρεμές, Ισοδύναμο μήκος, Στροφικό εκκρεμές, Αντιστρεπτό εκκρεμές, θεώρημα Steiner

### B8

Μάζα, Χρόνος, Θέση, Μετατόπιση, Ταχύτητα, Επιτάχυνση, Επιτάχυνση της βαρύτητας, Βάρος, Περιοδικό φαινόμενο, Περίοδος, Συχνότητα, Ταλάντωση, Κέντρο μάζας, Θέση ισορροπίας, Πλάτος ταλάντωσης, Απλή αρμονική ταλάντωση, Ελατήριο, Δύναμη επαναφοράς, Επιμήκυνση, Συσπείρωση

## Εργ.Φ2 (2023-2024)

Υπενθυμίζεται ότι σε κάθε άσκηση είναι απαραίτητη η επαρκής προετοιμασία στην θεωρία σχετικών εννοιών, μεγεθών και φαινομένων, την πειραματική διάταξη και διαδικασία.

<b>Τμήμα Εργ.Φ2</b>		<b>Σειρά Διεξαγωγής Ασκήσεων</b>								
Ημέρα: .....		Τμήμα	1 <sup>ος</sup> κύκλος				2 <sup>ος</sup> κύκλος			
		1	B1	B2	B3	B4	B5	B6	B7	B8
		2	B2	B3	B4	B1	B6	B7	B8	B5
Ωρες: .....		3	B3	B4	B1	B2	B7	B8	B5	B6
		4	B4	B1	B2	B3	B8	B5	B6	B7
		5	B5	B6	B7	B8	B1	B2	B3	B4
		6	B6	B7	B8	B5	B2	B3	B4	B1
		7	B7	B8	B5	B6	B3	B4	B1	B2
		8	B8	B5	B6	B7	B4	B1	B2	B3

**Διδάσκων και στοιχεία επικοινωνίας (π.χ. ονοματεπώνυμο, αρ.τηλ., e-mail)**

<b>B1-B2-B3-B4</b>	
<b>B4-B5-B6-B7-B8</b>	

**Στοιχεία κατόχου του φυλλαδίου**

<b>Όνοματεπώνυμο φοιτ.:</b>	
<b>Αριθμός Μητρώου:</b>	2023 00 .....
<b>e-mail:</b>	