Κεφάλαιο 9

Η Χαμιλτονιανή Θεώρηση

"Με αντρεία, με σκληρότητα στερέωσε απάνω
στο σαλευόμενο χάος το καταστρόγγυλο,
το καταφώτιστο αλώνι του νου,
ν' αλωνίσεις, να λιχνίσεις, σα νοικοκύρης, τα σύμπαντα."
Νίκος Καζαντζάκης

9.1 Εισαγωγή

Κατά τη νευτώνεια θεώρηση της μηχανικής, μπορούμε να προσδιορίσουμε τη θέση $\vec{x}_i$ κάθε σωματιδίου σε ένα αδρανειακό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, αν γνωρίζουμε τη δύναμη $\vec{F}_i$ που ασκείται στο σωματίδιο, ολοκληρώνοντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

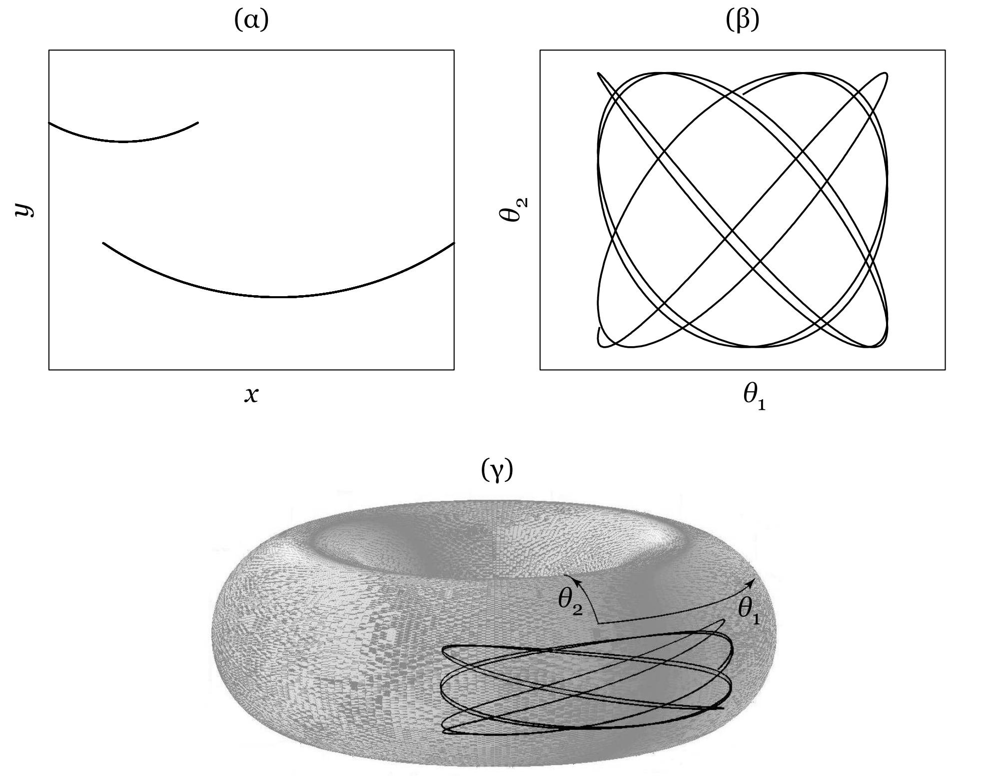
$$\frac{d^2\vec{x}_i}{dt^2} = \vec{F}_i \ . \tag{9.1}$$

Δεδομένων των αρχικών θέσεων και των ταχυτήτων των σωματιδίων, κάθε σωματίδιο διαγράφει μία τροχιά στον τρισδιάστατο ευκλείδειο χώρο. Όταν πρόκειται για N σωματίδια, έχουμε N τροχιές στον τρισδιάστατο χώρο. Στη νευτώνεια θεώρηση η κίνηση εξελίσσεται στον τρισδιάστατο φυσικό χώρο και κάθε σωματίδιο διαγράφει μία ξεχωριστή τροχιά.

Η κίνηση από το χώρο των αισθήσεων στο θεσεογραφικό χώρο

Αντίθετα με τη σύμφωνη με τις αισθήσεις μας εξέλιξη του συστήματος στη νευτώνεια θεώρηση, στη λαγκρανζιανή θεώρηση η κίνηση του συστήματος διαδραματίζεται στον αφηρημένο πολυδιάστατο και όχι κατ' ανάγκην ευκλείδειο χώρο των γενικευμένων θέσεων και η τροχιά όλου του συστήματος σε αυτό το χώρο είναι μία και μοναδική. Αυτό σημαίνει ότι, αν η θέση των σωματιδίων προσδιορίζεται από τις n γενικευμένες συντεταγμένες q_i, η τροχιά του συστήματος είναι μία μοναδική καμπύλη στον n-διάστατο χώρο των γενικευμένων θέσεων. Ο χώρος αυτός, όπως έχουμε αναφέρει στο Κεφάλαιο 4, είναι ο καλούμενος θεσεογραφικός χώρος. Η τροχιά του συστήματος N σωματιδίων στο θεσεογραφικό χώρο είναι μία καμπύλη σε ένα χώρο $3N$ διαστάσεων, αφού απαιτούνται $3N$ συντεταγμένες για τον προσδιορισμό της θέσης όλων των σωματιδίων.

Για να γίνει πιο απτή η διαφορά μεταξύ του χώρου στον οποίο πραγματοποιείται η κίνηση στη νευτώνεια θεώρηση και του αντίστοιχου χώρου στη λαγκρανζιανή θεώρηση, απεικονίζουμε στους αντίστοιχους χώρους την κίνηση δύο ασύζευκτων εκκρεμών, τα οποία εκτελούν μικρές ταλαντώσεις στο ίδιο κατακόρυφο επίπεδο μέσα στο πεδίο βαρύτητας της Γης. Τα μήκη των εκκρεμών έχουν λόγο $1 : \sqrt{2}$. Η τροχιά του συστήματος των εκκρεμών στη νευτώνεια θεώρηση αποτελείται από δύο κυκλικά τόξα στο κατακόρυφο επίπεδο $x-y$, όπως φαίνεται στο Σχήμα 9.1(α). Στη λαγκρανζιανή θεώρηση η τροχιά του συστήματος είναι μία περίπλοκη καμπύλη. Αν προσδιορίσουμε τη θέση των δύο εκκρεμών με τις δύο γωνίες απόκλισης αυτών από την κατακόρυφο, η κίνηση τους για ορισμένες αρχικές συνθήκες και για κάποιο χρονικό διάστημα δίνεται από την καμπύλη του Σχήματος 9.1(β). Αν θέλουμε να είμαστε ακριβολόγοι, ο χώρος των θέσεων εξαιτίας της περιοδικότητας των συντεταγμένων αυτών θα είναι τοπολογικά ένας τόρος (που έχει το σχήμα μιας σαμπρέλας), ένας κλειστός δηλαδή χώρος (βλ. Σχήμα 9.1(γ)). Επειδή στη λαγκρανζιανή θεώρηση οι ανεξάρτητες μεταβλητές είναι οι θέσεις q_i και οι γενικευμένες τα-



Σχήμα 9.1: (α) Οι τροχιές δύο ασύζευκτων επίπεδων εκκρεμών στη νευτώνεια θεώρηση. (β) Η τροχιά του συστήματος των δύο εκκρεμών στο χώρο των γενικευμένων θέσεων. Η θέση του συστήματος προσδιορίζεται από τις γωνίες θ_1 και θ_2 που σχηματίζουν τα εκκρεμή με την κατακόρυφο. Η τροχιά στο θεσεογραφικό χώρο για ένα πεπερασμένο χρονικό διάστημα είναι η καμπύλη που φαίνεται στο Σχήμα. Ο θεσεογραφικός χώρος είναι το τετράγωνο $-\pi \leq \theta_1 < \pi$, $-\pi \leq \theta_2 < \pi$ του οποίου οι αντίθετες πλευρές ταυτίζονται λόγω της κυκλικότητας του ορισμού των γωνιών. Τέτοια τετράγωνα είναι τοπολογικά ισοδύναμα με έναν απλό τόρο (γ). Ο θεσεογραφικός χώρος μπορεί, λοιπόν, να είναι καμπύλος. Όποια μορφή, όμως, και αν έχει ο χώρος, η κίνηση στη λαγκρανζιανή θεώρηση δίνεται πάντα από τις ίδιες εξισώσεις, τις εξισώσεις Euler - Lagrange.

χύτητες $\dot{q}_i$, οι τροχιές στο χώρο των θέσεων μπορούν να τέμνονται, διότι σε κάθε σημείο του χώρου των θέσεων αντιστοιχούν πολλές γενικευμένες ταχύτητες. Για παράδειγμα, το κάθε εκκρεμές διέρχεται από το κατώτερο σημείο κινούμενο πότε με θετική και πότε με αρνητική ταχύτητα.

Στο θεσεογραφικό χώρο οι τροχιές μπορούν να τέμνονται

Για να αποφύγουμε την τομή των τροχιών (που είναι εμφανής στο Σχήμα 9.1(β)), επειδή οι εξισώσεις Euler - Lagrange είναι δεύτερης τάξης, πρέπει για ένα σύστημα n βαθμών ελευθερίας να θεωρήσουμε ένα χώρο $2n$ διαστάσεων. Ένας τέτοιος χώρος στη λαγκρανζιανή θεώρηση είναι ο χώρος των θέσεων και των ταχυτήτων[1] τον οποίο γράφουμε $(q, \dot{q})$, έχοντας παραλείψει για λόγους συντομίας τους δείκτες. Σε αυτόν το χώρο των θέσεων και των ταχυτήτων οι τροχιές του συστήματος προσδιορίζονται από τις εξισώσεις Euler - Lagrange που μπορούν να γραφούν ισοδυνάμως ως ένα σύστημα $2n$ διαφορικών εξισώσεων πρώτης τάξης

$$\frac{dq_i}{dt} = \dot{q}_i \ , \tag{9.2}$$

$$\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q_i} \ . \tag{9.3}$$

όπου η κανονική ορμή p_i ορίζεται ως συνάρτηση όλων των $q, \dot{q}$ μέσω της σχέσης

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ . \tag{9.4}$$

Στις εξισώσεις αυτές οι γενικευμένες θέσεις q και οι γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}$ εμφανίζονται ως ανεξάρτητες μεταβλητές, καταδεικνύοντας ότι για τον προσδιορισμό της τροχιάς απαιτείται όχι μόνο η γνώση των q_i αλλά και των $\dot{q}_i$.

Η κατασκευή, όμως, της μοναδικής αυτής τροχιάς στο χώρο των θέσεων και των ταχυτήτων $(q, \dot{q})$ είναι ιδιαίτερα περίπλοκη. Ας υποθέσουμε ότι το σύστημα βρίσκεται στην αρχική κατάσταση $(q(0), \dot{q}(0))$. Υπολογίζουμε πρώτα από την εξίσωση (9.4) την αντίστοιχη κανονική ορ-μή $p(0)$. Στη συνέχεια υπολογίζουμε ύστερα από χρόνο δt, αρκούντως μικρό, την $p(\delta t)$ από την (9.3) μέσω της σχέσης

Χτίζοντας βήμα-βήμα την τροχιά στο χώρο θέσεων-ταχυτήτων.

$$p(\delta t) \ \approx \ p(0) + \delta t \ \left. \frac{\partial L}{\partial q_i} \right|_{(q(0),\dot{q}(0))} \ , \tag{9.5}$$

ή κάποιου άλλου ακριβέστερου τύπου αριθμητικής ολοκλήρωσης. Η νέα θέση προσδιορίζεται μέσω της (9.2) ως

$$q(\delta t) \ \approx q(0) + \delta t \ \dot{q}(0) \ . \tag{9.6}$$

Έχοντας προσδιορίσει τη νέα θέση $q(\delta t)$ και την ορμή $p(\delta t)$, προσδιορίζουμε από την (9.4), που είναι μια αλγεβρική εξίσωση ως προς $\dot{q}(\delta t)$, τη

[1] Προσέξτε ότι και σε αυτόν το χώρο ενδέχεται να τέμνονται οι τροχιές. Αυτό, βέβαια, συμβαίνει μόνο όταν η Λαγκρανζιανή έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο. Αν θέλαμε να αποφύγουμε την τομή των τροχιών και για τις χρονοεξαρτώμενες Λαγκρανζιανές θα έπρεπε να εμβαπτίσουμε την κίνηση στο $(2n+1)$-διάστατο χώρο των θέσεων, των ταχυτήτων και του χρόνου $(q, \dot{q}, t)$. Σε έναν τέτοιο χώρο είναι αδύνατον να τμηθούν οι τροχιές του συστήματος.

νέα $\dot{q}(\delta t)$ και επαναλαμβάνοντας πολλές φορές όλα τα προηγούμενα βήματα προσδιορίζουμε τελικά όλη την τροχιά.

Η διαδικασία αυτή κατασκευής της τροχιάς είναι αν μη τι άλλο άκομψη. Η μεγάλη συμβολή του Hamilton συνίσταται στην παρατήρηση ότι η τροχιά δεν πρέπει να θεωρηθεί ότι εκτυλίσσεται στο χώρο των θέσεων και των ταχυτήτων $(q, \dot{q})$, αλλά στο χώρο των θέσεων και των ορμών (q, p). Ο χώρος αυτός ονομάζεται *χώρος των φάσεων*. Στη χαμιλτονιανή θεώρηση, ένα μηχανικό σύστημα περιγράφεται με ανεξάρτητες μεταβλητές τις θέσεις και τις ορμές, ενώ οι γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}$ θεωρούνται συναρτήσεις των θέσεων και των ορμών. Αυτό σημαίνει ότι στη χαμιλτονιανή θεώρηση η γενικευμένη ταχύτητα $\dot{q}(q, p)$ θα παίζει το ρόλο που έπαιζε η κανονική ορμή $p(q, \dot{q})$ στη λαγκρανζιανή θεώρηση.

Μήπως είναι ευκολότερη η κατασκευή της τροχιάς στο χώρο των θέσεων-ορμών;

Στη λαγκρανζιανή θεώρηση η ορμή $p(q, \dot{q})$ ορίζεται μέσω της λαγκρανζιανής συνάρτησης ως η ακόλουθη συνάρτηση των θέσεων και των ταχυτήτων:

$$p_i = \frac{\partial L(q, \dot{q}, t)}{\partial \dot{q}_i} \,. \tag{9.7}$$

Θα δείξουμε ότι από τη Λαγκρανζιανή μπορεί να κατασκευαστεί μία νέα συνάρτηση των θέσεων και των ορμών $H(q, p, t)$ μέσω της οποίας οι γενικευμένες ταχύτητες $\dot{q}(q, p)$ προκύπτουν από τη σχέση

Πράγματι, αλλά χρειαζόμαστε μια κατάλληλη συνάρτηση εξέλιξης

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H(q, p, t)}{\partial p_i} \,. \tag{9.8}$$

Η συνάρτηση αυτή $H(q, p, t)$ λέγεται *χαμιλτονιανή συνάρτηση* ή απλά *Χαμιλτονιανή*. Στη χαμιλτονιανή θεώρηση ανταλλάσσονται οι ρόλοι των γενικευμένων ταχυτήτων με τις κανονικές ορμές και αντικαθίσταται η Λαγκρανζιανή $L(q, \dot{q}, t)$ από τη Χαμιλτονιανή $H(q, p, t)$, η οποία, όπως θα δούμε παρακάτω, παράγει την κίνηση του συστήματος με απλό τρόπο.

9.2 Μετασχηματισμός Legendre

Η αλλαγή από την $L(q, \dot{q}, t)$ στην $H(q, p, t)$, έτσι ώστε να ικανοποιούνται οι αντίστροφες σχέσεις (9.7) και (9.8), επιτυγχάνεται με τον αποκαλούμενο *μετασχηματισμό Legendre*. Για να κατανοήσουμε τον τρόπο με τον οποίο "δουλεύει" αυτός ο μετασχηματισμός, θα ξεκινήσουμε κατασκευάζοντας το μετασχηματισμό Legendre μιας συνάρτησης μίας μεταβλητής.

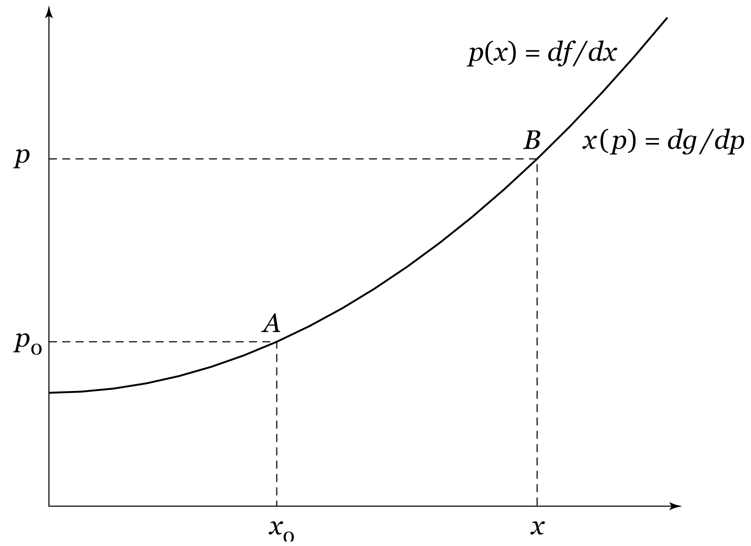
Έστω, η συνάρτηση μίας μεταβλητής $f(x)$. Η παράγωγός της ορίζει τη νέα συνάρτηση

$$p(x) = \frac{df}{dx} \,. \tag{9.9}$$

Ο μετασχηματισμός Legendre της $f(x)$ είναι εκείνη η συνάρτηση της p, $g(p)$, η οποία έχει την ιδιότητα να έχει ως παράγωγο την αντίστροφη συνάρτηση της $p(x)$, $x(p)$

Τι είναι ο μετασχηματισμός Legendre;

$$x(p) = \frac{dg}{dp} \,. \tag{9.10}$$



Σχήμα 9.2: Γραφική κατασκευή του μετασχηματισμού Legendre. Αν μία συνάρτηση $f(x)$ έχει καμπυλότητα σταθερού προσήμου, δηλαδή η $p(x) = df/dx$ είναι αυστηρά μονότονη, μπορεί να οριστεί η αντίστροφη της $p(x)$, η $x(p)$. Στο διάγραμμα απεικονίζεται η μονότονη καμπύλη $p(x)$ και αν αντιστρέψει κανείς τους άξονες μπορεί να διαβάσει και την αντίστροφη συνάρτηση, $x(p)$.

Πώς μπορεί, όμως, κανείς να κατασκευάσει μια τέτοια συνάρτηση $g(p)$;

Ας υποθέσουμε ότι η $x(p)$, η αντίστροφη δηλαδή συνάρτηση της $p(x)$, υπάρχει. Αν για παράδειγμα επιλέξουμε τη συνάρτηση $f(x) = x^3/3$, η συνάρτηση $p(x)$ είναι η $p(x) = df/dx = x^2$, οπότε $x(p) = \sqrt{p}$. Αυτή η αντιστροφή μπορεί να επιτευχθεί αν

Συνθήκη ύπαρξης του μετασχηματισμού

$$\frac{dp}{dx} = \frac{d^2 f}{dx^2} \neq 0 \ , \tag{9.11}$$

διότι, τότε, υπάρχει αμφιμονοσήμαντη αντιστοιχία μεταξύ της x και της p, οπότε υπάρχει η αντίστροφη συνάρτηση $x(p)$. Εννοείται ότι η παραπάνω συνθήκη θα πρέπει να ισχύει σε όλη την περιοχή ενδιαφέροντος. Με άλλα λόγια για να υπάρχει μετασχηματισμός Legendre της f απαιτείται η καμπυλότητα της συνάρτησης στην περιοχή αυτή να παρουσιάζει σταθερό πρόσημο.

Από τη στιγμή που έχουμε προσδιορίσει την $p(x)$, ορίζουμε τη συνάρτηση

Η συνταγή του μετασχηματισμού

$$g(p) = x(p)p - f\left(x(p)\right) \ , \tag{9.12}$$

στην οποία το x θεωρείται συνάρτηση του p. Η $g(p)$ είναι ο ζητούμενος μετασχηματισμός Legendre της $f(x)$. Πράγματι

Δουλεύει σωστά;

$$\frac{dg}{dp} = \frac{dx(p)}{dp}p + x(p) - \frac{df}{dx}\frac{dx(p)}{dp} = x(p) \ , \tag{9.13}$$

αφού εξ ορισμού $p = df/dx$.

Τα καταφέραμε, αλλά πώς σκεφτήκαμε αυτή την κατασκευή; Έστω ότι η $p(x)$ έχει ως γράφημα αυτό του Σχήματος 9.2. Το ίδιο γράφημα μπορεί να εκφράσει και την $x(p)$, αν ανταλλάξουμε τους άξονες. Το εμβαδόν

Ναι, αλλά γιατί;

του χωρίου $(x_0 x B A)$ είναι

$$\mathcal{E}_{(x_0 x B A)} = \int_{x_0}^{x} p(x) dx = \int_{x_0}^{x} \frac{df}{dx}\, dx = f(x) - f(x_0)\ . \tag{9.14}$$

Ομοίως, το εμβαδόν του χωρίου $(p_0 p B A)$ είναι

$$\mathcal{E}_{(p_0 p B A)} = \int_{p_0}^{p} x(p) dp = \int_{p_0}^{p} \frac{dg}{dp}\, dp = g(p) - g(p_0)\ . \tag{9.15}$$

Το άθροισμα των δύο αυτών εμβαδών είναι η διαφορά των δύο ορθογωνίων

$$\mathcal{E}_{(x_0 x B A)} + \mathcal{E}_{(p_0 p B A)} = p\, x - p_0\, x_0\ . \tag{9.16}$$

Συνεπώς,

$$f(x) - f(x_0) + g(p) - g(p_0) = p\, x - p_0\, x_0\ . \tag{9.17}$$

Αυτό σημαίνει ότι η ποσότητα

$$f(x) + g(p) - p\, x\ , \tag{9.18}$$

πρέπει να ισούται με μία σταθερά C. Μάλιστα, επειδή η αντίστροφη συνάρτηση της $p(x)$

$$x(p) = \frac{dg(p)}{dp}\ ,$$

προσδιορίζεται ύστερα από παραγώγιση της $g(p)$ μπορούμε να ενσωματώσουμε στην $g(p)$ τη σταθερά C και να συναγάγουμε, όπως διαπιστώσαμε προηγουμένως, ότι ο πλέον γενικός μετασχηματισμός Legendre της $f(x)$ είναι ο

$$g(p) = p\, x(p) - f\left(x(p)\right)\ . \tag{9.19}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 9.1. *Δείξτε ότι ο μετασχηματισμός Legendre της $f(x) = x^\alpha/\alpha$ με $\alpha > 1$ είναι η $g(p) = p^\beta/\beta$ με τους εκθέτες α και β να ικανοποιούν τη σχέση $\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} = 1$.*

Άσκηση 9.2. *Δείξτε ότι, αν ικανοποιείται η εξίσωση Clairaut $y = px - g(p)$ με $p = dy/dx$ και $g(p)$ κάποια συνάρτηση με καμπυλότητα σταθερού προσήμου, τότε ικανοποιείται και η διαφορική εξίσωση $x = dg/dp$. Βρείτε μία λύση της εξίσωσης Clairaut για $g(p) = p^2/2$. Κατασκευάστε μία οικογένεια λύσεων δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής $y = \alpha x + \beta$ και σχεδιάστε τις λύσεις αυτές. Μπορείτε να βρείτε τη σχέση που έχουν οι λύσεις αυτές με την πρώτη λύση που βρήκατε; [Απάντηση: Η πρώτη λύση αποτελεί την περιβάλλουσα της οικογένειας των λύσεων. Η περιβάλλουσα της οικογένειας $f(x, \alpha) = 0$ ορίζεται η καμπύλη που εφάπτεται σε όλες τις καμπύλες της οικογένειας και προσδιορίζεται αν απαλείψουμε το α από τις $f = 0$ και $\partial f/\partial \alpha = 0$.]*

Ποιος είναι ο μετασχηματισμός Legendre του μετασχηματισμού Legendre;

Εάν η $g(p)$ είναι ο μετασχηματισμός Legendre της $f(x)$, τότε ποιος είναι ο μετασχηματισμός Legendre της $g(p)$; Θα δείξουμε ότι είναι η αρχική συνάρτηση $f(x)$. Πράγματι, η αρχική συνάρτηση $f(x)$ εκφράζεται μέσω της (9.19) ως

$$f(x) = p\, x - g(p)\ , \tag{9.20}$$

όπου τώρα όλα τα p που εμφανίζονται θεωρούνται συναρτήσεις του x. Μπορούμε να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση $p(x)$ επιλύοντας την $x(p) = dg/dp$ ως προς p.

Για να μπορεί, βέβαια, να εκφραστεί η p ως συνάρτηση του x μέσω της σχέσης $x(p) = dg/dp$ πρέπει να ισχύει ότι

$$\frac{dx}{dp} = \frac{d^2g}{dp^2} \neq 0 \ . \tag{9.21}$$

Επειδή, όμως, ισχύει ότι

$$\frac{d^2f}{dx^2}\,\frac{d^2g}{dp^2} = \frac{dp}{dx}\,\frac{dx}{dp} = 1 \ , \tag{9.22}$$

η ύπαρξη μετασχηματισμού Legendre της $f(x)$ επιβεβαιώνει αυτομάτως την ύπαρξη μετασχηματισμού Legendre και της $g(p)$.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 9.3. *Επιβεβαιώστε ότι πράγματι η $f(x)$ είναι ο μετασχηματισμός Legendre της $g(p)$, δηλαδή ότι ισχύει $p = df/dx$.*

Και αν έχουμε συνάρτηση περισσότερων μεταβλητών;

Η ίδια διαδικασία μπορεί να ακολουθηθεί, αν έχουμε πολλές μεταβλητές. Έστω, για παράδειγμα, η συνάρτηση

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ ,$$

η οποία ορίζει τις συναρτήσεις των x_k

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \ .$$

Έστω ότι επιλέξαμε να απαλείψουμε ένα υποσύνολο των μεταβλητών $\{x_i,\ \text{με}\ i = 1, \ldots, k\}$ αντικαθιστώντας τες με τις αντίστοιχες p_i και αναζητούμε το μετασχηματισμό Legendre

$$g(p_1, \ldots, p_k, x_{k+1}, \ldots, x_n)$$

της f ως προς τις μεταβλητές $\{x_i,\ \text{με}\ i = 1, \ldots, k\}$. Αυτός ο μετασχηματισμός Legendre δίνεται από τον τύπο

$$g(p_1, \ldots, p_k, x_{k+1}, \ldots, x_n) = \left(\sum_{i=1}^{k} p_i x_i\right) - f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \ . \tag{9.23}$$

Εύκολα διαπιστώνουμε ότι η παραπάνω g ικανοποιεί τις σχέσεις

$$x_i = \frac{\partial g}{\partial p_i} \ , \ \text{για}\ i = 1, \ldots, k \ . \tag{9.24}$$

Στην έκφραση (9.23) τα $\{x_i,\ \text{με}\ i = 1, \ldots, k\}$ θεωρούνται συναρτήσεις των $p_1, \ldots, p_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$ και προσδιορίζονται αν επιλύσουμε τις k εξισώσεις

$$p_i = \frac{\partial f}{\partial x_i} \ .$$

Απαραίτητη προϋπόθεση για να είναι δυνατή αυτή η αντιστροφή είναι ο ακόλουθος $k \times k$ εσσιανός (Hessian), όπως αποκαλείται, πίνακας

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \ \text{για}\ 1 \le i, j \le k \ , \tag{9.25}$$

να είναι θετικός.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 9.4. *Αποδείξτε την ισχύ των εξισώσεων (9.24).*

9.3 Η Χαμιλτονιανή

Η Λαγκρανζιανή ενός φυσικού συστήματος είναι συνάρτηση των γενικευμένων συντεταγμένων q_i, των ταχυτήτων $\dot{q}_i$ και, εν γένει, του χρόνου, δηλαδή είναι μια συνάρτηση της μορφής

$$L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) \ .$$

Οι κανονικές ορμές που ορίζονται ως

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ ,$$

Από τα q και $\dot{q}$ στα q και p

είναι συναρτήσεις των q_i, $\dot{q}_i$ και του χρόνου και ορίζονται χωρίς να γίνεται καμία αναφορά στη φυσική κίνηση του συστήματος. Προκύπτουν ως μαθηματικά κατασκευάσματα άμεσα από τη Λαγκρανζιανή. Η Χαμιλτονιανή ορίζεται ως ο μετασχηματισμός Legendre της Λαγκρανζιανής ως προς όλες τις γενικευμένες ταχύτητες, δηλαδή είναι η συνάρτηση

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) \ ,$$

η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ .$$

Από την $L(q, \dot{q}, t)$ στην $H(q, p, t)$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα, η Χαμιλτονιανή δίνεται από τη σχέση

$$H(q_1, \ldots, q_n, p_1, \ldots, p_n, t) = \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - L \ , \tag{9.26}$$

στην οποία τα $\dot{q}_i$, οπουδήποτε και αν εμφανίζονται, θεωρούνται συναρτήσεις των q_i, p_i και, εν γένει, του χρόνου. Μπορούμε να προσδιορίσουμε αυτές τις συναρτήσεις, $\dot{q}_i(q,p)$, επιλύοντας τις αλγεβρικές εξισώσεις

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}$$

ως προς $\dot{q}_i$. Για να μπορεί να επιτευχθεί αυτή η αντιστροφή, που είναι αναγκαία για τον προσδιορισμό της Χαμιλτονιανής, απαιτείται ο εσσιανός πίνακας

$$\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\ , \text{ με } 1 \leq i, j \leq n\ ,$$

να είναι θετικός. Αυτή η συνθήκη συνήθως ικανοποιείται, διότι στα συνήθη προβλήματα που έχουμε αντιμετωπίσει έως τώρα η Λαγκρανζιανή είναι διγραμμική συνάρτηση των γενικευμένων ταχυτήτων, οπότε ο εσσιανός πίνακας ισούται με τον πίνακα των συντελεστών της κινητικής ενέργειας, που είναι συνήθως θετικός (βλ. Κεφάλαιο 8). Στην απλή περίπτωση N μαζών σε ένα καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων, ο εσσιανός πίνακας είναι ο διαγώνιος πίνακας με στοιχεία τις μάζες των σωμάτων.

Μπορούμε να κατασκευάσουμε τη Χαμιλτονιανή για κάθε φυσικό πρόβλημα;

Άσκηση 9.5. *Υπολογίστε τη Χαμιλτονιανή ενός ελεύθερου σωματιδίου και ενός αρμονικού ταλαντωτή σε μία διάσταση.*

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Ας αποδείξουμε ότι η χαμιλτονιανή συνάρτηση είναι ο μετασχηματισμός Legendre της Λαγκρανζιανής. Θα δείξουμε δηλαδή ότι η χαμιλτονιανή συνάρτηση ικανοποιεί τις σχέσεις

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ ,$$

για κάθε i. Παραγωγίζοντας την (9.26) ως προς p_i, λαμβάνουμε τη σχέση

$$\frac{\partial H}{\partial p_i} = \dot{q}_i + p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial p_i}\ , \tag{9.27}$$

από την οποία έχει παραλειφθεί το σύμβολο της άθροισης. Στο εξής, σε όλες τις αντίστοιχες σχέσεις όταν εμφανίζονται ζευγάρια ίδιων δεικτών θα υπονοείται η αθροιστική σύμβαση. Επειδή εξ ορισμού ισχύει ότι $p_j = \partial L/\partial \dot{q}_j$, συμπεραίνουμε ότι οι δύο τελευταίοι όροι της (9.27) είναι ίσοι και συνεπώς για κάθε i ισχύει η ζητούμενη σχέση

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ . \tag{9.28}$$

Επομένως, η H είναι ο μετασχηματισμός Legendre της L.

Σε αυτό το σημείο είναι χρήσιμο να υπολογίσουμε τη μερική παράγωγο της χαμιλτονιανής συνάρτησης ως προς τις μεταβλητές q και t, οι οποίες έμειναν ανενεργές κατά το μετασχηματισμό Legendre. Έχουμε

$$\frac{\partial H}{\partial q_i} = p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i} \,, \tag{9.29}$$

όπου κατά τη μερική παραγώγιση $\partial H/\partial q_i$ και $\partial \dot{q}_j/\partial q_i$ παραμένουν σταθερά όλα τα p καθώς και όλα τα q εκτός του q_i, ενώ κατά την παραγώγιση $\partial L/\partial q_i$ παραμένουν σταθερά όλα τα $\dot{q}$ καθώς και όλα τα q εκτός του q_i. Σημειώνουμε ότι οι τελευταίοι δύο όροι του αθροίσματος προκύπτουν, αφού η L είναι συνάρτηση όλων των q και των $\dot{q}$· τα $\dot{q}$, όμως, τώρα θεωρούνται συναρτήσεις των q, p και t. Έτσι

Προσοχή στο τι διατηρείται σταθερό κατά τις μερικές παραγωγίσεις

$$\left.\frac{\partial L}{\partial q_i}\right|_{p_l, q_k,\ k\neq i} = \left.\frac{\partial L}{\partial q_i}\right|_{\dot{q}_l, q_k,\ k\neq i} + \left.\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\right|_{q_l, \dot{q}_k,\ k\neq j} \left.\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial q_i}\right|_{p_l, q_k,\ k\neq i} . \tag{9.30}$$

Επειδή εξ ορισμού είναι

$$p_j = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j} \,,$$

καταλήγουμε στη σχέση

$$\left.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right|_{p_l, q_k,\ k\neq i} = -\left.\frac{\partial L}{\partial q_i}\right|_{\dot{q}_l, q_k,\ k\neq i} . \tag{9.31}$$

Ομοίως, υπολογίζουμε ότι

$$\frac{\partial H}{\partial t} = p_j \frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_j}\frac{\partial \dot{q}_j}{\partial t} - \frac{\partial L}{\partial t} \tag{9.32}$$

και επομένως

$$\left.\frac{\partial H}{\partial t}\right|_{p_l, q_l} = -\left.\frac{\partial L}{\partial t}\right|_{\dot{q}_l, q_l} . \tag{9.33}$$

Κλείνοντας τούτο το εδάφιο, ας σημειώσουμε ότι, όταν το σύστημα είναι χρονικά ανεξάρτητο, η Χαμιλτονιανή είναι η γενικευμένη ενέργεια του συστήματος. Στη φύση, όμως, πρωταρχική θέση κατέχει η Λαγκρανζιανή, η οποία, όπως είδαμε, μπορεί πολλές φορές να κατασκευαστεί από τις συμμετρίες του φυσικού συστήματος ή άμεσα από την ανάλυση του ίδιου του φυσικού συστήματος. Αντιθέτως η Χαμιλτονιανή, όπως και η διατηρούμενη ενέργεια, δεν προκύπτει συνήθως άμεσα και πρέπει να υπολογιστεί μέσω του μετασχηματισμού Legendre της Λαγκρανζιανής.

Από τη Λαγκρανζιανή προέρχεται η Χαμιλτονιανή ή από τη Χαμιλτονιανή η Λαγκρανζιανή;

Ας υποθέσουμε, τώρα, ότι ως δια μαγείας μας δίνεται η Χαμιλτονιανή ενός συστήματος $H(q,p,t)$ και θέλουμε να κατασκευάσουμε τη Λαγκρανζιανή του συστήματος $L(q,\dot{q},t)$. Η λαγκρανζιανή συνάρτηση $L(q,\dot{q},t)$ προσδιορίζεται ως ο μετασχηματισμός Legendre της Χαμιλτονιανής $H(q,p,t)$ ως προς όλες τις ορμές p_i, όπου οι συναρτήσεις $\dot{q}_i$ ορίζονται ως

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \,.$$

Η λαγκρανζιανή συνάρτηση δηλαδή είναι

$$L(q_1, \ldots, q_n, \dot{q}_1, \ldots, \dot{q}_n, t) = \sum_i p_i \dot{q}_i - H \ , \tag{9.34}$$

όπου τα p_i θεωρούνται συναρτήσεις των q και $\dot{q}$ και προσδιορίζονται αν επιλύσουμε ως προς p_i τις $\dot{q}_i = \partial H/\partial p_i$. Είναι εύκολο να διαπιστώσουμε με απλές παραγωγίσεις της L ότι $\partial L/\partial \dot{q}_i = p_i$.

Άσκηση 9.6. *Δείξτε από την παραπάνω έκφραση της Λαγκρανζιανής (9.34) ότι $\partial L/\partial q_i = -\partial H/\partial q_i$ και $\partial L/\partial t = -\partial H/\partial t$ σημειώνοντας με προσοχή ποιες μεταβλητές παραμένουν σταθερές σε κάθε μερική παραγώγιση.* ΑΣΚΗΣΕΙΣ

9.4 Οι εξισώσεις του Χάμιλτον

Επειδή η χαμιλτονιανή συνάρτηση είναι ο μετασχηματισμός Legendre της λαγκρανζιανής συνάρτησης, θα ισχύουν οι σχέσεις

$$\dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \ , \tag{9.35}$$

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ . \tag{9.36}$$

Μαθηματικά, δίχως φυσική

Οι σχέσεις αυτές δεν έχουν κανένα δυναμικό περιεχόμενο και δεν εκφράζουν κανένα φυσικό νόμο. Η πρώτη είναι απλώς ο ορισμός της κανονικής ορμής, ενώ η δεύτερη είναι η αντίστροφη της πρώτης. Η σχέση (9.35) εκφράζει τις ορμές συναρτήσει των ταχυτήτων και, εν γένει, των θέσεων και του χρόνου, μέσω της Λαγκρανζιανής, ενώ η σχέση (9.36) εκφράζει τις ταχύτητες συναρτήσει των ορμών και, εν γένει, των θέσεων και του χρόνου, μέσω της Χαμιλτονιανής. Εάν ισχύει η μία από αυτές τις σχέσεις, η άλλη προκύπτει εξ ορισμού από το μετασχηματισμό Legendre.

Ας επιστρέψουμε τώρα στη λαγκρανζιανή θεώρηση των φυσικών συστημάτων. Δεδομένης της Λαγκρανζιανής ενός συστήματος, μπορούμε να γνωρίζουμε πλήρως τη δυναμική συμπεριφορά του συστήματος, επιλύοντας τις εξισώσεις Euler - Lagrange

Εδώ κρύβεται όλη η φυσική του συστήματος.

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \ , \ \text{ή } \dot{p}_i = \frac{\partial L}{\partial q_i} \ . \tag{9.37}$$

Συγχρόνως, επειδή από τον ορισμό του μετασχηματισμού Legendre ισχύει (βλ. (9.31)) ότι

$$\left.\frac{\partial H}{\partial q_i}\right|_{p_l, q_k \ k \neq i} = -\left.\frac{\partial L}{\partial q_i}\right|_{\dot{q}_l, q_k \ k \neq i} , \tag{9.38}$$

οι δυναμικές εξισώσεις μπορεί να γραφούν ισοδυνάμως και ως

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \,. \tag{9.39}$$

Οι $2n$ συνολικά εξισώσεις (9.36) και (9.39)

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \,, \\ \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \,. \end{aligned} \tag{9.40}$$

Ισοδυναμία εξισώσεων Euler - Lagrange και εξισώσεων Χάμιλτον

λέγονται *εξισώσεις του Χάμιλτον* ή *κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον*[2] και προσδιορίζουν την τροχιά του συστήματος στον $2n$-διάστατο χώρο των φάσεων. Οι $2n$ εξισώσεις του Χάμιλτον, οι οποίες είναι πρώτης τάξης ως προς το χρόνο, είναι ισοδύναμες με τις n εξισώσεις Euler - Lagrange, οι οποίες είναι διαφορικές εξισώσεις δεύτερης τάξης ως προς το χρόνο. Οι κανονικές εξισώσεις του Χάμιλτον, ενώ ουσιαστικά είναι οι εξισώσεις Euler - Lagrange σε διαφορετική μαθηματική μορφή, είναι από τεχνικής πλευράς ανώτερες από τις εξισώσεις Euler - Lagrange. Αυτό οφείλεται στο ιδιαίτερο πλεονέκτημα που έχουν οι κανονικές εξισώσεις να εμφανίζουν στο αριστερό σκέλος τους τις χρονικές παραγώγους των μεταβλητών. Πέρα, όμως, από αυτό, η χαμιλτονιανή θεώρηση οδηγεί, όπως θα δούμε στα επόμενα δύο κεφάλαια, σε μια νέα θεώρηση της μηχανικής και προετοιμάζει το έδαφος για τη μετάβαση στην κβαντική μηχανική στην οποία η χαμιλτονιανή συνάρτηση παίζει τον κυρίαρχο ρόλο.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 9.7. *Δείξαμε ότι ένα φυσικό σύστημα που ικανοποιεί τις εξισώσεις Euler - Lagrange ικανοποιεί και τις εξισώσεις του Χάμιλτον. Δείξτε ότι ισχύει και το αντίστροφο.*

9.5 Η Χαμιλτονιανή φορτισμένου σωματιδίου

Στο εδάφιο 3.4 κατασκευάσαμε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση για ένα φορτισμένο σωματίδιο σε ηλεκτρομαγνητικό πεδίο. Η Λαγκρανζιανή

$$L = \frac{m}{2}|\dot{\vec{x}}|^2 + q\dot{\vec{x}} \cdot \vec{A} - q\phi - V(\vec{x})$$

παράγει την κίνηση ενός σωματιδίου μάζας m και φορτίου q μέσα σε ένα ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο $\vec{E}$, $\vec{B}$, υπό την επίδραση κάποιου επιπλέον

[2] Οι εξισώσεις αυτές παρουσιάστηκαν για πρώτη φορά από τον Lagrange το 1809 σε εργασία του που πραγματευόταν τη θεωρία διαταραχών των μηχανικών συστημάτων. Ο Lagrange, όμως, δεν αναγνώρισε αμέσως τη σημασία τους. Ο Cauchy, σε αδημοσίευτο μνημόνιο το 1831, φαίνεται να είναι ο πρώτος που κατανόησε τη σημασία των εξισώσεων αυτών. Ο ιρλανδός φυσικός Hamilton στήριξε ολόκληρη την έρευνά του στη μηχανική και την οπτική σε αυτές τις εξισώσεις, τις οποίες και παρουσίασε σε δημοσίευσή του το 1835.

δυναμικού V. Το ϕ είναι το ηλεκτρικό δυναμικό και το $\vec{A}$ είναι το ανυσματικό δυναμικό.

Για να κατασκευάσουμε τη χαμιλτονιανή συνάρτηση, υπολογίζουμε πρώτα την κανονική ορμή του σωματιδίου

$$\vec{p} = \frac{\partial L}{\partial \dot{\vec{x}}} = m\dot{\vec{x}} + q\vec{A} \,. \tag{9.41}$$

Η Χαμιλτονιανή προκύπτει από το μετασχηματισμό Legendre της Λαγκρανζιανής ως προς τις ταχύτητες και είναι

$$H(\vec{x},\vec{p}) = \vec{p}\cdot\dot{\vec{x}} - L \,.$$

Στην παραπάνω έκφραση η ταχύτητα $\dot{\vec{x}}$ θεωρείται συνάρτηση της γενικευμένης ορμής $\vec{p}$ και θέσης $\vec{x}$ του σωματιδίου. Η συνάρτηση αυτή προσδιορίζεται μέσω της σχέσης (9.41)

$$\dot{\vec{x}} = \frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} \,. \tag{9.42}$$

Επομένως, η χαμιλτονιανή συνάρτηση είναι

$$H(\vec{x},\vec{p}) = \vec{p}\cdot\frac{\vec{p} - q\vec{A}}{m} - L \,.$$

Εκτελώντας τις πράξεις και αντικαθιστώντας την ταχύτητα και στην έκφραση της Λαγκρανζιανής μέσω της σχέσης (9.42) συνάγουμε ότι η χαμιλτονιανή συνάρτηση ενός φορτισμένου σωματιδίου που κινείται μέσα σε ένα ηλεκτρομαγνητικό πεδίο και ένα δυναμικό V είναι

$$H = \frac{|\vec{p} - q\vec{A}|^2}{2m} + q\phi + V \,. \tag{9.43}$$

Από αυτή τη γενική Χαμιλτονιανή προκύπτει άμεσα η χαμιλτονιανή συνάρτηση ενός ελεύθερου σωματιδίου

$$H = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} \,.$$

Επίσης αν θέσουμε $V = k|\vec{x}|^2/2$, προκύπτει η χαμιλτονιανή συνάρτηση ενός μη φορτισμένου ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή

$$H = \frac{|\vec{p}|^2}{2m} + \frac{k}{2}|\vec{x}|^2 \,.$$

Στη γενική περίπτωση του φορτισμένου σωματιδίου οι έξι εξισώσεις του Χάμιλτον είναι

$$\dot{x}_i \;=\; \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{p_i - qA_i}{m} \,,$$

και

$$\begin{aligned} \dot{p}_i &= -\frac{\partial H}{\partial x_i} \\ &= \frac{q}{m}\frac{\partial A_j}{\partial x_i}(p_j - qA_j) - q\frac{\partial \phi}{\partial x_i} - \frac{\partial V}{\partial x_i} \,. \end{aligned}$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 9.8. *Δείξτε ότι οι παραπάνω εξισώσεις του Χάμιλτον οδηγούν στις εξισώσεις κίνησης*

$$m\ddot{x}_i = q(\epsilon_{ijk}\dot{x}_j B_k + E_i) - \frac{\partial V}{\partial x_i} \,.$$

9.6 Κυκλικές μεταβλητές και αγκύλες Poisson

Οι κυκλικές μεταβλητές ορίζονται όπως και στη λαγκρανζιανή θεώρηση: εάν η χαμιλτονιανή συνάρτηση δεν έχει άμεση εξάρτηση από κάποια από τις μεταβλητές q ή p, τότε η μεταβλητή αυτή ονομάζεται κυκλική. Επειδή στη χαμιλτονιανή δυναμική οι θέσεις και οι ορμές θεωρούνται ανεξάρτητες μεταβλητές, κυκλικές μεταβλητές μπορούν να είναι όχι μόνο οι θέσεις αλλά και οι ορμές. Εάν για παράδειγμα η Χαμιλτονιανή δεν εξαρτάται από τη μεταβλητή q_i, τότε από την εξίσωση του Χάμιλτον

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} = 0$$

προκύπτει ότι η συζυγής στην κυκλική μεταβλητή ορμή p_i διατηρείται κατά την κίνηση.

Στη χαμιλτονιανή θεώρηση, όμως, οι διατηρούμενες ποσότητες είναι δυνατό να χαρακτηριστούν και με έναν άλλο τρόπο. Ας θεωρήσουμε μια δυναμική μεταβλητή $F(q,p)$, η οποία είναι συνάρτηση των θέσεων q και των ορμών p και δεν έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο t, είναι δηλαδή $\partial F/\partial t = 0$. Η χρονική παράγωγος αυτής της μεταβλητής καθώς εξελίσσεται το σύστημα είναι (με αθροιστική σύμβαση)

$$\begin{aligned}\frac{dF}{dt} &= \frac{\partial F}{\partial t} + \frac{\partial F}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial F}{\partial p_i}\dot{p}_i \\ &= \frac{\partial F}{\partial q_i}\frac{\partial H}{\partial p_i} - \frac{\partial F}{\partial p_i}\frac{\partial H}{\partial q_i}\end{aligned} \tag{9.44}$$

Στη δεύτερη σχέση καταλήξαμε κάνοντας χρήση του μηδενισμού της $\partial F/\partial t$, αφού η δυναμική μεταβλητή δεν είχε άμεση εξάρτηση από το χρόνο, και εφαρμόζοντας στη συνέχεια τις εξισώσεις του Χάμιλτον (9.40)

Αγκύλη Poisson

Ορίζουμε ως αγκύλη Poisson[3] δύο συναρτήσεων A, B των ανεξαρτήτων μεταβλητών q_i, p_i τη νέα συνάρτηση

$$\{A,B\} = \frac{\partial A}{\partial q_i}\frac{\partial B}{\partial p_i} - \frac{\partial A}{\partial p_i}\frac{\partial B}{\partial q_i} \,. \tag{9.45}$$

[3] Simιon - Denis Poisson [1781 -1840]: Γάλλος μαθηματικός, μαθητής των Laplace και Lagrange, γνωστός κυρίως για τη μαθηματική θεμελίωση του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού, καθώς και για τη συνέχιση του έργου του Lagrange στην αναλυτική μηχανική. Ο συμβολισμός που χρησιμοποιήθηκε για τη φερώνυμη αγκύλη από τον ίδιο τον Poisson το 1809 ήταν (A,B). Ο σύγχρονος συμβολισμός $\{A,B\}$ καθιερώθηκε από τον Plummer το 1960.

Με τον ορισμό της αγκύλης Poisson, η σχέση (9.44) γράφεται

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} \ . \tag{9.46}$$

Η έκφραση αυτή μας οδηγεί σε ένα νέο χαρακτηρισμό των ποσοτήτων που διατηρούνται κατά την κίνηση, κατ' αναλογίαν με τις ορμές που αντιστοιχούν στις κυκλικές μεταβλητές στη λαγκρανζιανή θεώρηση: οποιαδήποτε δυναμική μεταβλητή, $F(q, p)$, που δεν έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο, διατηρείται αν μηδενίζεται η αγκύλη Poisson της ποσότητας αυτής με τη χαμιλτονιανή συνάρτηση H. Δηλαδή, η $F(q, p)$ διατηρείται αν

$$\{F, H\} = 0 \ .$$

Επειδή η αγκύλη Poisson μιας συνάρτησης με τον εαυτό της μηδενίζεται ταυτοτικά, θα είναι

$$\{H, H\} = 0 \ ,$$

οπότε, αν η Χαμιλτονιανή δεν έχει άμεση χρονική εξάρτηση, θα διατηρείται κατά την κίνηση, δεδομένου ότι

$$\frac{dH}{dt} = \{H, H\} = 0 \ .$$

Η πρόταση αυτή αποτελεί επαναδιατύπωση του νόμου διατήρησης της ενέργειας.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 9.9. *Δείξτε ότι οι αγκύλες Poisson ικανοποιούν τις ακόλουθες αλγεβρικές ιδιότητες:*

$$\begin{aligned}
&\{A, A\} = 0 \ ,\\
&\{A, B\} = -\{B, A\} \ ,\\
&\{A, kB\} = k\{A, B\} \ ,\\
&\{A, B + C\} = \{A, B\} + \{A, C\} \ .\\
&\{A, BC\} = B\{A, C\} + \{A, B\}C
\end{aligned}$$

Στις παραπάνω σχέσεις οι A, B, C είναι δυναμικές μεταβλητές και η k είναι μία σταθερά.

Ορμές και θέσεις σχηματίζουν ζεύγη συζυγών συντεταγμένων

Χρήσιμες αγκύλες Poisson είναι οι ακόλουθες:

$$\{q_i, q_j\} = \{p_i, p_j\} = 0 \ , \ \{q_i, p_j\} = \delta_{ij} \ . \tag{9.47}$$

Αυτές αποδεικνύονται εύκολα από τον ορισμό της αγκύλης Poisson αν παρατηρήσουμε ότι στη χαμιλτονιανή δυναμική οι θέσεις q_i και οι ορμές p_i είναι ανεξάρτητες μεταβλητές και συνεπώς ισχύει ότι

$$\frac{\partial q_i}{\partial q_j} = \delta_{ij} \ , \ \frac{\partial q_i}{\partial p_j} = 0$$

και αντίστοιχα για τις ορμές

$$\frac{\partial p_i}{\partial p_j} = \delta_{ij} \ , \ \frac{\partial p_i}{\partial q_j} = 0 \ .$$

Δυναμικές μεταβλητές που ικανοποιούν τις σχέσεις (9.47) ονομάζονται *κανονικές συζυγείς μεταβλητές*. Ο όρος συζυγείς αναφέρεται στα ζεύγη των συντεταγμένων θέσης – ορμής που σχηματίζονται. Στην κβαντομηχανική όλα αυτά τα ζεύγη έχουν γινόμενο αβεβαιοτήτων μεγαλύτερο ή ίσο με τη σταθερά του Planck και επομένως οι αντίστοιχες ποσότητες δεν μπορούν να μετρηθούν ταυτόχρονα με οσοδήποτε μεγάλη ακρίβεια.

Τις εξισώσεις του Χάμιλτον μπορούμε να τις γράψουμε με κομψό και ενιαίο τρόπο χρησιμοποιώντας τις αγκύλες Poisson. Λαμβάνοντας στην (9.44) ως δυναμική μεταβλητή την $F = q_i$, συνάγουμε ότι η δυναμική εξέλιξη των θέσεων ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \{q_i, H\} \\ &= \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \end{aligned} \tag{9.48}$$

ενώ λαμβάνοντας $F = p_i$ καταλήγουμε στις εξισώσεις

$$\begin{aligned} \frac{dp_i}{dt} &= \{p_i, H\} \\ &= -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ , \end{aligned} \tag{9.49}$$

που αποτελούν ισοδύναμη διατύπωση των εξισώσεων του Χάμιλτον. Ενώ οι εξισώσεις του Χάμιλτον για τις θέσεις και τις ορμές είναι διαφορετικές, με την εισαγωγή της αγκύλης Poisson οι εξισώσεις εξέλιξης και των θέσεων και των ορμών λαμβάνει την ίδια μορφή. Αυτό μας οδηγεί στην υποψία ότι η πιο θεμελιώδης γραφή των εξισώσεων κίνησης είναι αυτή με τις αγκύλες Poisson.

Αντιλαμβανόμαστε, λοιπόν, ότι, χρησιμοποιώντας την αγκύλη Poisson, είμαστε σε θέση να προσδιορίσουμε με ενιαίο τρόπο τη χαμιλτονιανή εξέλιξη, όχι μόνο των θέσεων και των ορμών, αλλά και οποιασδήποτε δυναμικής μεταβλητής. Η εξίσωση

Ο δυναμικός νόμος μεταβολής μιας συνάρτησης $F(q,p)$ στη χαμιλτονιανή δυναμική

$$\frac{dF}{dt} = \{F, H\} \ , \tag{9.50}$$

αποτυπώνει πλήρως τη χρονική εξέλιξη της μεταβλητής F σε ένα σύστημα με χαμιλτονιανή συνάρτηση H.

Βέβαια, αν η δυναμική μεταβλητή $F(q,p,t)$ έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο, στο δυναμικό νόμο πρέπει να συμπεριληφθεί και η άμεση μεταβολή της μεταβλητής F με το χρόνο. Σε αυτή την περίπτωση καταλήγουμε στον ακόλουθο δυναμικό νόμο εξέλιξης της μεταβλητής F:

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \{F, H\} \ . \tag{9.51}$$

9.7 Η γενικευμένη αρχή του Χάμιλτον

Οι εξισώσεις του Χάμιλτον, όπως και οι εξισώσεις Euler - Lagrange, είναι δυνατόν να προκύψουν από μία αρχή ακροτάτου. Επειδή η δράση έχει οριστεί ως

Η δράση στη χαμιλτονιανή θεώρηση

$$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q, \dot{q}, t) dt ,$$

ορίζουμε αντίστοιχα τη δράση για μία τροχιά $(q_i(t), p_i(t))$ στο χώρο των φάσεων, συναρτήσει των ανεξάρτητων πλέον μεταβλητών q_i, p_i και της Χαμιλτονιανής, ως

$$S = \int_{t_0}^{t_1} \left[p_i(t)\, \dot{q}_i - H(q_i(t), p_i(t), t) \right] \, dt , \qquad (9.52)$$

ή ισοδύναμα ως

$$S = \int_{t_0}^{t_1} p_i(t)\, dq_i(t) - \int_{t_0}^{t_1} H(q_i(t), p_i(t), t)\, dt . \qquad (9.53)$$

Σύμφωνα με τη *γενικευμένη αρχή του Χάμιλτον*, η φυσική κίνηση καθιστά τη δράση ακρότατη για οποιεσδήποτε ανεξάρτητες μεταβολές των $q_i(t)$ και $p_i(t)$, στις οποίες όμως δεν μεταβάλλονται οι αρχικές και οι τελικές θέσεις καθώς και οι αντίστοιχες ορμές του συστήματος $q_i(t_1)$ και $q_i(t_2)$, $p_i(t_1)$ και $p_i(t_2)$.

Αυτή η αρχή ακροτάτου αποτελεί γενίκευση της αρχής του Χάμιλτον, διότι αντιμετωπίζει τις θέσεις και τις ορμές, ισότιμα, ως ανεξάρτητες μεταβλητές. Αντιθέτως, η αρχή του Χάμιλτον, που συναντήσαμε στα πρώτα κεφάλαια, θεωρεί ως ανεξάρτητες μεταβλητές μόνο τις θέσεις q_i, ενώ οι μεταβολές των ταχυτήτων $\dot{q}_i$ προσδιορίζονται από τις μεταβολές των θέσεων, όπως συμβαίνει και με τις μεταβολές των κανονικών ορμών που ορίζονται από τις σχέσεις

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} .$$

Θα δείξουμε στη συνέχεια ότι, όταν ικανοποιείται η γενικευμένη αρχή του Χάμιλτον, η φυσική διαδρομή ικανοποιεί τις εξισώσεις του Χάμιλτον.

Η γενικευμένη αρχή του Χάμιλτον στο χώρο των φάσεων

Έστω $(q_i(t), p_i(t))$ η φυσική διαδρομή. Θεωρούμε μικρές μεταβολές από τη φυσική διαδρομή

$$q_i(t, \epsilon) = q_i(t) + \epsilon \eta_i(t) \ , \ \ p_i(t, \epsilon) = p_i(t) + \epsilon \xi_i(t) \ ,$$

όπου ϵ κάποια μικρή παράμετρος και $\eta_i(t)$, $\xi_i(t)$ ο τρόπος με τον οποίο μεταβάλλονται οι συντεταγμένες της φυσικής διαδρομής στο χώρο των φάσεων. Ο μοναδικός περιορισμός που επιβάλλουμε είναι να μηδενίζονται οι μεταβολές στις θέσεις και στις ορμές στον αρχικό και τελικό χρόνο $\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = 0$ και $\xi_i(t_1) = \xi_i(t_2) = 0$. Επειδή η φυσική διαδρομή $(q_i(t) p_i(t))$ καθιστά τη δράση ακρότατη, η πρώτης τάξης, ως προς ϵ, μεταβολή της δράσης δS μηδενίζεται. Επομένως, για όλες τις επιτρεπτές μεταβολές πρέπει να ικανοποιείται η συνθήκη

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{t_1}^{t_2} \xi_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(p_i \dot{\eta}_i - \eta_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \xi_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) dt + \int_{t_1}^{t_2} \left(\frac{d(p_i \eta_i)}{dt} - \eta_i \dot{p}_i - \eta_i \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \xi_i \left(\dot{q}_i - \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) dt - \int_{t_1}^{t_2} \eta_i \left(\dot{p}_i + \frac{\partial H}{\partial q_i} \right) dt + [p_i \eta_i]_{t_1}^{t_2} \ . \end{aligned}$$

Ο τελευταίος όρος είναι μηδέν αφού $\eta_i(t_1) = \eta_i(t_2) = 0$. Επιπλέον, επειδή ο μηδενισμός της πρώτης μεταβολής της δράσης πρέπει να επιτυγχάνεται για κάθε $\eta_i(t)$ και για κάθε $\xi_i(t)$, αν ικανοποιείται η γενικευμένη αρχή του Χάμιλτον, ικανοποιούνται αυτόματα και οι εξισώσεις του Χάμιλτον

Ισοδυναμία εξισώσεων Χάμιλτον και γενικευμένης αρχής του Χάμιλτον

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i} \ , \ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \ . \tag{9.54}$$

Ισχύει βέβαια και το αντίστροφο.[4]

9.8 Κανονικοί μετασχηματισμοί

Χαμιλτονιανή και μετασχηματισμοί βαθμονόμησης

Παρατηρούμε ότι, όπως και στη λαγκρανζιανή θεώρηση, στον ορισμό της δράσης μπορούμε να προσθέσουμε μια οποιαδήποτε ολική παράγωγο του χρόνου κάποιας συνάρτησης $F(q,p,t)$, χωρίς να μεταβάλουμε τη φυσική κίνηση. Πράγματι, η φυσική κίνηση που καθιστά ακρότατη τη δράση

$$S = \int_{t_0}^{t_1} p_i(t) dq_i(t) - \int_{t_0}^{t_1} \left(H(q_i(t), p_i(t), t) - \frac{dF(q,p,t)}{dt} \right) dt \tag{9.55}$$

δεν διαφέρει σε τίποτε από τη φυσική κίνηση που προκύπτει από το ακρότατο της δράσης (9.52).

Η παρατήρηση αυτή είναι σημαντική, διότι μας επιτρέπει να κατασκευάσουμε μετασχηματισμούς των συντεταγμένων q_i, p_i

Κανονικοί μετασχηματισμοί

$$Q_i = Q_i(q,p,t) \ , \ P_i = P_i(q,p,t) \ ,$$

τέτοιους ώστε η φυσική κίνηση, εκπεφρασμένη στις νέες συντεταγμένες, να ικανοποιεί και πάλι τις εξισώσεις του Χάμιλτον

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i} \ , \ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i} \ , \tag{9.56}$$

[4]Σημειώνουμε ότι για την εξαγωγή των εξισώσεων του Χάμιλτον δεν ήταν αναγκαίο να επιβάλουμε μηδενική μεταβολή των ορμών στον αρχικό και τον τελικό χρόνο. Επιλέξαμε να επιβάλουμε το μηδενισμό των μεταβολών των ορμών στον αρχικό και τον τελικό χρόνο, για να μπορέσουμε στη συνέχεια να προσδιορίσουμε τους μετασχηματισμούς βαθμονόμησης. Η αδυναμία αυτή οφείλεται στη διατύπωση της αρχής του Χάμιλτον. Η αρχή του Χάμιλτον πρέπει να διατυπώνεται ως εξής: η κλασική κίνηση είναι αυτή που καθιστά τις πρώτης τάξης, ως προς την απόκλιση από την κλασική κίνηση, μεταβολές της δράσης συναρτήσεις μόνο των αρχικών και τελικών θέσεων, ορμών και χρόνων.

με Χαμιλτονιανή τη συνάρτηση $K(Q, P, t)$. Τέτοιου είδους μετασχηματισμοί που αφήνουν αναλλοίωτη τη χαμιλτονιανή δυναμική ονομάζονται *κανονικοί μετασχηματισμοί*, ή *μετασχηματισμοί επαφής* και θα τους μελετήσουμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 11.

Σε αυτό το σημείο θα αρκεστούμε στην παρατήρηση ότι, εάν ο μετασχηματισμός

$$Q_i = Q_i(q, p, t)\ ,\ P_i = P_i(q, p, t)$$

ικανοποιεί τη σχέση

$$p_i\dot{q}_i - H(q_i, p_i, t) = P_i\dot{Q}_i - K(Q_i, P_i, t) + \frac{dF}{dt}\ , \tag{9.57}$$

τότε η φυσική διαδρομή που καθιστά τη δράση

$$S_1 = \int_{t_0}^{t_1} P_i dQ_i - \int_{t_0}^{t_1} K(Q, P, t)dt\ , \tag{9.58}$$

ακρότατη, ικανοποιεί τις εξισώσεις

$$\dot{Q}_i = \frac{\partial K}{\partial P_i}\ ,\ \dot{P}_i = -\frac{\partial K}{\partial Q_i}\ . \tag{9.59}$$

΄Ομως, λόγω της σχέσης (9.57), η διαδρομή που καθιστά τη δράση (9.58) ακρότατη καθιστά ακρότατη και τη δράση

$$S_2 = \int_{t_0}^{t_1} p_i dq_i - \int_{t_0}^{t_1} H(q, p, t)dt\ .$$

Συνεπώς, η φυσική διαδρομή που στις συντεταγμένες (Q, P) διέπεται από τις εξισώσεις του Χάμιλτον (9.59), είναι η ίδια διαδρομή που στις συντεταγμένες (q, p) διέπεται από τις εξισώσεις του Χάμιλτον

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ ,\ \dot{p}_i = -\frac{\partial H}{\partial q_i}\ . \tag{9.60}$$

Αυτό σημαίνει ότι οι κανονικοί μετασχηματισμοί πρέπει να ικανοποιούν σχέσεις της μορφής (9.57).

Η σχέση (9.57) μπορεί να γραφεί και ως

$$dF = (p_i dq_i - P_i dQ_i) + (K - H)dt\ . \tag{9.61}$$

Επομένως, εάν επιλέξουμε μία συνάρτηση $F_1(q, Q, t)$, η οποία εξαρτάται μόνο από τα q, Q και ενδεχομένως το χρόνο t, τότε, αφού

$$dF_1 = \left(\frac{\partial F_1}{\partial q_i}dq_i + \frac{\partial F_1}{\partial Q_i}dQ_i\right) + \frac{\partial F_1}{\partial t}dt\ , \tag{9.62}$$

και η (9.62) θα πρέπει να έχει την ίδια μορφή με τη σχέση (9.61), για κάθε dQ_i, dq_i και dt, συμπεραίνουμε ότι η $F_1(q, Q, t)$ ορίζει τον κανονικό μετασχηματισμό $(q, p) \to (Q, P)$ έμμεσα μέσω των σχέσεων

Κατασκευή κανονικών μετασχηματισμών

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i}\ ,\ P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i}\ . \tag{9.63}$$

Επιλύοντας τις αλγεβρικές αυτές εξισώσεις, προσδιορίζουμε τις νέες συντεταγμένες συναρτήσει των παλαιών $Q_i = Q_i(q,p,t)$, $P_i = P_i(q,p,t)$. Αντιπαραθέτοντας τις εξισώσεις (9.61) και (9.62), συμπεραίνουμε επίσης ότι η χαμιλτονιανή συνάρτηση που διέπει τη δυναμική στις νέες συντεταγμένες είναι η ακόλουθη:

$$K = H + \frac{\partial F_1}{\partial t} \, . \tag{9.64}$$

Αν για παράδειγμα επιλέξουμε $F_1 = q_i Q_i$, τότε ο μετασχηματισμός που επιτελείται είναι ο

$$Q_i = p_i \ , \ P_i = -q_i \ .$$

Ο μετασχηματισμός αυτός ανταλλάσσει τις θέσεις με τις ορμές[5] με το σωστό πρόσημο ώστε να διατηρείται η χαμιλτονιανή δυναμική. Σε αυτή την περίπτωση, όπως και σε όλες τις περιπτώσεις που ο μετασχηματισμός δεν έχει άμεση εξάρτηση από το χρόνο, η χαμιλτονιανή συνάρτηση που διέπει τη δυναμική στις νέες συντεταγμένες παραμένει η ίδια (βλ. 9.64), δηλαδή είναι $K = H$.

Ο μετασχηματισμός Legendre[6] της τυχαίας συνάρτησης $F_1(q,Q,t)$, μόνο ως προς τα Q (παράβαλε με τη δεύτερη από τις σχέσεις (9.63))

$$F_2(q,P,t) = Q_i(q,P,t)P_i + F_1(q,Q(q,P,t),t)$$

αντιστρέφει τη δεύτερη από τις σχέσεις (9.63) και ορίζει τον κανονικό μετασχηματισμό που παράγεται από συναρτήσεις τύπου $F_2(q,P,t)$

$$p_i = \frac{\partial F_2}{\partial q_i} \ , \ Q_i = \frac{\partial F_2}{\partial P_i} \ , \ K = H + \frac{\partial F_2}{\partial t} \, . \tag{9.65}$$

Για παράδειγμα, αν επιλέξουμε $F_2 = q_i P_i$, τότε ο μετασχηματισμός που επιτελείται είναι ο ταυτοτικός μετασχηματισμός

$$Q_i = q_i \ , \ P_i = p_i \ .$$

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 9.10. *Αποδείξτε με προσοχή ότι ο μετασχηματισμός Legendre της $F_1(q,Q,t)$ ως προς Q ικανοποιεί τις εξισώσεις (9.65).*

Άσκηση 9.11. *Με διαδοχικούς μετασχηματισμούς Legendre προσδιορίστε τις σχέσεις που ορίζουν τους κανονικούς μετασχηματισμούς που παράγονται, όταν επιλεγούν*

[5]Με αυτόν το μετασχηματισμό αναδεικνύεται για άλλη μια φορά η ισοδυναμία των συντεταγμένων θέσης και ορμής στο χαμιλτονιανό φορμαλισμό. Η αφαίρεση που έχει επιτευχθεί είναι τεράστια: δεν είναι πλέον προφανές τι είναι θέση και τι ορμή ενός συστήματος.

[6]Προσέξτε ότι τώρα στο μετασχηματισμό Legendre χρησιμοποιούμε αντίθετο πρόσημο απ' ό,τι στην κατασκευή της Χαμιλτονιανής εξαιτίας του αρνητικού προσήμου στην P_i της σχέσης (9.63).

συναρτήσεις της μορφής $F_3(p, Q, t)$ και $F_4(p, P, t)$. Δείξτε ότι κατάλληλα επιλεγμένες γεννήτριες τύπου $F_3(p, Q, t)$ ορίζουν το μετασχηματισμό

$$q_i = -\frac{\partial F_3}{\partial p_i} \ , \ P_i = -\frac{\partial F_3}{\partial Q_i} \ ,$$

ενώ γεννήτριες τύπου $F_4(p, P, t)$ ορίζουν το μετασχηματισμό

$$q_i = -\frac{\partial F_4}{\partial p_i} \ , \ Q_i = \frac{\partial F_4}{\partial P_i} \ .$$

Οι τέσσερις αυτές συναρτήσεις –οι δύο που είδαμε στο κείμενο και οι δύο που μόλις κατασκευάσατε– ονομάζονται γεννήτριες συναρτήσεις τύπου 1,2,3 και 4, αντίστοιχα. Δείξτε τέλος ότι για όλους τους τύπους των γεννητριών η νέα Χαμιλτονιανή είναι

$$K = H + \frac{\partial F_i}{\partial t} \ .$$

9.9 Η διαβολική ιδέα των Χάμιλτον και Jacobi

Στο προηγούμενο εδάφιο μάθαμε πώς να μετατρέπουμε τις εξισώσεις κίνησης ενός χαμιλτονιανού συστήματος σε νέες συντεταγμένες στις οποίες η δυναμική παραμένει Χαμιλτονιανή. Συνήθως επιζητούμε κανονικούς μετασχηματισμούς, οι οποίοι οδηγούν σε εξισώσεις του Χάμιλτον που επιλύονται ευκολότερα απ᾽ ό,τι οι εξισώσεις του Χάμιλτον στις αρχικές κανονικές συντεταγμένες. Η διαβολική ιδέα του Hamilton και του Karl Gustav Jacobi [1804-1851] ήταν να μετασχηματίσουν τις εξισώσεις του Χάμιλτον έτσι ώστε η Χαμιλτονιανή στις νέες κανονικές συντεταγμένες να είναι μηδενική. Εάν ήταν δυνατόν να προσδιοριστεί ο κανονικός μετασχηματισμός, ο οποίος μετασχηματίζει την αρχική Χαμιλτονιανή H στη μηδενική Χαμιλτονιανή $K = 0$, τότε το αρχικό δυναμικό πρόβλημα επιλύεται αμέσως στις νέες συντεταγμένες, αφού οι εξισώσεις κίνησης μετασχηματίζονται στις τετριμμένες εξισώσεις

Αφού μπορούμε να αλλάξουμε την τιμή της Χαμιλτονιανής, γιατί να μην τη μηδενίσουμε;

$$\dot{Q}_i = 0 \ , \ \dot{P}_i = 0 \ , \tag{9.66}$$

οι οποίες έχουν την ακόλουθη λύση

$$Q_i = \alpha_i \ , \ P_i = \beta_i \ ,$$

όπου α_i, και β_i οι σταθερές τιμές των νέων συντεταγμένων Q_i και P_i. Ο κανονικός μετασχηματισμός χάρη στον οποίο επιτεύχθηκε ο μηδενισμός της K προσδιορίζει τις θέσεις και τις ορμές του συστήματος σε κάθε χρονική στιγμή. Πράγματι, υπό την προϋπόθεση ότι ο μετασχηματισμός επιτελέστηκε με μία συνάρτηση τύπου $F_1(q, Q, t)$, μπορούμε, επιλύοντας τις αλγεβρικές εξισώσεις

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \ , \ P_i = -\frac{\partial F_1}{\partial Q_i} \ , \tag{9.67}$$

να προσδιορίσουμε τις θέσεις και τις ορμές,

$$q_i = q_i(\alpha_i, \beta_i, t) \ , \ p_i = p_i(\alpha_i, \beta_i, t) \ , \tag{9.68}$$

συναρτήσει των σταθερών α_i και β_i που είναι οι σταθερές τιμές των νέων συντεταγμένων Q_i και P_i. Αν μάλιστα επιλέξουμε τις σταθερές α_i και β_i έτσι ώστε

$$\alpha_i = q_i(t_0) \ , \ \beta_i = p_i(t_0) \ ,$$

επειδή οι συντεταγμένες (q_i, p_i) καθώς και οι (Q_i, P_i) ανά πάσα στιγμή διέπονται από την ίδια ουσιαστικά χαμιλτονιανή δυναμική, ο μετασχηματισμός $F_1(q, Q, t)$ παράγει, μέσω των έμμεσων σχέσεων (9.67), τις τιμές των θέσεων και των ορμών $q_i(t)$, $p_i(t)$ στο χρόνο t δεδομένου ότι στο χρόνο t_0 ήταν αντίστοιχα Q_i, P_i. Αυτό σημαίνει, ότι, ο μετασχηματισμός $F_1(q, Q, t)$ που οδήγησε στο μηδενισμό της χαμιλτονιανής συνάρτησης παρακολουθεί τη φυσική κίνηση του συστήματος και απεικονίζει κάθε σημείο της τροχιάς στο χώρο των φάσεων στο σημείο που βρισκόταν το σύστημα μία δεδομένη χρονική στιγμή.

Πώς μπορούμε, όμως, να προσδιορίσουμε τη συνάρτηση $F_1(q, Q, t)$; Επειδή ο κανονικός μετασχηματισμός έχει κατασκευαστεί έτσι ώστε $K = 0$, η συνάρτηση $F_1(q, Q, t)$ πρέπει να ικανοποιεί την εξίσωση

$$H(q, p, t) + \frac{\partial F_1}{\partial t} = 0 \ .$$

Επιπλέον, αφού οι αρχικές συντεταγμένες ορμής, είναι

$$p_i = \frac{\partial F_1}{\partial q_i} \ ,$$

καταλήγουμε στο συμπέρασμα ότι η $F_1(q, Q, t)$ πρέπει να αποτελεί λύση της μερικής διαφορικής εξίσωσης

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial F_1}{\partial q_i}, t\right) = 0 \ . \tag{9.69}$$

Η εξίσωση Hamilton - Jacobi

Η εξίσωση αυτή που προσδιορίζει το ζητούμενο μετασχηματισμό ονομάζεται *εξίσωση Hamilton - Jacobi* και η επίλυσή της ισοδυναμεί με την επίλυση των εξισώσεων του Χάμιλτον, δηλαδή με τον προσδιορισμό της κίνησης του συστήματος.

Ας προσπαθήσουμε να βρούμε μία λύση[7] των εξισώσεων Hamilton - Jacobi για την περίπτωση ενός ελεύθερου σωματιδίου με Χαμιλτονιανή

$$H = \frac{p^2}{2m} \ .$$

Αν χρησιμοποιήσουμε τη συνάρτηση

$$F_1(q, Q, t) = \frac{(q - Q)^2}{2m(t - T)} \ ,$$

[7] Ως πρόβλημα διαφορικής εξίσωσης με μερικές παραγώγους μπορεί να έχει περισσότερες από μία λύσεις.

τότε εύκολα διαπιστώνουμε ότι αυτή ικανοποιεί την εξίσωση Hamilton - Jacobi (9.69) για το ελεύθερο σωματίδιο

$$\frac{\partial F_1}{\partial t} + \frac{1}{2m}\left(\frac{\partial F_1}{\partial q}\right)^2 = 0$$

και κατα συνέπεια επιτυγχάνεται ο ζητούμενος μετασχηματισμός. Ποια είναι, όμως, η φυσική σημασία μιας τέτοιας επιλογής για τη συνάρτηση F_1; Αν θυμηθούμε την κατασκευή της ελάχιστης δράσης για ένα ελεύθερο σωματίδιο, αναγνωρίζουμε αμέσως στη μορφή της F_1 τη δράση που αντιστοιχεί στη φυσική κίνηση του ελεύθερου σωματιδίου που βρίσκεται τη χρονική στιγμή T στη θέση Q και τη χρονική στιγμή t στη θέση q. Είναι, άραγε, τυχαίο αυτό;

Η δράση ως συνάρτηση και όχι ως συναρτησοειδές

Ορίζουμε τη *συνάρτηση-δράση* $S(q_1, q_2, t_1, t_2)$ ως τη δράση που προκύπτει από τη φυσική διαδρομή που διέρχεται από τα $q_1(t_1)$ και $q_2(t_2)$. Η συνάρτηση-δράση,

$$S(q_1, q_2, t_1, t_2) = \int_{t_1}^{t_2} (p\dot{q} - H)\, dt = \int_{q_1}^{q_2} pdq - \int_{t_1}^{t_2} Hdt\ ,$$

δεν είναι πλέον συναρτησοειδές, αλλά μία συνάρτηση στο χώρο των θέσεων, που εξαρτάται μόνο από τις αρχικές και τελικές θέσεις και χρόνους, η σύνδεση των οποίων επιτυγχάνεται μονοσήμαντα μέσω της φυσικής διαδρομής. Μια μικρή χωροχρονική μετατόπιση του αρχικού και του τελικού σημείου θα προκαλέσει αντίστοιχη μεταβολή στη συνάρτηση-δράση ίση με

Μεταβολή της δράσης λόγω μετατόπισης των αρχικών και τελικών σημείων της τροχιάς στο χώρο των φάσεων

$$dS = p_2 dq_2 - p_1 dq_1 - H_2 dt_2 + H_1 dt_1\ .$$

Στην παραπάνω σχέση οι τιμές των $p_{1,2}$ και $H_{1,2}$ είναι οι τιμές της ορμής και της Χαμιλτονιανής στα αντίστοιχα άκρα. Συνάγεται, λοιπόν, ότι

$$p_2 = \frac{\partial S}{\partial q_2}\ ,\ p_1 = -\frac{\partial S}{\partial q_1}\ , \tag{9.70}$$

και

$$H_2 = -\frac{\partial S}{\partial t_2}\ ,\ H_1 = \frac{\partial S}{\partial t_1}\ . \tag{9.71}$$

Επομένως, η συνάρτηση $S(q, Q, t, T)$ που αντιστοιχεί στη δράση της φυσικής διαδρομής από το Q τη χρονική στιγμή T στο q τη χρονική στιγμή t είναι μία λύση της εξίσωσης Hamilton - Jacobi

Ιδού, τι κρύβεται πίσω από τη συνάρτηση F_1

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q_i, \frac{\partial S}{\partial q_i}, t\right) = 0\ , \tag{9.72}$$

και επομένως η $S(q, Q, t, T)$ είναι η ζητούμενη συνάρτηση $F_1(q, Q, t)$ που δημιουργεί τον κανονικό μετασχηματισμό από τις (q, p) στις (Q, P) και καθιστά τη Χαμιλτονιανή στις συντεταγμένες Q, P μηδενική.

Βεβαίως, ο προσδιορισμός της συνάρτησης $S(q, Q, t, T)$ απαιτεί τη γνώση της φυσικής κίνησης και γι' αυτό η ιδέα των Hamilton και Jacobi δεν αποτελεί πανάκεια για την επίλυση των δυναμικών εξισώσεων. Ωστόσο, σε αρκετές περιπτώσεις που η Χαμιλτονιανή στην έκφραση (9.69) μπορεί να διαχωριστεί σε μέρη που εξαρτώνται από διαφορετικές μεταξύ τους μεταβλητές, η εξίσωση Hamilton - Jacobi μπορεί να εξασφαλίσει μια γρήγορη μαθηματική λύση του φυσικού προβλήματος (βλ. Άσκηση 9.12). Εκτός, όμως, από την πρακτική της σημασία, η εξίσωση Hamilton - Jacobi εισάγει με λεπτότητα έναν ενδιαφέροντα τρόπο σκέψης, ο οποίος έπαιξε σημαντικό ρόλο κατά τη μετάβαση από την κλασική στην κβαντική μηχανική.

ΑΣΚΗΣΕΙΣ

Άσκηση 9.12. *Προσπαθήστε να επιλύσετε πάλι το πρόβλημα του ελεύθερου σωματιδίου κατευθείαν μέσω της σχέσης (9.69) διαχωρίζοντας τη συνάρτηση F_1 ως ακολούθως*

$$F_1 = -E(t-T) + W(q) \ ,$$

όπου E μια σταθερά διαχωρισμού.

9.10 Προβλήματα

1. Κατασκευάστε το μετασχηματισμό Legendre $g(p)$ της $f(v) = v^2/2 + av$. Αν v είναι η ταχύτητα, ποιο φυσικό σύστημα περιγράφει η Χαμιλτονιανή που βρήκατε; Κατασκευάστε επίσης το μετασχηματισμό Legendre της $f(v) = -b\sqrt{1-v^2}$ για $|v| \leq 1$ και $b > 0$. Ποιο φυσικό σύστημα περιγράφει αυτή η Χαμιλτονιανή;

2. *Μετασχηματισμοί Legendre στη θερμοδυναμική:* Η θερμοδυναμική κατάσταση ενός συστήματος μπορεί να προσδιοριστεί με δεδομένες δύο μόνο από τις τεσσερις μεταβλητές: p (πίεση), V (όγκος), T (θερμοκρασία), S (εντροπία). Σύμφωνα με τον πρώτο νόμο της θερμοδυναμικής ισχύει ότι $dU = TdS - pdV$ και η εσωτερική ενέργεια U μπορεί να θεωρηθεί συνάρτηση των S και V. Συνεπώς, η πίεση όντας και αυτή συνάρτηση των S και V, είναι $p = -\left.\partial U/\partial V\right|_S$. Η ενθαλπία H με τη σειρά της είναι συνάρτηση των S και p και ικανοποιεί τη σχέση $V = \left.\partial H/\partial p\right|_S$. Προσδιορίστε την H και δείξτε ότι $T = \left.\partial H/\partial S\right|_p$. Η ελεύθερη ενέργεια Gibbs είναι συνάρτηση των p και T και ικανοποιεί τη σχέση $S = -\left.\partial G/\partial T\right|_p$. Προσδιορίστε τη G και δείξτε ότι $V = \left.\partial G/\partial p\right|_T$. Η συνάρτηση του Helmholtz A είναι συνάρτηση των T και V και ικανοποιεί τη σχέση $p = -\left.\partial A/\partial V\right|_T$. Προσδιορίστε την A και δείξτε ότι $S = -\left.\partial A/\partial T\right|_V$.

3. Υπολογίστε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση που αντιστοιχεί στη Χαμιλτονιανή
$$H(q,p) = \frac{p^2}{2} + p\sin q \ .$$

4. Σημειακή μάζα κινείται στο επίπεδο υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης $f(r)$. Η κίνηση περιγράφεται σε πολικές συντεταγμένες (r, θ). Υπολογίστε τη χαμιλτονιανή συνάρτηση και γράψτε τις εξισώσεις του Χάμιλτον.

5. Σημειακή μάζα κινείται στο χώρο υπό την επίδραση κεντρικής δύναμης $f(r)$. Η κίνηση περιγράφεται σε σφαιρικές συντεταγμένες (r, θ, ϕ). Προσδιορίστε τις κανονικές ορμές p_r, p_θ, p_ϕ. Γράψτε τη Χαμιλτονιανή και τις εξισώσεις του Χάμιλτον. Αποδείξτε ότι η κίνηση περιορίζεται σε κάποιο επίπεδο.

6. Γράψτε τη χαμιλτονιανή συνάρτηση που διέπει την κίνηση ενός αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση.

7. Δείξτε ότι η χαμιλτονιανή συνάρτηση δύο σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με νευτώνειο δυναμικό είναι
$$H = \frac{|\vec{P}|^2}{2M} + \frac{|\vec{p}|^2}{2\mu} + V(|\vec{x}|) \ ,$$
όπου $\vec{P}$ η ορμή του κέντρου μάζας των σωματιδίων, M η συνολική μάζα, $\vec{p}$ και $\vec{x}$ αντίστοιχα η σχετική ορμή και θέση των σωματιδίων

και μ η ανηγμένη μάζα των. Γράψτε τις εξισώσεις του Χάμιλτον που διέπουν την κίνηση.

8. Η Λαγκρανζιανή ελεύθερου σχετικιστικού σωματιδίου που κινείται στον άξονα x είναι $L(\dot{x}) = -mc^2\sqrt{1-(\dot{x}/c)^2}$, όπου x η θέση του σωματιδίου στον άξονα. Υποθέστε ότι στο σωματίδιο ασκείται μία δύναμη τέτοια ώστε η Λαγκρανζιανή να είναι

$$L(x,\dot{x}) = -mc^2\sqrt{1-(\dot{x}/c)^2} - \frac{1}{2}m\omega^2x^2 .$$

Γράψτε τη χαμιλτονιανή συνάρτηση του σωματιδίου. Διατηρείται η Χαμιλτονιανή κατά την κίνηση; Ποια είναι η τιμή της (α) όταν η ταχύτητα του σωματιδίου είναι μηδέν και (β) όταν βρίσκεται στην αρχή των αξόνων στο χώρο των φάσεων; Δείξτε ότι η περίοδος της ταλάντωσης μπορεί να λάβει τη μορφή

$$T = \frac{4}{c\omega}\sqrt{\frac{2}{m}}\int_0^{\pi/2} d\theta; \frac{E-(E-mc^2)\sin^2\theta}{\sqrt{(E+mc^2)-(E-mc^2)\sin^2\theta}} ,$$

όπου E η ενέργεια του σωματιδίου. Επιβεβαιώστε ότι η περίοδος της κίνησης τείνει στη μη-σχετικιστική τιμή της, όταν η ταχύτητα είναι συνεχώς πολύ μικρή συγκριτικά με την ταχύτητα του φωτός.

9. Θεωρήστε ένα ελεύθερο σωματίδιο μάζας m που κινείται στο επίπεδο $x-y$. Αντί των καρτεσιανών συντεταγμένων (x,y) επιλέγουμε να περιγράψουμε την κίνηση στις περιστρεφόμενες συντεταγμένες

$$\begin{aligned} \xi &= x\,\cos\omega t + y\,\sin\omega t\,, \\ \eta &= -x\,\sin\omega t + y\,\cos\omega t\,. \end{aligned}$$

Παρατηρήστε ότι

$$\begin{aligned} x &= \xi\,\cos\omega t - \eta\,\sin\omega t\,, \\ y &= \xi\,\sin\omega t + \eta\,\cos\omega t\,. \end{aligned}$$

(α) Γράψτε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση του σωματιδίου στις συντεταγμένες (ξ,η) και τις εξισώσεις Euler - Lagrange που διέπουν την κίνηση. (β) Υπολογίστε τη χαμιλτονιανή συνάρτηση H που αντιστοιχεί σε αυτή τη Λαγκρανζιανή. (γ) Μπορείτε να υπολογίσετε την ένταση ενός ομογενούς μαγνητικού πεδίου, ώστε η παραπάνω Χαμιλτονιανή να περιγράφει την επίπεδη κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου μέσα στο πεδίο αυτό, θεωρώντας ότι στο σωματίδιο δρα επιπλέον ένας ανεστραμμένος (απωθητικός) αρμονικός ταλαντωτής; δ) Διατηρείται η κινητική ενέργεια $E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2}m(\dot{x}^2+\dot{y}^2)$; Διατηρείται η Χαμιλτονιανή H;

10. Αν η Χαμιλτονιανή ενός σωματιδίου που κινείται σε μία διάσταση είναι η H, δείξτε ότι η θέση του σωματιδίου σε κάθε χρονική στιγμή

t μπορεί να υπολογιστεί από το ανάπτυγμα

$$\begin{aligned} x(t) &= x(0) + \frac{t}{1!}\{x, H\}_{t=0} + \frac{t^2}{2!}\{\{x, H\}, H\}_{t=0} + \\ &+ \frac{t^3}{3!}\{\{\{x, H\}, H\}, H\}_{t=0} + \ldots \end{aligned}$$

Όλες οι αγκύλες Poisson υπολογίζονται τη χρονική στιγμή $t = 0$. Χρησιμοποιήστε το παραπάνω ανάπτυγμα για να βρείτε την εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου μέσα στο ομογενές βαρυτικό πεδίο της Γης, περιοριζόμενοι μόνο στην κατακόρυφη κίνηση.

11. Προσδιορίστε τον κανονικό μετασχηματισμό που ορίζεται από τη συνάρτηση
$$F_1(q, Q, t) = \frac{(q-Q)^2}{2t} .$$
Τι συμβαίνει στο μετασχηματισμό όταν στο όριο $t \to 0$ είναι $q - Q = \mathcal{O}(t)$; Προσδιορίστε τη Χαμιλτονιανή που διέπει τη δυναμική στις νέες συντεταγμένες.

12. Γράψτε την εξίσωση Hamilton-Jacobi για τον αρμονικό ταλαντωτή
$$L = \frac{1}{2}\left(\dot{q}^2 - q^2\right) .$$
Υπολογίστε τη συνάρτηση-δράση $S = \int L dt$ και επαληθεύστε ότι αυτή επιλύει την εξίσωση Hamilton-Jacobi του αρμονικού ταλαντωτή.

13. Θεωρήστε τη Λαγκρανζιανή $L(x, \dot{x}, \ddot{x}, t)$ η οποία, εκτός των άλλων εξαρτάται και από ανώτερες παραγώγους. Μπορείτε να κατασκευάσετε χαμιλτονιανή θεωρία για αυτή τη Λαγκρανζιανή; (Φ. Χατζηϊωάννου)

14. Θεωρήστε τη γραμμικοποιημένη Λαγκρανζιανή (8.113), του Κεφαλαίου 8, που διέπει μικρές ταλαντώσεις μιας αλυσίδας μέσα σε ομογενές πεδίο βαρύτητας. Προσδιορίστε τις κανονικές ορμές που αντιστοιχούν στις γωνίες και κατασκευάστε τη χαμιλτονιανή συνάρτηση της αλυσίδας. Στη συνέχεια γράψτε τις εξισώσεις του Χάμιλτον.

15. Θεωρήστε τη λαγκρανζιανή συνάρτηση
$$L = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{q}}^T \mathbf{A} \dot{\mathbf{q}} - V(\mathbf{q}) ,$$
όπου $\mathbf{A}$ συμμετρικός πίνακας. Αποδείξτε ότι και ο $\mathbf{B} = \mathbf{A}^{-1}$ είναι συμμετρικός πίνακας και δείξτε ότι η αντίστοιχη χαμιλτονιανή συνάρτηση είναι η
$$H = \frac{1}{2}\mathbf{p}^T \mathbf{B} \mathbf{p} + V(\mathbf{q}) .$$
Γράψτε τις εξισώσεις του Χάμιλτον και προσδιορίστε τα σημεία ισορροπίας της. Στη συνέχεια κατασκευάστε τις γραμμικοποιημένες εξισώσεις κίνησης και προσδιορίστε τη Χαμιλτονιανή που τις παράγει.

16. Θεωρήστε μικρές κινήσεις των δύο συζευγμένων εκκρεμών που αναλύσαμε στο εδάφιο 8.2. Η κίνησή τους διέπεται από τη Λαγκρανζιανή (8.12). Δείξτε ότι οι εξισώσεις του Χάμιλτον μπορούν να γραφούν στη μορφή

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ p_1 \\ \theta_2 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\omega^2 & 0 & -\omega_k^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -\omega_k^2 & 0 & -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \theta_1 \\ p_1 \\ \theta_2 \\ p_2 \end{pmatrix}$$

όπου $\omega^2 = \omega_g^2 + \omega_k^2$. Θέτοντας λύσεις της μορφής $ae^{-i\Omega t}$ στην παραπάνω εξίσωση προσδιορίστε τους χαρακτηριστικούς τρόπους ταλάντωσης στο χώρο των θέσεων και των ορμών. Κάθε χαρακτηριστικός τρόπος ταλάντωσης προσδιορίζεται από τη στήλη a που έχει τέσσερα στοιχεία.