

Νευτώνεια Μηχανική

Θεοχάρης Α. Αποστολάτος & Πέτρος Ι. Ιωάννου

Αθήνα
2016

©2016 – Θεοχάρης Α. Αποστολάτος & Πέτρος Ι. Ιωάννου
all rights reserved.

Περιεχόμενα

Πρόλογος – οδηγίες ανάγνωσης	v
1 Οι νόμοι του Νεύτωνα	1
1.1 Τα πρώτα πνευματικά άλματα προς μια θεωρία Φυσικής	1
1.2 Σχόλια σχετικά με τους τρεις νόμους του Νεύτωνα	8
2 Δυνάμεις και κίνηση	15
2.1 Τα όρια ισχύος της νευτώνειας μηχανικής	15
2.2 Περί θεμελιωδών νόμων και δυνάμεων	17
2.3 Μοναδικότητα της λύσης των εξισώσεων κίνησης	20
2.4 Και τώρα πλέον η λύση	22
3 2ος νόμος: συμμετρίες και μέθοδοι επίλυσης	29
3.1 Συμμετρίες των εξισώσεων	29
3.2 Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα πηγάζει από συμμετρίες	33
3.3 Αναλυτική επεξεργασία του 2ου νόμου σε ειδικές περιπτώσεις	35
3.3.1 Δυνάμεις με αμιγή χρονοεξάρτηση	35
3.3.2 * Συναρτήσεις δέλτα – συναρτήσεις Green	37
3.3.3 Δυνάμεις με αμιγή εξάρτηση από την ταχύτητα	41
3.3.4 Δυνάμεις με αμιγή εξάρτηση από τη θέση	43
4 Ενέργεια & Χώρος φάσεων	47
4.1 Μονοδιάστατη κίνηση εντός δυναμικού – Διαγράμματα Φάσης	47
4.2 * Η περίοδος κρυμμένη στο χώρο των φάσεων	57
4.3 * Θεώρημα Liouville	64
5 Αρμονικές Ταλαντώσεις	69
5.1 Ο αρμονικός ταλαντωτής	69
5.2 Η γραμμικότητα του αρμονικού ταλαντωτή	72
5.3 Λύση του αρμονικού ταλαντωτή, βάσει της γραμμικότητάς του	75
5.4 Πώς μπορούμε να ελέγξουμε εάν ένα φυσικό σύστημα είναι γραμμικό.	78
5.5 Ισοχρονικότητα του αρμονικού ταλαντωτή	80
5.6 Αρμονικός ταλαντωτής με γραμμική απόσβεση	83
5.7 Η κρίσιμη απόσβεση	88
6 Διέγερση – Συντονισμός	91
6.1 Ταλαντωτής σε διέγερση	91
6.2 Συντονισμός	95
6.3 * Συσχέτιση με ηλεκτρικές ταλαντώσεις	99

6.4	* Τυχαία διεγείρουσα δύναμη	104
6.5	Η ροή ενέργειας κατά τη διέγερση	106
6.6	Συντονισμός ταλαντωτή χωρίς απόσβεση	111
6.7	* Ροή ενέργειας στην κατάσταση στατιστικής ισορροπίας	113
7	Διανύσματα	121
7.1	Τι είναι τα διανύσματα	121
7.2	Διανυσματική άλγεβρα	128
7.3	Πίνακες στροφής και ορθογώνιοι μετασχηματισμοί	130
7.4	Διανύσματα και ψευδοδιανύσματα	133
7.5	Μέτρο διανύσματος	135
7.6	Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων	138
7.7	Υπολογισμός της παραγώγου εσωτερικού γινομένου – Γεωμετρική ερμηνεία της βαθμίδας	142
7.8	Διανύσματα στη γεωμετρία	146
7.9	Το φυσικό νόημα της απόκλισης πεδίου	148
7.10	Διατήρηση της ενέργειας σωματιδίου	152
7.11	Συντηρητικές κεντρικές δυνάμεις	158
7.12	Αθροιστική σύμβαση – Τανυστές	160
8	Εξωτερικό γινόμενο & περιστροφές	169
8.1	Εξωτερικό γινόμενο	169
8.2	Αλγεβρικές ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου	173
8.3	Τριπλά γινόμενα	174
8.4	Στροφορμή	177
8.5	Στροφές περί άξονα – Κυκλική κίνηση	178
8.6	Κίνηση σωματιδίου σε σταθερό μαγνητικό πεδίο	181
9	Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες	191
9.1	Οι νόμοι του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες	191
9.2	Κυκλική κίνηση στο επίπεδο	195
9.3	Οι εξισώσεις του Νεύτωνα στο επίπεδο με ενδογενείς συντεταγμένες	197
9.4	Το επίπεδο μαθηματικό εκκρεμές	201
9.5	* Εξαναγκασμένη ταλάντωση του εκκρεμούς στο επίπεδο	210
9.6	* Κίνηση επί έλικας σε ομογενές πεδίο βαρύτητας - Τρίεδρο του Frenet	214
10	Στροβιλισμός & συντηρητικά πεδία	225
10.1	* Στροβιλισμός πεδίου δυνάμεων	225
10.2	Το θεώρημα του Stokes	230
10.3	Υπολογισμός των συνιστωσών του στροβιλισμού	232
10.4	Συντηρητικά πεδία σε τρεις διαστάσεις και στροβιλισμός	234
10.5	* Σχόλιο περί των αστρόβιλων πεδίων	237
11	Κέντρο μάζας	241
11.1	Κέντρο μάζας – Κρούσεις	241
11.2	Διατήρηση της ορμής σε περισσότερες της μιας διάστασης	248
11.3	Αλληλεπίδραση δύο σωματιδίων	249
11.4	* Συστήματα μεταβλητής μάζας	253

12	Κρούσεις	259
12.1	Κρούσεις σε μία ή περισσότερες διαστάσεις	259
12.2	Κρούσεις σε τρεις διαστάσεις	265
13	Κεντρικές δυνάμεις – Θεμελιώδεις δυνάμεις	271
13.1	Κεντρικές δυνάμεις και ισοτροπία	271
13.2	Κεντρικό πεδίο δυνάμεων, ισοτροπικών και μη	272
13.3	Στροφορμή συστήματος πολλών σωματιδίων	279
13.4	Ενεργός Δυναμική ενέργεια	282
13.5	Υποψήφια πεδία για κλειστές τροχιές	287
13.6	* Το θεώρημα του Bertrand	290
13.7	Ο ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής	295
13.8	Η βαρυτική δύναμη	300
13.9	Τροχιές πλανητών - Νόμοι Κέπλερ	303
13.10	Σκέδαση	311
13.10.1	Βαρυτική σκέδαση	314
14	Βαρύτητα	323
14.1	Βαρυτική Έλξη	323
14.2	Νόμος του Gauss	329
14.3	Υπολογισμός πεδίων μέσω του νόμου του Gauss	332
14.4	Δυναμικό εντός και εκτός μιας ομογενούς σφαίρας	337
14.5	Δυναμική ενέργεια βαρυτικού πεδίου	339
14.6	Βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σφαιρών - πλανητών	343
14.7	Παλιρροϊκές δυνάμεις	345
14.8	Πολυπολικές ροπές	352

Πρόλογος – οδηγίες ανάγνωσης

Το βιβλίο της Νευτώνειας Μηχανικής αποτελεί εκτενή εξέλιξη των σημειώσεων του Μαθήματος «*Μηχανική Ι*» που διδάσκουμε επί τουλάχιστον μια δεκαπενταετία στο Τμήμα Φυσικής του Πανεπιστημίου Αθηνών.

Στόχος μας δεν ήταν να προσθέσουμε άλλο ένα σύγγραμμα το οποίο να παρουσιάζει μια προσωπικής αισθητικής μίξη υλικού πάνω σε ένα αντικείμενο για το οποίο έχουν γραφεί πάμπολλα εγχειρίδια, κάποια από αυτά μάλιστα ιδιαίτερος εμπνευσμένα. Στόχος μας ήταν να αναδιαμορφώσουμε τη θεώρηση των φοιτητών μας σχετικά με τις βάσεις της Φυσικής και τη σχέση της με τα Μαθηματικά. Τα Μαθηματικά αποτελούν την ίδια τη γλώσσα της Φυσικής και όχι απλώς ένα τεχνικό εργαλείο προσέγγισης της φυσικής πραγματικότητας. Για το λόγο αυτό επικεντρωθήκαμε στο να παρουσιάσουμε τις μαθηματικές βάσεις στην απλούστερή τους θεμελιώδη μορφή, αποφεύγοντας να χρησιμοποιήσουμε τεχνικά και περίπλοκα Μαθηματικά στη διερεύνηση λύσεων των Νευτώνειων νόμων. Επιμείναμε στην ιδιαιτερότητα της εκθετικής λύσης είτε για την προσέγγιση των ταλαντωτών, είτε στην ανάλυση των τροχιών σε ένα ομογενές ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο, είτε για την κατασκευή των ελλειπτικών τροχιών των πλανητών, τονίζοντας παράλληλα τη σημασία των γραμμικών διαφορικών εξισώσεων στη Φυσική. Δώσαμε ιδιαίτερη σημασία στο φυσικό νόημα και στη χρήση των διανυσμάτων, αφού όπως παρατηρήσαμε, οι φοιτητές μας δυσκολεύονται ιδιαίτερα με την ορθή χρήση αυτών. Τέλος, τονίσαμε, από το πρώτο ακόμη κεφάλαιο, τη σημασία της συμμετρίας στη Φυσική μιλώντας σε γλώσσα καθημερινή και αποφεύγοντας τους μαθηματικούς ορισμούς.

Σε αρκετά σημεία η ανάλυση που ακολουθήσαμε δεν ήταν η πιο εύκολη και απλή, αλλά αυτή που εξυπηρετούσε τη δομή του εκάστοτε κεφαλαίου και τη συνέχεια της λογικής δομής. Επίσης, ως φόρο τιμής στο Νεύτωνα, το πνευματικό δημιουργήμα του οποίου μελετάμε, και στη Γεωμετρία, η οποία δυστυχώς παραγκωνίστηκε τα τελευταία χρόνια από το εκπαιδευτικό μας σύστημα ως δευτερεύουσας σημασίας, προσπαθήσαμε σε πολλά σημεία να προτείνουμε μια πιο γεωμετρική προσέγγιση σε διάφορες αποδείξεις και κατασκευές. Τα σχήματα κατασκευάστηκαν από τους ίδιους τους συγγραφείς είτε με πακέτα διανυσματικών γραφικών (inkscape), είτε με τη βοήθεια μαθηματικών πακέτων όπως η Mathematica και η Matlab.

Το υπόβαθρο που απαιτείται από τον αναγνώστη είναι η καλή κατανόηση βασικών εννοιών από την Ανάλυση, όπως αυτή του ορίου, της συνέχειας, της παραγωγισιμότητας και της ολοκληρωσιμότητας. Το ανάπτυγμα Taylor παίζει κεντρικό ρόλο στην παρουσίασή μας και καλό θα ήταν ο αναγνώστης να μπορεί να το χειρίζεται με κάποια άνεση. Αν και τα διανύσματα παρουσιάζονται από μηδενική βάση καλό θα ήταν ο αναγνώστης να επαναλάβει όλες τις πράξεις μόνος του και να αναρωτηθεί σε κάθε βήμα σχετικά με την αναγκαιότητα γραφής του κάθε μαθηματικού συμβόλου, ακόμη και τη χρήση ή μη της τελείας (\cdot) του εσωτερικού γινομένου ή του συμβόλου του εξωτερικού γινομένου (\times).

Το βιβλίο μας, σε αντίθεση με τα περισσότερα εγχειρίδια Μηχανικής, ακολουθεί διαφορετική πορεία: αρχικά μελετά ένα σωματίδιο σε μια διάσταση ώστε να εκπαιδευτεί ο αναγνώστης στις φυσικές έννοιες στην πιο απλοϊκή μορφή τους (χωρίς τη χρήση διανυσμάτων). Με τον τρόπο αυτό όχι μόνο διευκολύνεται, πιστεύουμε, η εμπέδωση της σημασίας κάποιων πρωταρχικών φυσικών εννοιών, αλλά καθίσταται ευκολότερο να κατανοήσει κανείς τι καινούργιο κομίζουν στη Φυσική οι τρεις διαστάσεις. Κάθε κεφάλαιο συνοδεύεται στο τέλος του από μια σύντομη αναφορά των βασικών εννοιών που παρουσιάζονται έτσι ώστε ο αναγνώστης να έχει μια συνολικότερη εικόνα των όσων αναπτύσσονται στο κυρίως κείμενο. Σε διάφορα κεφάλαια εμπεριέχονται κάποια πλαίσια στα οποία είτε αναπτύσσεται κάποια μαθηματική οντότητα ή σχέση, είτε διατυπώνονται κάποια προβλήματα που ανακύπτουν αβίαστα από την υπόλοιπη ροή του κειμένου. Κάποια εδάφια που σημειώνονται με αστερίσκο στον τίτλο τους θα μπορούσαν να παραλειφθούν σε μια πρώτη ανάγνωση, αν και θα συνιστούσαμε τη μελέτη τους σε φοιτητές που έχουν μια ιδιαίτερη έφεση στη θεωρητική προσέγγιση. Ο ενδιαφερόμενος αναγνώστης θα μπορούσε να ανατρέξει στη σελίδα μας που φιλοξενεί το Πανεπιστήμιο Αθηνών και η οποία είναι αφιερωμένη στο μάθημα αυτό για να βρει σωρεία προβλημάτων (Εβδομαδιαίες ασκήσεις & Προηγούμενα Διαγωνίσματα) προκειμένου να εξασκηθεί περαιτέρω (<http://users.uoa.gr/~pjioannou/mech1>).

Θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον Ομότιμο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών Αθανάσιο Λαχανά για την εποικοδομητική κριτική που μας άσκησε ως κριτικός αναγνώστης του βιβλίου. Επίσης θα θέλαμε να ευχαριστήσουμε τον Ομότιμο Καθηγητή του Πανεπιστημίου Αθηνών Φωκίωνα Χατζηϊωάννου, οι εμπνευσμένες σημειώσεις του οποίου, γραμμένες σχεδόν μισόν αιώνα νωρίτερα, και οι συζητήσεις μαζί του αποτέλεσαν έναν εξαιρετο οδηγό στην προσπάθεια συγγραφής του παρόντος εγχειριδίου. Δυστυχώς δεν καταφέραμε να είμαστε τόσο λακωνικοί όσο ο δάσκαλός μας. Θα θέλαμε τέλος να ευχαριστήσουμε τους φοιτητές μας που όλα αυτά τα χρόνια μοιράστηκαν μαζί μας τον ενθουσιασμό στη διδασκαλία του μαθήματος και με τις ενδιαφέρουσες ερωτήσεις και παρατηρήσεις τους μάς ενέπνευσαν σε πολλά σημεία.

Πέτρος Ιωάννου & Θεοχάρης Αποστολάτος
Ιανουάριος 2016

χρόνως ένα νέο τομέα των μαθηματικών που ονομάστηκε από τον ίδιο λογισμός των ροών (fluxion), ενώ σήμερα είναι ευρύτερα γνωστός ως διαφορικός και απειροστικός λογισμός. Με αυτό τον τρόπο οικοδομείται αρχικά από τον Γαλιλαίο και αργότερα τον Νεύτωνα το πρώτο παράδειγμα φυσικής θεωρίας όπου τα μαθηματικά χρησιμοποιούνται συστηματικά για τον προσδιορισμό των φυσικών επιπτώσεων των θεμελιωδών νόμων. Η πνευματική αυτή πορεία του Γαλιλαίου και του Νεύτωνα αποτελεί πρότυπο για τη θεμελίωση της σύγχρονης θεωρητικής φυσικής.²

Μέχρι την εποχή του Γαλιλαίου κυριαρχούσε στο χώρο των επιστημών της φύσης και της φιλοσοφίας η Φυσική του Αριστοτέλη. Ο Αριστοτέλης [-384/-322] επιχειρήσε για πρώτη φορά να διατυπώσει αρχές δυναμικής που διέπουν την κίνηση των σωμάτων. Ο Αριστοτέλης ισχυριζόταν ότι για να κινείται ένα σώμα με σταθερή ταχύτητα u , θα πρέπει να ασκείται συνεχώς επάνω του μια σταθερή δύναμη F :

$$F = ku. \quad (1.1)$$

Ο δυναμικός αυτός νόμος, δεν εκφράζεται με μαθηματικές σχέσεις στο βιβλίο του Αριστοτέλη *Φυσικά*, παρά με προσεκτικά διατυπωμένες προτάσεις και ποσοτικά δοσμένα παραδείγματα,³ τα οποία αφήνουν την υπόνοια ότι ο Αριστοτέλης, ή κάποιος μαθητής του, εκτέλεσαν σχετικά πειράματα. Η αντίληψη του Αριστοτέλη, η οποία ήταν συμβατή με την καθημερινή εμπειρία, επέφερε αλλαγές στον πρότερο τρόπο θεώρησης του κόσμου. Κατά τον Αριστοτέλη, η φυσική κατάσταση των σωμάτων, δηλαδή όταν σε αυτά δεν ασκείται δύναμη, είναι η κατάσταση ακινησίας και συνεπώς ο χώρος είναι απόλυτος (όντας συνυφασμένος με τη φυσική αυτή κατάσταση της ακινησίας).⁴

Η εξέχουσα αυθεντία του Αριστοτέλη στιγμάτισε την κρατούσα κοσμολογία μέχρι και το Μεσαίωνα, και τέθηκε σε ουσιαστική αμφισβήτηση από τον Γαλιλαίο, ο οποίος και συγκρούστηκε με την κυρίαρχη αυτή αντίληψη. Ο Γαλιλαίος οικοδόμησε την αντιαριστοτελική κριτική στα βιβλία του *De Motu Antiquiora* (*Παλαιότερα έργα*

²Συνηθίζεται να τονίζεται περισσότερο η συμβολή του Νεύτωνα από εκείνη του Γαλιλαίου και πολλές φορές ο τομέας αυτός της Φυσικής αναφέρεται ως Νευτώνεια Μηχανική, όπως η Γεωμετρία αναφέρεται ως Ευκλείδεια Γεωμετρία με τη έννοια ότι επικεντρώνεται στο λογικό οικοδόμημα του Ευκλείδη και δεν αναφέρεται στις άλλες Γεωμετρίες. Μετά τις εξελίξεις της Φυσικής του 20ου αιώνα τα επιχειρήματα του Γαλιλαίου, τα οποία αναδεικνύουν τη σχέση συμμετριών και νόμων της φύσης, αποκτούν ιδιαίτερο βάρος και έχουν θεμελιακή σημασία. Αν χαρακτηρίζαμε, με τη σημερινή ορολογία, τις εργασίες του Νεύτωνα ως *Μαθηματική Φυσική*, θα αποδίδαμε κατ' αναλογία στις εργασίες του Γαλιλαίου τον χαρακτηρισμό *Θεωρητική Φυσική*.

³Βλ. *Φυσικά* (μτφρ. Κ. Δ. Γεωργούλη), βιβλίο Η', 250α.

⁴Στο βιβλίο Δ' (215α) στο έργο του *Φυσικά* ο Αριστοτέλης επιχειρηματολογώντας κατά της έννοιας του κενού λέει: «Ώστε [ένα σώμα στο οποίο έχει πάψει να δρα πάνω του κάποια δύναμη] ή θα ερευθεί σε ηρεμία ή αναγκαστικά η φορά του θα εξακολουθεί επ' άπειρο, εκτός αν κάτι δυνατότερο του ανακόψει το δρόμο.» Αν και η πρόταση αυτή μοιάζει να λέει ότι και ο πρώτος νόμος του Νεύτωνα, στην πραγματικότητα η δεύτερη εκδοχή της πρότασης θεωρείται από τον Αριστοτέλη εντελώς παράλογη και χρησιμοποιείται για να απορρίψει την έννοια του κενού η οποία θα ήταν συμβατή με την παράλογη αυτή αέναη κίνηση.

περί της Κινήσεως) (1590), *Dialogo sopra i due massimi sistemi del mondo, ptolemaico e copernicano* (Διάλογοι περί των δύο κύριων κοσμοθεωριών: του Πτολεμαίου και του Κοπέρνικου) (1632) και *Discorsi e Dimostrazioni Matematiche intorno a due nuove scienze* (Διαλέξεις και μαθηματικές επιδείξεις σχετικές με τις δύο νέες επιστήμες) (1638)⁵ βασισμένος σε νοητικά πειράματα (βλ. Πλαίσιο 1.1) καθώς και σε απλά καθημερινά πειράματα που πραγματοποίησε με κεκλιμένα επίπεδα, από τα οποία προσπάθησε να αφαιρέσει την τριβή λειαινώντας επιμελώς ο ίδιος τις επιφάνειες. Για την ακρίβεια, ο Γαλιλαίος παρατηρώντας ότι τα σώματα που ολισθαίνουν προς τα κάτω σε ένα κεκλιμένο επίπεδο και στη συνέχεια ανέρχονται σε ένα δεύτερο κεκλιμένο επίπεδο, τείνουν να φθάσουν σε ύψος ίδιο με αυτό από το οποίο ξεκίνησαν, συμπέρανε ότι, αν το δεύτερο επίπεδο γίνει οριζόντιο, καταργώντας έτσι οποιαδήποτε δύναμη ασκείται στο σώμα κατά την ολίσθησή του πάνω σε αυτό, το σώμα θα συνεχίσει να κινείται επ' άπειρο! Προφανώς ο Γαλιλαίος αντιλήφθηκε ότι η λείανση των επιφανειών παίζει σημαντικό ρόλο στο να εξαλείψει έναν κρυφό δευτερογενή παράγοντα που αλλοιώνει πρακτικά την καθαρή συσχέτιση δύναμης (βάρους) και κίνησης.

Πλαίσιο 1.1

Τα νοητικά πειράματα, που αναφέρονται συχνά με τον αγγλικό όρο *thought experiments* ή τον γερμανικό *gedankenexperiment*, είναι υποθετικά πειράματα στα οποία διερευνώνται με λογικά επιχειρήματα οι επιπτώσεις μιας υπόθεσης ή μιας θεωρίας. Σύγχρονα γνωστά νοητικά πειράματα είναι ο δαίμονας του Maxwell, σύμφωνα με τον οποίο ένα νοήμων ον μπορεί να παραβιάσει το δεύτερο νόμο της θερμοδυναμικής, ή τα νοητικά πειράματα του Einstein για την έννοια του χωρόχρονου στη θεωρία της Σχετικότητας, καθώς και η γάτα του Schrödinger το οποίο αναδεικνύει τα παράδοξα στην ερμηνεία της Κβαντικής Μηχανικής. Εδώ παρουσιάζουμε ένα άλλο γνωστό νοητικό πείραμα: αυτό της ρίψης δύο σωμάτων από το πύργο της Πίζας που αναφέρεται στο βιβλίο του Γαλιλαίου *Διάλογοι περί των δύο κύριων κοσμοθεωριών*. Το πείραμα αρχίζει αφού έχουν συμφωνήσει οι δύο συνδιαλεγόμενοι (ο Salviati θιασώτης του Κοπέρνικου και ο αριστοτελικός Simplicio) ότι τα σώματα του πειράματος είναι φτιαγμένα από το ίδιο υλικό και η ταχύτητα που αποκτούν από την πτώση καθορίζεται πλήρως από τη «φύση». Εξετάζεται η αριστοτελική πρόταση ότι τα βαρύτερα σώματα πέφτουν πιο γρήγορα από τα ελαφρά.

⁵Ενώ το *De Motu Antiquiora* είναι γραμμένο στα Λατινικά, που ήταν η συνήθης γλώσσα επιστημονικής γραφής, στα υπόλοιπα βιβλία του ο Γαλιλαίος εγκαταλείπει τα Λατινικά και γράφει για πρώτη φορά επιστημονική πραγματεία στην κοινή Ιταλική (σε δημοτική (vulgata) δηλαδή γλώσσα), τονίζοντας με αυτό τον τρόπο ότι τα θέματα που πραγματευόταν αφορούσαν όλους και όχι μόνο τους θεολογικούς κύκλους. Οι *Διάλογοι περί των δύο κύριων κοσμοθεωριών: του Πτολεμαίου και του Κοπέρνικου* είχε τεράστια εκδοτική επιτυχία και όταν απαγορεύτηκε η κυκλοφορία του, πέντε μόλις μήνες μετά από την έκδοσή του, δεν είχε μείνει ούτε ένα αντίτυπο απούλητο. Το βιβλίο μεταφράζεται στα αγγλικά το 1661 και διαβάζεται από τον Νεύτωνα. Δεν γνωρίζουμε αν έχει μεταφραστεί μέχρι σήμερα στα Ελληνικά. Ίσως κάποιος από σας να επιχειρήσει να το μεταφράσει στα Ελληνικά. Επίσης οι *Principia* του Νεύτωνα, που γράφτηκε στα Λατινικά, δεν έχει μεταφραστεί ουδέποτε στα Ελληνικά.

Salviati: Αν τότε πάρουμε δύο σώματα που έχουν διαφορετικές φυσικές ταχύτητες, είναι προφανές ότι, δένοντάς τα, η κίνηση του ταχύτερου θα ανασχεθεί από το βραδύτερο, ενώ το βραδύτερο θα κινηθεί ταχύτερα επηρεαζόμενο από το ταχύτερο. Συμφωνείς με αυτή μου τη γνώμη;

Simplicio: Συμφωνώ.

Salviati: Μα αν τότε αυτό είναι ορθό, και υποθέσουμε για παράδειγμα ότι η μεγαλύτερη πέτρα πέφτει με ταχύτητα 8, ενώ η μικρότερη με ταχύτητα 4, τότε, όταν αυτές ενωθούν, το σύστημα των δύο πετρών θα πέφτει με ταχύτητα μικρότερη του 8, αν και το σύστημα αυτό είναι μία πέτρα η οποία είναι μεγαλύτερη και από τις δύο. Συνεπώς ένα βαρύτερο σώμα πέφτει με ταχύτητα που είναι μικρότερη από την ταχύτητα ενός ελαφρότερου σώματος, αντίθετα από την αρχική μας υπόθεση. Βλέπεις λοιπόν; Αν κάνουμε την υπόθεση ότι τα βαρύτερα σώματα πέφτουν πιο γρήγορα από τα ελαφρότερα συμπεραίνουμε τελικά ότι τα βαρύτερα πέφτουν πιο αργά από τα ελαφρότερα...

Με το νοητικό αυτό πείραμα ο Γαλιλαίος καταλήγει ότι όλα τα σώματα πέφτουν με την ίδια ταχύτητα στο πεδίο βαρύτητας της Γης. (Το πείραμα φαίνεται να αποδεικνύει, όμως, ότι τα βαρύτερα σώματα πέφτουν πιο γρήγορα όταν υπάρχει αντίσταση του αέρα. Τι πρέπει να αλλάξει στη διατύπωση των αρχών του πειράματος σε αυτή την περίπτωση;) Το νοητικό πείραμα του Γαλιλαίου είναι ιδιαίτερος σημαντικό, αποτελεί τη βάση του πειράματος του Εϊτνους (1889) για την αρχή της ισοδυναμίας μεταξύ της βαρυτικής μάζας (των μαζών που εμφανίζονται στο νόμο της παγκόσμιας βαρύτητας) και της αδρανειακής μάζας (της ποσότητας της ύλης που εμφανίζεται στο δεύτερο νόμο του Νεύτωνα). Τα πειράματα αυτά συνεχίζονται και η αρχή αυτή έχει επιβεβαιωθεί προς το παρόν με σχετική ακρίβεια 10^{-17} .

Ουσιαστικά η παρατήρηση του Γαλιλαίου είναι ισοδύναμη με τον πρώτο νόμο του Νεύτωνα (που θα εξετάσουμε παρακάτω), ότι δηλαδή η φυσική κατάσταση ενός ελεύθερου σώματος είναι η κίνηση και όχι η ακινησία (όπως ισχυριζόταν ο Αριστοτέλης). Ο Γαλιλαίος προχώρησε ακόμη περισσότερο, μελετώντας την κίνηση των σωμάτων που ολισθαίνουν σε κεκλιμένα επίπεδα διατυπώνοντας το νόμο της ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης. Ως χρονόμετρο χρησιμοποίησε ευφυέστατα το βάρος του νερού που έτρεχε από μια δεξαμενή μέσα σε ένα δοχείο καθ' όλη τη διάρκεια της κίνησης που μελετούσε.



Σχήμα 1.2: Σύγχρονη ανακατασκευή του κεκλιμένου επιπέδου που χρησιμοποίησε ο Γαλιλαίος. Τα καμπανάκια σε συγκεκριμένες θέσεις κατά μήκος του επιπέδου ίσως να είχαν χρησιμοποιηθεί από το Γαλιλαίο προκειμένου να μετράει με τα δοχεία νερού το χρόνο.

Ο Γαλιλαίος ήταν επίσης ο πρώτος που κατέληξε στην επαναστατική διαπίστωση ότι οι φυσικοί νόμοι είναι αναλλοίωτοι όταν ιδωθούν από διαφορετικά συστήματα αναφοράς, τα οποία κινούνται το ένα σε σχέση με το άλλο με σταθερή σχετική τα-

χύτητα (Γαλιλαϊκή σχετικότητα). Η ανακάλυψη αυτής της νέας συμμετρίας, όπως θα δούμε, αρκεί (για να είμαστε ακριβέστεροι, σχεδόν αρκεί) για να παράγει κανείς τους γνωστούς νευτώνειους νόμους και, υπό αυτή την έννοια, μπορεί να υποστηριχθεί ότι η σημαντικότερη ανακάλυψη του Γαλιλαίου ήταν η διαπίστωση αυτής της συμμετρίας, η οποία σήμερα φέρει τον τίτλο *γαλιλαϊκή συμμετρία*. Ο Γαλιλαίος ήταν αυτός ο οποίος θεώρησε τη δύναμη ως μηχανικό αίτιο και συνειδητοποίησε ότι το πρόβλημα της κίνησης των ουρανίων σωμάτων είναι ένα μηχανικό πρόβλημα που δεν διαφέρει σε τίποτε από τα προβλήματα με τα κεκλιμένα επίπεδα που μελετούσε στο εργαστήριό του. Παρ' ότι η ακριβής σχέση μεταξύ δύναμης και κίνησης διατυπώνεται τελικά από τον Νεύτωνα, σε ολόκληρο το έργο του ο Γαλιλαίος φαίνεται να συνειδητοποιεί την ύπαρξη μιας τέτοιας σχέσης. Η σημαντική πρόοδος που επιτεύχθηκε από τον Γαλιλαίο οφείλεται επίσης στην επαναστατική καινοτομία του να θεωρεί ότι οι νόμοι της Φύσης είναι γραμμένοι στη γλώσσα των Μαθηματικών. Η ιδέα αυτή ωριμάζει και υλοποιείται ουσιαστικά στα *Principia* του Νεύτωνα. Ο Γαλιλαίος γράφει στο βιβλίο του *Il Saggiatore* (*Ο Αναλυτής*) (1623):

Πιθανώς να νομίζει κανείς ότι η φιλοσοφία είναι ένα βιβλίο μυθιστοριογραφίας, όπως για παράδειγμα η Ιλιάδα, ή ο Μαινόμενος Ολλανδός, έργα στα οποία το ζήτημα αν όσα έχουν γραφεί είναι αληθινά είναι το λιγότερο σημαντικό απ' όλα. Όλη η φιλοσοφία είναι γραμμένη στο μεγάλο βιβλίο του Σύμπαντος, το οποίο είναι πάντοτε ανοικτό στο βλέμμα μας. Όμως το βιβλίο αυτό δεν μπορεί να γίνει κατανοητό, αν δεν μάθουμε πρώτα τη γλώσσα στην οποία είναι γραμμένο και δεν διδαχθούμε την αλφάβητο στην οποία είναι γραμμένο. Το βιβλίο αυτό είναι γραμμένο στη γλώσσα των μαθηματικών και οι χαρακτήρες του είναι τρίγωνα, κύκλοι και άλλα γεωμετρικά σχήματα, που χωρίς αυτά είναι ανθρωπίνως αδύνατο να κατανοηθεί έστω και μία λέξη· χωρίς τη γνώση αυτή περιπλανιόμαστε σε ένα σκοτεινό λαβύρινθο.

Η αρχή ότι η φύση υπακούει σε μαθηματικές αρχές και γλώσσα οδηγεί τον Γαλιλαίο στη διαπίστωση ότι μόνο αντικειμενικές ποσότητες, όπως για παράδειγμα η συμμετρία, ο αριθμός, το σχήμα, το μέγεθος, η θέση, η κίνηση, αρκούν για τη περιγραφή του φυσικού κόσμου. Η φύση είναι κάτι πέρα από τον άνθρωπο που τη μελετά, αποκτά ανεξάρτητη υπόσταση και είναι έτοιμη να μελετηθεί αυστηρά με τη γλώσσα των μαθηματικών. Είναι ενδιαφέρον ίσως ότι ο Γαλιλαίος αρνήθηκε να υιοθετήσει την ερμηνεία ότι οι θεωρίες του για τον κόσμο δεν είναι απλώς μαθηματικές θεωρίες αλλά φυσικές θεωρίες, ότι δεν είναι μαθηματικές υποθέσεις, αλλά περιγράφουν την πραγματικότητα. Αυτή είναι η ερμηνεία που του πρότεινε η Ιερά εξέταση

στη δίκη του το 1633 προκειμένου να αποφύγει την καταδίκη.⁶

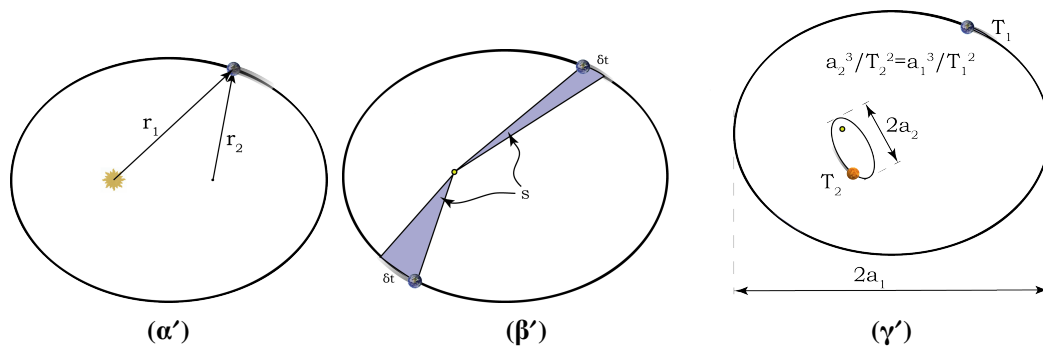
Παράλληλα με τις μελέτες του Γαλιλαίου, ο Δανός αστρονόμος Tycho Brahe (1546/1601) σχεδίασε και κατασκεύασε διάφορα αστεροσκοπεία, αρχικά στην Κοπεγχάγη και αργότερα στην Πράγα. (Το τηλεσκόπιο δεν είχε ακόμη εφευρεθεί, εφευρέθηκε από Ολλανδούς αστρονόμους το 1608 και από τον Γαλιλαίο το 1609.) Με οπτικές παρατηρήσεις ακριβείας, μέσω μεγάλων κινητών σκοπευτικών διατάξεων, ο Brahe συνέταξε αστρονομικούς πίνακες στους οποίους καθορίζονταν με μεγάλη ακρίβεια οι θέσεις των πλανητών στη διάρκεια του χρόνου. Το έργο του συνεχίστηκε από τον Γερμανό μαθητή του και εξαιρετο μαθηματικό Johannes Kepler (1571/1630). Ο Κέπλερ, επιτυγχάνοντας παρατηρήσεις ακόμη μεγαλύτερης ακρίβειας από το δάσκαλό του κατέληξε στους παρακάτω νόμους που περιγράφουν την κίνηση των πλανητών:⁷



Σχήμα 1.3: Οι μεγάλοι αστρονόμοι που τροφoδότησαν το Νεύτωνα με πλούσιο αστρονομικό υλικό.

⁶ Η διάσταση μεταξύ της Εκκλησίας και του Γαλιλαίου είναι ένα περίπλοκο ζήτημα: δεν πρόκειται για την τετριμμένη αντίθεση μεταξύ του καλού και του κακού, όπως έχει αποδοθεί και έχει γίνει ευρέως αποδεκτό. Η κατηγορία εναντίον του ήταν ότι πίστευε ότι ο Ήλιος ήταν το κέντρο του κόσμου. Σημειώστε ότι την εποχή εκείνη δεν υπήρχε καμία παρατήρηση που να αποδεικνύει ότι η Γη κινείται. (Τα πειράματα παράλλαξης την εποχή εκείνη δεν υποδείκνυαν καμία κίνηση της Γης. Η πρώτη παρατήρηση για τη κίνηση της Γης έγινε 200 περίπου χρόνια αργότερα, το 1838, από τον Bessel όταν μπόρεσε να μετρήσει την παράλλαξη του αστέρα 61 Cygni.) Είναι εύλογο να αναρωτηθούμε τι θα αποφάσιζε ένα σημερινό δικαστήριο αν δικάζε ένα παρόμοιο θέμα. Η διαμάχη αποδεικνύει την τραγική αδυναμία των ανθρώπων να αποδεχθούν μια πραγματικά επαναστατική αλλαγή. Η καθολική εκκλησία επανήλθε πρόσφατα στη δίκη του Γαλιλαίου. Το 1990 ο καρδινάλιος Ratzinger και μέλλον Πάπας Βενέδικτος ο 16ος σε ομιλία του στο Πανεπιστήμιο της Ρώμης υποστήριξε ότι «Η Εκκλησία την εποχή του Γαλιλαίου στάθηκε πιο κοντά στη λογική από τον ίδιο το Γαλιλαίο και έλαβε υπόψη της τις ηθικές και κοινωνικές επιπτώσεις της Γαλιλαϊκής διδασκαλίας. Η καταδίκη του Γαλιλαίου ήταν και λογική και δίκαιη και αναθεώρηση της καταδικαστικής αυτής απόφασης θα μπορούσε να γίνει μόνο για λόγους πολιτικής σκοπιμότητας.» Παρόλα αυτά το 1992 ο Πάπας Ιωάννης Παύλος ο 2ος ανέστρεψε την καταδίκη του Γαλιλαίου με το εξής σκεπτικό: «Με τη διαίσθηση ενός λαμπρού φυσικού και με διαφορετικά επιχειρήματα, ο Γαλιλαίος, ο οποίος κατ' ουσίαν εισήγαγε την πειραματική μέθοδο, κατάλαβε τον λόγο για τον οποίον ο Ήλιος μπορεί να είναι το κέντρο του κόσμου, όπως εθεωρείτο την εποχή εκείνη το κέντρο του πλανητικού συστήματος. Το λάθος των Θεολόγων της εποχής, οι οποίοι επέμεναν ότι η Γη είναι το κέντρο, ήταν βασισμένη στην αντίληψη ότι η δομή του φυσικού κόσμου, είναι με κάποιο τρόπο, αποτυπωμένη στα Ιερά Κείμενα...» (*L'Osservatore Romano* N. 44 (1264), Νοέμβριος 4, 1992). Μπορείτε να διαβάσετε μια ουσιαστική εκκλησιαστική απολογητική επί του θέματος στο βιβλίο του Langford «*Galileo, Science and the Church*», The University of Michigan Press, 1992.

⁷ Είναι εντυπωσιακό ακόμη και σήμερα πώς μέσα από παρατηρήσεις των γωνιακών θέσεων των πλανητών και όχι της ίδιας της απόστασής τους, και μάλιστα από την κινούμενη Γη, κατάφερε ο Κέπλερ να εξακριβώσει το είδος και τα χαρακτηριστικά των τροχιών των πλανητών στο χώρο. Αξίζει να δοκιμάσει κανείς να σχεδιάσει τις τροχιές των πλανητών με την ακρίβεια των πλανητικών τροχιών που γνωρίζουμε σήμερα και θα διαπιστώσει πόσο δύσκολο είναι να “δει” ότι οι τροχιές αυτές είναι ελλείψεις.



Σχήμα 1.4: Γραφική απεικόνιση των 3 νόμων του Κέπλερ

- (α) οι πλανήτες κινούνται σε ελλείψεις, τη μία από τις δύο εστίες των οποίων κατέχει ο Ήλιος (βλ. σχήμα 1.4(α')),
- (β) σε ίσους χρόνους η επιβατική ακτίνα που συνδέει τον Ήλιο με τον κάθε πλανήτη σαρώνει ίσα εμβαδά (βλ. σχήμα 1.4(β')),
- (γ) το τετράγωνο της περιόδου των πλανητών είναι ανάλογο με τον κύβο του μεγάλου ημιάξονα της ελλειπτικής τους τροχιάς, με σταθερά αναλογίας ίδια για όλους τους πλανήτες (βλ. σχήμα 1.4(γ')).

Ο Κέπλερ δημοσίευσε το 1609 τους δύο πρώτους νόμους του στο βιβλίο του *Nova Astronomia (Νέα Αστρονομία)*, ενώ χρειάστηκε δέκα ακόμη ολόκληρα χρόνια⁸ για να διατυπώσει, με βάση τις παρατηρήσεις του, τον 3ο νόμο του, τον οποίο παρουσίασε στο νέο του βιβλίο *Harmonices mundi (Αρμονία του Σύμπαντος)*.

Ο Νεύτωνας γεννήθηκε τη χρονιά που πέθανε ο Γαλιλαίος και έζησε στα χρόνια της σαρωτικής πανούκλας, η οποία αποδεκάτισε το μισό σχεδόν πληθυσμό της Ευρώπης. Σπούδασε στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ, μελετώντας, εκτός των μαθηματικών και των φυσικών επιστημών, και θεολογία και φιλοσοφία, όπως όριζε η παράδοση της εποχής. Παρότι ο Νεύτωνας, σε ηλικία μόλις 22 περίπου ετών, είχε καταλήξει σε εξαιρετικά συμπεράσματα σχετικά με τη δύναμη της παγκόσμιας έλξης και είχε επινοήσει τον απειροστικό λογισμό, εντούτοις, απέφυγε να δημοσιεύσει τις εργασίες αυτές (κάποια λανθασμένη θεώρηση σε νεαρή ηλικία τον έκανε εξαιρετικά προσεκτικό και διστακτικό στη δημοσιοποίηση των εργασιών του στη συνέχεια). Σε ηλικία 27 ετών έγινε καθηγητής στο Πανεπιστήμιο του Καίμπριτζ, καταλαμβάνοντας τη Λουκασιανή έδρα των Μαθηματικών, μια θέση την οποία μέχρι πρόσφατα κατείχε ο παγκοσμίως φήμης βρετανός φυσικός, Stephen Hawking. Ο Νεύτωνας γνώριζε καλά τα έργα του Κέπλερ και προσπάθησε να συσχετίσει την κίνηση των ουρανίων σωμάτων με την ελεύθερη πτώση των σωμάτων πάνω στη Γη. Η εργασία του περί παγκόσμιας έλξης έγινε γνωστή πολύ αργότερα, ύστερα από μια σχετική

⁸Πιθανώς αναζητώντας απεγνωσμένα κάποια συμπαντική νομοτέλεια στις κινήσεις των πλανητών.

ερώτηση που του έθεσε ο Edmond Halley. Την εποχή εκείνη γνωστοί βρετανοί φυσικοί επιστήμονες, όπως ο Wren, ο Halley και ο Hooke, αναρωτιόντουσαν αν μια δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου ($F \propto 1/r^2$) μπορούσε να οδηγεί στους νόμους του Κέπλερ σχετικά με την κίνηση των πλανητών. Είχαν κατανοήσει ότι στην περίπτωση κυκλικών κινήσεων, η δύναμη θα έπρεπε να είναι δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου. [Αποδείξτε το και εσείς.] Η απόδειξη του Νεύτωνα, ότι μια δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου οδηγεί σε ελλειπτικές τροχιές –σε συμφωνία με τις παρατηρήσεις του Κέπλερ– παρουσιάστηκε το 1684 υπό μορφή πραγματείας με τίτλο *De motu corporum in gyrum* (Περί της κινήσεως των σωμάτων σε τροχιά) στη Βασιλική Ακαδημία του Λονδίνου. Το 1687 ο Νεύτωνα δημοσίευσε τελικά το μνημειώδες έργο του *Philosophiae Naturalis Principia Mathematica*, στο οποίο διατυπώνονται οι 3 περίφημοι νόμοι της δυναμικής:

ΠΡΩΤΟΣ ΝΟΜΟΣ: Κάθε σώμα παραμένει στην κατάσταση ηρεμίας ή ομαλής κίνησης, στην οποία βρίσκεται αρχικά, εκτός εάν αναγκαστεί να μεταβάλλει την κατάσταση αυτή εξαιτίας των δυνάμεων που ασκούνται πάνω του.

ΔΕΥΤΕΡΟΣ ΝΟΜΟΣ: Η μεταβολή της κίνησης (κάτι που ο Νεύτωνα είχε καθορίσει προωτέρα ως την ποσότητα της ύλης επί την ταχύτητα, αυτό δηλαδή που σήμερα αποκαλούμε ορμή) είναι ανάλογη της ασκούμενης δύναμης και συντελείται στη διεύθυνση της ευθείας κατά την οποία εφαρμόζεται αυτή η δύναμη.

ΤΡΙΤΟΣ ΝΟΜΟΣ: Σε κάθε δράση αντιτίθεται πάντα μια ίση αντίδραση, ή με άλλα λόγια, οι αμοιβαίες δράσεις που ασκούν δύο σώματα, το ένα στο άλλο, είναι πάντα ίσες και αντίθετες.

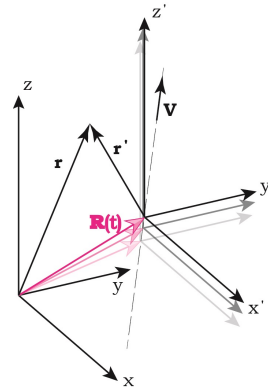
Ο Νεύτωνα χρησιμοποίησε τους τρεις αυτούς νόμους, μαζί με ένα σύνολο ορισμών, για να επιλύσει προβλήματα κίνησης μηχανικών συστημάτων υπό την επενέργεια συγκεκριμένων δυνάμεων. Η δομή του βιβλίου του, ακολουθώντας μια σειρά προτάσεων και πορισμάτων, θυμίζει τα *Στοιχεία* του Ευκλείδη. Είναι μάλιστα εντυπωσιακό ότι όλες οι αποδείξεις που παρουσιάζονται στο βιβλίο του Νεύτωνα είναι καθαρά γεωμετρικές, χωρίς να χρησιμοποιούνται σε αυτές καθόλου στοιχεία Ανάλυσης, σε πλήρη αντίθεση με τον τρόπο που παρουσιάζονται οι ίδιες αυτές αποδείξεις σε σύγχρονα βιβλία.

1.2 Σχόλια σχετικά με τους τρεις νόμους του Νεύτωνα

- Σε πρώτη ανάγνωση, ο πρώτος νόμος φαίνεται να πηγάζει από τον δεύτερο. Πράγματι, αρκεί να μηδενίσει κανείς τη δύναμη και αμέσως από το 2ο νόμο προκύ-

ππει ότι η ταχύτητα του σώματος θα παραμείνει η ίδια. Προτού αναζητήσουμε τη λύση σε αυτό το αίνιγμα της φαινομενικής ταύτισης των δύο νόμων στην ειδική περίπτωση απουσίας δύναμης, ας αναρωτηθούμε αν θα μπορούσαμε να μετρήσουμε την κίνηση ενός σώματος, αν δεν διαθέταμε εξ αρχής κάποιο σύστημα αναφοράς με βάση το οποίο θα παρακολουθούμε και θα περιγράψουμε την κίνηση του σώματος αυτού. Ο 1ος λοιπόν νόμος, με ομολογουμένως κάπως μυστικιστική διατύπωση, είναι ο νόμος που καθορίζει το είδος των συστημάτων αναφοράς τα οποία είναι κατάλληλα για να περιγράψουν σωστά (σύμφωνα με το 2ο νόμο) την κίνηση των σωμάτων υπό την επίδραση δοσμένων δυνάμεων.

Τα συστήματα αυτά, ως προς τα οποία τα ελεύθερα σωματίδια κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά, καλούνται *αδρανειακά συστήματα*. Αφού οι βαρυτικές δυνάμεις έχουν άπειρη εμβέλεια και η ύλη δεν έχει τρόπο να θωρακιστεί από αυτές, είναι αδύνατο θεωρητικά να κατασκευάσουμε ελεύθερα σωματίδια και μαζί με αυτά και αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Μπορούμε, όμως, με αρκετά καλή προσέγγιση να θεωρήσουμε ως αδρανειακό σύστημα ένα σύστημα το οποίο είναι ακίνητο σε σχέση με τους μακρινούς απλανείς αστέρες, όπως και κάθε άλλο σύστημα, το οποίο κινείται ευθύγραμμα και με σταθερή ταχύτητα σε σχέση με το πρώτο. Στο ερώτημα γιατί τα συστήματα αυτά είναι κατά μεγάλη προσέγγιση αδρανειακά, μπορεί κανείς να απαντήσει με το ακόλουθο επιχειρήμα: Θεωρώντας ότι όλες οι αλληλεπιδράσεις εξασθενούν με την απόσταση, ένα σώμα που βρίσκεται πολύ μακριά από κάθε ουράνιο σώμα, είναι σχεδόν ελεύθερο⁹ και κατά συνέπεια αναμένεται να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά σε σχέση με τα ουράνια σώματα. Το σύστημα λοιπόν των απλανών αστέρων είναι περίπου αδρανειακό. Σύμφωνα με ένα δεύτερο σύστημα (βλ. σχήμα 1.5), το οποίο κινείται με σταθερή ταχύτητα \mathbf{V} σε σχέση με το πρώτο, το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση \mathbf{r}' που διαφέρει από τη θέση \mathbf{r} του σωματιδίου (όπως αυτή μετρείται από το πρώτο σύστημα), κατά



Σχήμα 1.5: Συσχέτιση των παρατηρήσεων δύο συστημάτων αναφοράς.

$$\mathbf{r} - \mathbf{r}' = \mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0) + \mathbf{V} t \quad (1.2)$$

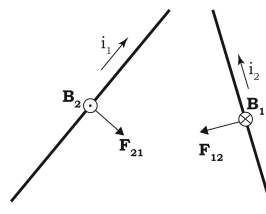
όπου $\mathbf{R}(0)$ η αρχική (για $t = 0$) απόσταση των δύο συστημάτων. Αν το σωματίδιο φαίνεται να κινείται ευθύγραμμα και ομαλά σε σχέση με το πρώτο σύστημα

⁹Η παρατήρηση αυτή αν και φαίνεται ευλογοφανής, επέφερε οξεία κριτική από μεταγενέστερους του Νεύτωνα επιστήμονες και μάλιστα όχι άδικα. Στη διάλεξη τη σχετική με τις βαρυτικές δυνάμεις θα δούμε ότι οι απειροελάχιστες αυτές δυνάμεις αθροιζόμενες μπορούν να έχουν σημαντική συνεισφορά.

($d\mathbf{r}/dt = \text{σταθ}$), είναι εύκολο να διαπιστώσετε ότι κινείται ευθύγραμμα και ομαλά και σε σχέση με το δεύτερο σύστημα ($d\mathbf{r}'/dt = d\mathbf{r}/dt - \mathbf{V} = \text{σταθ}$). Επομένως και το δεύτερο σύστημα είναι αδρανειακό. Ο μετασχηματισμός αυτός που μας μετέφερε από το ένα αδρανειακό σύστημα στο άλλο ονομάζεται *γαλιλαϊκός μετασχηματισμός*.

- Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα δεν είναι δυνατό να εκληφθεί ως ορισμός της δύναμης. Αν ήταν τέτοιος δεν θα είχε καμία αξία ως δυναμικός νόμος για τον καθορισμό της κίνησης των σωμάτων· θα ήταν απλώς ταυτολογία. Προκειμένου να έχει πρακτική σημασία ο νόμος αυτός, θα πρέπει η δύναμη να δοθεί ανεξάρτητα. Ο Νεύτωνας αναγνωρίζοντας το γεγονός αυτό, καθόρισε στο έργο του *Principia* τη βαρυτική δύναμη που αναπτύσσεται μεταξύ δύο σημειακών μαζών, προκειμένου να προσδιορίσει την κίνηση που προκαλεί αυτή η δύναμη στις εν λόγω μάζες.

- Ο 3ος νόμος μοιάζει εκ πρώτης όψεως με μια παρατήρηση, η οποία δεν φαίνεται να έχει ουσιαστική αξία για τον καθορισμό της κίνησης των μηχανικών συστημάτων, εφόσον οι δύο αντίθετες δυνάμεις δρουν σε διαφορετικά σώματα. Ο Νεύτωνας, όμως, αντιλήφθηκε την τεράστια σημασία που είχε η εισαγωγή ενός τέτοιου νόμου προκειμένου να επεκτείνει την εφαρμογή του δυναμικού



Σχήμα 1.6: Φαινομενική μη ισχύς του 3ου νόμου του Νεύτωνα.

νόμου (του 2ου νόμου του) από τα σωματίδια μηδενικών διαστάσεων, στα οποία αναφέρονται ρητά οι νόμοι του, σε εκτεταμένα υλικά στερεά σώματα. Με την εμφάνιση ίσων και αντίθετων δυνάμεων καταργείται οποιαδήποτε δύναμη θα μπορούσαμε ενδεχομένως να αποδώσουμε σε ένα σώμα εξαιτίας του εαυτού του, επειδή αυτό απαρτίζεται από πλήθος αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Έτσι δεν χρειάζεται να λάβουμε υπόψη καμία ιδιοδύναμη όταν θέλουμε να μελετήσουμε την κίνηση ενός στερεού (όπως για παράδειγμα της Γης), παρό μόνο όλες τις δυνάμεις που επενεργούν στο υπό μελέτη σώμα από τα άλλα γειτονικά του σώματα. Η διατύπωση του 3ου νόμου έδωσε τη δυνατότητα στον Νεύτωνα να αποφύγει να αναφερθεί σε ορισμένο τύπο σωμάτων, όσον αφορά την εφαρμογή των άλλων δύο νόμων. Σήμερα γνωρίζουμε καλά την σπουδαιότητα αυτού του φαινομενικά διαφορετικού νόμου. Πίσω από το νόμο αυτό της συμμετρίας των δυνάμεων αλληλεπίδρασης που ασκούνται μεταξύ των μερών ενός φυσικού συστήματος κρύβεται, όπως θα δούμε εκτενέστερα σε επόμενη διάλεξη, η διατήρηση της ορμής ενός απομονωμένου συστήματος –κάτι ανάλογο δηλαδή με τη διατήρηση της ταχύτητας ενός ελεύθερου σωματιδίου–, οσοδήποτε μεγάλο και αν είναι αυτό, π.χ. ένας ολόκληρος γαλαξίας. Αν και ο 3ος

νόμος του Νεύτωνα δεν ισχύει αυτολεξεί για όλα τα φυσικά συστήματα, παρά μόνο για τα μηχανικά συστήματα, εντούτοις, υπό την ευρύτερη έννοια της διατήρησης της ορμής, ο νόμος έχει καθολική εφαρμογή. Φανταστείτε για παράδειγμα δύο ευθύγραμμους ρευματοφόρους αγωγούς οι οποίοι δεν είναι παράλληλοι. Είναι εύκολο να διαπιστώσετε ότι οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ τους δεν είναι αντιπαράλληλες (βλ. σχήμα 1.6). Η φαινομενική αντίφαση εδώ οφείλεται στη μη αναφορά της ορμής που εμπεριέχεται στο μαγνητικό πεδίο, αφού και αυτό αποτελεί μια φυσική οντότητα που περιέχει ορμή.

- Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα, όπως προείπαμε, αναφέρεται μόνο σε αδρανειακούς παρατηρητές, δηλαδή σε μετρητές της κίνησης των σωμάτων βάσει αδρανειακών συστημάτων αναφοράς. Οποιαδήποτε απόπειρα εφαρμογής αυτού του νόμου από μη αδρανειακούς παρατηρητές μπορεί να προκαλέσει σύγχυση. Παρά ταύτα, η Γη, η εξέδρα όλων των γήινων πειραμάτων αλλά και της μελέτης των φυσικών φαινομένων που συμβαίνουν πάνω σε αυτή, συνηθίζουμε να την χρησιμοποιούμε ως βολικό σύστημα αναφοράς, αν και τυγχάνει να είναι περιστρεφόμενη και επομένως μη αδρανειακή. Φροντίζουμε, όμως, όταν η χρήση ενός τέτοιου συστήματος πρόκειται να επιφέρει σημαντικές διορθώσεις στους υπολογισμούς μας, να επινοούμε τεχνητές δυνάμεις ή ψευδοδυνάμεις (όπως για παράδειγμα η φυγόκεντρος δύναμη) που μοναδικό στόχο έχουν να κάνουν το μη αδρανειακό σύστημα να “λειτουργεί” ως αδρανειακό, ώστε να μπορεί τελικά κανείς να χρησιμοποιεί το δυναμικό νόμο του Νεύτωνα για τη διερεύνηση της κίνησης των σωμάτων ακόμη και σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς. Για παράδειγμα, αν το τονούμενο σύστημα που συναντήσαμε παραπάνω κινείται με σταθερή επιτάχυνση \mathbf{a} ως προς το άτονο αδρανειακό σύστημα, δηλαδή $\mathbf{R}(t) = \mathbf{R}(0) + \mathbf{V}t + \frac{1}{2}\mathbf{a}t^2$, θα έχουμε ότι

$$m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} - m\mathbf{a} = \mathbf{F} - m\mathbf{a} = \mathbf{F} + \mathbf{F}_{\psi\epsilon\upsilon\delta} . \quad (1.3)$$

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα λοιπόν παίρνει τη γνώριμη μορφή του, ακόμη και σε ένα μη αδρανειακό σύστημα, με την πρόσθεση μιας ψευδοδύναμης, της $-m\mathbf{a}$. Η χαρακτηριστική μάλιστα γραμμική εξάρτηση όλων των μη αδρανειακών δυνάμεων από τη μάζα του σώματος, γεννά υποψίες για το κατά πόσο η βαρύτητα είναι και αυτή μια τέτοιου είδους δύναμη.¹⁰

- Η διατύπωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα υπαγορεύει μια διανυσματική σχέση. Από τη στιγμή που η αλλαγή της ποσότητας κίνησης ενός σωματιδίου συμβαίνει στη διεύθυνση που ασκείται η δύναμη, δεν μπορεί παρά και η δύναμη να είναι διάνυσμα. Περισσότερα για το τι είναι ένα διάνυσμα θα δούμε στο Κεφάλαιο 7. Προς το παρόν

¹⁰ Αυτή υπήρξε μια από τις πιο γόνιμες σκέψεις του Einstein, η οποία τελικά τον οδήγησε στη διατύπωση της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας.

θα πρέπει να προσθέσουμε και κάτι το οποίο δεν απορρέει άμεσα από τους νόμους του Νεύτωνα και το οποίο ο Νεύτωνας φροντίζει να το διευκρινίσει. Όταν σε ένα σωματίδιο ασκούνται δύο ή περισσότερες δυνάμεις, μπορούμε να μελετήσουμε ανεξάρτητα τις αλλαγές στην κίνηση του σωματιδίου που θα προκαλούσε καθεμία από αυτές τις δυνάμεις από μόνη της και στη συνέχεια να υπολογίσουμε το διανυσματικό άθροισμα όλων αυτών των αλλαγών. Με άλλα λόγια ο τρόπος που προσθέτουμε τις δυνάμεις είναι ίδιος με τον τρόπο που προσθέτουμε τα διανύσματα θέσης: Ακολουθώντας τη μέθοδο του παραλληλογράμμου.¹¹

- Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα εισάγει μια σταθερά που εξαρτάται από το σώμα και η οποία καθορίζει πόσο πολύ θα αλλάξει η κίνηση του σώματος δεδομένων των ασκούμενων δυνάμεων. Μετράει δηλαδή την «απροθυμία» μεταβολής της κίνησης του σώματος –αυτό δηλαδή που έχουμε μάθει να ονομάζουμε αδράνεια. Ο Νεύτωνας διαπίστωσε ότι η σταθερά αυτή σχετίζεται με την ποσότητα ύλης του σώματος, πρόκειται δηλαδή γι' αυτό που αποκαλούμε μάζα του σώματος. Η έννοια της μάζας ενός σώματος, την οποία πρώτος ο Νεύτωνας χρησιμοποίησε με την παραπάνω σημασία, αποτελεί μια από τις λαμπρότερες συνεισφορές του στην Επιστήμη. Αν και καταρχήν θα μπορούσαμε να χρησιμοποιήσουμε το δεύτερο νόμο για τον καθορισμό της μάζας ενός σώματος (γνώση της δύναμης και μέτρηση της επιτάχυνσης οδηγεί στον καθορισμό της μάζας), πρακτικά κάτι τέτοιο θα ήταν δύσκολο να επιτευχθεί. Εξάλλου ποιος μας διαβεβαιώνει ότι η εκάστοτε ασκούμενη δύναμη σε ένα σώμα δεν εξαρτάται και αυτή από τη μάζα του σώματος, όπως για παράδειγμα η βαρυτική δύναμη; Ο τρίτος όμως νόμος σε συνδυασμό με το δεύτερο θα μας έλυνε τα χέρια όσον αφορά στον προσδιορισμό της μάζας των σωμάτων. Αν για παράδειγμα αφήσουμε δύο σώματα να αλληλεπιδράσουν μεταξύ τους (συνδέοντάς τα π.χ. με ένα ελατήριο) και έχοντας απομονώσει αυτά από οποιαδήποτε άλλη δύναμη, τα σώματα θα κινηθούν σε αντίθετες κατευθύνσεις σύμφωνα με τις σχέσεις:

$$\begin{aligned} F_{2 \rightarrow 1} &= m_1 \ddot{x}_1 \\ F_{1 \rightarrow 2} &= m_2 \ddot{x}_2 \end{aligned} \tag{1.4}$$

όπου $F_{i \rightarrow j}$ είναι η δύναμη που ασκείται από το i -στό σώμα στο j -στό σώμα (για ευκολία εδώ θεωρήσαμε ότι οι κινήσεις και οι δυνάμεις συμβαίνουν πάνω στην ευθεία

¹¹Στο σημείο αυτό θα πρέπει να τονιστεί ότι ανεξάρτητα με τη διανυσματικότητα των δυνάμεων, διατυπώνεται και η γραμμικότητα της αλληλεπίδρασης των δυνάμεων ανά ζεύγη σωματιδίων. Έτσι για παράδειγμα όταν έχουμε 3 σωματίδια η δύναμη που ασκεί το 2 στο 1 δεν επηρεάζεται από την ύπαρξη του 3. Οι δυνάμεις από το 2 και από το 3 στο 1, απλώς προστίθενται. Αυτό δεν ισχύει στον μικρόκοσμο των κουάρκ, όπου οι μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις μέσα σε ένα νουκλεόνιο εξαρτώνται από τις θέσεις και των τριών και δεν δίνεται απλώς ως ο γραμμικός συνδυασμός των αλληλεπιδράσεων όλων των ζευγών.

που συνδέει τα δύο σώματα). Λόγω του ότι $F_{2 \rightarrow 1} = -F_{1 \rightarrow 2}$, θα πρέπει

$$\frac{\ddot{x}_1}{\ddot{x}_2} = -\frac{m_2}{m_1}. \quad (1.5)$$

Αν επιπλέον έχουμε φροντίσει τα σώματα να ξεκινήσουν από κάποια αρχικά σημεία, με αρχική ταχύτητα μηδέν, ο λόγος των μετατοπίσεων από τις αρχικές τους θέσεις θα είναι αντιστρόφως ανάλογος του λόγου των μαζών τους:

$$\frac{|\Delta x_1|}{|\Delta x_2|} = \frac{m_2}{m_1}. \quad (1.6)$$

Θεωρώντας λοιπόν τη μάζα του ενός σώματος ως πρότυπη μάζα (ίση με 1), μπορούμε να καθορίσουμε τη μάζα οιοδήποτε άλλου σώματος, και μάλιστα χωρίς να χρειάζεται να γνωρίζουμε ποια ακριβώς είναι η δύναμη αλληλεπίδρασης! Μπορούμε ακόμη και να αλλάζουμε τη δύναμη αυθαίρετα από πείραμα σε πείραμα (αλλάζοντας π.χ. το ελατήριο) χωρίς να αλλοιώνουμε τη μετρητική αξία καθορισμού της μάζας οιοδήποτε σώματος.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 1

- Μια από τις βασικότερες συμβολές του Γαλιλαίου ήταν, εκτός από την εισαγωγή της πειραματικής μεθόδου, η πρόταση ότι η Φυσική είναι γραμμένη στη γλώσσα των Μαθηματικών.
- Αδρανειακά συστήματα: Τα συστήματα ως προς τα οποία τα ελεύθερα σωματίδια κινούνται ευθύγραμμα και ομαλά. Κάθε σύστημα που κινείται ευθύγραμμα και ομαλά ως προς ένα αδρανειακό σύστημα είναι αδρανειακό.
- Ψευδοδυνάμεις: Δυνάμεις τις οποίες πρέπει να προσθέσουμε στις πραγματικές δυνάμεις προκειμένου να εξακολουθήσει ο δυναμικός νόμος του Νεύτωνα να ισχύει και σε μη αδρανειακά συστήματα. Οι δυνάμεις αυτές έχουν τη μορφή

$$\mathbf{F} = -m\mathbf{a}_{\text{ΜΑΣ}}$$

όπου $\mathbf{a}_{\text{ΜΑΣ}}$ η επιτάχυνση του μη αδρανειακού συστήματος ως προς κάποιο αδρανειακό.

- Γαλιλαϊκή Συμμετρία: Η αναλλοiotητα των φυσικών νόμων σε αλλαγή αδρανειακού συστήματος αναφοράς.
- Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα οδηγεί σε μηδενισμό της συνολικής δύναμης ενός απομονωμένου συστήματος σωματιδίων ή ενός απομονωμένου σώματος μη μηδενικών διαστάσεων.
- Οι νόμοι του Κέπλερ είναι παρατηρησιακοί νόμοι και αφορούν ένα συγκεκριμένο φυσικό σύστημα, σε αντιδιαστολή με τους νόμους του Νεύτωνα

που είναι θεμελιακοί (τουλάχιστον για τη νευτώνεια μηχανική) και διέπουν τις κινήσεις όλων των σωμάτων.

2

Δυνάμεις και κίνηση

2.1 Τα όρια ισχύος της νευτώνειας μηχανικής

Θα μπορούσε να ισχυριστεί κάποιος ότι η νευτώνεια μηχανική είναι πλέον μια παλιά, ξεπερασμένη και, εν τέλει λανθασμένη, θεωρία, αφού καινούριες θεωρίες, που διατυπώθηκαν και ελέγχθηκαν διεξοδικά με πειράματα και παρατηρήσεις κατά τον 20ο αιώνα, δίνουν μια πιο σωστή και ακριβή περιγραφή του φυσικού μας κόσμου. Μήπως λοιπόν δεν έχει νόημα να ασχολείται κανείς σήμερα με τη νευτώνεια μηχανική;

Μια τέτοια αντιμετώπιση είναι βαθιά εσφαλμένη για πολλούς λόγους: Καταρχάς, η καθημερινή πρακτική αντιμετώπιση τεχνικών προβλημάτων βρίσκεται σε καταπληκτική συμφωνία με τους νόμους της νευτώνειας μηχανικής. Σε κάθε αντικείμενο που βρίσκεται σε κίνηση γύρω μας, οι νευτώνειοι νόμοι «δουλεύουν» απολύτως σωστά (στα πλαίσια της ακρίβειας που εξυπηρετεί τις καθημερινές εφαρμογές). Μάλιστα όχι μόνο τα μηχανήματα καθημερινής χρήσης, αλλά ακόμη και οι συσκευές προηγμένης τεχνολογίας, όπως τα διαστημόπλοια και άλλες διαστημικές συσκευές υπακούουν και αυτά πιστά στους νευτώνειους νόμους (οι επιστήμονες και οι μηχανικοί που σχεδιάζουν πτήσεις στο διάστημα εκτελούν όλους τους υπολογισμούς των τροχιών των διαστημοπλοίων βασιζόμενοι στη νευτώνεια μηχανική).¹ Το ίδιο

¹Πιθανώς εδώ θα έπρεπε να σημειώσουμε ότι τα διαστημικά συστήματα γεωγραφικού εντοπισμού, προκειμένου να είναι συγχρονισμένα και να μπορούν, έτσι, να δώσουν αρκετά μεγάλη ακρίβεια στον εντοπισμό μας θέσης πάνω στη Γη, χρειάζεται να εκτελούν σχετικιστικές διορθώσεις στα ρολόγια τους. Εντούτοις οι κινήσεις τους αυτές καθεαυτές μελετώνται και σχεδιάζονται αποκλειστικά βάσει της νευτώνειας μηχανικής: μόνο η μέθοδος προσδιορισμού της στιγμιαίας θέσης τους απαιτεί μη νευ-

το πλανητικό μας σύστημα, αλλά και οι γαλαξίες που μας περιβάλλουν κινούνται νευτώνεια με εξαιρετικά μεγάλη ακρίβεια.² Ύστερα από όλα αυτά θα ήταν μάλλον άδικο να θεωρήσουμε τη νευτώνεια μηχανική ξεπερασμένη.

Παράλληλα, όπως κάθε καινούρια θεωρία, έτσι και η νευτώνεια μηχανική έχει κάποια περιοχή ισχύος, πέραν της οποίας αρχίζει να δίνει εσφαλμένα αποτελέσματα. Η αμέσως επόμενη θεωρία που έρχεται να καλύψει τα λάθη της προηγούμενης, επεκτείνοντας έτσι την περιοχή ισχύος της πρώτης, μπορεί βέβαια να προσφέρει μια εντελώς ριζοσπαστική εικόνα — σε σχέση με την προηγούμενη θεωρία — για το πώς λειτουργεί η φύση· εντούτοις, στην περιοχή ισχύος της αρχικής θεωρίας και οι δύο θεωρίες δίνουν ταυτόσημες προβλέψεις. Διευρύνοντας, μέσω καινούριων θεωριών, την περιοχή ισχύος των φυσικών νόμων μπορεί η αντίληψη που αποκτούμε για τον κόσμο που μας περιβάλλει να αλλάζει δραστικά, οι διορθώσεις όμως των προβλέψεων για ένα μεγάλο ποσοστό του φυσικού μας κόσμου καθίστανται ολοένα και μικρότερες. Υπό αυτή την έννοια λοιπόν, οι θεωρίες μοιάζουν να συγκλίνουν γρήγορα, σαν τους όρους μιας σειράς με πολύ γρήγορη σύγκλιση.³ Στα όρια ισχύος λοιπόν της νευτώνειας μηχανικής (δηλαδή (i) για ταχύτητες μικρές συγκριτικά με την ταχύτητα του φωτός, (ii) για μακροσκοπικά σώματα με πυκνότητα πολύ μικρότερη της πυρηνικής, με άλλα λόγια για όλες τις ανθρώπινες δραστηριότητες σήμερα, καθώς και (iii) για σώματα μεγάλα συγκριτικά με τις ατομικές διαστάσεις) η νευτώνεια μηχανική είναι μια απολύτως ορθή θεωρία, εφόσον δίνει ακριβείς προβλέψεις.⁴

Η νευτώνεια μηχανική, ως η πρώτη ιστορικά δυναμική θεωρία που προσπάθησε να ερμηνεύσει σωστά τη φύση, και μάλιστα με αξιοθαύμαστη επιτυχία για αρκετούς αιώνες, έχει σημασία να μελετηθεί ώστε να γνωρίσει κανείς τον πλούτο των αποτελεσμάτων της, καθώς και την ώθηση που έδωσε στην επιστημονική κοινότητα να προχωρήσει σε γενικεύσεις της θεωρίας διαμορφώνοντάς την σε μια πιο ευέλικτη, πρακτικά, μορφή (Λαγκρανζιανή και Χαμιλτονιανή θεώρηση). Η νέα αυτή μορφοποίηση που πήρε η νευτώνεια θεωρία, στους αιώνες που ακολούθησαν το Νεύτωνα, έδωσε τη δυνατότητα να αναπτυχθεί ένα πιο ευρύ πλαίσιο, κατάλληλο να οικοδομηθούν μεταγενέστερες θεωρίες (θεωρίες πεδίου).

Από εκπαιδευτική άποψη η νευτώνεια θεωρία προσφέρει ίσως το πλέον κατάλ-

τώνειες διορθώσεις.

²Η τροχιά του πλανήτη Ερμή διαφοροποιείται από τις προβλέψεις της νευτώνειας μηχανικής κατά μόλις 43 δευτερόλεπτα τόξου ανά αιώνα!

³Στο βιβλίο του K. S. Thorne «*Μαύρες Τρύπες και Στρεβλώσεις του Χρόνου*» (Εκδ. Κάτοπτρο), μπορεί κανείς να διαβάσει στο τελευταίο εδάφιο του Κεφαλαίου 1 με τίτλο «Η φύση του φυσικού νόμου» μια εκτενέστερη ανάλυση της διαδοχής των θεωριών και τη σύγκλιση των προβλέψεων τους.

⁴Σε ταχύτητες συγκρίσιμες με την ταχύτητα του φωτός η Ειδική Θεωρία της Σχετικότητας προσφέρεται ως καταλληλότερο πλαίσιο ανάλυσης. Για σώματα που έχουν γίνει εξαιρετικά συμπαγή, τόσο όσο οι αστέρες νετρονίων ή και ακόμη περισσότερο, η Γενική Θεωρία της Σχετικότητας δίνει σημαντικές διορθώσεις στις αντίστοιχες προβλέψεις της νευτώνειας μηχανικής. Τέλος για σώματα με διαστάσεις πλησίον των ατομικών, ένας νέος φυσικός κόσμος, αυτός της Κβαντομηχανικής, παρουσιάζεται. Ο κόσμος αυτός διέπεται από φυσικούς νόμους με τους οποίους η νευτώνεια μηχανική έρχεται σε ισχυρή αντίθεση.

ληλο πλαίσιο σε έναν εκκολλαπτόμενο φυσικό να ασκήσει τη φυσική του διαίσθηση και να «χτίσει» βασικές φυσικές έννοιες, τις οποίες μπορεί εύκολα να συσχετίσει με την καθημερινή του εμπειρία από το φυσικό κόσμο που τον περιβάλλει.

2.2 Περί θεμελιωδών νόμων και δυνάμεων

Σε αντιδιαστολή με τους νόμους του Κέπλερ, στους νόμους του Νεύτωνα διακρίνεται κανείς άμεσα μια πολύ πιο θεμελιώδη μορφή. Ενώ οι νόμοι του Κέπλερ αναφέρονται μόνο στο ηλιακό μας σύστημα,⁵ οι νόμοι του Νεύτωνα διατείνονται ότι έχουν καθολική ισχύ. Ακόμη, ενώ οι νόμοι του Κέπλερ, εγείρουν αυθόρμητα ερωτήματα, όπως «ποιο είναι το αίτιο αυτών των νόμων;» με τους νόμους του Νεύτωνα φαίνεται να καταλήγουμε στο βαθύτερο σημείο του πώς δουλεύει η φύση, δίχως να μας δίνεται η δυνατότητα να προχωρήσουμε σε ακόμη βαθύτερα «γιατί;» Όταν μάλιστα φτάσουμε να κατασκευάσουμε αργότερα το 2ο νόμο του Νεύτωνα καθώς και τον 3ο από στοιχειώδεις συμμετρίες που θα υποθέσουμε ότι διαθέτει η φύση (σύμφωνα με τις παρατηρήσεις μας αλλά και με την πεποίθησή μας ότι ο κόσμος γύρω μας είναι κατ' ουσίαν πολύ απλός), θα προσεγγίσουμε ακόμη περισσότερο τη θεμελιακότητα των νευτώνειων νόμων, αφού οι συγκεκριμένες συμμετρίες του Σύμπαντος αγγίζουν τα όρια της απλότητας, όσον αφορά στην περιγραφή του κόσμου.

Μια αντίστοιχη διάκριση σε θεμελιώδεις και μη, μπορούμε να έχουμε και για τις κάθε λογής δυνάμεις που δρουν στα διάφορα σώματα και αλλάζουν την κινητική τους κατάσταση. Στην απέραντη λίστα των βαρυτικών, πυρηνικών, ηλεκτρομαγνητικών δυνάμεων, δυνάμεων τριβής, δυνάμεων εξαιτίας παραμόρφωσης, αντιστάσεων λόγω κίνησης μέσα σε συνεχή μέσα, φυγοκέντρων δυνάμεων, κλπ., υπάρχουν άραγε κάποιες ιδιαίτερες δυνάμεις που ξεχωρίζουν ως προς το ότι περιγράφουν σε όσο το δυνατό πιο θεμελιώδες επίπεδο τις αλληλεπιδράσεις της ύλης;

Η βαρυτική, για παράδειγμα, δύναμη, η οποία περιγράφει την έλξη μεταξύ δύο οποιονδήποτε σημειακών μαζών ως συνάρτηση της μάζας αυτών και της απόστασης που τις χωρίζει, εκτός του ότι έχει καθολική ισχύ και έχει ελεγχθεί ότι ισχύει με εξαιρετική ακρίβεια από τους μακρινούς αστέρες μέχρι μικροσκοπικά σφαιρίδια, δεν μπορεί να τεθεί σε πιο στοιχειώδη ανάλυση (εκτός ίσως αν καταφύγει κανείς σε θεωρίες πεδίου εισάγοντας σωματίδια-φορείς της βαρυτικής αλληλεπίδρασης).⁶

Αντίθετα, η δύναμη της τριβής, την οποία μαθαίνει κανείς να γράφει ως μια σταθερά, εξαρτώμενη από τις επιφάνειες επαφής, επί την κάθετη δύναμη η οποία πιέζει

⁵ Στην πραγματικότητα οι νόμοι του Κέπλερ ισχύουν σε κάθε βαρυτικό σύστημα που αποτελείται από μια κυρίαρχη κεντρική σφαιρική μάζα και από άλλες μικρότερες· για παράδειγμα οι ίδιοι νόμοι του Κέπλερ ικανοποιούνται και από τους δορυφόρους του Δία, με τον 3ο νόμο να συσχετίζει τους αντίστοιχους λόγους ημαξόνων-περιόδων όλων των δορυφόρων μεταξύ τους.

⁶ Τα σωματίδια-φορείς της βαρύτητας, γνωστά ως βαρυτόνια (gravitons), είναι υποθετικά σωματίδια με κατάλληλα χαρακτηριστικά, τα οποία στο πλαίσιο της κβαντικής θεωρίας πεδίου ανταλλάσσονται μεταξύ των σωματιδίων, οδηγώντας τα σε έλξη.

το ένα ολισθαίνον σώμα επάνω στο άλλο, δεν έχει την ίδια θεμελιακή προέλευση με τη βαρύτητα. Αν ερευνήσει κανείς λίγο πιο προσεκτικά την προέλευσή της, θα δει ότι αυτό που αποκαλούμε τριβή είναι το στατιστικό αποτέλεσμα δυνάμεων ηλεκτρομαγνητικής φύσης που αναπτύσσονται μεταξύ των επιφανειακών κυρίως μορίων των υλικών που έρχονται σε επαφή. Η τραχύτητα των επιφανειών δεν είναι αρκετή να περιγράψει ικανοποιητικά την τριβή, αφού αυτό που συμβαίνει δεν είναι ότι οι κορυφές και οι κοιλάδες της μιας επιφάνειας σύρονται επάνω στις κορυφές και τις κοιλάδες της άλλης ανεβοκατεβάζοντας (σε μικροσκοπικό επίπεδο) τελικά το ένα σώμα σε σχέση με το άλλο. Αν πράγματι συνέβαινε κάτι τέτοιο δεν θα είχε ως αποτέλεσμα τις γνωστές ενεργειακές απώλειες λόγω τριβής! Αυτό που πιο σωστά περιγράφει την τριβή είναι το διαρκές σπάσιμο και επανασύνδεση κομματιών της κάθε επιφάνειας εξαιτίας συγκρούσεων με κομμάτια της άλλης. (Για μια πιο εμπειροστατωμένη ανάλυση της τριβής διαβάστε το σχετικό κεφάλαιο 12.2 του βιβλίου του Feynman «*The Feynman lectures on Physics*».)

Επίσης, οι δυνάμεις λόγω ελαστικής παραμόρφωσης ενός στερεού, όπως αυτή που μας κρατά πάνω σε μια ζυγαριά με ελατήριο, είναι παρόμοιας φύσης· πρόκειται και σε αυτή την περίπτωση για ηλεκτροστατικές δυνάμεις που ασκούνται μεταξύ γειτονικών μορίων όταν κάποιο εξωτερικό αίτιο αναγκάσει ένα στερεό να παραμορφωθεί, οδηγώντας σε αλλαγή της σχετικής απόστασης των μορίων σε σχέση με την αρχική θέση ισορροπίας τους στον κρύσταλλο του στερεού.

Τέλος, εκτός από τις θεμελιώδεις δυνάμεις που αντιστοιχούν στις βασικές φυσικές αλληλεπιδράσεις και τις δυνάμεις που προκύπτουν ως στατιστικό σύνολο τέτοιων θεμελιωδών δυνάμεων, υπάρχουν και οι ψευδοδυνάμεις· δυνάμεις οι οποίες κάνουν την εμφάνισή τους όταν προσπαθήσουμε να εφαρμόσουμε τους νόμους του Νεύτωνα σε μη αδρανειακά συστήματα αναφοράς (βλ. Κεφάλαιο 1). Κλασικό παράδειγμα τέτοιας δύναμης είναι η φυγόκεντρος δύναμη η οποία εμφανίζεται σε περιστρεφόμενα συστήματα αναφοράς. Κατ' ουσίαν τέτοιες δυνάμεις δεν υφίστανται· είναι απλώς τεχνητές δυνάμεις που εμφανίζονται ως «ψευδαίσθηση» πραγματικών δυνάμεων σε μη αδρανειακούς παρατηρητές, ακριβώς επειδή είναι μη αδρανειακοί. Αποκτούν το ρόλο δυνάμεων, αν επιχειρήσει να γράψει κανείς τον 2ο νόμο του Νεύτωνα σε ένα μη αδρανειακό σύστημα.

Το Σύμπαν που θα οικοδομούνταν από σωματίδια τα οποία θα αλληλεπιδρούσαν με θεμελιώδεις δυνάμεις θα ήταν αναμενόμενο να κληρονομή τις συμμετρίες των ίδιων αυτών θεμελιωδών δυνάμεων. Από παρατηρήσεις διαπιστώνουμε ότι το Σύμπαν είναι σε εξαιρετικό βαθμό *ομογενές* (φαίνεται να έχει την ίδια πυκνότητα σημικών γαλαξιών σε όλη του την έκταση) και *ισότροπο* (όλες οι κατευθύνσεις στο Σύμπαν δείχνουν να έχουν ίδια κατανομή σημικών γαλαξιών).⁷ Επιπλέον το Σύμπαν

⁷ Προφανώς αυτή η ομογένεια και ισοτροπία του Σύμπαντος νοείται σε πολύ μεγάλη κλίμακα, σε κλίμακα πέραν αυτής των σημικών γαλαξιών. Στην περιοχή του Γαλαξία μας, για παράδειγμα, επικρα-

μας δείχνει να είναι ομογενές και ως προς το χρόνο⁸ (τουλάχιστον σε χρονικές κλίμακες μικρές σε σχέση με τις κοσμολογικές). Η έλλειψη μιας τέτοιας συμμετρίας θα έδινε άλλο νόημα στο χρόνο και ο Νεύτωνας δεν θα μπορούσε να τον περιγράψει ως «απόλυτο, πραγματικό, αντικειμενικό,⁹ που πηγάζει από την ίδια του τη φύση και ρέει ομοιόμορφα, ανεπηρέαστος από καθετί εξωτερικό...» στο έργο του Principia. Υπάρχει όμως ακόμη μια συμμετρία του κόσμου μας, κάπως πιο περίτεχνα κρυμμένη στη δυναμική του Σύμπαντος: πρόκειται για τη γαλιλαϊκή συμμετρία σύμφωνα με την οποία οι φυσικοί νόμοι δεν αλλάζουν αν προσπαθήσουμε να τους περιγράψουμε σε ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (περισσότερα σχετικά με τις συμμετρίες των φυσικών νόμων θα δούμε στο επόμενο Κεφάλαιο).

Όλες αυτές οι συμμετρίες θα πρέπει να εμπεριέχονται με κάποιο τρόπο και στη μορφή των θεμελιωδών δυνάμεων προκειμένου να κληροδοτηθούν στο Σύμπαν. Οι νόμοι δηλαδή που περιγράφουν αυτές τις δυνάμεις δεν θα πρέπει να εξαρτώνται ούτε από τη θέση στο Σύμπαν που κατέχει το καθένα χωριστά από τα αλληλεπιδρώντα σώματα, ούτε από τη διεύθυνση που έχει η ευθεία που τα συνδέει, ούτε από την ταχύτητα που έχει το καθένα από αυτά, ούτε φυσικά και από τη χρονική στιγμή· σε διαφορετική περίπτωση οι φυσικοί θα βρίσκονταν σε πολύ δύσκολη θέση, αφού οι φυσικοί νόμοι θα ήταν κάθε μέρα διαφορετικοί! Συνεπώς όλες οι θεμελιώδεις δυνάμεις μεταξύ υλικών σωματιδίων θα όφειλαν να έχουν την ακόλουθη γενική μορφή:

$$\mathbf{F}_{\theta\epsilon\mu} = \mathbf{F}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2, \theta_{\hat{\mathbf{r}}}) , \quad (2.1)$$

όπου $\theta_{\hat{\mathbf{r}}}$ είναι η γωνία μεταξύ της σχετικής θέσης $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$, και της σχετικής ταχύτητας $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$ των δύο αλληλεπιδρώντων σωματίων. Ειδικότερα η βαρυτική δύναμη, δεν φαίνεται πειραματικά να εξαρτάται από την σχετική κίνηση δύο μαζών, παρά μόνο από την μεταξύ τους απόσταση και αυτό είναι απ' ό,τι φαίνεται γενικός νόμος για τις θεμελιώδεις δυνάμεις της βαρύτητας και του ηλεκτρομαγνητισμού:

$$\mathbf{F}_{\beta\alpha\varrho/HM} = \mathbf{F}_{\beta\alpha\varrho/HM}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) . \quad (2.2)$$

τεί το βαρυτικό πεδίο του ίδιου του Γαλαξία, σε αντίθεση με κάποια περιοχή ανάμεσα στους γαλαξίες, οπότε στην κλίμακα γαλαξιακών αποστάσεων δεν υπάρχει και πολύ μεγάλη ομογένεια –έχουμε τεράστιες συγκεντρώσεις μαζών στην μια περιοχή του χώρου και εξαιρετικά αρραιές συγκεντρώσεις σε άλλη. Η βαρυτική αλληλεπίδραση των ουρανίων σωμάτων έχει «σπάσει» την ομογένεια με το πέρασμα του χρόνου, δημιουργώντας τοπικές συμπυκνώσεις μαζών. Επίσης εξαιτίας της δισκοειδούς μορφής του Γαλαξία μας δεν είναι όλες οι κατευθύνσεις στο χώρο ισοδύναμες, εντός του Γαλαξία. Αν όμως μεταφερθεί κανείς σε πολύ μεγαλύτερη κλίμακα η πυκνότητα των γαλαξίων είναι και σταθερή και ιστροπικά κατανεμημένη.

⁸ Η ομογένεια του χρόνου σημαίνει ότι ένα πείραμα θα έχει την ίδια έκβαση ανεξαρτήτως του πότε αυτό διεξήχθη.

⁹ Ο Νεύτωνας τον αποκαλεί μαθηματικό.

Πρόβλημα: 1

Υποθέτοντας ότι ο χώρος που ζούμε είναι τρισδιάστατος και ότι κάθε διάνυσμα σε αυτό το χώρο μπορεί να αναλυθεί σε μια βάση 3 ανεξάρτητων διανυσμάτων, δείξτε ότι η γενικότερη διανυσματική μορφή που μπορεί να έχει μια θεμελιώδης δύναμη αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων, η οποία σέβεται τις συμμετρίες του Σύμπαντος θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$\mathbf{F}_{\text{θεμ}} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)f_r + (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)f_v + (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times (\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2)f_{rv} \quad (2.3)$$

όπου f_r, f_v, f_{rv} είναι βαθμωτές συναρτήσεις των $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|, |\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|, \theta_{\hat{\mathbf{r}}}$. Αν θέλουμε, επιπλέον, η δύναμη αυτή να είναι συμβατή με τον 3ο νόμο του Νεύτωνα, δείξτε ότι ο τελευταίος όρος (αυτός με το εξωτερικό γινόμενο) δεν θα πρέπει να υπάρχει.

Στην περίπτωση των ηλεκτρικών φορτίων, όπου οι μεταξύ τους μαγνητικές δυνάμεις εξαρτώνται και από την σχετική ταχύτητα που κινούνται αυτά, καταλαβαίνει κανείς ότι μόνο στο πλαίσιο της σχετικιστικής θεώρησης μπορεί να μελετήσει τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις.¹⁰ Στο σχετικιστικό πλαίσιο θεώρησης (το μοναδικό πλαίσιο όπου μπορούν να υπολογιστούν σωστά χωρίς προβλήματα αντίφασης οι ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις), η ταχύτητα μπορεί να ρυθμιστεί ως κατάλληλη χωροχρονική στροφή του συστήματος αναφοράς η οποία συνδιαμορφώνει κατάλληλως τις συνιστώσες του λεγόμενου τανυστή¹¹ του ηλεκτρομαγνητικού πεδίου, δηλαδή αυτά που έχουμε μάθει να αναγνωρίζουμε ως ηλεκτρικό και μαγνητικό πεδίο. Έτσι η βασική αλληλεπίδραση δύο φορτίων είναι απλώς η δύναμη Coulomb η οποία εξαρτάται μόνο από την μεταξύ τους απόσταση, όπως και η βαρύτητα, ενώ οι ταχυτητοεξαρτώμενες μαγνητικές δυνάμεις προκύπτουν από τη δύναμη Coulomb, με κατάλληλη επεξεργασία του χωροχρονικού πλαισίου.

2.3 Μοναδικότητα της λύσης των εξισώσεων κίνησης

Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα περιγράφεται με μια διαφορική εξίσωση 2ας τάξης. Αυτό σημαίνει ότι γνωρίζοντας δύο αρχικές συνθήκες (για την κάθε εξίσωση κίνησης) μπορούμε να λάβουμε τη λύση των εξισώσεων, δεδομένου του τύπου της δύναμης που διέπει το εκάστοτε σωματίδιο (είτε αυτή είναι θεμελιώδης, είτε όχι). Γεννάται λοιπόν το ερώτημα: θα είναι αυτή η λύση μοναδική ή μπορεί να έχουμε μια οικογένεια λύσεων;

¹⁰ Δοκιμάστε να υπολογίσετε τις ηλεκτρικές και μαγνητικές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ δύο φορτίων που κινούνται παράλληλα το ένα στο άλλο με κοινή ταχύτητα, πρώτα στο σύστημα του εργαστηρίου και στη συνέχεια στο σύστημα που τα φορτία είναι ακίνητα. Στο πρώτο σύστημα θα αναπτύσσεται και μαγνητική και ηλεκτροστατική δύναμη, ενώ στο δεύτερο σύστημα μόνο ηλεκτροστατική. Προκειμένου να είναι ισοδύναμες οι δύο περιγραφές καταλαβαίνει κανείς ότι οι μαγνητικές και ηλεκτρικές δυνάμεις πρέπει να ιδωθούν σε ένα ενιαίο πλαίσιο, αυτό της Ειδικής Σχετικότητας, όπου τα δύο συστήματα αναφοράς μπορούν να εκληφθούν ως κατάλληλες στροφές στο χωρόχρονο και το ηλεκτρομαγνητικό πεδίο ως ένα ενιαίο πεδίο.

¹¹ Ένα είδος γενίκευσης του διανύσματος, που περιέχει περισσότερες συνιστώσες από τις διαστάσεις του χώρου στον οποίο εργαζόμαστε.

Δεδομένου ότι η κίνηση θα περιγράφεται από μια συνεχή συνάρτηση και η δύναμη θα είναι και αυτή μια ομαλή συνάρτηση με πιθανή εξάρτηση από τη θέση, από την ταχύτητα και το χρόνο, θα πρέπει η θέση ως συνάρτηση του χρόνου να μπορεί να γραφεί με μονοσήμαντο τρόπο ως ανάπτυγμα Taylor (τουλάχιστον μέχρι κάποιο χρονικό διάστημα, εντός του οποίου, η σειρά Taylor θα συγκλίνει):¹²

$$x(t) = x(0) + \dot{x}(0)t + \frac{1}{2}\ddot{x}(0)t^2 + \dots + \frac{1}{n!}x^{(n)}(0)t^n + \dots, \quad (2.4)$$

όπου το $x^{(n)}(t)$ δηλώνει την n -οστή χρονική παράγωγο της θέσης του σωματιδίου. Δεδομένων των δύο πρώτων όρων (μέσω των υποτιθέμενων γνωστών αρχικών συνθηκών θέσης-ταχύτητας) και του νόμου της δύναμης που καθορίζει όχι μόνο τον 3ο όρο (αυτόν της επιτάχυνσης), αλλά και κάθε άλλο ανώτερο όρο μέσω του 2ου νόμου του Νεύτωνα με κατάλληλες χρονικές παραγωγίσεις, η θέση θα καθορίζεται πλήρως και θα είναι μοναδική.

Αρκεί λοιπόν να μας δώσουν τον τύπο της δύναμης, και τις αρχικές συνθήκες και το μέλλον του σωματιδίου θα είναι πλήρως καθορισμένο. Μάλιστα όχι μόνο το μέλλον, αλλά και το παρελθόν του, αρκεί να αλλάξουμε το πρόσημο της μεταβλητής χρόνος ($t \rightarrow -t$). Προφανώς θα πρέπει να αλλάξουμε τότε και το πρόσημο όλων των περιττής τάξης χρονικών παραγώγων στο παραπάνω ανάπτυγμα Taylor.

Φυσικά η μοναδικότητα της λύσης δεν αλλάζει αν έχουμε περισσότερα του ενός σωματίδια τα οποία κινούνται σε έναν τριδιάστατο χώρο. Με άλλα λόγια ο μηχανικός μας κόσμος έχει προκαθορισμένο μέλλον και το μόνο που χρειάζεται για να το αποκαλύψουμε είναι η γνώση των αρχικών του συνθηκών, όπως διατεινόταν το δέκατο-ένατο αιώνα ο διάσημος γάλλος μαθηματικός Laplace. Ή μήπως όχι;

Προφανώς δεν μπορούμε να γνωρίζουμε τις αρχικές συνθήκες με οσηδήποτε ακρίβεια, αν και αυτό δεν μοιάζει εκ πρώτης όψεως πολύ επικίνδυνο για τις προβλέψεις. Η τεχνολογία (ακόμη και αν αγνοήσουμε την κβαντομηχανική αρχή της αβεβαιότητας) δεν θα είναι ποτέ σε θέση να μετρήσει με απόλυτη ακρίβεια τη διαγώνιο ενός τετραγώνου μοναδιαίας πλευράς και να ελέγξει αν είναι πράγματι $\sqrt{2}$. Μπορεί ίσως να καταφέρει να δείξει ότι είναι ίση με τα m πρώτα δεκαδικά ψηφία του $\sqrt{2}$, όπου m κάποιος πεπερασμένος αριθμός. Αυτή η έλλειψη πλήρους ακρίβειας, όμως, μπορεί να έχει σημαντικές επιπτώσεις στο χρονικό ορίζοντα της πρόβλεψης του μέλλοντος του σωματιδίου. Αν η δύναμη έχει *χαοτική*, όπως λέγεται, συμπεριφορά, ο δεκαπλασιασμός της ακρίβειας μέτρησης των αρχικών συνθηκών (κάτι που ίσως να είναι τρομακτικά δύσκολο να υλοποιηθεί και να απαιτεί ένα μεγάλο τεχνολογικό άλμα) μπορεί να μας οδηγήσει σε μια ικανοποιητική πρόβλεψη μόλις μερικά δευτερόλεπτα πιο μπροστά στο μέλλον (αναλογιστείτε αν πράγματι θα άξιζε να το κάνει κανείς

¹²Στην παρούσα συζήτηση θα θεωρήσουμε, για διευκόλυνση, ότι έχουμε ένα σωματίδιο το οποίο κινείται σε ένα χώρο μίας διάστασης.

αυτό για την πρόβλεψη του καιρού). Στις διαλέξεις μας δεν πρόκειται να ασχοληθούμε ιδιαίτερα με τέτοιου είδους φαινόμενα που παρουσιάζουν υψηλή ευαισθησία στις αρχικές συνθήκες.

2.4 Και τώρα πλέον η λύση

Τι μένει λοιπόν να κάνουμε για να βρούμε αυτή τη μοναδική λύση που περιγράφει την κίνηση των σωματιδίων; Γνωρίζοντας πλέον τους νόμους του Νεύτωνα, τι άλλο χρειαζόμαστε; Αν κάποιος μας δώσει τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης –που όπως ξέρουμε εμφανίζονται κατά ζεύγη– σε ένα σύστημα σωμάτων, αρκεί να ολοκληρώσουμε το σύστημα των δευτεροτάξιων διαφορικών εξισώσεων που προκύπτουν γράφοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για κάθε σώμα και ιδού η εξέλιξη του συστήματος. Ίσως συναντήσουμε τεχνικές δυσκολίες στην επίλυση των διαφορικών αυτών εξισώσεων –πράγμα μάλλον πολύ πιθανό, αν η δύναμη έχει περίπλοκη μορφή, ή τα σωματίδια είναι περισσότερα του ενός. Εντούτοις, ακόμη και αν δεν γνωρίζουμε πώς να λύσουμε με αναλυτικό τρόπο τις εξισώσεις αυτές, μπορούμε να προστρέξουμε στη βοήθεια ενός υπολογιστή. Ας δούμε πώς θα μπορούσαμε μέσω ενός υπολογιστή να υπολογίσουμε την εξέλιξη ενός μηχανικού συστήματος υπό την επίδραση μιας δύναμης που εξαρτάται μόνο από τη θέση του σωματιδίου.

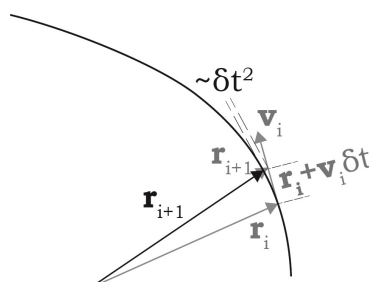
Έστω ένα σωματίδιο ευρισκόμενο τη χρονική στιγμή t στη θέση $\mathbf{r}(t)$, κινούμενο με ταχύτητα $\mathbf{v}(t)$. Ένα πολύ μικρό¹³ χρονικό διάστημα δt αργότερα το σωματίδιο θα βρεθεί στη θέση

$$\mathbf{r}(t + \delta t) \simeq \mathbf{r}(t) + \mathbf{v}(t) \delta t. \quad (2.5)$$

Η δε ταχύτητα του σωματιδίου θα μεταβληθεί σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα και θα γίνει

$$\mathbf{v}(t + \delta t) \simeq \mathbf{v}(t) + [\mathbf{F}(t)/m] \delta t. \quad (2.6)$$

Οι προηγούμενες σχέσεις,¹⁴ αν και προσεγγιστικές, είναι τόσο περισσότερο ακριβείς



Σχήμα 2.1: Με γκρι διανύσματα σημειώνονται τα αριθμητικά υπολογισμένα διανύσματα, ενώ με μαύρα τα ακριβή. Το σωματίδιο κινείται εφαπτομενικά κάθε φορά στην τροχιά και όχι επί της καμπύλης τροχιάς. Το λάθος είναι τάξης $(\delta t)^2$.

¹³Εδώ ίσως ανακύπτει το πρακτικό ερώτημα τι εννοούμε όταν λέμε μικρό. Είναι εξίσου μικρό το χρονικό διάστημα του ενός δευτερολέπτου για τη δράση της βαρύτητας σε ένα βλήμα όπλου, ή σε έναν κομήτη που περνά κοντά από τον Ήλιο; Η απάντηση είναι όχι και πρέπει κανείς να εξασκήσει τη φυσική του διαίσθηση προκειμένου να μπορεί να δώσει μια χοντρική εκτίμηση στο ποιο χρονικό διάστημα είναι μικρό σε κάθε φυσικό πρόβλημα.

¹⁴Οι παραπάνω σχέσεις δεν είναι τίποτε άλλο παρά τα αντίστοιχα αναπτύγματα Taylor για τις συναρτήσεις της θέσης και της ταχύτητας, μέχρι και τον γραμμικό όρο. Θεωρούμε ότι το δt είναι τόσο μικρό ώστε οι επόμενοι όροι των αναπτυγμάτων να μπορούν να θεωρηθούν αμελητέοι σε σχέση με τους όρους που ήδη έχουμε κρατήσει. Αν η σειρά Taylor συγκλίνει είναι εύκολο να δει κανείς ότι κα-

όσο μικρότερο είναι το χρονικό βήμα δt . Παρατηρήστε ότι για ένα κατάλληλα μικρό χρονικό διάστημα, οι παράγωγοι στους ορισμούς της ταχύτητας και της επιτάχυνσης μπορούν να θεωρηθούν ως κλάσματα καταλλήλως μικρών ποσοτήτων, αν λύσουμε τις παραπάνω δύο σχέσεις ως προς την ταχύτητα και την επιτάχυνση (δύναμη ανά μονάδα μάζας), αντίστοιχα.

Ίσως αναρωτηθείτε γιατί δεν κρατήσαμε ακόμη περισσότερους όρους στις (2.5,2.6). Η απάντηση είναι ότι αν το κάναμε αυτό, θα αυξάναμε το υπολογιστικό φορτίο πράγμα το οποίο θα ήταν περίπου ισοδύναμο με το να αυξήσουμε αναλόγως το πλήθος των απλών αυτών βημάτων προώθησης θέσης και ταχύτητας.

Συνεχίζοντας αυτή την κατασκευή «επόμενων» θέσεων και ταχυτήτων μπορούμε να βρούμε τη θέση των σωματιδίων στο μέλλον. Μια τέτοια εργασία είναι ιδανική για έναν υπολογιστή (βλ. Πλαίσιο 2.4):

Πλαίσιο 2.1

ΑΡΧΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0) \quad , \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$$

ΤΥΠΟΣ ΔΥΝΑΜΗΣ:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ / ΠΛΗΘΟΣ ΒΗΜΑΤΩΝ:

$$\delta t \quad , \quad N = T/\delta t$$

(T είναι ο συνολικός χρόνος που θέλουμε να παρακολουθήσουμε την κίνηση του σωματιδίου. Προφανώς το N θα πρέπει να είναι φυσικός αριθμός αφού πρόκειται για πλήθος.)

ΒΗΜΑ-ΒΗΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Βρόχος επανάληψης: } i = 1 \text{ έως } N, \\ t = i \delta t, \\ \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \delta t \mathbf{v}_i, \\ \mathbf{v}_{i+1} = \mathbf{v}_i + \delta t \mathbf{F}(\mathbf{r}_i)/m, \\ \text{Επανάληψη} \end{array} \right.$$

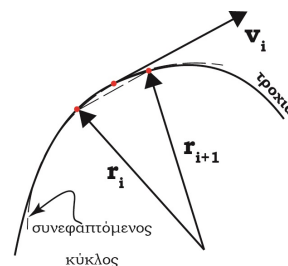
Ένα πρόγραμμα σαν το παραπάνω εκτελούμενο σε έναν σύγχρονο υπολογιστή μπορεί να ολοκληρωθεί εν ριπή οφθαλμού ακόμη και για πλήθος βημάτων N της τάξης των δεκάδων ή και εκατοντάδων χιλιάδων. Είναι άραγε κάτι τέτοιο ικανοποιητικό; Αν θέλουμε να προωθήσουμε το μηχανικό μας σύστημα κάποιο συγκεκριμένο χρονικό διάστημα στο μέλλον, το N θα καθορίσει και το μέγεθος του βήματος δt . Θα

θώς το δt μικραίνει, οι όροι που αποκόπτουμε γίνονται ολοένα και πιο ασήμαντοι σε σχέση με αυτούς που έχουμε κρατήσει.

είναι αυτό αρκετά μικρό ώστε τα λάθη που οφείλονται στην προσεγγιστική μορφή των αναπτυγμάτων Taylor (μέχρι όρους πρώτης τάξης) να μην συσσωρευτούν σε βαθμό τέτοιο ώστε να αλλοιώσουν σημαντικά το αποτέλεσμα; Και κάτι ακόμη πιο επίφοβο: μήπως στην προσπάθειά μας να μικρύνουμε τα σφάλματα με μείωση του δt (και άρα αύξηση του N) είναι ανώφελη, αφού θα γίνουν N τέτοια; Για να μην κινδυνεύουμε από κάτι τέτοιο, πρέπει να βεβαιωθούμε ότι τα σφάλματα σε κάθε βήμα μικραίνουν πιο γρήγορα από $1/N$.

Ένα βασικό λάθος που γίνεται σε κάθε βήμα είναι ότι κινούμενοι με την αρχική ταχύτητα σε κάθε βήμα, προκειμένου να προωθήσουμε τη θέση, προχωρούμε κατά μήκος της εφαπτομένης της πραγματικής τροχιάς. Επομένως, αν η τροχιά είναι καμπύλη, η αριθμητική ολοκλήρωση που περιγράψαμε θα μας οδηγήσει σταδιακά εκτός της πραγματικής τροχιάς! (Βλ. σχήμα 2.1.) Στο λάθος αυτό θα έρθει να προστεθεί και το λάθος στην επιτάχυνση λόγω του ότι το σωματίδιό μας θα βρίσκεται σε άλλη θέση από την πραγματική και επομένως η δύναμη που θα χρησιμοποιήσει το πρόγραμμα για την αλλαγή στην ταχύτητα θα είναι και αυτή λανθασμένη. Τα λάθη όμως αυτά θα είναι τάξης δt^2 και επομένως θα είναι ανάλογα του $1/N^2$. Η συσσώρευση N τέτοιων θα είναι λοιπόν ανάλογη του $1/N$. Συνεπώς μας συμφέρει να μεγαλώσουμε όσο γίνεται το N (με τίμημα προφανώς στην καθυστέρηση του υπολογισμού λόγω αυξημένου υπολογιστικού φορτίου).

Το λάθος «εκτροχιασμού» της κίνησης θα μπορούσε εν μέρει να ελαχιστοποιηθεί αν κάναμε την εξής παρατήρηση: Κάθε μικρό τμήμα της τροχιάς μπορεί να προσεγγιστεί πολύ καλά με ένα τόξο κύκλου (του επονομαζόμενου συνεφαπτόμενου κύκλου [osculating circle]). Η εφαπτομένη όμως στο μέσο ενός κυκλικού τόξου είναι παράλληλη στη χορδή του τόξου αυτού (βλ. σχήμα 2.2): επομένως η μεταβολή στη θέση (χορδή) έχει περίπου (με την ακρίβεια που το κυκλικό τόξο περιγράφει ικανοποιητικά μικρό κομμάτι της καμπύλης) τη διεύθυνση της ταχύτητας (εφαπτομένη) στο μέσο του διαστήματος (που συμπίπτει προσεγγιστικά με το μέσο του αντίστοιχου χρονικού διαστήματος αν θεωρήσουμε ότι δεν έχει μεταβληθεί σημαντικά το μέτρο της ταχύτητας στο εν λόγω βήμα). Επομένως αρκεί να προωθούμε τη θέση όχι με την ταχύτητα στην αρχή του κάθε βήματος, αλλά με την ταχύτητα στο μέσο αυτού και αντίστοιχα την ταχύτητα με την επιτάχυνση που αντιστοιχεί στο μέσο του αντίστοιχου βήματος. Με απλά λόγια θα υπολογίζουμε τη θέση



Σχήμα 2.2: Με την ολοκλήρωση κατά Feynman η ταχύτητα υπολογίζεται στο μέσο των διαστημάτων όπου υπολογίζεται η θέση και παράλληλα η θέση στο μέσο των διαστημάτων όπου υπολογίζεται η ταχύτητα. Έτσι εκτιμάται καλύτερα και η μεταβολή της θέσης και η μεταβολή της ταχύτητας.

σε ακέραια πολλαπλάσια του χρονικού βήματος και την ταχύτητα σε ημιακέραια πολλαπλάσια του χρονικού βήματος. Ο μοναδικός επιπλέον υπολογισμός, πέραν αυτών του προηγούμενου τρόπου υπολογισμού της τροχιάς, είναι η αρχική εύρεση της ταχύτητας στο μέσο του πρώτου βήματος, $\delta t/2$ μετά τη χρονική στιγμή $t = 0$. Κατά τα άλλα το πλήθος των βημάτων είναι ακριβώς ίδιο με τον προηγούμενο τρόπο, την ολοκλήρωση κατά Euler, όπως αυτή είναι γνωστή. Το πρόγραμμα λοιπόν με το τρικ του μεσοδιαστήματος για ακόμη καλύτερη ακρίβεια θα έχει ως εξής:

Πλαίσιο 2.2

ΑΡΧΙΚΑ ΔΕΔΟΜΕΝΑ:

$$\mathbf{r}_0 = \mathbf{r}(0) \quad , \quad \mathbf{v}_0 = \mathbf{v}(0)$$

ΤΥΠΟΣ ΔΥΝΑΜΗΣ:

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}(t))$$

ΚΑΘΟΡΙΣΜΟΣ ΒΗΜΑΤΟΣ / ΠΛΗΘΟΣ ΒΗΜΑΤΩΝ:

$$\delta t \quad , \quad N = T/\delta t$$

(T είναι ο συνολικός χρόνος που θέλουμε να παρακολουθήσουμε την κίνηση του σωματιδίου. Προφανώς το N θα πρέπει να είναι φυσικός αριθμός αφού πρόκειται για πλήθος.)

ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΤΑΧΥΤΗΤΑΣ ΣΤΟ ΜΕΣΟ ΤΟΥ ΠΡΩΤΟΥ ΒΗΜΑΤΟΣ:

$$\mathbf{v}'_0 = \mathbf{v}_0 + (\delta t/2)\mathbf{F}(\mathbf{r}_0)/m$$

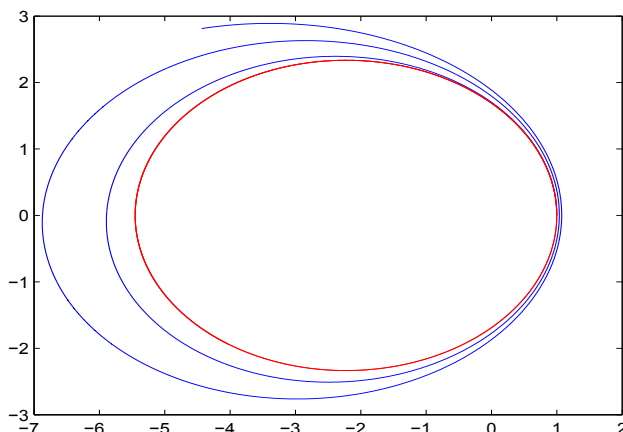
ΒΗΜΑ-ΒΗΜΑ ΥΠΟΛΟΓΙΣΜΟΣ ΤΗΣ ΘΕΣΗΣ:

$$\left[\begin{array}{l} \text{Βρόχος επανάληψης: } i = 1 \text{ έως } N, \\ t = i \delta t, \\ \mathbf{r}_{i+1} = \mathbf{r}_i + \delta t \mathbf{v}'_i, \\ \mathbf{v}'_{i+1} = \mathbf{v}'_i + \delta t \mathbf{F}(\mathbf{r}_{i+1})/m, \\ \text{Επανάληψη} \end{array} \right.$$

Προσέξτε ότι τώρα η προώθηση της ταχύτητας από την \mathbf{v}'_i στην \mathbf{v}'_{i+1} γίνεται μέσω της δύναμης υπολογισμένης στην \mathbf{r}_{i+1} και όχι στην \mathbf{r}_i θέση, όπως στην ολοκλήρωση κατά Euler, εξαιτίας του νέου τρόπου αρίθμησης των διαδοχικών θέσεων και ταχυτήτων: Η i -οστή ταχύτητα \mathbf{v}'_i αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $(i+1/2)\delta t$, ενώ η i -οστή θέση \mathbf{r}_i αντιστοιχεί στη χρονική στιγμή $i\delta t$.

Στο παρακάτω διάγραμμα δίνεται η τροχιά ενός πλανήτη ο οποίος περιφέρεται γύρω από τον Ήλιο, υπό την επίδραση μιας δύναμης της μορφής $\mathbf{F} = -m\mathbf{r}/r^3$. Οι δύο καμπύλες έχουν κατασκευαστεί μέσω της αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Euler

(μπλε) και της αριθμητικής ολοκλήρωσης κατά Feynman (κόκκινη). Είναι φανερό ότι η ολοκλήρωση κατά Feynman πετυχαίνει πολύ καλύτερα το παρατηρούμενο αστρονομικό αποτέλεσμα του Kepler για το ίδιο μέγεθος χρονικού βήματος και συνολικού χρόνου ($\delta t = 0.01$ και $T = 1000$ αντίστοιχα).



Σχήμα 2.3: Ένας πλανήτης κινούμενος υπό την επίδραση μιας ελκτικής δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου διαγράφει έλλειψη όπως έδειξε ο Νεύτωνας. Η αριθμητική ολοκλήρωση της τροχιάς κατά Euler (μπλε καμπύλη) και κατά Feynman (κόκκινη καμπύλη) δείχνει καθαρά την υπεροχή της δεύτερης. Ο αριθμητικός υπολογισμός και στις δύο περιπτώσεις έγινε με βήμα $\delta t = 0.01$ για συνολικό χρόνο $T = 1000$ και με αρχικές συνθήκες $(x_0, y_0) = (1, 0)$, $(v_{x0}, v_{y0}) = (0, 1.2)$. Παρατηρήστε πως η συσώρευση σφαλμάτων στην ολοκλήρωση κατά Euler εκτροχιάζει βαθμιαία την τροχιά. Προσπαθήστε με ένα δικό σας πρόγραμμα να αναπαράγετε τα αποτελέσματα αυτά. (Για χρόνο αρκετά μεγαλύτερο του $T = 1000$ και η αριθμητική ολοκλήρωση κατά Feynman αρχίζει να αποκλίνει από την θεωρητικά αναμενόμενη ελλειπτική τροχιά.)

Δοκιμάστε μόνοι σας να φτιάξετε ένα πρόγραμμα το οποίο να εκτελεί τις δύο παραπάνω μεθόδους αριθμητικής ολοκλήρωσης. Αλλάξτε κατάλληλα το μέγεθος των βημάτων μέχρις ότου η τροχιά αρχίζει να μοιάζει με έλλειψη. Στη συνέχεια «παίξτε» με τις αρχικές συνθήκες για να δείτε πως αλλάζει το σχήμα της έλλειψης. Δοκιμάστε να μπειτε στο ρόλο του Kepler και να επιβεβαιώσετε αριθμητικά τους τρεις νόμους του: (i) σε τι βαθμό το σχήμα αυτό είναι έλλειψη, δηλαδή με τι ακρίβεια το άθροισμα αποστάσεων από τις δύο εστίες κρατιέται σταθερό, (ii) με πόση ακρίβεια τα εμβαδά σε διαδοχικά βήματα είναι ίσα, (iii) αν αλλάξουμε τις αρχικές συνθήκες ώστε να αλλάξει το σχήμα της έλλειψης, διατηρείται σταθερός ο λόγος του κύβου της μεγάλης διάστασης της έλλειψης προς το τετράγωνο του συνολικού χρόνου μιας τροχιάς; Τέλος δοκιμάστε να αλλάξετε το νόμο της δύναμης: πώς αλλάζει τότε το σχήμα της τροχιάς;

Αν το παραπάνω παράδειγμα σας φαίνεται απλουστευμένο, τι θα λέγατε αν υπολογίζατε την εξέλιξη, ή ακόμη και το παρελθόν του Ηλιακού μας συστήματος; Πρόκειται για ένα σύστημα 9 σωμάτων (του Ήλιου και των 8 πλανητών, αν αγνοήσουμε σε πρώτη προσέγγιση τους δορυφόρους και τα άλλα μικρά ουράνια σώματα εντός

του ηλιακού μας συστήματος). Επομένως μπορεί να γράψει κανείς τη δύναμη που ασκείται στο καθένα από αυτά ως το άθροισμα 9 βαρυτικών δυνάμεων.

Πόσες πράξεις αλήθεια απαιτούνται; Είναι διαχειρίσιμο υπολογιστικά το πρόβλημα αυτό; Ας κάνουμε κάποιους χοντρικούς υπολογισμούς: (9 σώματα) \times [3 πράξεις για ένα βήμα προώθησης των συνιστωσών της θέσης + 3 πράξεις για ένα βήμα προώθησης των συνιστωσών της ταχύτητας + 3 συνιστώσες της δύναμης για κάθε θέση των σωμάτων \times (8 όροι δυνάμεων + 1 άθροιση των 8 όρων)] \times (1000 ας πούμε βήματα ανά έτος) \simeq 300.000 υπολογισμοί ανά έτος. Ένας απλός υπολογιστής με δυνατότητα εκτέλεσης 10^7 πράξεων ανά δευτερόλεπτο θα μπορούσε να «τρέξει» την εξέλιξη του Ηλιακού μας συστήματος κατά περίπου 30 έτη μέσα σε ένα δευτερόλεπτο, ή αν τον αφήναμε να εργάζεται για ένα χρόνο θα μας έδινε το στίγμα των πλανητών ένα δισεκατομμύριο χρόνια στο μέλλον ή στο παρελθόν! (Όπως είπαμε παραπάνω και θα συζητήσουμε εκτενέστερα και στο επόμενο κεφάλαιο, ο 2ος νόμος του Νεύτωνα παραμένει αναλλοίωτος σε αντιστροφή του χρόνου). Παρόμοιες ολοκληρώσεις έχουν γίνει τα τελευταία χρόνια (Wisdom, 1990) προκειμένου να ελεγχθεί η ευστάθεια ή μη του Ηλιακού μας συστήματος και στηρίζονται κατά μεγάλο μέρος σε μεθόδους των οποίων η ακρίβεια βασίζεται σε εργαλεία που έχουν προκύψει από τη θεωρητική ανάλυση μηχανικών συστημάτων με πολλούς βαθμούς ελευθερίας (μέθοδος διαταραχών του Poincaré).

Κλείνοντας το παρόν κεφάλαιο θα συνοψίζαμε λέγοντας ότι ουσιαστικά γνωρίζοντας τους νόμους του Νεύτωνα μπορούμε να προβλέψουμε, με απλούς (όπως δείξαμε) υπολογισμούς, την κίνηση κάθε μηχανικού συστήματος (οι διαστημικές εταιρείες εκτελούν παρόμοιους υπολογισμούς, όταν ετοιμάζουν μια αποστολή δορυφόρου στο Διάστημα). Η εύρεση αναλυτικών λύσεων σε συγκεκριμένα προβλήματα εφαρμογής των νόμων του Νεύτωνα με τα οποία θα ασχοληθούμε στη συνέχεια δεν έχει ουσιαστικά κανένα ιδιαίτερο πλεονέκτημα ως προς την πρόβλεψη της εξέλιξης μηχανικών συστημάτων σε σχέση με την παραπάνω προσεγγιστική, αριθμητική μέθοδο αφού ακόμη και αυτό το σφάλμα της αριθμητικής μεθόδου εξαιτίας των πεπερασμένων βημάτων μπορεί να εξαλειφθεί μειώνοντας το βήμα περαιτέρω. Παρά ταύτα η αναλυτική μελέτη συγκεκριμένων συστημάτων (αν και ιδιαίτερα εξιδανικευμένα σε σχέση με τα πραγματικά φυσικά συστήματα) που διέπονται από τους νόμους του Νεύτωνα και για τα οποία μπορούμε να κατασκευάσουμε αναλυτικές εκφράσεις για την εξέλιξή τους, θα μας οδηγήσει σε καινούρια εργαλεία και νέες φυσικές ποσότητες τα οποία και βαθύτερη κατανόηση στο πώς δουλεύει η φύση θα μας προσφέρουν και μπορούν να αποδειχθούν χρήσιμα στην εξυπνότερη χρήση αριθμητικών υπολογισμών αυξάνοντας έτσι την προβλεπτική ικανότητα των τελευταίων. Στα δύο αυτά στοιχεία κυρίως έγκειται η χρησιμότητά τους και όχι στο ότι η αναλυτική μορφή της λύσης τους υπερτερεί της αριθμητικής.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 2

- Η νευτώνεια μηχανική έχει κάποια όρια ισχύος, εντός των οποίων είναι εξαιρετικά ακριβής και δεν διαφέρει, ως προς τις προβλέψεις της, από άλλες πιο ευρείας ισχύος θεωρίες.
- Οι θεμελιώδεις δυνάμεις στη φύση οφείλουν να είναι συμμετρικές ως προς τη μετάθεση, την περιστροφή και την αλλαγή του συστήματος αναφοράς. Δεν θα πρέπει επίσης να είναι χρονοεξαρτώμενες. Αυτό σημαίνει ότι η αλληλεπίδραση μεταξύ δύο υλικών σημείων θα πρέπει να είναι συνάρτηση το πολύ των $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$, $|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|$ και της γωνίας μεταξύ των διανυσμάτων $\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ και $\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2$.
- Η δύναμη της βαρύτητας και η ηλεκτρομαγνητική εξαρτώνται (κατ' ουσίαν) μόνο από τη σχετική θέση των δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων και έχει την κατεύθυνση της ευθείας που συνδέει αυτά.
- Οι άλλες δυνάμεις της καθημερινής μας εμπειρίας δεν είναι θεμελιώδεις· είναι συνέπεια των δύο παραπάνω θεμελιωδών δυνάμεων.
- Δεδομένης της δύναμης και των αρχικών συνθηκών (θέσεις - ταχύτητες) ενός συστήματος σωματιδίων, η εξέλιξη του συστήματος (και προς το μέλλον και προς το παρελθόν) είναι μοναδική.
- Με κατάλληλους αριθμητικούς υπολογισμούς μπορούμε να κατασκευάσουμε τη λύση των εξισώσεων του Νεύτωνα ακόμη και για πολύπλοκα συστήματα αλληλεπιδρώντων σωμάτων.

3

2ος νόμος: συμμετρίες και μέθοδοι επίλυσης

3.1 Συμμετρίες των εξισώσεων

Προκειμένου να βρούμε τη λύση των εξισώσεων κίνησης ενός μηχανικού συστήματος, είναι σημαντικό να εντοπίσουμε πιθανές συμμετρίες¹ των εξισώσεων αυτών, προτού καν επιχειρήσουμε να τις λύσουμε. Δηλαδή θα θέλαμε να εντοπίσουμε μετασχηματισμούς που αφήνουν αναλλοίωτες τις εξισώσεις. Αν τα καταφέρουμε θα είναι αρκετά πιο εύκολο να φτάσουμε στη λύση, όπως θα φανεί στα παραδείγματα που θα δούμε στη συνέχεια.

Ας υποθέσουμε ότι κάποιος εντομολόγος διατυπώνει, ύστερα από μακροχρόνιες παρατηρήσεις στην περιοχή του Αμαζονίου, τον ακόλουθο νόμο εξέλιξης του πληθυσμού κάποιου είδους εντόμων: «Αφότου μια ομάδα των εν λόγω εντόμων εγκατασταθεί σε κάποιο καινούριο χώρο και κατασκευάσει μια νέα φωλιά, ο ρυθμός αύξησης του πληθυσμού των εντόμων μεταβάλλεται σύμφωνα με το νόμο

$$\frac{dN}{dt} = aN - bN^2,$$

όπου N ο πληθυσμός των εντόμων κάθε χρονική στιγμή, και a, b κάποιες χαρακτηριστικές θετικές σταθερές.» Αν δεχτούμε ότι ο νόμος αυτός είναι ορθός, θα είχε καμιά σημασία αν η μελέτη της εξέλιξης του πληθυσμού γίνει σήμερα, αύριο, ή μετά από

¹Εδώ χρησιμοποιούμε τον όρο συμμετρία, κατ' επέκταση της γνωστής μας γεωμετρικής συμμετρίας, με το ακόλουθο νόημα: «Κάτι είναι συμμετρικό αν, δρώντας πάνω του με κάποιο τρόπο, αυτό εμφανίζεται ακριβώς το ίδιο όπως ήταν αρχικά.» (Ο ορισμός της συμμετρίας που έδωσε ο Hermann Weyl, διατυπωμένη από τον Richard Feynman σε απλή καθημερινή γλώσσα.)

ένα χρόνο; Φυσικά όχι. Στη γλώσσα της Φυσικής θα λέγαμε ότι ο νόμος αυτός είναι αναλλοίωτος σε μεταθέσεις στο χρόνο. Το ίδιο και όσον αφορά μεταθέσεις στο χώρο, αφού ο νόμος κατά τον εντομολόγο ισχύει για κάθε σημείο στην περιοχή του Αμαζονίου που έκανε τις παρατηρήσεις του. Είναι όμως ο παραπάνω νόμος εξίσου ορθός και σε αντιστροφή του χρόνου; Αν παρακολουθούσατε το βίντεο της εξέλιξης του πληθυσμού, προκειμένου να επαληθεύσετε το νόμο, και ξαφνικά αποφασίζατε να «τρέξετε» το βίντεο ανάποδα, θα βλέπατε έναν αρχικά μικρό πληθυσμό να συρρικνώνεται αντί να αυξάνεται, αντίθετο δηλαδή και με τις παρατηρήσεις και με την κοινή λογική που υπαγορεύει την αύξηση του πληθυσμού μέχρι ο πληθυσμός να φτάσει σε κάποιο οριακό σημείο, όπου η θνησιμότητα και η έλλειψη πόρων θα υπερκεράσει τη γεννητικότητα. Θα διαπιστώνατε λοιπόν ότι ο παραπάνω νόμος δεν είναι αναλλοίωτος σε αντιστροφή του χρόνου.

Ας επανέλθουμε όμως στο 2ο νόμο του Νεύτωνα, το νόμο βάση του οποίου μπορεί να προβλεφθεί το οσοδήποτε μακρινό μέλλον των μηχανικών συστημάτων. Είναι η εξίσωση αυτή αναλλοίωτη σε κάποιο μετασχηματισμό; Ένας προφανής τέτοιος μετασχηματισμός είναι η αντιστροφή του χρόνου $t \rightarrow t' = -t$, σε αντίθεση με το νόμο εξέλιξης του πληθυσμού των εντόμων που είδαμε παραπάνω. Λαμβάνοντας υπόψη την υπόθεση (με την οποία απ' ότι φαίνεται συμφωνούν όλες οι γνωστές θεμελιώδεις δυνάμεις), ότι η δύναμη που ασκείται σε ένα υλικό σημείο είναι συνάρτηση μόνο της θέσης αυτού $\mathbf{F} = \mathbf{F}(\mathbf{r})$, ισχύει ότι

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{d(-t')^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt'^2}.$$

Με άλλα λόγια ο 2ος νόμος του Νεύτωνα παραμένει αναλλοίωτος αν αντικαταστήσει κανείς το t με το $t' = -t$. Αυτό σημαίνει δύο πράγματα: (i) Ότι όλα τα μηχανικά συστήματα που εξελίσσονται σύμφωνα με το 2ο νόμο του Νεύτωνα και υπόκεινται σε δυνάμεις θεμελιώδους φύσης δεν μπορούν να ορίσουν το βέλος του χρόνου.² Αν παρακολουθούσε κανείς μια ταινία εξέλιξης ενός τέτοιου συστήματος να τρέχει ανάποδα δεν θα το αντιλαμβανότανε· όλα θα φαίνονταν να διαδραματίζονται με απόλυτα φυσιολογική σειρά. (ii) Ότι όπως μπορεί κάποιος, λύνοντας την εξίσωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα –είτε αναλυτικά, είτε αριθμητικά όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο–, να προβλέψει το μέλλον ενός μηχανικού συστήματος, οσοδήποτε μακρινό και αν είναι αυτό, μπορεί να προβλέψει εξίσου καλά και το παρελθόν του (κοντινό ή απώτερο). Για παράδειγμα, μπορεί να διερευνήσει κανείς το παρελθόν του Ηλιακού συστήματος, ολοκληρώνοντας τις εξισώσεις του Νεύτωνα, για τους πλανήτες και τον Ήλιο, προς τα πίσω στο χρόνο, όπως σημειώσαμε στο προηγού-

²Το βέλος του χρόνου αρχίζει να διακρίνεται πιο καθαρά σε σύνθετα μηχανικά προβλήματα, όταν πολλά μέρη του αλληλεπιδρούν έντονα, όπως οι μπάλλες του μπιλιάρδου οι οποίες ενώ αρχικά είναι τοποθετημένες σε μια οργανωμένη διάταξη διαλύονται σε μια ακατάστατη διάταξη μετά την πρώτη κρούση.

μενο Κεφάλαιο.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα είναι επίσης αναλλοίωτος και σε χρονικές μεταθέσεις ($t \rightarrow t' = t + \tau$, όπου τ κάποιο σταθερό χρονικό διάστημα),

$$\mathbf{F}(\mathbf{r}) = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt'^2}, \text{ για οποιαδήποτε τιμή του } \tau,$$

γεγονός το οποίο αντικατοπτρίζει την ομογένεια του χρόνου, το ότι δηλαδή δεν υπάρχει κάποια συγκεκριμένη αρχή του χρόνου.³ Με άλλα λόγια, όλες οι χρονικές στιγμές είναι ισοδύναμες όσον αφορά στην έναρξη και στην τελική έκβαση ενός μηχανικού πειράματος. Αυτό εξάλλου αποτυπώνεται στην αντίληψη του Νεύτωνα για το χρόνο: «... [ο χρόνος] ρέει ομοιόμορφα, ανεξάρτητα από οτιδήποτε εξωτερικό και επομένως δεν σχετίζεται με οποιαδήποτε αλλαγή ή τρόπο μέτρησής του (π.χ. ώρα, μέρα, μήνα, ή έτος).»

Επίσης η έκβαση ενός μηχανικού πειράματος δεν μπορεί να είναι διαφορετική αν το πείραμα εκτελεστεί σε ένα άλλο σημείο, εκτός και αν στο νέο αυτό σημείο επικρατούν διαφορετικές συνθήκες που επηρεάζουν την εξέλιξή του. Αν φανταστούμε στο αχανές διάστημα, μακριά από κάθε εξωτερική βαρυτική πηγή, ένα σύστημα από αλληλεπιδρώντα σωματίδια, δεν θα πρέπει η εξέλιξη της κίνησής τους να σχετίζεται καθόλου με τη θέση του κάθε σωματιδίου χωριστά, παρά από τη σχετική τους θέση. Λέμε λοιπόν ότι ο 2ος νόμος του Νεύτωνα είναι αναλλοίωτος στις χωρικές μετατοπίσεις $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{r}_0$ (με δεδομένο ότι η δύναμη δεν θα αλλάξει τιμή από αυτή την αλλαγή, αφού όλα τα σωματίδια θα αλλάξουν κατά τον ίδιο τρόπο θέση, αλλά όχι σχετική θέση):

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d^2 (\mathbf{r} + \mathbf{r}_0)}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2} \quad (3.1)$$

Τέλος η διανυσματική διατύπωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα, που έχουμε συνηθίσει να γράφουμε χωρίς πολύ σκέψη, υποκρύπτει μία ακόμη συμμετρία της φύσης· το γεγονός ότι όλες οι διευθύνσεις του χώρου είναι ισοδύναμες. Η ισοτροπία αυτή του χώρου, μάς δίνει το δικαίωμα να επιλέγουμε το σύστημα των αξόνων για την περιγραφή οποιουδήποτε μηχανικού συστήματος, με ότι προασανατολισμό εμείς επιθυμούμε. Επομένως, η εξίσωση που διέπει την κίνηση ενός μηχανικού συστήματος δεν μπορεί παρά να είναι διανυσματική,⁴ αφού τα διανύσματα είναι γε-

³ Η Μεγάλη Έκρηξη, το γνωστό Big Bang, αναφέρεται σε θεωρίες οι οποίες ξεπερνούν τα όρια ισχύος της νευτώνειας θεωρίας.

⁴ Γενικότερα, μια εξίσωση που περιγράφει φυσικούς νόμους, ανεξάρτητους του συστήματος αναφοράς, επιβάλλεται να έχει τανυστική μορφή, δηλαδή να συσχετίζει τανυστικά μεγέθη. Η πιο απλή και τετριμμένη περίπτωση τανυστή είναι ένα βαθμωτό μέγεθος, όπως είναι η μάζα. Προφανώς μια εξίσωση αποκλειστικά βαθμωτών μεγεθών θα ήταν ακατάλληλη να περιγράψει την κίνηση σωματιδίων στον τριδιάστατο χώρο.

ωμετρικές οντότητες ανεξάρτητες του συστήματος αναφοράς που χρησιμοποιούμε για την περιγραφή τους. Την ιδιότητα αυτή των διανυσμάτων, να διατηρούν αναλλοίωτο το γεωμετρικό τους νόημα σε στροφές του συστήματος αναφοράς, θα μελετήσουμε εκτενέστερα στο Κεφάλαιο 7.

Υπάρχει όμως και μια τελευταία συμμετρία που εμπεριέχεται στο 2ο νόμο του Νεύτωνα: η γαλιλαϊκή συμμετρία· η αναλλοιότητα δηλαδή της εξίσωσης κίνησης σε αλλαγή του αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Ο Γαλιλαίος στο βιβλίο του «*Dialogue Concerning the Two Chief World Systems – Ptolemaic & Copernican*» μας δείχνει τον τρόπο να διαπιστώσουμε τη συμμετρία αυτή:

«...Κλείσον μαζί με κάποιο φίλο σε μια κεντρική εσωτερική καμπίνα ενός μεγάλου πλοίου, και πάρε κοντά σου λίγες μύγες, μερικές πεταλούδες, και μερικά πτηνά. Έχε μαζί σου και ένα μικρό ενυδρείο με ένα ψάρι και ανάρτησε στην οροφή μία φιάλη γεμάτη νερό έτσι ώστε να αδειάζει στάλα - στάλα σε μια πλατιά λεκάνη. Όταν το πλοίο είναι ακίνητο παρατήρησε προσεκτικά πως τα πτηνά πετούν με ίση ταχύτητα προς όλες τις κατευθύνσεις. Το ψάρι επίσης κολυμπάει ανέμελα προς όλες της κατευθύνσεις και οι σταγόνες πέφτουν ρυθμικά στη λεκάνη... Αφού παρατηρήσεις όλα αυτά με προσοχή, διάταξε να σαλπάρει το πλοίο και να ταξιδέψει με κάποια σταθερή ταχύτητα, προσέχοντας η κίνηση του πλοίου να είναι ομαλή και χωρίς διαταραχές. Τότε δεν θα παρατηρήσεις καμία αλλαγή σε όσα παρατήρησες προηγουμένως, ούτε θα είσαι σε θέση να προσδιορίσεις κατά πόσο το πλοίο κινείται ή παραμένει ακίνητο... Οι σταγόνες θα πέφτουν με τον ίδιο τρόπο στη λεκάνη και στο ίδιο σημείο, χωρίς να μετακινούνται προς τη πρόμνη, παρότι όταν οι σταγόνες κινούνται στον αέρα το πλοίο μετακινείται προς τα μπροστά. Το ψάρι στο ενυδρείο θα κολυμπάει προς τα εμπρός με την ίδια ευκολία που κολυμπάει προς τα πίσω, και θα κατευθύνεται προς το δόλωμα με την ίδια ευκολία ανεξαρτήτως από το που βρίσκεται αυτό. Τέλος οι πεταλούδες και οι μύγες θα συνεχίσουν ανέμελα το πέταγμά τους προς όλες τις κατευθύνσεις, και δεν θα συγκεντρώνονται προς τη πρόμνη, ως θα συνέβαινε αν κουραζόντουσαν στην προσπάθειά τους να διατηρήσουν τη θέση τους στο κινούμενο πλοίο...»

Αρκεί, λοιπόν, να αλλάξουμε σύστημα αναφοράς (φροντίζοντας πάντα να είναι αδρανειακό), –υποθέτοντας ότι η δύναμη παραμένει ίδια και στο νέο σύστημα–, και ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μένει अपαράλλαχτος:

$$\mathbf{F} = m \frac{d^2 \mathbf{r}}{dt^2} = m \frac{d^2 (\mathbf{r} - \mathbf{v} t)}{dt^2} = m \frac{d^2 \mathbf{r}'}{dt^2}, \quad (3.2)$$

όπου $\mathbf{r}' = \mathbf{r} - \mathbf{v} t$ η θέση του σωματιδίου στο νέο σύστημα αναφοράς το οποίο κινείται με ταχύτητα \mathbf{v} σε σχέση με το αρχικό.

3.2 Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα πηγάζει από συμμετρίες

Όταν διατυπώσαμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα σε προηγούμενο κεφάλαιο γράψαμε μια διαφορική εξίσωση 2ης τάξης αβίαστα. Είμαστε τόσο συνηθισμένοι στη διατύπωση του δυναμικού αυτού νόμου, που αξίζει ίσως να αναλογιστούμε που οφείλεται η μορφή αυτή.

Ο δυναμικός αυτός νόμος είναι δευτεροτάξιος, όχι εξαιτίας κάποιου βαθύτερου λόγου. Οι παρατηρήσεις είναι αυτές που επιβάλλουν να είναι τέτοιος. Γνωρίζουμε ότι η αρχική θέση και η αρχική ταχύτητα ενός σωματιδίου καθορίζουν πλήρως την τροχιά του. Για να πεισθείτε, υποθέστε ότι οδηγείτε ένα αυτοκίνητο προς το χείλος ενός γκρεμού τη μια φορά με σταθερή ταχύτητα 20 km/h και τη δεύτερη φορά ξεκινώντας με μεγαλύτερη ταχύτητα και φρενάροντας έτσι ώστε μόλις το αυτοκίνητο φτάσει στο χείλος του γκρεμού να έχει και πάλι ταχύτητα 20 km/h. Αν εκτελέσουμε το πείραμα θα διαπιστώσουμε (αν επιζήσουμε του εγχειρήματος) ότι και στις δύο περιπτώσεις η τροχιά που θα διαγράψει το αυτοκίνητο πέφτοντας στο γκρεμό θα είναι ακριβώς η ίδια. Αν πάλι σας φαίνεται επικίνδυνο να επιχειρήσετε κάτι τέτοιο αρκεστείτε στην επιβεβαίωση των πειραματιστών του 17ου αιώνα. Εφόσον λοιπόν η θέση του κινητού και η πρώτη χρονική παράγωγος της θέσης του, και *μόνον* αυτές, αρκούν για την περιγραφή της κίνησης ενός κινητού μέσα σε ένα δοσμένο πεδίο δυνάμεων, δεν μπορεί παρά ο δυναμικός νόμος της κίνησης να περιγράφεται με μια δευτεροτάξια ως προς το χρόνο εξίσωση που συνδέει το αίτιο της μεταβολής της κίνησης (τη δύναμη) με τη θέση. Η γενικότερη μορφή της διαφορικής εξίσωσης θα είναι λοιπόν

$$F = a(x, \dot{x}, t)\ddot{x} + b(x, \dot{x}, t)\dot{x} + c(x, \dot{x}, t) \quad (3.3)$$

όπου a, b, c κάποιες συναρτήσεις των x, \dot{x}, t οι οποίες πρέπει να προσδιοριστούν.⁵ Θεωρήσαμε ότι η διαφορική αυτή εξίσωση είναι γραμμική ως προς την επιτάχυνση. Αν δεν ήταν θα μπορούσαμε να τη λύσουμε ως προς την επιτάχυνση και τότε αυτό που θα εμφανιζόταν στο αριστερό σκέλος, μετά τη λύση θα λέγαμε ότι είναι το αίτιο της μεταβολής της κίνησης, δηλαδή η δύναμη. Παρατηρούμε επίσης ότι οι δύο τελευταίοι όροι του δεξιού σκέλους θα μπορούσαν να συγχωνευτούν σε μια ενιαία, αγνώστου μορφής συνάρτηση $d(x, \dot{x}, t)$.

Όμως από τον 1ο νόμο του Νεύτωνα γνωρίζουμε ότι όταν εξαφανιστεί η δύναμη ($F = 0$) το κινητό συνεχίζει να κινείται με σταθερή ταχύτητα, επομένως $\ddot{x} = 0$ · συνεπώς $d(x, \dot{x}, t) = 0$. Ταυτόχρονα, η ομογένεια του χώρου και η ομογένεια του χρόνου επιβάλλουν στη συνάρτηση να μην εξαρτάται ούτε από τη θέση του κινητού,

⁵Στην παραπάνω εξίσωση θεωρήσαμε μονοδιάστατη κίνηση κατά μήκος του άξονα- x , ώστε να μην περιπλέξουμε την απόδειξη με τη χρήση διανυσμάτων. Θα μπορούσε βέβαια κανείς, εύκολα, να επεκτείνει την απόδειξη θεωρώντας την αντίστοιχη διανυσματική εξίσωση 2ης τάξης.

ούτε από το χρόνο.⁶ Επομένως, ο δυναμικός νόμος των μηχανικών συστημάτων δεν μπορεί παρά να έχει την απλούστερη μορφή

$$F = a(\dot{x})\ddot{x}. \quad (3.4)$$

Στο σημείο αυτό θα έπρεπε να εγκαταλείψουμε την προσπάθεια να καταλήξουμε στο 2ο νόμο του Νεύτωνα και απλώς να δεχτούμε ότι τυχαίνει ο κόσμος μας να συμπεριφέρεται με μια σταθερά αναλογίας μεταξύ δύναμης και επιτάχυνσης, αν δεν υπήρχε καμία άλλη συμμετρία την οποία να μπορούσαμε να εκμεταλλευτούμε για να φτάσουμε στην γνωστή διατύπωση του φυσικού νόμου εξέλιξης των μηχανικών συστημάτων. Όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο υπάρχει ακόμη μια συμμετρία του φυσικού μας κόσμου, την οποία αν και γνωρίζουμε καλά, δεν έχουμε μάθει να την αναγνωρίζουμε ως συμμετρία: πρόκειται για τη συμμετρία που περιγράφει με τόσο γλαφυρό τρόπο ο Γαλιλαίος (βλ. παραπάνω). Η εξίσωση που γράψαμε παραπάνω δεν είναι συμβατή με τη γαλιλαϊκή συμμετρία, αφού αν αλλάξουμε σύστημα αναφοράς θα αλλάξει εν γένει η τιμή της $a(\dot{x})$, ενώ όλα τα άλλα μέρη της εξίσωσης (F και \ddot{x}) θα διατηρήσουν τη μορφή τους με αποτέλεσμα η κίνηση να είναι διαφορετική στο τονούμενο σύστημα σε αντιδιαστολή με τις παρατηρήσεις του Γαλιλαίου. Επομένως, μοναδική διέξοδος για το δυναμικό νόμο, ώστε να είναι συμβατός με όλες τις συμμετρίες του κόσμου μας είναι $a(\dot{x}) = m =$ σταθερά η οποία θα εξαρτάται από το ίδιο το σωματίδιο. Ο δε δυναμικός νόμος, καταλήγει, σεβόμενος τις συμμετρίες, να είναι αυτός και μόνο αυτός που καλά γνωρίζουμε:

$$F = m\ddot{x}. \quad (3.5)$$

Όσον αφορά, τη σταθερά m , που μαθαίνουμε να αποκαλούμε «μάζα» θα πρέπει να είναι μια βαθμωτή ποσότητα που χαρακτηρίζει το σωματίδιο. Με πειράματα μπορούμε να καταλάβουμε ότι αυτή ποσότητα, η εισαγωγή της οποίας αποτελεί τεράστια καινοτομία του Νεύτωνα, σχετίζεται με την ποσότητα της ύλης που περικλείεται στο σωματίδιο. Για παράδειγμα αν προσδέσουμε σε ένα σωματίδιο πάνω στο οποίο επενεργεί μια κάποια δύναμη, ένα δεύτερο ίδιο σωματίδιο θα διαπιστώσουμε ότι η επιτάχυνση των δύο σωματιδίων θα υποδιπλασιαστεί.⁷

Κλείνοντας το εδάφιο αυτό ας τονίσουμε ότι η διατύπωση του 2ου νόμου του Νεύτωνα από τον ίδιο τον Νεύτωνα ήταν απλώς μια πρόταση αναφορικά με το πώς «συμπεριφέρονται» τα μηχανικά συστήματα, μια λαμπρή ιδέα με αφορμή κάποια πειραματικά δεδομένα, η οποία, από ότι φάνηκε, έδινε απόλυτα ικανοποιητικές προβλέψεις για οποιοδήποτε μηχανικό σύστημα. Η κατασκευή, όμως, του δυναμικού

⁶Εδώ υποθέτουμε ότι μεταφέροντας το σωματίδιο σε μια άλλη θέση και μελετώντας το σε μια άλλη χρονική στιγμή, μεταφέρεται αυτούσια και η δύναμη και η χρονική εξέλιξη αυτής.

⁷Σκεφθείτε πως θα αντικρούατε το επιχειρήμα ότι η ποσότητα που εισέρχεται στο δυναμικό νόμο δεν σχετίζεται με την ποσότητα της ύλης, αλλά με τον όγκο αυτής.

νόμου που παραθέσαμε παραπάνω, αποτελεί μια πολύ βαθύτερη προσέγγιση του προβλήματος, η οποία ξεκινά από την παρατήρηση κάποιων αρχικών στοιχείων που καθορίζουν την κίνηση, και στηρίζεται εξολοκλήρου σε θεμελιώδεις συμμετρίες της φύσης.

3.3 Αναλυτική επεξεργασία του 2ου νόμου σε ειδικές περιπτώσεις

Στη συνέχεια θα εξετάσουμε μερικά απλά και διδακτικά παραδείγματα μηχανικών συστημάτων, η εξέλιξη των οποίων μπορεί να υπολογιστεί ακριβώς με αναλυτικό τρόπο.

3.3.1 Δυνάμεις με αμγή χρονοεξάρτηση

Ας υποθέσουμε ότι σε ένα υλικό σώμα που μπορεί να κινείται σε μια διάσταση ασκείται μια δύναμη της μορφής $F(t)$. Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μπορεί τότε να επιλυθεί σε δύο φάσεις: (i) ολοκληρώνοντάς τον μια φορά, μπορεί κανείς να υπολογίσει τη χρονική εξέλιξη της ταχύτητας και (ii) με άλλη μια χρονική ολοκλήρωση να υπολογίσει το διανυθέν διάστημα.

$$\begin{aligned}
 F(t) &= m \frac{d^2 x}{dt^2} = m \frac{dv}{dt} \rightarrow \\
 \int_{v(0)}^{v(t)} dv &= \int_0^t \frac{F(t')}{m} dt' \Rightarrow v(t) = v(0) + \int_0^t \frac{F(t')}{m} dt' \rightarrow \\
 \int_{x(0)}^{x(t)} dx &= \int_0^t v(t'') dt'' = \int_0^t \left[v(0) + \int_0^{t''} \frac{F(t')}{m} dt' \right] dt'' \rightarrow \\
 x(t) &= x(0) + v(0)t + \int_0^t dt'' \int_0^{t''} dt' \frac{F(t')}{m}. \quad (3.6)
 \end{aligned}$$

Προσέξτε τη χρήση διαφορετικών συμβόλων για τις μεταβλητές ολοκλήρωσης και για τις μεταβλητές που χρησιμοποιούνται στα όρια των ολοκληρωμάτων. Στο τελικό αποτέλεσμα μπορείτε να αναγνωρίσετε την ομογενή λύση $(x(0) + v(0)t)$ της αρχικής διαφορικής εξίσωσης (δηλαδή τη λύση του μέρους $m\ddot{x} = 0$) και την ειδική λύση (το διπλό ολοκλήρωμα) οι οποίες αθροιζόμενες δίνουν τη γενική λύση της εξίσωσης $m\ddot{x} = F(t)$.

Αν και φορμαλιστικά η λύση ενός τέτοιου χρονοεξααρτώμενου προβλήματος δεν μοιάζει ιδιαίτερα πολύπλοκη, η παρουσία του διπλού ολοκληρώματος δυσχεραίνει από τεχνικής άποψης τον υπολογισμό της λύσης. Θα μάθουμε λίγο αργότερα πώς να επιλύουμε τέτοιου είδους προβλήματα με τη χρήση μονάχα ενός ολοκληρώματος, όσο και αν αυτό μοιάζει απίθανο για μια εξίσωση 2ας τάξης. Προς το παρόν θα

δοκιμάσουμε να βρούμε τη λύση σε ένα συγκεκριμένο χρονοεξαρτώμενο πρόβλημα, δίχως να επικαλεστούμε το γενικό αποτέλεσμα που γράψαμε παραπάνω, αλλά χρησιμοποιώντας άμεσα την έννοια της ώθησης.

• **Το πρόβλημα:** Ένα τρένο μάζας m προωθείται με διαδοχικές ωθήσεις σταθερής δύναμης F οι οποίες διαρκούν χρόνο τ και επαναλαμβάνονται κάθε χρονικό διάστημα $T > \tau$. Αν το τρένο ξεκινά από την ηρεμία ποιο θα είναι διάστημα που θα διανύσει σε χρόνο $t \gg T$;

Κάθε παλμός δύναμης προσφέρει στο τρένο ώθηση $\Omega = F\tau$, επομένως μετά από ένα τέτοιο παλμό το τρένο αυξάνει την ταχύτητά του κατά $\Omega/m = F\tau/m$. Το δε διάστημα που διανύει κατά τη διάρκεια του παλμού είναι $v_{n-1}\tau + \frac{1}{2}(F/m)\tau^2$, όπου v_{n-1} είναι η ταχύτητα που είχε αποκτήσει προτού αρχίσει να ενεργεί ο n -οστός παλμός. Στη συνέχεια κινείται ελεύθερο για χρόνο $T - \tau$ με ταχύτητα v_n , διανύοντας διάστημα $v_n(T - \tau)$. Συνολικά, από την αρχή του n -οστού παλμού μέχρι την αρχή του επόμενου το τρένο διανύει διάστημα

$$s_n = v_{n-1}\tau + \frac{F}{2m}\tau^2 + v_n(T - \tau)$$

με

$$v_n - v_{n-1} = \frac{F\tau}{m}.$$

Η δεύτερη αναδρομική σχέση ορίζει μια αριθμητική ακολουθία που αντιστοιχεί στο γενικό τύπο

$$v_n = \frac{nF\tau}{m},$$

αφού $v_0 = 0$. Έτσι το διάστημα που διανύει μεταξύ του n -οστού και του $(n + 1)$ -οστού παλμού είναι

$$s_n = \frac{F\tau}{m} \left(nT - \frac{\tau}{2} \right).$$

Υποθέτοντας ότι $t = NT$ (δεν μας ενδιαφέρει ακριβώς σε ποια φάση μεταξύ των παλμών ανταποκρίνεται ο συνολικός χρόνος αφού $t \gg T$, οπότε θα υποθέσουμε ότι ο συνολικός χρόνος είναι ακέραιο πολλαπλάσιο του T) το συνολικό διάστημα θα είναι

$$\begin{aligned} s(t) &= \sum_1^{N-1} s_n = \frac{F\tau}{m} \left(\frac{N(N-1)}{2}T - (N-1)\frac{\tau}{2} \right) \\ &= \frac{F\tau}{m}(N-1)\frac{t-\tau}{2} = \frac{F\tau}{m}(t/T-1)\frac{t-\tau}{2}. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Το αποτέλεσμα αυτό δεν μας φέρνει στο μυαλό κάτι γνωστό για να το συγκρίνουμε. Έτσι ας λάβουμε κάποια οριακή περίπτωση που θα απλοποιήσει το αποτέλεσμα. Θα υποθέσουμε ότι οι παλμοί των ωθήσεων διαρκούν απειροελάχιστο χρόνο προσφέροντας όμως δοσμένου μέτρου ώθηση: $F\tau = \text{σταθ}$, με $\tau \rightarrow 0$. Το συνολικό διάστημα

θα είναι τότε

$$s(t) = \frac{1}{2} \frac{F\tau}{Tm} t(t-T) \simeq \frac{1}{2} \frac{F\tau}{mT} t^2, \text{ για } t \gg T.$$

Το αποτέλεσμα είναι αυτό μιας ομαλά επιταχυνόμενης κίνησης εξαιτίας μιας δύναμης προώθησης $F = F\tau/T = \Omega/T$, της μέσης δηλαδή τιμής της δύναμης που θα οδηγούσε σε ίδια ώθηση.

3.3.2 * Συναρτήσεις δέλτα – συναρτήσεις Green

Τώρα θα γνωρίσουμε μια άλλη τεχνική η οποία θα μας επιτρέψει να λύνουμε προβλήματα όπως αυτό ενός σωματιδίου, του οποίου γνωρίζουμε την ελεύθερη κίνηση, όταν ασκείται πάνω του κάποια χρονοεξαρτώμενη δύναμη. Προς τούτο θα χρειαστεί να ορίσουμε μια καινούργια συνάρτηση, η οποία εισήχθη από τον Paul Adrien Maurice Dirac [1902/1984] και πήρε στους φυσικούς και τους μαθηματικούς πολύ καιρό να την αποδεχτούν ως μια «νόμιμη» συνάρτηση. Πρόκειται για τη συνάρτηση δέλτα του Dirac.

Πλαίσιο 3.1

Η συνάρτηση δ

Ας θεωρήσουμε την ασυνεχή συνάρτηση:

$$\delta_\epsilon(t) = \begin{cases} 1/\epsilon, & \text{για } |t| < \epsilon/2, \\ 0, & \text{για } |t| \geq \epsilon/2. \end{cases}$$

Η συνάρτηση αυτή είναι έτσι κατασκευασμένη ώστε το ολοκλήρωμά της σε ολόκληρη την ευθεία των πραγματικών να ισούται με 1 ανεξάρτητα της τιμής του ϵ (το οποίο υποθέτουμε ότι είναι κάποιος θετικός αριθμός). Το γράφημα της συνάρτησης αυτής μοιάζει με καπέλο και μάλιστα ιδιαιτέρως ψηλό και στενό καθώς το $\epsilon \rightarrow 0$. Θα ορίσουμε ως συνάρτηση δέλτα το όριο της παραπάνω συνάρτησης καθώς η παράμετρος ϵ τείνει στο 0:

$$\delta(t) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \delta_\epsilon(t). \quad (3.8)$$

Προφανώς

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (3.9)$$

Ας δούμε το περίεργο αυτό (εξόχως ασυνεχές κατασκεύασμα) τι ιδιότητες έχει. Μόνη της μια τέτοια συνάρτηση δεν θα είχε και πολύ νόημα. Η συνάρτηση αυτή είναι παντού 0 εκτός από ένα ιδιάζον σημείο, το $t = 0$, όπου απειρίζεται κατάλληλα, έτσι ώστε να διατηρεί μοναδιαίο ολοκλήρωμα σε ολόκληρη την ευθεία των πραγματικών. Φυσικά αφού είναι 0 σε όλα τα θετικά και τα αρνητικά t θα ισχύει και

$$\int_{\text{τυχαίος αρνητικός}}^{\text{τυχαίος θετικός}} \delta(t) dt = 1. \quad (3.10)$$

Η συνάρτηση αυτή αποκτάει νόημα αν ολοκληρωθεί μαζί με κάποια άλλη συνάρτηση (είναι

όπως λέμε ένα συναρτησοειδές). Το ενδιαφέρον είναι ότι τότε ισχύει η ακόλουθη σχέση

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)f(t) dt = f(0) \quad (3.11)$$

για οποιαδήποτε συνάρτηση $f(t)$.^α Ας δούμε γιατί ισχύει η παραπάνω σχέση. Θα θεωρήσουμε το ανάπτυγμα Taylor της f γύρω από το σημείο 0:

$$f(t) \simeq f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2!} + \dots + f^n(0)\frac{t^n}{n!} + \dots$$

και θα λάβουμε το ολοκλήρωμα αυτής πολλαπλασιασμένης με την $\delta_\epsilon(t)$ (και όχι με την $\delta(t)$). Θα λάβουμε λοιπόν

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta_\epsilon(t)[f(0) + f'(0)t + f''(0)\frac{t^2}{2!} + \dots] dt = \\ f(0) + f'(0)\frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} t dt + \frac{1}{2!}f''(0)\frac{1}{\epsilon} \int_{-\epsilon/2}^{\epsilon/2} t^2 dt + \dots = \\ f(0) + 0 + \frac{f''(0)}{2!} \frac{\epsilon^2}{12} + \dots \end{aligned} \quad (3.12)$$

Οι επόμενοι όροι που έχουμε παραλείψει θα είναι ολοένα και μεγαλύτερης τάξης ως προς ϵ .^β Έτσι το όριο του ολοκληρώματος αυτού καθώς $\epsilon \rightarrow 0$ θα είναι απλώς $f(0)$. Το όριο αυτό θα είναι και το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος αν η δ_ϵ αντικατασταθεί με το όριο της, δηλαδή τη συνάρτηση δέλτα.

Η σημαντική αυτή ταυτότητα (3.11) που ικανοποιεί η συνάρτηση δέλτα, χρησιμοποιείται ως ο αυστηρός ορισμός της συνάρτησης δέλτα. Η κατασκευή της συνάρτησης δέλτα που φτιάξαμε και την οποία χρησιμοποιήσαμε ως όριο δεν είναι τόσο καλή όσο ο ορισμός αυτός, αφού το ορθογώνιο σχήμα που υποθέσαμε στην αρχική κατασκευή δεν είναι καθόλου αναγκαίο. Θα μπορούσαμε να είχαμε ξεκινήσει με μια τελείως διαφορετικού σχήματος συνάρτηση (τριγωνική –όπως αρχικά την εμπνεύστηκε ο Dirac· εξ ου και το όνομα–, ή γκαουσιανή, ή σιδηρόποτε άλλο) παραμετροποιημένη κατάλληλα ώστε να έχει ολοκλήρωμα 1 ανεξαρτήτως του εύρους της.

Μια μικρή γενίκευση, ως προς το ιδιάζον σημείο, μας οδηγεί στον πλήρη ορισμό της δέλτα $\delta(t - t_0)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t - t_0)f(t) dt = f(t_0), \quad (3.13)$$

για κάθε συνάρτηση f συνεχή στο σημείο t_0 .

^α Αρχεί η συνάρτηση αυτή να είναι συνεχής στο 0.

^β Μόνο οι άρτιες τάξης όροι θα είναι μη μηδενικοί. Τα ολοκληρώματα των περιττών συναρτήσεων θα μηδενίζονται.

Η συνάρτηση $\delta(t - t_0)$ ως αναπαράσταση μιας χρονοεξαρτώμενης δύναμης θα αντιστοιχούσε σε μια δύναμη μοναδιαίας ώθησης, η οποία θα δρούσε αστραπιαία τη χρονική στιγμή $t = t_0$. Αν μας ζητούσαν να υπολογίσουμε πως θα κινούνταν ένα σωματίδιο μάζας m υπό την επίδραση μιας τέτοιας δύναμης, δεν θα χρειαζόταν να κάνουμε κανένα υπολογισμό. Θα αρκούσε να συνδέσουμε δύο λύσεις ελεύθερου σωματιδίου, προ και μετά του σημείου $t = t_0$, έτσι ώστε αυτές να συνδέονται με μοναδιαία μεταβολή στην ορμή: Αν το σωματίδιο ήταν αρχικά (προτού δράσει η

δύναμη) ακίνητο, μετά τη δράση της δύναμης θα κινείται με ταχύτητα $1/m$.⁸ Επομένως η λύση στο πρόβλημα

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = \delta(t - t_0), \quad (3.14)$$

με δεδομένο ότι για $t \rightarrow -\infty$ είναι $x(t) = 0$, θα είναι η ακόλουθη

$$x(t) = \begin{cases} 0, & \text{για } t \leq t_0, \\ (t - t_0)/m, & \text{για } t > t_0. \end{cases} \quad (3.15)$$

Η παραπάνω συνάρτηση αποτελεί μια συνεχή ένωση δύο διαφορετικών λύσεων της ομογενούς εξίσωσης. Πώς είμαστε σίγουροι, όμως, ότι η κίνηση ενός σωματιδίου στο οποίο ασκείται μια τόσο αντισυμβατική δύναμη περιγράφεται από μια συνεχή συνάρτηση; Ένας τρόπος να βεβαιωθείτε ότι η κίνηση πρέπει να είναι συνεχής είναι να δοκιμάσετε να την υπολογίσετε αν στη θέση της $\delta(t - t_0)$ βρίσκεται η πιο συμβατική $\delta_\epsilon(t - t_0)$. Στην περίπτωση αυτή μια συνεχής πολυωνυμική συνάρτηση 2ου βαθμού (ομαλή επιτάχυνση) θα ενώσει την προγενέστερη λύση με τη μεταγενέστερη λύση. Στο όριο που το ϵ θα τείνει στο 0, πάλι η προγενέστερη και η μεταγενέστερη λύση θα συνδέονται συνεχώς, παρουσιάζοντας όμως τώρα ασυνέχεια στην πρώτη παράγωγο (ως αποτέλεσμα του ότι η τιμή της δ_ϵ στο $t = t_0$ θα απειριζέται καθώς το ϵ τείνει στο 0). Αν το καλοσκεφθείτε όμως δεν θα μπορούσε η κίνηση να περιγράφεται από μια ασυνεχή συνάρτηση. Η κίνηση ενός σωματιδίου περιγράφεται πάντα από μια συνεχή συνάρτηση, ακόμη και στην ακραία αυτή περίπτωση εφαρμογής δύναμης· αλλιώς, δεν θα οριζόταν η ταχύτητα και ο 2ος νόμος του Νεύτωνα στη μορφή $F = m(dv/dt)$ θα στερούνταν νοήματος. Σκεφθείτε το αντίστοιχο πρόβλημα δύναμης στην περίπτωση της αριστοτέλειας μηχανικής. Ποια θα ήταν τότε η κίνηση υπό την επίδραση μιας δύναμης τύπου δέλτα συνάρτησης;

Η λύση (3.15) που γράψαμε παραπάνω θα μπορούσε να λάβει μια πιο κομψή μορφή αν χρησιμοποιούσαμε το πρότυπο μιας ασυνεχούς συνάρτησης, τη συνάρτηση βήματος (γνωστή και ως συνάρτηση Heaviside):

$$\Theta(t) = \begin{cases} 0, & \text{για } t \leq 0, \\ 1, & \text{για } t > 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

Μέσω της συνάρτησης βήματος, η λύση της (3.14) θα λάμβανε τη μορφή

$$x(t) = \Theta(t - t_0) \frac{t - t_0}{m}. \quad (3.17)$$

Η συνάρτηση αυτή αποτελεί τη λεγόμενη *συνάρτηση Green*⁹ του γενικότερου προ-

⁸ Προσέξτε, αυτή η μονάδα έχει διαστάσεις ώθησης, δηλαδή ορμής.

⁹ Ο βρετανός μαθηματικός και φυσικός George Green [1793/1841] ήταν ο πρώτος που χρησιμοποίησε

βλήματος

$$m\ddot{x} = F(t) , \quad (3.18)$$

δηλαδή η λύση του προβλήματος αυτού, αν αντικαταστήσουμε την $F(t)$ με την $\delta(t - t_0)$. Τη λύση αυτή θα τη συμβολίσουμε $x_G(t; t_0)$ αφού αναφέρεται σε ένα πρόβλημα με παράμετρο την t_0 . Το ενδιαφέρον είναι πως αν γνωρίζουμε τη λύση σε αυτό το πρόβλημα με τη δέλτα συνάρτηση στο δεξί μέλος, μπορούμε να κατασκευάσουμε πολύ εύκολα και τη λύση του γενικότερου προβλήματος (3.18). Ας δούμε πώς. Αρχικά θα κατασκευάσουμε τη συνάρτηση

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) x_G(t; \tau) d\tau . \quad (3.19)$$

Θα δείξουμε ότι αυτή είναι η ζητούμενη λύση. Πράγματι

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) m \ddot{x}_G(t; \tau) d\tau \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} F(\tau) \delta(t - \tau) d\tau \\ &= F(t) . \end{aligned} \quad (3.20)$$

Στο πρώτο ολοκλήρωμα περάσαμε τη δεύτερη χρονική παράγωγο εντός του ολοκληρώματος, ώστε αυτή να δράσει στη μοναδική συνάρτηση που εξαρτάται από το t , την x_G , ενώ στην τελευταία ισότητα χρησιμοποιήσαμε τη βασική ιδιότητα (ή ορισμό) της συνάρτησης δέλτα (βλ. σχέση (3.13)).

Παρατηρούμε ότι η κατασκευή (3.19), η οποία δίνεται με τη μορφή ενός μόνο ολοκληρώματος, λύνει την 2ας τάξης διαφορική εξίσωση του Νεύτωνα, δίνοντας την ειδική λύση της (χωρίς το ομογενές μέρος: $x(0) + v(0)t$). Η κάπως παράδοξη αυτή λύση βασίζεται στην πρότερη κατασκευή της αντίστοιχης συνάρτησης Green του προβλήματος, δηλαδή την (3.17). Θα έλεγε ίσως κανείς ότι ανταλλάξαμε τη δυσκολία του διπλού ολοκληρώματος με αυτήν της κατασκευής μας δύσκολης συνάρτησης. Σκεφθείτε, όμως, ότι η εύρεση της συνάρτησης Green δεν ήταν και τόσο δύσκολη: ήταν απλώς ένα κατάλληλο «κόλλημα» ομογενών λύσεων έτσι ώστε η κλίση δεξιά και αριστερά από το t_0 να διαφέρει κατά $1/m$.

Η τεχνική επίλυσης δύσκολων προβλημάτων μέσω συναρτήσεων Green εφαρμόζεται σε προβλήματα που περιγράφονται από διαφορικές εξισώσεις των οποίων το ομογενές κομμάτι αποτελείται από μια γραμμική διαφορική εξίσωση, γεγονός πολύ συχνό σε φυσικά προβλήματα. Η εύρεση της αντίστοιχης συνάρτησης Green είναι

την τεχνική αυτή για να επιλύσει τις γραμμικές εξισώσεις που ικανοποιεί το ηλεκτρικό δυναμικό εξαιτίας κάποιας κατανομής φορτίων. Στο έργο του, το πρώτο που οικοδόμησε μια μαθηματική θεωρία για τον ηλεκτρομαγνητισμό, στηρίχθηκε αργότερα ο James Clerk Maxwell [1831/1879].

εξαιρετικά απλή αφού αυτή αποτελείται από λύσεις της ομογενούς γραμμικής διαφορικής εξίσωσης¹⁰ κατάλληλα διαλεγμένες και συκολλημένες ώστε να εξασφαλίζεται η συνέχεια και η προκαθορισμένη ασυνέχεια της πρώτης παραγώγου. Έτσι όχι μόνο στη Μηχανική, αλλά και στον Ηλεκτρομαγνητισμό (όπου οι εξισώσεις του Maxwell χωρίς πηγές είναι γραμμικές ως προς τα πεδία) αλλά και στην Κβαντομηχανική (όπου η εξίσωση του Schrödinger είναι θεμελιωδώς γραμμική), η επίλυση προβλημάτων με τη χρήση συναρτήσεων Green είναι εξαιρετικά χρήσιμη.

3.3.3 Δυνάμεις με αμγή εξάρτηση από την ταχύτητα

Η περίπτωση αυτή είναι ίσως η πιο άμεσα επιλύσιμη, αφού ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί ως μια πρωτοτάξια διαφορική εξίσωση όσον αφορά στην ταχύτητα:

$$m \frac{dv}{dt} = F(v) \quad (3.21)$$

με λύση

$$v(t) = G^{-1}[G(v_0) + t/m] \quad (3.22)$$

όπου G είναι η παράγουσα συνάρτηση της $1/F$, δηλαδή $G' = 1/F$ και G^{-1} είναι η αντίστροφη συνάρτηση της G . Στη συνέχεια με μια ακόμη ολοκλήρωση μπορούμε να υπολογίσουμε και την εξέλιξη της θέσης.

Ως παράδειγμα τέτοιας δύναμης θα θεωρήσουμε την αντίσταση κίνησης μέσα σε ένα μέσο, η οποία θα υποθέσουμε ότι έχει γραμμική εξάρτηση από την ταχύτητα.¹¹ Το φυσικό μας παράδειγμα θα είναι ένα σώμα το οποίο πέφτει στο ομογενές βαρυντικό πεδίο, αλλά δέχεται από τον αέρα αντίσταση της μορφής $-kv$ (για παράδειγμα ένας αλεξιπτωτιστής με ανοιγμένο αλεξιπτωτο). Ο συντελεστής k που χαρακτηρίζει το αλεξιπτωτο είναι θετικός (αφού η δύναμη είναι δύναμη αντίστασης) και έχει διαστάσεις [μάζα/χρόνο]. Η εξίσωση κίνησης λοιπόν είναι

$$m\dot{v} = mg - kv \rightarrow \dot{v} = g - \frac{k}{m}v, \quad (3.23)$$

όπου θεωρήσαμε την προς τα κάτω φορά ως θετική. Φυσικά, το πρόσημο της αντίστασης δεν επηρεάζεται από τη σύμβαση της φοράς· η αντίσταση είναι πάντα αντίθετη με την ταχύτητα. Η ολοκλήρωση της σχέσης αυτής, μετά το διαχωρισμό των

¹⁰Περισσότερα στοιχεία για τις γραμμικές εξισώσεις καθώς και τις λύσεις τους θα συναντήσουμε στο Κεφάλαιο 5.

¹¹Η παραδοχή αυτή είναι αρκετά ακριβής για κινήσεις μέσα σε ένα μέσο με ταχύτητες πολύ κατώτερες της υπερηχητικής. Γενικότερα, η δύναμη της αντίστασης μπορεί να εκφραστεί φαινομενολογικά ως μια δύναμη της ταχύτητας με εκθέτη που εξαρτάται από το μέγεθος της ταχύτητας.

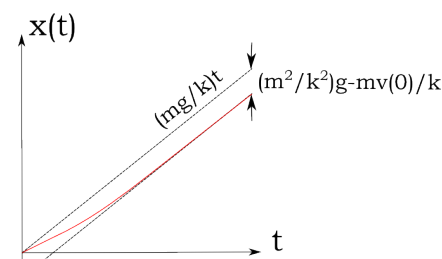
μεταβλητών οδηγεί στην ακόλουθη εξέλιξη της ταχύτητας

$$v(t) = \frac{mg}{k} - \frac{mg - kv(0)}{k} e^{-kt/m}, \text{ ή } v(t) = \frac{mg}{k} (1 - e^{-kt/m}) + v(0)e^{-kt/m}. \quad (3.24)$$

Αν και η πρώτη μορφή μας διευκολύνει να «δούμε» αμέσως τη συμπεριφορά της ταχύτητας (η ταχύτητα οδεύει πολύ γρήγορα στην οριακή της τιμή mg/k), η δεύτερη μορφή μας υπενθυμίζει ότι η οποιαδήποτε αρχική συνθήκη, $v(0)$, του προβλήματος τελικά θα ξεχαστεί. Το σωματίδιο σε χρόνο όσο μερικές φορές τη χαρακτηριστική κλίμακα χρόνου του προβλήματος ($\tau = m/k$) θα «συναντήσει» την ειδική λύση της διαφορικής εξίσωσης, ενώ η ομογενής λύση με τις παραμέτρους της (εδώ την $v(0)$) δεν θα αλλοιώσει το «τελικό» αποτέλεσμα. Αν μάλιστα αγνοήσουμε και το εκθετικό μέρος της ειδικής λύσης (μας και αυτό θα σβήσει γρήγορα), το αποτέλεσμα θυμίζει την αριστοτέλεια μηχανική: στον αλεξιπτωτιστή ασκείται το βάρος του ενώ η ταχύτητα που θα κινείται τελικά αυτός είναι ανάλογη του βάρους του. Αντιπαραβάλετε το αποτέλεσμα αυτό με τα λόγια του Αριστοτέλη, ο οποίος απ' ό,τι φαίνεται εκτέλεσε πειράματα με κίνηση στερεών σωμάτων μέσα σε νερό:

«... Και αν η αυτή δύναμη μεταφέρει μέσα σε ορισμένο χρόνο το αυτό αντικείμενο σε αυτήν εδώ την ορισμένη απόσταση, για να το μεταφέρει στο μισό της απόστασης χρειάζεται το μισό του χρόνου...»

Φυσική Ακρόασις, βιβλίο Η', κεφ. 5, 250α., μτφρ.
Κ. Δ. Γεωργούλης



Σχήμα 3.1: Η κίνηση ενός αλεξιπτωτιστή.

Ας προχωρήσουμε τώρα στην εύρεση της διανυθείσας απόστασης.

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' = \left(\frac{mg}{k}\right) t - \left(\frac{m^2 g}{k^2} - \frac{mv(0)}{k}\right) (1 - e^{-kt/m}). \quad (3.25)$$

Το γράφημα της παραπάνω συνάρτησης παρουσιάζεται στο σχήμα 3.1. Όσο πιο μεγάλος είναι ο συντελεστής k της αντίστασης τόσο η συνολική απόκλιση από την ομαλή κίνηση είναι μικρότερη. Κατά τ' άλλα, αν κατά τη διάρκεια της κίνησης μετράει κανείς το διανυθέν διάστημα σε ίσα χρονικά διαστήματα και αγνοήσει το πρώτο επιταχυνόμενο τμήμα της κίνησης (το οποίο όμως διαρκεί μερικά τ), θα νομίζει ότι η κίνηση υπό την επίδραση της σταθερής δύναμης του βάρους είναι ομαλή. Ο Αριστοτέλης, στην εν λόγω εκτίμησή του, δεν μπορεί να κατηγορηθεί για μη ρεαλιστικές αντιλήψεις· απλώς οι μετρήσεις του δεν είχαν την απαιτούμενη ακρίβεια.

3.3.4 Δυνάμεις με αμγή εξάρτηση από τη θέση

Όπως σχολιάσαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο τυχαίνει οι θεμελιώδεις δυνάμεις του κόσμου μας να είναι δυνάμεις που εξαρτώνται από τη θέση και μόνο. Η σχετική θέση και μόνο αυτή φαίνεται να επηρεάζει την ένταση της αμοιβαίας αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων, είτε αυτά αλληλεπιδρούν λόγω βαρύτητας είτε αυτά αλληλεπιδρούν λόγω ηλεκτρομαγνητικά. Στην περίπτωση αυτή είναι πιο δύσκολο να ολοκληρώσει κανείς άμεσα τον 2ο νόμο του Νεύτωνα

$$m\ddot{x} = F(x).$$

Ο διαχωρισμός των μεταβλητών δεν είναι εφικτός. Θα ακολουθήσουμε λοιπόν το ακόλουθο «τρυκ»: Θα πολλαπλασιάσουμε την παραπάνω εξίσωση με την ταχύτητα του σωματιδίου \dot{x} :

$$m \dot{x} \ddot{x} - \dot{x} F(x) = 0. \quad (3.26)$$

Στο πρώτο μέρος αναγνωρίζει κανείς μια τέλεια χρονική παράγωγο, αυτήν της ποσότητας $m\dot{x}^2/2$. Αλλά και το δεύτερο μέρος θα μπορούσε να γραφεί ως η χρονική παράγωγος μιας ποσότητας της

$$V(x(t)) = - \int_{x_0}^{x(t)} F(x') dx' + V_0,$$

όπου V_0 κάποια σταθερά. Πράγματι

$$\frac{dV}{dt} = - \frac{dx(t)}{dt} \frac{d}{dx} \left(\int_{x_0}^x F(x') dx' \right) = -\dot{x}F(x). \quad (3.27)$$

Να σημειώσουμε ότι το κάτω όριο του ολοκληρώματος στον ορισμό της $V(x(t))$ υπήρξε ανενεργό κατά την παραγωγή της V , και ως εκ τούτου αποτελεί μια αυθαίρετη παράμετρο. Το ίδιο ισχύει και για τη σταθερά V_0 . Το γεγονός αυτό καθιστά τον ίδιο τον ορισμό της $V(x(t))$ κάπως αυθαίρετο και επομένως μη μοναδικό. Η ελευθερία επιλογής της παραμέτρου x_0 και της V_0 αποτελεί ένα πρώτο παράδειγμα ελευθερίας βαθμίδας –όπως ονομάζεται στη Φυσική–, όπου είναι κανείς ελεύθερος να επιλέγει κάποια ποσότητα ελεύθερα, χωρίς να αλλοιώνει το φυσικό περιεχόμενο ενός προβλήματος. Η τιμή της παραμέτρου x_0 ορίζει μια ρίζα της $V(x) = V_0$. Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι η συνάρτηση $V(x)$ ορίζεται πάντα όταν η κίνηση είναι μονοδιάστατη, αλλά πιθανή επέκταση της σε περισσότερες της μιας διαστάσεις δεν είναι πάντα δυνατή. Το αντίστοιχο ολοκλήρωμα από μια αρχική σε μια τελική θέση μπορεί να εξαρτάται από τη διαδρομή που επιλέγει κανείς, οπότε για να μπορεί να οριστεί η δυναμική ενέργεια σε περισσότερες διαστάσεις απαιτούνται

επιπλέον συνθήκες για τη δύναμη (βλ. Κεφάλαιο 10).

Συνολικά συνδυάζοντας τις σχέσεις (3.26,3.27) καταλήγουμε ότι

$$\frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x(t)) \right] = 0 ,$$

δηλαδή καθώς το σωματίδιο κινείται υπό την επίδραση της δύναμης $F(x)$, όλα μπορεί να αλλάζουν (η θέση, η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η δύναμη), αλλά ο εν λόγω συνδυασμός φυσικών ποσοτήτων¹² παραμένει σταθερός. Δηλαδή καθώς το σωματίδιο κινείται και αλλάζει θέση και ταχύτητα, υπάρχει αυτή η περίεργη ποσότητα που την ονομάζουμε *ενέργεια* η οποία δεν αλλάζει τιμή. Το πρώτο μέρος αυτής είναι η *κινητική ενέργεια*, ενώ το δεύτερο η *δυναμική ενέργεια*. Αφού η δυναμική ενέργεια περικλείει μια αυθαίρετη παράμετρο και αυτή η ίδια η ενέργεια ενέχει τον ίδιο βαθμό αυθαιρεσίας με τη δυναμική ενέργεια.

Η διατήρηση αυτής της ποσότητας, όπως και κάθε διατήρηση δυναμικής ποσότητας που ενδεχομένως ανακαλύψουμε σε κάποιο πρόβλημα Φυσικής, μπορεί να χρησιμοποιηθεί προκειμένου να υποβιβάσουμε την τάξη της διαφορικής εξίσωσης που διέπει την κίνηση του σωματιδίου. Συγκεκριμένα λύνοντας την

$$\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + V(x) = E$$

ως προς την ταχύτητα μπορούμε να γνωρίζουμε πώς αλλάζει αυτή ως συνάρτηση της θέσης:

$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} (E - V(x))} .$$

Αυτή είναι μια πρωτοτάξια εξίσωση, η οποία με μια επιπλέον ολοκλήρωση μπορεί να οδηγήσει στην $x(t)$. Προτού ασχοληθούμε με τις δυνατές περιπτώσεις για την $V(x)$ και την αντίστοιχη επίλυση της κίνησης ας κάνουμε δύο παρατηρήσεις:

- Αφού η κινητική ενέργεια είναι εξ' ορισμού θετική ποσότητα, η δυναμική ενέργεια $V(x)$ πρέπει να έχει τιμή μικρότερη ή το πολύ ίση με τη συνολική ενέργεια E για να μπορεί το σωματίδιο να υπάρχει (να κινείται ή να είναι ακίνητο). Αυτό αμέσως οδηγεί στις επιτρεπτές περιοχές κίνησης για ένα σωματίδιο.
- Ένα σωματίδιο κινούμενο, καθώς περνά από μια θέση, μπορούμε να ξέρουμε το μέτρο της ταχύτητάς του αλλά όχι κατ' ανάγκη και τη φορά της κίνησής του. Έτσι αν ένα σωματίδιο κινούμενο υπό την επίδραση μιας δύναμης της μορφής $F(x)$ εκτελεί για κάποιο λόγο ταλάντωση, θα διασχίζει πάντα το ίδιο σημείο με την ίδια κατά

¹²Μάλλον θα έπρεπε να τις αποκαλέσουμε μαθηματικές ποσότητες, αφού προέκυψαν ως αποτέλεσμα επεξεργασίας του 2ου νόμου του Νεύτωνα ώστε να προκύψει μια σταθερή ποσότητα. Όμως στις ποσότητες αυτές που προέκυψαν αναγνωρίζουμε τις γνωστές μας κινητική και δυναμική ενέργεια, τις οποίες έχουμε μάθει να αναγνωρίζουμε ως πολύ σημαντικές φυσικές ποσότητες. Τα όρια μεταξύ Μαθηματικών και Φυσικής είναι πιο θολά απ' ό,τι ίσως νομίζουμε.

μέτρο ταχύτητα, είτε κινούμενο προς τα δεξιά, είτε προς τα αριστερά.

Κλείνοντας τη συζήτηση σχετικά με τον πολύ σημαντικό αυτό τύπο δύναμης, θα ήταν πρόπον να σημειώσουμε ότι η έννοια της δυναμικής ενέργειας η οποία στη νευτώνεια μηχανική προέκυψε κατασκευαστικά ως ποσότητα παραγόμενη από τη δύναμη, στην κβαντομηχανική η δυναμική ενέργεια είναι αυτή που παίζει θεμελιώδη ρόλο, αφού το σωματίδιο δεν νοείται ως υλικό σώμα με συγκεκριμένη θέση που εκτελεί συγκεκριμένη κίνηση υπό την επίδραση κάποιας δύναμης, αλλά ως σώμα το οποίο «ζει» εντός κάποιου πεδίου, συμπεριφερόμενο... κβαντομηχανικά.

Θα ολοκληρώσουμε το κεφάλαιο αυτό με την ανάλυση ενός προβλήματος ανάλογου με αυτό που συναντήσαμε στις χρονοεξαρτώμενες δυνάμεις, αλλά με αντίστοιχη χωροεξάρτηση. Θα υποθέσουμε ότι το τρένο που είδαμε προτύτερα ωθείται από παλμούς ανά χωρικό διάστημα a της μορφής

$$F(x) = Fa \sum_{j=0}^{\infty} \delta(x - ja).$$

Η δυναμική ενέργεια του τρένου (θέτοντας το 0 της στο $x = 0$) θα είναι

$$V(x) = \begin{cases} -Fa \left(\left[\frac{x}{a} \right] + 1 \right), & \text{αν } x > 0, \\ 0, & \text{αν } x \leq 0. \end{cases}$$

όπου $[\cdot]$ δηλώνει το ακέραιο μέρος. Επομένως το τρένο θα κερδίζει κινητική ενέργεια $\Delta K = Fa$ μόλις προσπερνάει έναν παλμό δύναμης. Συνεπώς η ταχύτητα που θα έχει το τρένο όταν περάσει τον n -οστό παλμό θα είναι

$$v_n = \sqrt{\frac{2}{m} Fna}$$

και επομένως ο χρόνος διέλευσης του διαστήματος από τον n -οστό μέχρι τον $(n + 1)$ -οστό παλμό θα είναι

$$\tau_n = \frac{a}{v_n} = \sqrt{\frac{am}{2Fn}}.$$

Έτσι ο συνολικός χρόνος που χρειάζεται το τρένο για να καλύψει απόσταση $s_n = na$ θα είναι

$$t_n = \sqrt{\frac{am}{2F}} \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{j}}.$$

Το παραπάνω άθροισμα αν και δεν είναι δυνατό να δοθεί σε κλειστή μορφή είναι αρκετά εύκολο να προσεγγιστεί για μεγάλα n μέσω ενός ολοκληρώματος. Κατασκευάζοντας τη γραφική παράσταση της $1/\sqrt{x}$ και της $1/\sqrt{x+1}$ μπορείτε εύκολα

να πειστείτε ότι

$$\int_1^n \frac{dy}{\sqrt{y+1}} < \sum_{j=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{j}} < \int_1^n \frac{dy}{\sqrt{y}}.$$

Συνεπώς το άθροισμα αυτό είναι κάτι ανάμεσα σε $2(\sqrt{n} - 1)$ και $2(\sqrt{n+1} - \sqrt{2})$, οπότε για μεγάλα n μπορούμε να καταλήξουμε στο προσεγγιστικό αποτέλεσμα

$$t_n = \sqrt{\frac{am}{2F}}(2\sqrt{n}) = \sqrt{\frac{2am}{F}} \sqrt{\frac{s_n}{a}},$$

δηλαδή η σχέση διαστήματος χρόνου θα είναι

$$s = \frac{1}{2} \frac{F}{m} t^2,$$

όση ακριβώς και η κλασική περίπτωση κίνησης υπό σταθερή δύναμη!

Είτε το τρένο λοιπόν ωθείται με περιοδικούς παλμούς δυνάμεων σταθερής ώθησης, είτε με παλμούς δύναμης σταθερού έργου ανά σταθερό μήκος η κίνηση είναι κατά προσέγγιση ομαλά επιταχυνόμενη. Η εξάρτηση όμως από το πλήθος των παλμών είναι σαφώς διαφορετική. Αν η κατασκευή παλμών, είτε της μιας μορφής είτε της άλλης, είχαν το ίδιο οικονομικό κόστος, ποιον τύπο παλμών θα προτιμούσατε για να αποκτήσει το τρένο κάποια συγκεκριμένη ταχύτητα;

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 3

- Η έννοια της συμμετρίας στη Φυσική.
- Οι θεμελιώδεις δυνάμεις παρουσιάζουν ομογένεια ως προς το χώρο (ανεξαρτησία σε μεταθέσεις), ισοτροπία (ανεξαρτησία σε αλλαγές προσανατολισμού), ομογένεια ως προς το χρόνο (ανεξαρτησία σε μεταθέσεις στο χρόνο), κατοπτρική συμμετρία στο χρόνο (το ανάλογο της ισοτροπίας στο βέλος του χρόνου), γαλιλαϊκή συμμετρία (ανεξαρτησία σε αλλαγή της ταχύτητας). Οι συμμετρίες αυτές κληροδοτούνται και στο ίδιο το Σύμπαν.
- Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να κατασκευαστεί από τις παραπάνω συμμετρίες.
- Στις περιπτώσεις δυνάμεων $F(t)$, $F(v)$, $F(x)$ ο δυναμικός νόμος του Νεύτωνα οδηγεί εύκολα σε αναλυτική λύση αναφορικά με την κίνηση.
- Ειδικά η περίπτωση $F(x)$ οδηγεί στη διατήρηση μιας ποσότητας που αναγνωρίζεται ως η ενέργεια του σωματιδίου.

4

Ενέργεια & Χώρος φάσεων

4.1 Μονοδιάστατη κίνηση εντός δυναμικού – Διαγράμματα Φάσης

Είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο ότι δυνάμεις που εξαρτώνται αποκλειστικά από τη θέση συνδέονται με μια απροσδόκητη διατήρηση· αυτήν της ενέργειας. Όπως σημειώσαμε, όμως, οι θεμελιώδεις δυνάμεις τυχαίνει να είναι ακριβώς τέτοιου τύπου δυνάμεις· αυτός εξάλλου είναι και ο λόγος που η ενέργεια τυχαίνει να παρουσιάζει ιδιαίτερο φυσικό ενδιαφέρον.

Επίσης τονίσαμε ότι η δυναμική ενέργεια δεν είναι μονοσήμαντα καθορισμένη, αλλά από τη στιγμή που καθορίσουμε το σημείο, x_0 , στο οποίο έχουμε αποδώσει σε αυτή μια προκαθορισμένη τιμή, V_0 , και η δυναμική ενέργεια και η ολική ενέργεια είναι πλήρως καθορισμένες. Επομένως αρκεί να γνωρίζουμε σε κάποια στιγμή την ταχύτητα και τη θέση του σωματιδίου μας, και με αυτό τον τρόπο θα γνωρίζουμε τη σταθερή ενέργειά του. Με βάση αυτή μπορούμε να γνωρίζουμε την ταχύτητα του σωματιδίου σε κάθε θέση· για την ακρίβεια το μέτρο της ταχύτητας, όχι την ίδια την ταχύτητα. Θα ήταν ενδιαφέρον λοιπόν να φτιάξουμε διαγράμματα της ταχύτητας ως συνάρτηση της θέσης αφού τα δύο μεγέθη συνδέονται στενά μέσω της διατήρησης της ενέργειας. Με τη βοήθεια των διαγραμμάτων αυτών θα μπορούμε να «διαβάζουμε» την εξέλιξη της κίνησης ενός σωματιδίου, χωρίς όμως να έχουμε άμεση εποπτεία του χρόνου. Ο χρόνος θα «τρέχει» ως παράμετρος κατά μήκος των διαγραφόμενων καμπυλών, όχι όμως σε γραμμική αναλογία με το μήκος της διαγραφόμενης καμπύλης. Παρακάτω θα μάθουμε πώς μπορούμε να έχουμε και μια ποιοτική εκτίμηση του χρονικού διαστήματος.

Ας ξεκινήσουμε από τη σχέση της ταχύτητας με τη θέση μέσω της διατήρησης της ενέργειας:

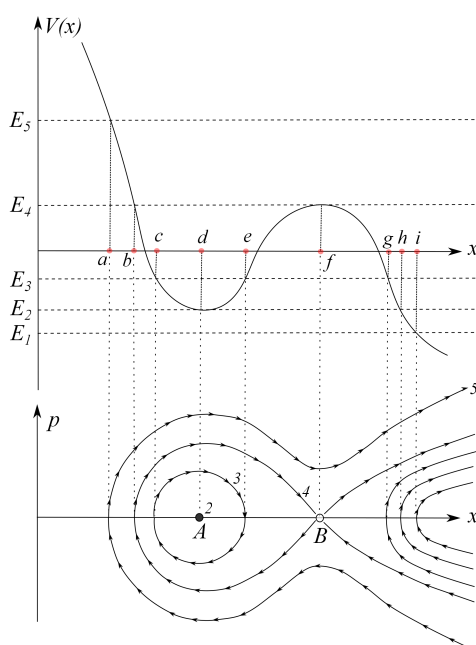
$$\dot{x} = \pm \sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}. \quad (4.1)$$

Για λόγους που θα διαφανούν αργότερα, θα επιδιώξουμε να ζωγραφίσουμε, όχι την ταχύτητα αυτή καθαυτή, αλλά την ορμή, δηλαδή την ποσότητα $m\dot{x}$:

$$p = m\dot{x} = \pm \sqrt{2m [E - V(x)]}. \quad (4.2)$$

Η διπλή τιμή της ταχύτητας σημαίνει ότι το διάγραμμα θα είναι κατοπτρικά συμμετρικό ως προς τον άξονα των θέσεων x . Επομένως στα σημεία που η ταχύτητα μηδενίζεται, ο ένας κλάδος του γραφήματος θα έρχεται σε επαφή με τον άλλο. Αν δεν μηδενίζεται πουθενά η ταχύτητα, αυτό σημαίνει ότι θα υπάρχουν δύο δυνατές ανεξάρτητες κινήσεις του σωματίδιου, μία με κατεύθυνση προς τα θετικά x και μία με κατεύθυνση προς τα αρνητικά x , χωρίς να είναι δυνατό η μία κίνηση να εξελιχθεί συν το χρόνω στην άλλη (δεν μπορεί η ταχύτητα, ως συνεχής συνάρτηση,¹ να αλλάξει πρόσημο χωρίς να περάσει από το μηδέν).

Ας μελετήσουμε τις δυνατές κινήσεις στο χώρο των φάσεων (σχέση ταχύτητας - θέσης) για μια δοσμένη δυναμική ενέργεια (βλ. σχήμα 4.1). Επειδή η διαφορά ολικής ενέργειας και δυναμικής ενέργειας είναι η κινητική ενέργεια, ποσότητα εξ ορισμού θετική, ή μηδενική, η κίνηση ενός σωματιδίου επιτρέπεται μονάχα στις περιοχές εκείνες που η ολική ενέργεια υπερβαίνει τη δυναμική ενέργεια (η καμπύλη της δυναμικής ενέργειας βρί-



Σχήμα 4.1: Το διάγραμμα φάσης για τη δεδομένη μορφή δυναμικής ενέργειας. Σε κάθε ενεργειακό επίπεδο αντιστοιχεί μια ή περισσότερες καμπύλες στο χώρο των φάσεων (αριθμημένες με το δείκτη της αντίστοιχης ενέργειας).

¹Μοναδική εξαίρεση αποτελεί η περίπτωση της ελαστικής ανάκλασης, δηλαδή η περίπτωση μιας ασυνεχούς δυναμικής ενέργειας άρα άπειρης δύναμης, όπου τότε στο διάγραμμα φάσης έχουμε στιγμιαίο άλμα από μια τιμή της ορμής στην αντίθετη τιμή. Και πάλι όμως τότε μπορούμε να πούμε ότι η ταχύτητα μηδενίζεται στιγμιαία.

σκεται κάτω από κάποιο συγκεκριμένο ενεργειακό επίπεδο.

(i) Αν η ενέργεια έχει την τιμή E_1 τότε η μοναδική περιοχή τιμών του x όπου η ενέργεια υπερβαίνει τη δυναμική ενέργεια είναι το διάστημα δεξιά από το σημείο i . Ακριβώς στο σημείο i η κινητική ενέργεια μηδενίζεται, ενώ δεξιότερα από αυτό η ταχύτητα μεγαλώνει κατ' απόλυτη τιμή. Σχεδιάζουμε λοιπόν την καμπύλη 1 στο διάγραμμα των φάσεων. Προσέξτε τη φορά διαγραφής της καμπύλης. Όταν η ταχύτητα είναι αρνητική κινούμαστε προς τα αριστερά, ενώ όταν η ταχύτητα γίνει θετική κινούμαστε προς τα δεξιά. Η φορά της διαγραφής αυτή επαναλαμβάνεται σε όλες τις καμπύλες στο χώρο των φάσεων, οπότε η φορά της κίνησης στο χώρο των φάσεων είναι πάντα η ωρολογιακή φορά.

(ii) Για ενέργεια E_2 , η γραμμή της οποίας εφάπτεται στο ελάχιστο της δυναμικής ενέργειας, έχουμε δυο δυνατές κινήσεις. Η μια είναι παρόμοια με την προηγούμενη με κίνηση δεξιά του σημείου h , ενώ η άλλη αφορά στη σταθερή θέση d . Η δεύτερη αυτή περίπτωση «κίνησης» περιγράφεται από ένα σημείο στο χώρο των φάσεων, το A και αντιστοιχεί στην ακινησία του σωματιδίου.

(iii) Για ενέργεια E_3 έχουμε και πάλι δύο δυνατές περιοχές κίνησης, μια μεταξύ των σημείων c και e και μία δεξιά του σημείου g . Η πρώτη περιοχή είναι απλώς μια ταλάντωση (όχι κατ' ανάγκη αρμονική) γύρω από το σημείο d . Η αντίστοιχη γραμμή στο χώρο των φάσεων είναι μια κλειστή καμπύλη (συμμετρική ως προς τον άξονα x) η οποία διαγράφεται ωρολογιακά. Το σημείο d δεν βρίσκεται κατ' ανάγκη στο κέντρο του διαστήματος $c - e$. Αν υπολογίσουμε το χρόνο μετάβασης από το c στο e (άνω μέρος της κλειστής καμπύλης στο χώρο των φάσεων) θα έχουμε

$$t_{c \rightarrow e} = \int_{x_c}^{x_e} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{x_c}^{x_e} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}}. \quad (4.3)$$

Αντίστοιχα ο χρόνος μετάβασης από το e στο c (κάτω μέρος της κλειστής καμπύλης) θα είναι

$$t_{e \rightarrow c} = \int_{x_e}^{x_c} \frac{dx}{\dot{x}} = \int_{x_e}^{x_c} -\frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}} = \int_{x_c}^{x_e} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}},$$

δηλαδή θα είναι ίδιος με τον χρόνο $t_{c \rightarrow e}$. Η ταλάντωση είναι περιοδική, όπως σε ένα ρολόι, και μάλιστα το «τικ» του (το πήγαινε) διαρκεί όσο και το «τακ» του (το έλα). Αυτό ισχύει και πιο γενικά για μονοδιάστατες κινήσεις εντός κάποιου δυναμικού (ακόμη και αν αυτές δεν είναι περιοδικές): Σε μια επιτρεπόμενη περιοχή κίνησης η μετάβαση από ένα σημείο x_1 σε ένα άλλο x_2 διαρκεί όσο και η κίνηση από το x_2 στο x_1 (η απόδειξη είναι ακριβώς ίδια με την περίπτωση που εξετάσαμε παραπάνω).

(iv) Το επόμενο ενεργειακό επίπεδο, το E_4 παρουσιάζει ιδιαίτερο μαθηματικό ενδιαφέρον. Τώρα η ενέργεια ισούται με κάποιο τοπικό μέγιστο της δυναμικής ενέργειας,

αυτήν του σημείου f . Το σωματίδιο μπορεί να κινείται αριστερά του f (μέχρι το b), αλλά και δεξιά του f . Αυτό σημαίνει ότι το σωματίδιο μπορεί να διαπερνά το σημείο f ; Η απάντηση είναι emphaticά *όχι*. Αν το διαπερνούσε θα έφτανε στο σημείο f με ταχύτητα 0, αλλά η δύναμη στο σημείο αυτό θα ήταν και αυτή 0 (μηδενική κλίση της δυναμικής ενέργειας στο f) οπότε δεν θα μπορούσε στη συνέχεια να επιταχυνθεί κατ'αλληλώς ώστε να φύγει από το σημείο αυτό. Υπάρχει όμως και ένας άλλος φυσικός λόγος για τον οποίο απαγορεύεται η διόδος του σωματιδίου από το σημείο f : Αν το σωματίδιο τοποθετούνταν με αυτή την ενέργεια στο σημείο f θα έμενε για πάντα εκεί (ταχύτητα 0, δύναμη 0). Αν το σωματίδιο διερχόταν από το f θα είχαμε δύο διαφορετικές εξελίξεις με τις ίδιες αρχικές συνθήκες, σε αντίθεση με τη μοναδικότητα της λύσης για δεδομένες αρχικές συνθήκες. Τέλος, θα πρέπει να επισημάνουμε ότι τα ίδια ακριβώς επιχειρήματα αρκούν για να δείξουμε ότι το σωματίδιο με αυτή την ενέργεια δεν μπορεί ούτε να φτάσει στο σημείο f (κινούμενο είτε προς τα δεξιά, είτε προς τα αριστερά) αφού ο δυναμικός νόμος του Νεύτωνα είναι αναλλοίωτος σε αντιστροφή του χρόνου: Ότι ισχύει για την ορθή φορά του χρόνου, ισχύει και για την αντίστροφη. Οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων που αντιστοιχούν στην E_4 είναι τέσσερις διαφορετικές γραμμές: αυτή που φεύγει από το σημείο B κινούμενη προς τα μεγαλύτερα x , αυτή που πλησιάζει στο σημείο B κινούμενη από τα μεγαλύτερα x , αυτή που αναχωρεί από το B προς τα μικρότερα x και αφού φτάσει στο x_b επιστρέφει προς το σημείο B , και τέλος το ίδιο το σημείο B της ακινησίας στο σημείο f . Η προηγούμενη ανάλυση μας έδειξε ότι οι τέσσερις αυτές γραμμές δεν έρχονται σε επαφή η μία με την άλλη, αλλά ούτε και υπάρχει διάστημα πεπερασμένο από το τέλος της μίας μέχρι την αρχή της επόμενης! Το παράδοξο αυτό συμπέρασμα θα το εξηγήσουμε παρακάτω όταν θα υπολογίσουμε τους χρόνους που αντιστοιχούν στην κάθε μια καμπύλη από το ένα άκρο ως το άλλο.

(v) Για ενέργεια E_5 το σωματίδιο κινείται μόνο δεξιά από το σημείο a και καθώς διέρχεται από το σημείο f (το σημείο με τη μέγιστη τοπικά δυναμική ενέργεια), κινούμενο είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά, η ταχύτητά του γίνεται τοπικά ελάχιστη (κατά απόλυτη τιμή). Έτσι στην περίπτωση αυτή, ακολουθώντας την καμπύλη στο χώρο των φάσεων από το σημείο a προς τα δεξιά, θα έχουμε αρχικά αύξηση της ταχύτητας, μεγιστοποίηση της ταχύτητας όταν το σωματίδιο θα διέρχεται από το σημείο d , επιβράδυνση του σωματιδίου μέχρι το σημείο f , και έκτοτε συνεχή επιτάχυνση του σωματιδίου.

Μέχρι τώρα αποφύγαμε να συζητήσουμε το τι συμβαίνει στα ακραία σημεία της κίνησης (π.χ. το σημείο c για ενέργεια E_3) παρόλο που η ταχύτητα μηδενίζεται σε αυτά όπως και στη θέση x_f με ενέργεια E_4 που είδαμε και αναλύσαμε παραπάνω. Όταν το σωματίδιο φτάσει σε ένα τέτοιο σημείο, αλλά η κλίση της δυναμικής ενέργειας δεν μηδενίζεται (όπως στο f) το σωματίδιο ακινητοποιείται μεν στιγμιαία ($\dot{x} = 0$) αλλά η δύναμη και επομένως η επιτάχυνση δεν μηδενίζεται. Έτσι το σωματίδιο θα

επιταχυνθεί προς την επιτρεπόμενη κατεύθυνση κίνησης και θα αρχίσει να κινείται προς αυτήν. Παρατηρήστε ότι όλες οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων τέμνουν τον άξονα των x κατακόρυφα, με μοναδική εξαίρεση τα σημεία ισορροπίας A και B . Η γωνία τομής ($\pi/2$ στη γενική περίπτωση, μη οριζόμενη στη δεύτερη περίπτωση, και $\neq \pi/2$ στην τρίτη περίπτωση) σχετίζεται, όπως θα δούμε ακολούθως, με το χρόνο μετάβασης από το σημείο μηδενισμού της ταχύτητας.

Ας θέσουμε ως x_0 κάποιο σημείο στο οποίο $V(x_0) = E$ δηλαδή το σημείο τομής της καμπύλης της δυναμικής ενέργειας με την ευθεία της σταθερής ενέργειας. Θέλουμε να υπολογίσουμε το χρόνο μετάβασης του σωματιδίου από το x_0 σε ένα πολύ γειτονικό του σημείο $x_0 + \epsilon$ (με ϵ πολύ μικρότερο από κάποια διάσταση που σχετίζεται με τη μορφή της δυναμικής ενέργειας στο σημείο x_0 ²). Ακολουθώντας τον υπολογισμό της χρονικής διάρκειας του «τικ» ενός μονοδιάστατου ρολογιού που εξετάσαμε παραπάνω (βλ. σχέση (4.3)) θα έχουμε

$$t_{x_0 \rightarrow x_0 + \epsilon} = \pm \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x)]}} . \quad (4.4)$$

Το πρόσημο θα καθοριστεί ανάλογα με το αν η κίνηση επιτρέπεται να γίνει προς τα δεξιά ή προς τα αριστερά του x_0 . Στην πρώτη περίπτωση (αυτή με το + πρόσημο) θα είναι $\epsilon > 0$, ενώ στη δεύτερη (αυτή με το - πρόσημο) θα είναι $\epsilon < 0$. Αν το x_0 τυγχάνει να είναι τοπικό μέγιστο (όπως το σημείο f της προηγούμενης ανάλυσης), τότε και οι δύο περιπτώσεις επιτρέπεται να αναλυθούν για να υπολογιστεί ο χρόνος διαφυγής από το ασταθές αυτό σημείο ισορροπίας είτε προς τα δεξιά είτε προς τα αριστερά. Ας αναπτύξουμε τώρα τη συνάρτηση της δυναμικής ενέργειας γύρω από το σημείο x_0 :

$$\begin{aligned} V(x) &= V(x_0) + V'(x_0)(x - x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 + \dots \\ &\underset{x \simeq x_0}{\simeq} E + (x - x_0) \left[V'(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0) \right] . \end{aligned} \quad (4.5)$$

στο σημείο αυτό θα μπορούσε να αναρωτηθεί κανείς μέχρι ποιον όρο χρειάζεται να γράψουμε στο ανάπτυγμα. Δυστυχώς δεν υπάρχει συγκεκριμένη απάντηση. Εξαρτάται τι ακριβώς θέλουμε να μάθουμε από τον προσεγγιστικό υπολογισμό. Συνή-

²Επειδή θα χρησιμοποιήσουμε το ανάπτυγμα Taylor για να γράψουμε τη δυναμική ενέργεια κοντά στο σημείο x_0 , το μέγεθος του ϵ θα σχετίζεται με το κατά πόσον οι όροι του αναπτύγματος που θα αγνοήσουμε είναι ασήμαντοι σε σχέση με τον τελευταίο όρο που θα κρατήσουμε. Έτσι αν κρατήσουμε μέχρι τον όρο τάξης M , ο επόμενος σε σχέση με τον τελευταίο θα θέλουμε να είναι $V^{(M+1)}(x_0)\epsilon^{M+1}/(M+1)! \ll V^{(M)}(x_0)\epsilon^M/(M)!$, δηλαδή $\epsilon \ll (M+1)V^{(M)}(x_0)/V^{(M+1)}(x_0)$. Αν ο παρονομαστής της τελευταίας έκφρασης τυγχάνει να είναι ταυτοτικά 0, που σημαίνει ότι ο επόμενος από τον τελευταίο όρο που κρατήσαμε είναι μηδενικός, θα πρέπει να προχωρήσουμε τη σύγκριση μέχρι τον αμέσως επόμενο μη μηδενικό όρο και τότε θα έχουμε $\epsilon^k \ll (M+1)(M+2)\dots(M+k)V^{(M)}(x_0)/V^{(M+k)}(x_0)$ όπου $M+k$ είναι η τάξη του πρώτου μη μηδενικού όρου μετά από τον όρο τάξης M που κρατήσαμε στο ανάπτυγμα.

θως κρατάμε τον πρώτο μη μηδενικό όρο στο ανάπτυγμα αυτό. Αν το αποτέλεσμα που θα πάρουμε δεν μας ικανοποιεί ως προς την ακρίβεια αυτού που θέλουμε να υπολογίσουμε, προχωράμε σε ακόμη μεγαλύτερης τάξης όρους. Στο πρόβλημα υπολογισμού του χρόνου μετάβασης από το x_0 στο $x_0 + \epsilon$ θα γίνει πιο καθαρό αυτό. Γράφοντας λοιπόν το παραπάνω ανάπτυγμα στο (4.4) θα έχουμε

$$t_{x_0 \rightarrow x_0 + \epsilon} \simeq \pm \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [-(x - x_0) (V'(x_0) + \frac{1}{2} V''(x_0)(x - x_0))]} . \quad (4.6)$$

Στο σημείο αυτό θα ξεχωρίσουμε την περίπτωση που $V'(x_0) \neq 0$ από την $V'(x_0) = 0$. Στην πρώτη, όταν η γραμμή της ενέργειας τέμνει το γράφημα της δυναμικής ενέργειας υπό κλίση θα έχουμε (υποθέτοντας ότι $\epsilon > 0$ που σχετίζεται με $V'(x_0) < 0$ ώστε να επιτρέπεται η κίνηση προς τα δεξιά του x_0)

$$t_{x_0 \rightarrow x_0 + \epsilon} \simeq \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [(x - x_0) (-V'(x_0))]} . \quad (4.7)$$

Προσέξτε ότι αγνοήσαμε τον επόμενο όρο του αναπτύγματος αφού ο πρώτος όρος ήταν μη μηδενικός. Έτσι

$$t_{x_0 \rightarrow x_0 + \epsilon} \simeq \sqrt{\frac{m}{2(-V'(x_0))}} \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{\sqrt{x - x_0}} = 2\sqrt{\epsilon} \sqrt{\frac{m}{2(-V'(x_0))}} . \quad (4.8)$$

Δηλαδή το σωματίδιο χρειάζεται πεπερασμένο χρόνο γι' αυτή τη μετάβαση και μάλιστα ο χρόνος αυτός είναι ανάλογος της τετραγωνικής ρίζας του διανυόμενου διαστήματος. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι το αποτέλεσμα αυτό είναι ακριβώς αυτό που μαθαίνει κανείς στο σχολείο για τη σχέση διανυόμενου διαστήματος ως συνάρτηση του χρόνου για σταθερή δύναμη, όταν το σωματίδιο ξεκινά από την ηρεμία

$$s = \frac{1}{2} at^2 = \frac{F}{2m} t^2 = \frac{-V'(x_0)}{2m} t^2 .$$

Η περίπτωση κίνησης προς τα αρνητικά στο σημείο x_0 οδηγεί στο ίδιο ακριβώς αποτέλεσμα. (ομαλά επιβραδυνόμενη κίνηση). Τέλος η περίπτωση $V'(x_0) > 0$ θα έχει νόημα για αρνητικό ϵ και θα καταλήγει και αυτή στο ίδιο αποτέλεσμα.

Ας εξετάσουμε τώρα την περίπτωση $V'(x_0) = 0$ (με κίνηση προς τα δεξιά).

$$\begin{aligned}
 t_{x_0 \rightarrow x_0 + \epsilon} &\simeq \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [-(x - x_0)^2 (\frac{1}{2} V''(x_0))]} } \\
 &= \sqrt{\frac{m}{-V''(x_0)}} \int_{x_0}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{x - x_0} \\
 &= \sqrt{\frac{m}{-V''(x_0)}} \log \frac{\epsilon}{0}. \tag{4.9}
 \end{aligned}$$

Προφανώς αυτό το αποτέλεσμα δεν έχει νόημα, αφού δεν ορίζεται ο λογάριθμος του 0. Το ολοκλήρωμα αποκλίνει και το πρόβλημα δεν μπορεί να αρθεί αν προσθέσουμε και τους άλλους όρους στο ανάπτυγμα της δυναμικής ενέργειας, αφού το ολοκλήρωμα

$$\int_0^a \frac{dx}{xg(x)}$$

αποκλίνει αν η συνάρτηση $g(x)$ είναι συνεχής και $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) \neq 0$. Το παράλογο αυτό αποτέλεσμα όμως σηματοδοτεί ότι ο χρόνος για τη μετάβαση από το x_0 στο $x_0 + \epsilon$ δεν ορίζεται. Στην πραγματικότητα είναι άπειρος. Αυτό θα μπορούσε να φανεί πιο καθαρά αν υπολογίζαμε το χρόνο για τη μετάβαση από το $x_0 + \epsilon_1$ στο $x_0 + \epsilon$ (με $0 < \epsilon_1 < \epsilon$). Ο χρόνος που θα υπολογίζαμε τότε θα ήταν

$$t_{x_0 + \epsilon_1 \rightarrow x_0 + \epsilon} = \sqrt{\frac{m}{-V''(x_0)}} \int_{x_0 + \epsilon_1}^{x_0 + \epsilon} \frac{dx}{x - x_0} = \sqrt{\frac{m}{-V''(x_0)}} \log \frac{\epsilon}{\epsilon_1}, \tag{4.10}$$

ο οποίος τείνει στο άπειρο καθώς το ϵ_1 τείνει στο 0. Εν ολίγοις, όπως είπαμε και παραπάνω, το σωματίδιο αν ξεκινήσει από το x_0 δεν πρόκειται να ξεκολλήσει ποτέ από την αρχική του θέση για να πάει πιο πέρα. Αν όμως εκκινήσει, με την ίδια πάντα ενέργεια, από ένα γειτονικό σημείο θα απομακρυνθεί σε χρόνο ανάλογο του λογαρίθμου της αρχικής απόστασης από το επίμαχο σημείο. Αυτό σημαίνει ότι οσοδήποτε κοντά σε ένα ασταθές σημείο ισορροπίας και αν ξεκινήσουμε, το σύστημα μας θα απομακρυνθεί από αυτό εξαιρετικά γρήγορα σε σύγκριση με την απόσταση από το σημείο ισορροπίας.

Αν υπολογίζαμε τώρα το χρόνο προσέγγισης σε ένα σημείο ισορροπίας, π.χ. από το $x_0 - \epsilon$ στο $x_0 - \epsilon_1$, θα οδηγούμαστε στο ίδιο αποτέλεσμα, πράγμα το οποίο θα σήμαινε μια αέναη προσέγγιση στο σημείο ισορροπίας. Αυτό δικαιολογεί και το γεγονός ότι η καμπύλες στο χώρο των φάσεων που οδηγούν σε ένα σημείο ισορροπίας μολονότι δεν επικοινωνούν με αυτό, το προσεγγίζουν οσοδήποτε.

Σε όλες τις παραπάνω εκφράσεις για το χρόνο γράφαμε $-V''(x_0)$ αφού υποθέταμε ότι η δυναμική ενέργεια παρουσίαζε μέγιστο στο x_0 και επομένως η δεύτερη παράγωγος ήταν αρνητική. Τι συμβαίνει όμως αν θελήσουμε να μελετήσουμε την κίνηση γύρω από ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας; Η ανάλυση θα είναι ακριβώς ίδια

με προηγουμένως, όμως θα πρέπει να είναι η ενέργεια ελαφρώς μεγαλύτερη από την τιμή της δυναμικής ενέργειας στο σημείο του ελαχίστου x_e ώστε να υπάρχει κάποια δυνατότητα κίνησης σε κάποιο εύρος γύρω από το x_e . Η δυναμική ενέργεια κοντά στο σημείο αυτό θα μπορεί να προσεγγιστεί με

$$V(x) \underset{x \simeq x_e}{\simeq} = V(x_e) + \frac{1}{2}V''(x_e)(x - x_e)^2$$

ενώ η περιοχή της κίνησης θα είναι αυτή για την οποία $V(x) \leq E$, δηλαδή $|x - x_e| \leq \sqrt{2(E - V(x_e))/V''(x_e)}$. Ας ονομάσουμε τα δύο αυτά ακραία σημεία της κίνησης $x_{\pm} \equiv x_e \pm a$, όπου $a = \sqrt{2(E - V(x_e))/V''(x_e)}$ το μικρό πλάτος³ της ταλάντωσης γύρω από το x_e . Το «τικ» του μικρού ρολογιού, θα διαρκεί χρόνο

$$t_{x_- \rightarrow x_+} \simeq \int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x_e) - \frac{1}{2}V''(x_e)(x - x_e)^2]}}, \quad (4.11)$$

που με μια αλλαγή μεταβλητής από x σε $\xi = x - x_e$ μετατρέπεται σε

$$\begin{aligned} t_{x_- \rightarrow x_+} &\simeq \int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m} [E - V(x_e) - \frac{1}{2}V''(x_e)\xi^2]}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{V''(x_e)}} \int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{2\frac{E - V(x_e)}{V''(x_e)} - \xi^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{V''(x_e)}} \int_{-a}^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} \\ &= \sqrt{\frac{m}{V''(x_e)}} \pi. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Μια πλήρης ταλάντωση λοιπόν από το x_- στο x_+ και πάλι πίσω στο x_- θα διαρκεί κατά προσέγγιση χρόνο $2t_{x_- \rightarrow x_+}$:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{V''(x_e)}}. \quad (4.13)$$

Το αποτέλεσμα αυτό για την περίοδο της ταλάντωσης είναι εντυπωσιακό αφού δεν εξαρτάται από την τιμή της ενέργειας E . Θα περίμενε κανείς ότι το ύψος της ενέργειας που καθορίζει άμεσα το εύρος της κίνησης θα έπαιζε σημαντικό ρόλο στην περίοδο της ταλάντωσης. Αυτή η έλλειψη εξάρτησης από την ενέργεια είναι προσεγγιστική αλλά γίνεται ολοένα και πιο ακριβής όταν η ενέργεια είναι εξαιρετικά χαμηλή και η ταλάντωση δεν απομακρύνεται πολύ από το σημείο της ευσταθούς ισορροπίας. Στο ενδιαφέρον αυτό αποτέλεσμα κρύβεται και η παρατήρηση του Γαλιλαίου το 1582 ότι το εκκρεμές του πολυελαίου στον καθεδρικό ναό της Πίζας ταλαντω-

³Αφού $E - V(x_e)$ είναι πολύ μικρό.

νόταν στον ίδιο χρόνο ανεξαρτήτως του πλάτους αιώρησής του (για μικρά πλάτη). Η ισοχρονικότητα που παρουσιάζουν όλοι οι ταλαντωτές (αρμονικοί ή μη), όταν το πλάτος ταλάντωσής τους μικραίνει, είναι μια αξιοσημείωτη ιδιότητα που σχετίζεται με το γεγονός ότι όλοι οι ταλαντωτές διαθέτουν κάποιο σημείο ευσταθούς ισορροπίας και γύρω από αυτό η μορφή της δύναμης επαναφοράς είναι γραμμική, όπως ακριβώς συμβαίνει στους αρμονικούς ταλαντωτές.

Η παρατήρηση της ισοχρονικότητας του Γαλιλαίου οδήγησε στην κατασκευή ρολογιών βασισμένα στο εκκρεμές. Σύμφωνα με την ανάλυσή μας τα ρολόγια που βασίζονται σε μια μονοδιάστατη ταλάνωση θα είναι ιδανικά (θα μετρούν σταθερά το χρόνο) εφόσον η ενέργειά τους παραμένει σταθερή και επομένως θα διατηρούν σταθερή την περιόδό τους. Επιπλέον όσο η ενέργειά τους είναι αρκετά χαμηλή, ακόμη και η περαιτέρω απώλεια ενέργειας δεν θα είναι επιζήμια για την σταθερότητα στη μέτρηση του χρόνου. Αν επιπλέον επιδιώκουμε να κατασκευάσουμε ρολόγια ακριβείας, δηλαδή ικανά να καταγράφουν πολύ μικρά κλάσματα του χρόνου, θα πρέπει η περίοδος αυτών να είναι πολύ μικρή. Απαιτείται λοιπόν μια πολύ μικρή μάζα ή μια πολύ μεγάλη τιμή του $V''(x_e)$ ή και τα δύο. Αυτός είναι ο λόγος που χρησιμοποιούμε σήμερα ατομικά ρολόγια (σωματίδια ατομικών διαστάσεων κινούμενα από ηλεκτρικής φύσης ενδομοριακές δυνάμεις) για να πετύχουμε ρολόγια υψηλής ακριβείας.



Σχήμα 4.2: Ο πολυέλαιος του καθεδρικού ναού της Πίζας που ενέπνευσε τον Γαλιλαίο να χρησιμοποιήσει εκκρεμή ως ρολόγια. Η μέτρηση της ισοχρονικότητας των ταλαντώσεων αυτού έγινε από το Γαλιλαίο με σύγκριση με τους καρδιακούς του παλμούς.

Ας δούμε τώρα τι μορφή έχουν οι γραμμές ροής στο χώρο των φάσεων σε κάποιες από τις ειδικές περιπτώσεις που αναλύσαμε παραπάνω.

(i) **Γύρω από ευσταθή σημεία ισορροπίας:** Όπως είπαμε, για σημεία κοντά σε ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας x_e η δυναμική ενέργεια παίρνει τη μορφή

$$V(x) \underset{x \simeq x_e}{\simeq} V(x_e) + \frac{1}{2}V''(x_e)(x - x_e)^2,$$

με $V''(x_e) > 0$, οπότε η διατήρηση της ενέργειας γράφεται

$$\frac{p^2}{2m} + V(x_e) + \frac{1}{2}V''(x_e)(x - x_e)^2 = E = V(x_e) + \Delta E,$$

όπου $\Delta E > 0$ είναι η μικρή διαφορά ενέργειας μεταξύ της ολικής ενέργειας και της τιμής της δυναμικής ενέργειας στο x_e . Συνεπώς οι γραμμές ροής στο χώρο των

φάσεων θα περιγράφονται από τις ελλείψεις

$$\frac{p^2}{2m\Delta E} + \frac{V''(x_e)}{2\Delta E}(x - x_e)^2 = 1 \quad (4.14)$$

που έχουν ως κέντρο το σημείο $(x = x_e, p = 0)$ (το σημείο A του σχήματος 1 για παράδειγμα), και ημιάξονες $\sqrt{2m\Delta E}$ κατά μήκος του x και $\sqrt{2\Delta E/V''(x_e)}$ κατά μήκος του p . Όπως βλέπετε η ενέργεια ρυθμίζει το μέγεθος των ελλείψεων, ενώ το σχήμα αυτών (σχέση ημιαξόνων) σχετίζεται με την ποσότητα $\sqrt{mV''(x_e)}$. Μπορείτε μόνοι σας να δείξετε ότι το δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή οδηγεί ακριβώς σε ελλειπτικές γραμμές στο χώρο των φάσεων. Έτσι η κατά προσέγγιση ελλειπτική μορφή των καμπυλών στην περιοχή γύρω από ένα ευσταθές σημείο είναι συνέπεια της προσέγγισης του δυναμικού νόμου με αυτόν ενός αρμονικού ταλαντωτή, όταν το σωματίδιο βρίσκεται κοντά σε ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας.

(ii) **Γύρω από ασταθή σημεία ισορροπίας:** Αν η ενέργεια είναι πλησίον ενός μεγίστου της δυναμικής ενέργειας $E \simeq V(x_0)$, τότε σε μια περιοχή γύρω από το σημείο ισορροπίας, αν αναπτύξουμε τη δυναμική ενέργεια μέχρι όρους 2ης τάξης, όπως και προηγουμένως, οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων θα περιγράφονται από σχέσεις της μορφής

$$\frac{p^2}{2m} + V(x_0) + \frac{1}{2}V''(x_0)(x - x_0)^2 = E = V(x_0) + \Delta E.$$

Το νέο στοιχείο της έκφρασης αυτής είναι ότι $V''(x_0) < 0$ αφού πρόκειται για μέγιστο της δυναμικής ενέργειας και ότι σε αυτή την περίπτωση, σε αντίθεση με την προηγούμενη, το ΔE μπορεί να είναι θετικό, αρνητικό, ή μηδέν. Στην πρώτη περίπτωση το σωματίδιο διέρχεται από το x_0 , στη δεύτερη κινείται είτε στα αριστερά του x_0 είτε στα δεξιά αυτού, ενώ στην τρίτη περίπτωση συμβαίνει αυτό που εξετάσαμε διεξοδικά όταν μελετούσαμε τις καμπύλες #4 στο εισαγωγικό παράδειγμα των διαγραμμάτων φάσης. Δεδομένων των παραπάνω παρατηρήσεων η μορφή των καμπυλών γύρω από το ασταθές σημείο ισορροπίας παίρνει τη μορφή

$$\frac{p^2}{2m\Delta E} - \frac{|V''(x_0)|}{2\Delta E}(x - x_0)^2 = 1. \quad (4.15)$$

Για $\Delta E > 0$ αυτή είναι μια εξίσωση υπερβολής, οι δύο κλάδοι της οποίας εκτείνονται στο διάστημα $|p| > \sqrt{2m\Delta E}$. Για $\Delta E < 0$ αυτή είναι και πάλι μια εξίσωση υπερβολής, οι δύο κλάδοι της οποίας εκτείνονται στο διάστημα $|x - x_0| > \sqrt{2\Delta E/|V''(x_0)|}$. Τέλος για $\Delta E = 0$ θα έχουμε (προ της απαγορευμένης διαίρεσης με το ΔE) την εξίσωση ενός ζεύγους ευθειών (κατοπτρικές η μία της άλλης ως προς τον άξονα x): $p = \pm \sqrt{|V''(x_0)|/m}(x - x_0)$. Οι ευθείες αυτές είναι οι ασύμπτωτες των παραπάνω δύο τύπων υπερβολών.

(iii) **Πλησίον των σημείων μηδενισμού της ταχύτητας:** Ας δούμε τέλος τι μορφή

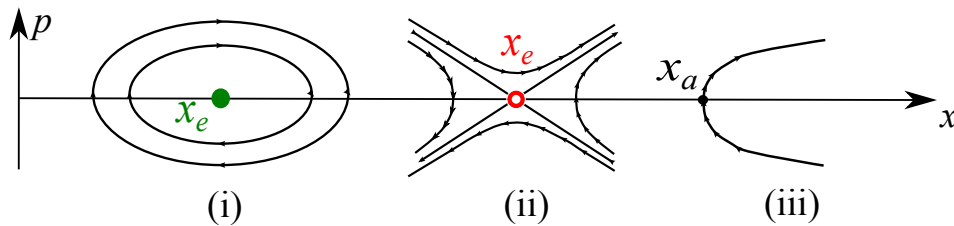
έχουν οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων κοντά στα σημεία που το σωματίδιο φτάνει σε κάποιο άκρο του επιτρεπόμενου διαστήματος κίνησης και στη συνέχεια αναστρέφει την πορεία κίνησής του. Στα σημεία αυτά όπου $V(x_a) = E$ το ανάπτυγμα της δυναμικής ενέργειας έχει τη μορφή

$$V(x) \underset{x \simeq x_a}{\simeq} V(x_a) + V'(x_a)(x - x_a) .$$

Εν αντιθέσει με τα προηγούμενα αναπτύγματα, τώρα κρατάμε από το ανάπτυγμα μόνο τον πρώτης τάξης όρο αφού αυτός δεν είναι μηδενικός (δες το σημείο a του σχήματος 1). Έτσι θα έχουμε

$$\frac{p^2}{2m} + V'(x_a)(x - x_a) = E - V(x_a) = 0 . \quad (4.16)$$

Αυτή είναι η εξίσωση μιας παραβολής που έχει στραμμένα τα κοίλα προς τα δεξιά ($x \geq x_a$) αν $V'(x_a) < 0$ και προς τα αριστερά ($x \leq x_a$) αν $V'(x_a) > 0$. Επομένως όλες οι καμπύλες που διέρχονται από τον άξονα x έχουν το σχήμα παραβολής κοντά στο σημείο τομής τους με τον άξονα x .



Σχήμα 4.3: Συνοπτικά, κοντά στα σημεία όπου η ταχύτητα του σωματιδίου μηδενίζεται ($E = V(x)$), η μορφή των καμπυλών ροής στο χώρο των φάσεων είναι: (i) Κοντά σε ευσταθές σημείο ισορροπίας, x_e , οι καμπύλες έχουν τη μορφή ελλείψεων που ακολουθούν ωρολογιακή φορά. Οι ημάξονες της έλλειψης είναι ανάλογοι της $\sqrt{E - V(x_e)}$. (ii) Κοντά σε ασταθές σημείο ισορροπίας, x_e , οι καμπύλες έχουν τη μορφή υπερβολών. Για ενέργειες κατώτερες από το $V(x_e)$ εμφανίζονται οι δεξιοί-αριστεροί κλάδοι της υπερβολής, ενώ για ενέργειες ανώτερες του $V(x_e)$ εμφανίζονται οι άνω-κάτω κλάδοι της υπερβολής. Τέλος για ενέργειες ακριβώς ίσες με την $V(x_e)$ κάνουν την εμφάνισή τους οι ασύμπτωτες των υπερβολών. Οι ευθείες αυτές πλησιάζουν οσοδήποτε το ασταθές σημείο αλλά δεν συνδέονται με αυτό. (iii) Κοντά σε οποιοδήποτε ακραίο σημείο της κίνησης, x_a , όπου το σωματίδιο σταματά και αντιστρέφει τη φορά της κίνησής του, η καμπύλη είναι παραβολή.

4.2 * Η περίοδος κρυμμένη στο χώρο των φάσεων

Όπως είδαμε η περίοδος ενός σωματιδίου παγιδευμένου σε ένα φρέαρο (πηγάδι) δυναμικής ενέργειας με ακραία σημεία⁴ τα $x_-(E)$, $x_+(E)$ είναι (παράβαλε με τη

⁴Πρόκειται για τα σημεία στα οποία $V(x_{\pm}) = E$ έτσι ώστε $V(x) < E$ σε ολόκληρο το διάστημα (x_-, x_+) .

σχέση (4.3) για το ήμισυ της περιόδου)

$$T = \sqrt{2m} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{dx}{\sqrt{E - V(x)}}. \quad (4.17)$$

Θα δείξουμε ότι η ποσότητα αυτή συνδέεται με το εμβαδόν του χωρίου που διαγράφει η αντίστοιχη κίνηση στο χώρο των φάσεων. Επειδή η ορμή σε κάθε σημείο θα είναι

$$p_{\uparrow\downarrow} = \pm \sqrt{2m[E - V(x)]},$$

όπου $p_{\uparrow\downarrow}$ είναι είτε η λύση με θετική ταχύτητα είτε αυτή με αρνητική ταχύτητα, οι αντίστοιχες δύο κατοπτρικές ως προς τον άξονα- x καμπύλες, $p_{\uparrow}(x), p_{\downarrow}(x)$, αποτελούν τα σύνορα του χωρίου. Το εμβαδόν του χωρίου αυτού λοιπόν θα είναι

$$\mathcal{E} = 2 \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} p_{\uparrow}(x) dx = \sqrt{8m} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \sqrt{E - V(x)} dx, \quad (4.18)$$

δηλαδή το διπλάσιο του μισού χωρίου που βρίσκεται κάτω από την καμπύλη-άνω σύνορο $p_{\uparrow}(x)$. Αν και υπάρχουν σημαντικές ομοιότητες μεταξύ των δύο σχέσεων (4.17, 4.18) τα αποτελέσματα είναι ανόμοια, πράγμα αναμενόμενο εφόσον οι διαστάσεις τους είναι διαφορετικές: $[\mathcal{E}] = [ML^2T^{-1}]$. Παρατηρούμε πως η ποσότητα $\sqrt{E - V(x)}$ υπάρχει στον αριθμητή του ολοκληρώματος της (4.18), αλλά βρίσκεται στον παρονομαστή του ολοκληρώματος της (4.17). Το αναποδογύρισμα θα μπορούσε να επιτευχθεί με μια απλή παραγωγή⁵ της ολοκληρωτέας συνάρτησης της (4.18) ως προς το E · μάλιστα το $1/2$ που θα προέκυπτε από την παραγωγή της ρίζας θα ρυθμιζε καταλλήλως και τον πολλαπλασιαστικό παράγοντα $\sqrt{8m}$, ώστε να επιτευχθεί ο παράγοντας $\sqrt{2m}$ της έκφρασης για την περίοδο. Δυστυχώς όμως η εξάρτηση από την ενέργεια E υπάρχει και στα όρια του ολοκληρώματος, οπότε η παραγωγή ως προς E πιθανώς να δημιουργήσει και νέες ποσότητες. Στο σημείο αυτό θα επισημάνουμε απλώς ότι ο μηδενισμός του $\sqrt{E - V(x)}$ στα όρια του ολοκληρώματος εξασφαλίζει ότι δεν θα εμφανιστεί άλλος μη μηδενικός όρος από την παραγωγή του ολοκληρώματος της \mathcal{E} ως προς E εκτός από τον προαναφερθέντα, οπότε θα έχουμε ότι

$$T = \frac{d\mathcal{E}}{dE}. \quad (4.19)$$

⁵Η παραγωγή ενός ολοκληρώματος ως προς μια παράμετρο αυτού είναι μια συνήθης πρακτική στον υπολογισμό ολοκληρωμάτων. Μάλιστα πολλές φορές εισάγεται τεχνητά μια παράμετρος, προκειμένου η παραγωγή του ολοκληρώματος ως προς την παράμετρο αυτή να δημιουργήσει το νέο ολοκλήρωμα. Για παράδειγμα το ολοκλήρωμα $\int x^2 e^{-x^2} dx$ υπολογίζεται εύκολα από το $\int e^{-ax^2} dx$ με παραγωγή ως προς a και μετά με αντικατάσταση του αποτελέσματος της ολοκλήρωσης με $a = 1$.

(Για περισσότερες πληροφορίες σχετικά με την παραγωγή ολοκληρώματος της μορφής (4.18), διαβάστε το Πλαίσιο 4.2 και τη γεωμετρική του ανάλυση.) Επομένως ο τρόπος που μεγαλώνει το χωρίο με την ενέργεια καθώς διευρύνονται τα όρια της κίνησης μας αποκαλύπτει την ίδια την περίοδο της ταλάντωσης.

Πλαίσιο 4.1

Πώς παραγωγίζουμε ολοκλήρωμα ως προς μια παράμετρό του

Έστω μια συνάρτηση $f(x; E)$. Με τη γραφή αυτή εννοούμε μια συνάρτηση του x με παράμετρο E η οποία αλλάζει τη μορφή της συνάρτησης. Θέλουμε να υπολογίσουμε το

$$\frac{d}{dE} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} f(x; E) dx .$$

Για τον υπολογισμό αυτό θα καταφύγουμε στον ορισμό της παραγώγου δηλαδή στο όριο

$$\frac{dg(E)}{dE} = \lim_{\delta E \rightarrow 0} \frac{g(E + \delta E) - g(E)}{\delta E} .$$

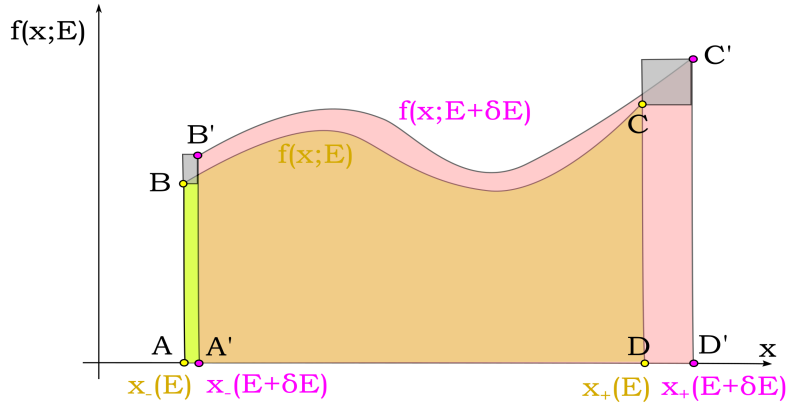
Επομένως αν

$$I(E) = \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} f(x; E) dx$$

η ζητούμενη παράγωγος θα είναι

$$\frac{d}{dE} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} f(x; E) dx = \lim_{\delta E \rightarrow 0} \frac{I(E + \delta E) - I(E)}{\delta E} .$$

Στο σχήμα 4.4 έχουν σχεδιαστεί τα ολοκληρώματα $I(E + \delta E)$ (πράσινη επιφάνεια) και $I(E)$ (ροζ επιφάνεια). Η επικάλυψη των δύο επιφανειών έχει μπλε χρώμα. Αυτό που χρειάζεται να υπολογίσουμε είναι η διαφορά των δύο επιφανειών.



Σχήμα 4.4: Γραφική αναπαράσταση των ολοκληρωμάτων $I(E) = \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} f(x; E) dx$ και $I(E + \delta E) = \int_{x_-(E + \delta E)}^{x_+(E + \delta E)} f(x; E + \delta E) dx$. Οι τρεις λωρίδες που δημιουργούνται από τη διαφορά είναι ανάλογες του δE για μικρά δE , ενώ οι γκρι περιοχές είναι ανάλογες του δE^2 . Το διάγραμμα αυτό κατασκευάστηκε βασισμένο στην υπόθεση ότι οι τρεις παράγωγοι $\partial f / \partial E$, dx_+ / dE , και dx_- / dE είναι θετικές. Σε διαφορετική περίπτωση τα πρόσημα των επιφανειών αυτών θα διαμορφώνονταν από τα πρόσημα των αντίστοιχων παραγώγων.

Η διαφορά των δύο ολοκληρωμάτων είναι (i) [+ η ροζ λωρίδα] στο πάνω μέρος του διαγράμματος που οφείλεται στην αλλαγή της συνάρτησης εξαιτίας της αλλαγής του E , (ii) [+ η ροζ λωρίδα] στο δεξί μέρος του διαγράμματος που οφείλεται στην αλλαγή του άνω ορίου εξαιτίας της αλλαγής του E και (iii) [- η πράσινη λωρίδα] στο αριστερό μέρος του διαγράμματος που οφείλεται στην αλλαγή του κάτω ορίου εξαιτίας της αλλαγής του E . Οι αλλαγές αυτές και επομένως και τα αντίστοιχα εμβαδά είναι ανάλογα με το δE , για μικρά δE , οπότε διαιρώντας τα με δE θα προκύψει το ζητούμενο. Οι γκρι ορθογώνιες περιοχές είναι ανάλογες του δE^2 , οπότε είτε τις λάβουμε υπόψη, είτε όχι, είτε λάβουμε ένα μέρος αυτών στους υπολογισμούς μας το αποτέλεσμα θα είναι μηδενικό μετά τη διαίρεση με το δE και τον υπολογισμό του ορίου $\delta E \rightarrow 0$.

Κατόπιν αυτών των διευκρινίσεων θα πρέπει να υπολογίσουμε το εμβαδόν της λωρίδας $BB'C'C'$,

$$\mathcal{E}_1 = \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} [f(x; E + \delta E) - f(x; E)] dx = \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \left[\frac{\partial f(x; E)}{\partial E} \delta E + \mathcal{O}(\delta E^2) \right] dx,$$

το εμβαδόν της λωρίδας $DDC'C'D'$,

$$\mathcal{E}_2 = \int_{x_+(E)}^{x_+(E + \delta E)} f(x; E) dx = (x'_+(E) \delta E) f(x_+(E); E) + \mathcal{O}(\delta E^2),$$

και τέλος το εμβαδόν της λωρίδας $ABB'A'$,

$$\mathcal{E}_3 = - \int_{x_-(E)}^{x_-(E + \delta E)} f(x; E) dx = -(x'_-(E) \delta E) f(x_-(E); E) + \mathcal{O}(\delta E^2).$$

Προσθέτοντας τα τρία αυτά εμβαδά-ολοκληρώματα, διαιρώντας με το δE και λαμβάνο-

ντας το όριο $\delta E \rightarrow 0$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dE} \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} f(x; E) dx &= \\ &= \int_{x_-(E)}^{x_+(E)} \frac{\partial f(x; E)}{\partial E} dx + x'_+(E) f(x_+(E); E) - x'_-(E) f(x_-(E); E). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Αυτό είναι το αποτέλεσμα της παραγωγίσης. Στην ειδική περίπτωση που η $f(x; E)$ μηδενίζεται στα όρια $x_-(E)$ και $x_+(E)$, οι δύο τελευταίοι όροι απουσιάζουν.

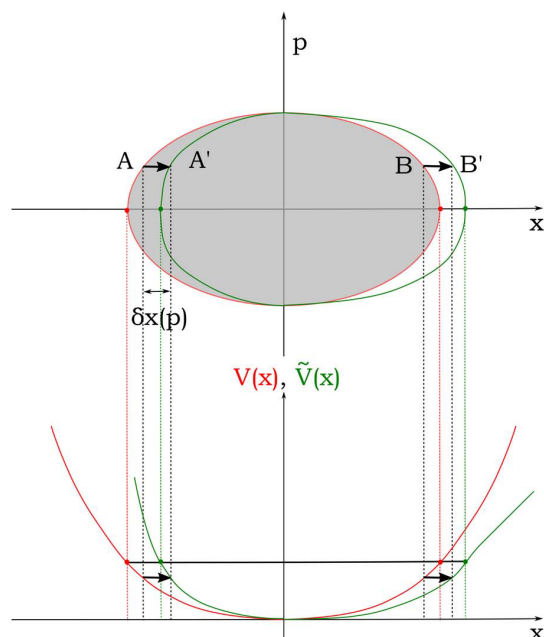
Στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή όπου η καμπύλη της ροής στο χώρο των φάσεων είναι μια έλλειψη, η καμπύλη αυτή καλύπτει ένα χωρίο με εμβαδόν $\mathcal{E} = \pi ab$, όπου a, b οι δύο ημιάξονες της έλλειψης (το αντίστοιχο ενός κύκλου με δύο διαφορετικές ακτίνες). Ο ημιάξονας επί του άξονα x είναι $a = x_{\max} = \sqrt{2E/k}$, ενώ ο ημιάξονας επί του άξονα p είναι $b = p_{\max} = \sqrt{2Em}$. Αυτόματα λοιπόν οδηγούμαστε στην έκφραση της περιόδου για τον αρμονικό ταλαντωτή

$$T_{\text{α.τ.}} = \frac{d(\pi \sqrt{2E/k} \sqrt{2Em})}{dE} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}. \quad (4.21)$$

Η ισοχρονικότητα του ταλαντωτή, καθώς και κάθε άλλου πηγαδιού δυναμικής ενέργειας για ενέργειες πολύ κοντά στον πάτο του πηγαδιού, είναι αποτέλεσμα της κοινής εξάρτησης των δύο διαστάσεων του χωρίου από την \sqrt{E} .

Θα μπορούσαμε, άραγε, να ανακαλύψουμε και κάποια άλλη $V(x)$ η οποία να οδηγεί στην ξεχωριστή ιδιότητα της ισοχρονικότητας που χαρακτηρίζει τον αρμονικό ταλαντωτή; Η συσχέτιση της περιόδου με το εμβαδόν του χωρίου στο χώρο των φάσεων μπορεί να μας αποκαλύψει την απάντηση. Ένας αρμονικός ταλαντωτής οδηγεί σε ελλειπτικά χωρία, των οποίων τα εμβαδά μεγαλώνουν γραμμικά με την ενέργεια. Αν κατασκευάζαμε μια άλλη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας η οποία να οδηγούσε σε εμβαδό χωρίου, για κάθε ενέργεια, ίσο με αυτό του ταλαντωτή θα είχαμε το ζητούμενο. Προσέξτε ότι μας ενδιαφέρει αυτή η ισότητα εμβαδών σε κάθε ενέργεια και όχι σε μια μεμονωμένη τιμή της ενέργειας.

Ας παραμορφώσουμε λοιπόν κατάλληλα το ελλειπτικό χωρίο ενός αρμονικού ταλαντωτή, σταθερά k , κρατώντας το εμβαδόν του σταθερό. Προφανώς υπάρχουν άπειρες τέτοιες παραμορφώσεις. Εμάς μας ενδιαφέρουν εκείνες οι παραμορφώσεις οι οποίες θα σχετίζονται με μια τροποποιημένη συνάρτηση δυναμικής ενέργειας έτσι ώστε η παραμόρφωση του χωρίου να είναι ισεμβαδική με την αντίστοιχη έλλειψη σε κάθε ενέργεια. Θα μειώσουμε την ελευθερία των δυνατών παραμορφώσεων απαιτώντας το σημείο $x = 0$ να είναι το σημείο ισορροπίας και της νέας δυναμικής ενέργειας $\tilde{V}(x)$. (Αν επιτρέψουμε στο σημείο ισορροπίας να αλλάξει εισάγουμε μια τετριμμένη παραμόρφωση –απλώς μετατοπίζουμε το χωρίο στον άξονα x – η οποία δεν εισάγει νέου τύπου δυναμικές ενέργειες.) Επομένως δεν αλλάζουμε την κάθετη διάμε-



Σχήμα 4.5: Μια κατάλληλα παραμορφωμένη δυναμική ενέργεια $\tilde{V}(x)$, σε σχέση με αυτήν ενός αρμονικού ταλαντωτή, οδηγεί σε ισεμβαδικά χωρία (σε σχέση με τα αντίστοιχα του αρμονικού ταλαντωτή) στο χώρο των φάσεων και επομένως χαρακτηρίζεται από την ισοχρονικότητα του αρμονικού ταλαντωτή.

τρο του χωρίου στη θέση $x = 0$. Μπορούμε, όμως, να μετακινήσουμε τις δύο πλευρές της έλλειψης έτσι ώστε σε κάθε ύψος p , το $x_{αφ}(p)$ να μετακινηθεί στο $x_{αφ}(p) + \delta x(p)$ και ταυτόχρονα το $x_{δεξ}(p)$ να μετακινηθεί στο $x_{δεξ}(p) + \delta x(p)$. Με την παραμόρφωση αυτή τροποποιούμε το σχήμα αλλά όχι το εμβαδόν. Η δε $\delta x(p)$ είναι μια αυθαίρετη συνεχής συνάρτηση. Ποια δυναμική ενέργεια θα οδηγούσε σε ένα τέτοιο χωρίο, παραμορφωμένης έλλειψης; Από τη διατήρηση της ενέργειας για τον αρμονικό ταλαντωτή που μας οδήγησε στο ελλειπτικό χωρίο, εφαρμόζοντάς την στο νέο πεδίο που περιγράφεται από την νέα δυναμική ενέργεια $\tilde{V}(x)$ θα έχουμε για δύο σημεία των χωρίων με ίδια p (π.χ. τα A, A' και B, B' του σχήματος 4.5):

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2}kx^2 &= E \\ \frac{p^2}{2m} + \tilde{V}(x') &= E. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Με άλλα λόγια θα πρέπει

$$\frac{1}{2}kx^2 = \tilde{V}(x')$$

και αυτές οι δύο θέσεις θα πρέπει να συνδέονται με τη σχέση $x' = x + \delta x(p)$, ώστε να διατηρείται το εμβαδόν σταθερό. Επομένως η λύση στο πρόβλημά μας είναι μια

$\tilde{V}(x)$ η οποία ικανοποιεί τη σχέση

$$\tilde{V}(x) = \frac{1}{2}k \left[x - \delta x(\tilde{V}) \right]^2 .^6 \quad (4.23)$$

Η μορφή αυτής της έκφρασης είναι αρκετά αινιγματική και προβληματική, αφού η συνάρτηση \tilde{V} εμφανίζεται ως όρισμα στην αιθαίρετη συνάρτηση δx που εισάγεται στη μεταβλητή x της \tilde{V} ! Μάλιστα η ελευθερία επιλογής της δx δεν είναι απόλυτη αφού ένα σημείο με $x > 0$ θα πρέπει και μετά την παραμόρφωση της δυναμικής ενέργειας να παραμείνει θετικό, δηλαδή $x - \delta x > 0$. Προκειμένου λοιπόν να διαμορφώσουμε την παραπάνω σχέση σε μια πρακτικά πιο χρήσιμη μορφή θα γράψουμε

$$x = \pm \sqrt{\frac{2\tilde{V}}{k}} + \delta x(\tilde{V}) .$$

Αν θέλουμε η μετακίνηση κατά δx να μην αλλάζει το πρόσημο του x , θα μπορούσαμε να επαναδιατυπώσουμε την παραπάνω σχέση ως

$$x = \pm \sqrt{\frac{2\tilde{V}}{k}} (1 \pm f(\tilde{V})) \quad (4.24)$$

με $|f(\tilde{V})| < 1$ και το πρόσημο του \pm στον όρο $(1 \pm f)$ να επιλέγεται ανάλογα με το πρόσημο του x , έτσι ώστε όταν το x είναι θετικό να διαστέλλεται κατά τον παράγοντα f , ενώ το αντίστοιχο αρνητικό x να συστέλλεται κατά τον παράγοντα f . Αντιστρέφοντας στη συνέχεια την παραπάνω σχέση (4.24) θα έχουμε

$$\tilde{V}(x) = G_{\pm}^{-1} \left(\frac{k}{2} x^2 \right) . \quad (4.25)$$

όπου G_{\pm}^{-1} οι αντίστροφες συναρτήσεις των $G_{\pm}(y) = y(1 \pm f(y))^2$. Προφανώς η συνάρτηση f θα πρέπει να είναι τέτοια, ώστε να υπάρχει η αντίστροφη των G_{\pm} , δηλαδή θα πρέπει οι $y(1 \pm f(y))^2$ να είναι μονότονες συναρτήσεις⁷. Αυτή η κατασκευή μας δίνει τους δύο κλάδους της αυθαίρετα παραμορφωμένης δυναμικής ενέργειας, η οποία έχει την ίδια σταθερή περίοδο με τον αρμονικό ταλαντωτή, $2\pi\sqrt{m/k}$.

Παράδειγμα: Αν επιλέγαμε $f(y) = 1/n$ (όπου n φυσικός αριθμός > 1) τότε οι συναρτήσεις G_{\pm} θα είχαν τη μορφή

$$G_{\pm}(y) = y[1 \pm (1/n)]^2 \quad (4.26)$$

⁶Την αυθαίρετη συνάρτηση $\delta x(p)$ της προηγούμενης συζήτησης, την αντικαταστήσαμε με μια αυθαίρετη συνάρτηση του \tilde{V} , αφού αλλάζοντας το p κατά την κίνηση του σωματιδίου αλλάζει και η τιμή της δυναμικής ενέργειας που βρίσκεται το σωματίδιο.

⁷Για να συμβαίνει αυτό θα πρέπει η $1 \pm f(y) \pm 2yf'(y) > 0$.

και αντιστρέφοντάς τες

$$G_{\pm}^{-1}(x) = \frac{x}{[1 \pm (1/n)]^2}. \quad (4.27)$$

Σύμφωνα λοιπόν με την (4.25)

$$\tilde{V}(x) = \begin{cases} \frac{k}{2}x^2 \frac{1}{[1+(1/n)]^2}, & \text{για } x \geq 0, \\ \frac{k}{2}x^2 \frac{1}{[1-(1/n)]^2}, & \text{για } x < 0. \end{cases} \quad (4.28)$$

Στην πραγματικότητα, η δυναμική αυτή ενέργεια περιγράφει έναν αρμονικό ταλαντωτή με διαφορετική σταθερά για θετικά και για αρνητικά x . Η περίοδος του θα είναι το άθροισμα των δύο αντίστοιχων ημπεριόδων

$$T = \pi \sqrt{\frac{m}{k/[1-(1/n)]^2}} + \pi \sqrt{\frac{m}{k/[1+(1/n)]^2}} = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}.$$

4.3 * Θεώρημα Liouville

Ο χώρος των φάσεων που μελετήσαμε αναλυτικά στο προηγούμενο εδάφιο αποτελεί έναν άλλο τρόπο για να «παρακολουθούμε» την εξέλιξη ενός μηχανικού (και όχι μόνο συστήματος). Μια αρχική συνθήκη κάποιου συστήματος αποτυπώνεται σε ένα συγκεκριμένο σημείο στο χώρο των φάσεων και επομένως αυτή η αρχική κατάσταση ακολουθεί συν το χρόνω μια προδιαγεγραμμένη καμπύλη βάσει της δυναμικής που διέπει την εξέλιξη του συστήματος. Μάλιστα, επειδή η δυναμική για τις νέες συντεταγμένες (p, x) περιγράφεται με ένα σύστημα πρωτοβαθμίων εξισώσεων $(\dot{p} = F(x), \dot{x} = p/m)$ η δυναμική αυτή θυμίζει πιο πολύ αριστοτέλεια μηχανική όπου η γενικευμένη δύναμη $\mathcal{F} = (F(x), p/m)$ σε μια συγκεκριμένη θέση $\mathcal{X} = (p, x)$ είναι ανάλογη με την ταχύτητα $\mathcal{V} = (\dot{p}, \dot{x})$: $\mathcal{F} = \mathcal{V}$.

Οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων είναι γραμμές που δεν τέμνονται (τουλάχιστον ενόσω η δύναμη είναι χρονοανεξάρτητη⁸), αφού σε αντίθετη περίπτωση οι αρχικές συνθήκες που θα αντιστοιχούσαν στο σημείο τομής (ή επαφής, αν εφάπτονταν) δεν θα είχαν μοναδική εξέλιξη. Οι γραμμές λοιπόν στο χώρο των φάσεων δημιουργούν μια ροή που αντιστοιχεί στην εξέλιξη του συστήματος, όποιες και αν είναι οι αρχικές του συνθήκες. Θα δείξουμε ότι η ροή αυτή έχει ένα χαρακτηριστικό που θυμίζει τη ροή των πραγματικών υγρών: Είναι ασυμπίεστη. Με άλλα λόγια η εξέλιξη ενός χωρίου του χώρου των φάσεων, τα σημεία του οποίου ακολουθούν αυτή τη ροή, θα διατηρήσει τον αρχικό του όγκο (επιφάνεια για έναν διδιάστατο χώρο

⁸Στην περίπτωση χρονοεξαρτώμενης δύναμης οι εκάστοτε αρχικές συνθήκες θέσης/ταχύτητας δεν εξελίσσονται με τον ίδιο τρόπο, αν αναφέρονται σε διαφορετικές χρονικές στιγμές, αφού η δυναμική αλλάζει με το χρόνο.

φάσεων) ακόμη και αν το σχήμα του χωρίου παραμορφωθεί εντόνως.

Ας δούμε γιατί συμβαίνει αυτό. Έστω ένα σημείο A με συντεταγμένες (x_0, p_0) στο χώρο των φάσεων. Το σημείο αυτό θα εξελιχθεί μετά από ένα μικρό χρονικό διάστημα ϵ στο $(x_0 + (p_0/m)\epsilon, p_0 + F(x_0)\epsilon)$. Οι νέες αυτές συντεταγμένες είναι τα ακριβή αναπτύγματα $x(\epsilon), p(\epsilon)$ μέχρι τάξης ϵ . Ένα γειτονικό του A σημείο B με συντεταγμένες $(x_0 + \delta x, p_0)$ θα εξελιχθεί στο ίδιο χρονικό διάστημα στο

$$(x_0 + \delta x + (p_0/m)\epsilon, p_0 + F(x_0 + \delta x)\epsilon) .$$

Έτσι το πολύ μικρό διάνυσμα $(\delta x, 0)$ που συνέδεε αρχικά τα σημεία A, B θα εξελιχθεί στο διάνυσμα

$$(\delta x, \epsilon[F(x_0 + \delta x) - F(x_0)]) \simeq \delta x (1, \epsilon \partial F/\partial x|_{x_0}) .$$

Αντίστοιχα ένα άλλο γειτονικό του A σημείο Γ με συντεταγμένες $(x_0, p_0 + \delta p)$ θα εξελιχθεί στο ίδιο χρονικό διάστημα στο

$$(x_0 + ((p_0 + \delta p)/m)\epsilon, p_0 + \delta p + F(x_0)\epsilon) .$$

Έτσι το πολύ μικρό διάνυσμα $(0, \delta p)$ που συνέδεε αρχικά τα σημεία A, Γ θα εξελιχθεί στο διάνυσμα

$$((\delta p/m)\epsilon, \delta p) = \delta p (\epsilon/m, 1) .$$

Μπορείτε εύκολα να δείξετε μόνοι σας ότι η τέταρτη κορυφή του ορθογωνίου παραλληλογράμμου με κορυφές τα A, B, Γ και συντεταγμένες ως προς το A $(\delta x, \delta p)$ θα εξελιχθεί ως το άθροισμα των εξελίξεων των $\vec{AB} = (\delta x, 0)$ και $\vec{A\Gamma} = (0, \delta p)$ δηλαδή ως

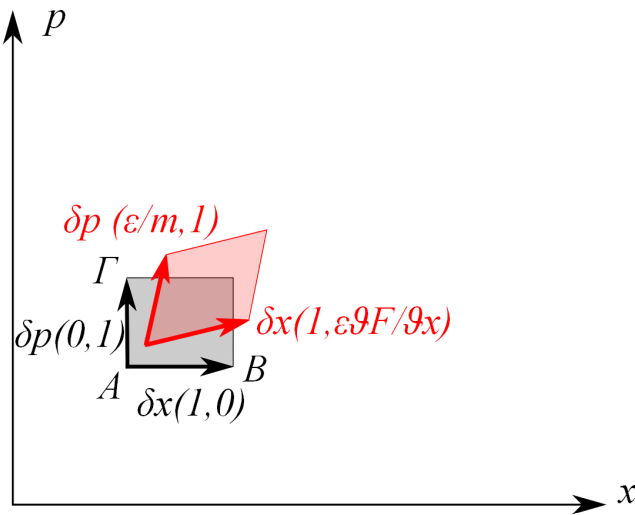
$$\delta x (1, \epsilon \partial F/\partial x|_{x_0}) + \delta p (\epsilon/m, 1) .$$

Επομένως το αρχικό ορθογώνιο παραλληλόγραμμο θα εξελιχθεί σε ένα πλαγιόγωνο παραλληλόγραμμο το οποίο θα έχει εμβαδόν

$$\delta \mathcal{S}(\epsilon) = \left| \begin{vmatrix} \delta x & \delta x \epsilon \partial F/\partial x|_{x_0} \\ \delta p \epsilon/m & \delta p \end{vmatrix} \right| = \delta x \delta p [1 - \mathcal{O}(\epsilon^2)] \simeq \delta \mathcal{S}_0 . \quad (4.29)$$

Οι διορθώσεις στο εμβαδόν είναι τάξης ϵ^2 και δεν χρειάζεται να τους γράψουμε αφού έτσι κι αλλιώς σε όλους τους προηγούμενους υπολογισμούς έχουμε αγνοήσει τέτοιας τάξης όρους. Αφού δεν υπάρχουν μεταβολές του εμβαδού τάξης ϵ αυτό σημαίνει πώς σε κάθε χρονική στιγμή

$$\frac{d\delta \mathcal{S}}{dt} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\delta \mathcal{S}(\epsilon) - \delta \mathcal{S}_0}{\epsilon} = 0$$



Σχήμα 4.6: Η παραμόρφωση ενός παραλληλόγραμμου στοιχειώδους χωρίου στο χώρο των φάσεων (γκρι) και η εξέλιξή της μετά από τον απειροστό χρόνο ϵ .

δηλαδή δεν αλλάζει το εμβαδό κάποιου μικρού χωρίου καθώς αυτό εξελίσσεται. Αντίστοιχα και ένα πεπερασμένου μεγέθους χωρίο (αποτελούμενο από πολλά στοιχειώδη ορθογώνια) θα εξελιχθεί σε ένα χωρίο ίδιου μεγέθους με το αρχικό με το πέρασμα του χρόνου, μολονότι το χωρίο αυτό μπορεί να μην θυμίζει καθόλου, ως προς το σχήμα, το αρχικό χωρίο.⁹ Το αποτέλεσμα αυτό είναι το περιεχόμενο του θεωρήματος Liouville και έχει ισχύ όχι μόνο για διδιάστατους χώρους φάσεων, αλλά και για μεγαλύτερης διάστασης φασικούς χώρους φυσικών συστημάτων.

Ένα χωρίο στο χώρο των φάσεων μπορεί να ιδωθεί είτε ως μια συλλογή από ίδια φυσικά συστήματα τα οποία τη δεδομένη στιγμή διαφοροποιούνται ως προς τις αρχικές τους συνθήκες, είτε ως ένα μόνο φυσικό σύστημα του οποίου οι αρχικές συνθήκες δεν είναι γνωστές επακριβώς, αλλά γνωρίζουμε την στατιστική κατανομή τους εντός κάποιας περιοχής.

Τέλος θα πρέπει να σημειώσουμε ότι τα ζευγάρια των φυσικών ποσοτήτων (εδώ η θέση και η ορμή) που απεικονίζονται στο φασικό χώρο και ικανοποιούν το θεώρημα Liouville, είναι ακριβώς τα ζευγάρια εκείνα που στην κβαντομηχανική εμφανίζονται να ικανοποιούν την αρχή της απροσδιοριστίας του Heisenberg, δηλαδή η απροσδιοριστία της μιας να βρίσκεται σε αντίστροφη αναλογία με την αβεβαιότητα της άλλης, κατ' ελάχιστον.

⁹ Φανταστείτε για παράδειγμα την εξέλιξη στο χρόνο μιας περιοχής του φασικού χώρου που περιλαμβάνει το σημείο ακινησίας σε ένα σταθές σημείο ισορροπίας. Λόγω της περιέργης ροής γύρω από ένα τέτοιο σημείο, άλλες περιοχές του φασικού χώρου θα συμπιεστούν πλησιάζοντας το σταθές σημείο, ενώ άλλες θα απομακρυνθούν με εκθετικό τρόπο από αυτό. Επομένως ένα αρχικά κυκλικό τέτοιο χωρίο θα γίνει εξαιρετικά επίμηκες· σχεδόν μια μονοδιάστατη γραμμή, ίδιου όμως εμβαδού με το αρχικό χωρίο.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 4

- Για δυνάμεις που εξαρτώνται αποκλειστικά από τη θέση εμφανίζεται μια διατηρούμενη ποσότητα: η ενέργεια. Μέσω της διατήρησης αυτής μπορεί να συσχετίσει κανείς την ορμή ενός σωματιδίου με τη θέση του. Η απεικόνιση της κίνησης ενός τέτοιου σωματιδίου στο χώρο των φάσεων θέσης-ορμής γίνεται με μη τεμνόμενες καμπύλες οι οποίες «ρέουν» με ωρολογιακή φορά.
- Οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων γύρω από ευσταθή σημεία ισορροπίας είναι προσεγγιστικά ελλείψεις. Οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων γύρω από ασταθή σημεία ισορροπίας είναι προσεγγιστικά υπερβολές. Οι καμπύλες στο χώρο των φάσεων γύρω από τα ακραία σημεία της κίνησης (τα σημεία που μηδενίζεται απροδικά η ταχύτητα) είναι προσεγγιστικά παραβολές.
- Η προσέγγιση σε ένα ασταθές σημείο ισορροπίας με την κατάλληλη ενέργεια που θα σταματούσε το σωματίδιο στο σημείο αυτό είναι ατέρμονη.
- Η περίοδος ενός ταλαντωτή σχετίζεται με το εμβαδόν του αντίστοιχου χωρίου στο χώρο των φάσεων ως

$$T = \frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

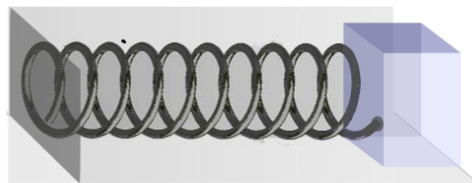
- Ένας ταλαντωτής με ενέργεια μόλις μεγαλύτερη από το ελάχιστο μιας δυναμικής ενέργειας είναι κατά προσέγγιση ισόχρονος.
- Η εξέλιξη ενός χωρίου του χώρου των φάσεων διατηρεί το εμβαδόν αυτού στη διάρκεια του χρόνου (θεώρημα Liouville). Η ροή στο χώρο των φάσεων είναι ασυμπίεστη.

5

Αρμονικές Ταλαντώσεις

5.1 Ο αρμονικός ταλαντωτής

Ο αρμονικός ταλαντωτής αποτελεί ένα από το πλέον σημαντικά συστήματα στη Φυσική. Δεν θα ήταν υπερβολή αν λέγαμε ότι είναι το σημαντικότερο φυσικό σύστημα και ότι όλος ο φυσικός κόσμος περιγράφεται σε θεμελιώδες επίπεδο από ένα πεδίο αρμονικών ταλαντωτών.



Εμβληματικό μοντέλο για τον αρμονικό ταλαντωτή αποτελεί μία μάζα προσδεμένη στο άκρο ενός γραμμικού ελατηρίου και η οποία κινείται σε οριζόντιο δάπεδο δίχως να ασκείται καμία δύναμη τριβής μεταξύ του δαπέδου και του σώματος (βλ. σχήμα). Το ελατήριο λέγεται γραμμικό διότι η δύναμη επαναφοράς που ασκείται στο σώμα είναι ευθέως ανάλογη της επιμήκυνσης (ή επιβράχυνσης), x , του ελατηρίου από το φυσικό του μήκος, δηλαδή είναι $F = -kx$, όπου $k > 0$ η σταθερά του ελατηρίου (γνωστή και ως σταθερά του Hooke). Το $x = 0$ είναι το μόνο σημείο ισορροπίας του ταλαντωτή. Τα σημεία ισορροπίας χαρακτηρίζονται από μηδενική δύναμη έτσι ώστε αν το σώμα βρεθεί σε ένα τέτοιο σημείο με μηδενική ταχύτητα θα

παραμένει για πάντα σε αυτό. Για αυτό το λόγο τα σημεία ισορροπίας λέγονται και σταθερά σημεία (fixed points). Αν η μάζα μετατοπισθεί λίγο από το σημείο ισορροπίας τότε η δύναμη που ασκείται από το ελατήριο επαναφέρει το σώμα, λόγω του αρνητικού προσήμου της δύναμης, στο σημείο ισορροπίας, στο οποίο επιστρέφει με μη μηδενική ταχύτητα, οπότε συνεχίζει την κίνησή του μέχρις ότου ακινητοποιηθεί εκ νέου και επιστρέψει και πάλι στο αρχικό σημείο. Με τον τρόπο αυτό, όπως ήδη γνωρίζουμε από το προηγούμενο κεφάλαιο, το σώμα θα εκτελέσει μια περιοδική ταλάντωση.

Ας αναλύσουμε τώρα την κίνηση του αρμονικού ταλαντωτή με μεγαλύτερη λεπτομέρεια. Η εξίσωση κίνησης της μάζας του αρμονικού ταλαντωτή είναι:

$$m\ddot{x} = -kx, \quad (5.1)$$

και η κίνηση $x(t, x_0, v_0, k/m)$ προσδιορίζεται όταν δωθούν η αρχική θέση x_0 και ταχύτητα v_0 του σώματος. Επιλέξαμε να γράψουμε τη λύση στη μορφή $x(t, x_0, v_0, k/m)$ αντί της απλούστερης γραφής, $x(t)$, για να τονίσουμε ότι η κίνηση είναι επίσης συνάρτηση των x_0, v_0 και των φυσικών παραμέτρων του προβλήματος k, m μέσω του συνδυασμού $\omega^2 = k/m$ και όχι ξεχωριστά από την καθεμία. Έτσι για κάθε αρχική θέση x_0 και ταχύτητα v_0 προκύπτει μοναδική τροχιά για έναν δοσμένο ταλαντωτή. Επιπλέον η $x(t, x_0, v_0, \omega^2)$ είναι συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση ως προς όλες τις μεταβλητές της. Η συνέχεια και διαφορισιμότητα των λύσεων ως προς τις αρχικές συνθήκες και τις παραμέτρους αποτελεί την βάση των διαταρακτικών μεθόδων και έχει ιδιαίτερη φυσική σημασία, διότι βεβαιώνει ότι πάντοτε η κατάσταση ενός φυσικού συστήματος έχει σε κάθε χρονική στιγμή συνεχή και διαφορίσιμη εξάρτηση από τις αρχικές συνθήκες και τις παραμέτρους του συστήματος.

Πλαίσιο 5.1

Μια κλασική κατασκευή της λύσης του αρμονικού ταλαντωτή

Η δυναμική ενέργεια του αρμονικού ταλαντωτή είναι

$$V = - \int_0^x F(x') dx' = kx^2/2$$

και έτσι η διατήρηση της ενέργειας οδηγεί στη σχέση ότι

$$\frac{m}{2} \dot{x}^2 + \frac{k}{2} x^2 = \frac{m}{2} v_0^2 + \frac{k}{2} x_0^2,$$

ή

$$\dot{x} = \pm \omega \sqrt{a^2 - x^2}$$

με $\omega = \sqrt{k/m}$ και

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}. \quad (5.2)$$

Συνεπώς

$$\int_{x_0}^x \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \pm \omega \int_0^t d\tau ,$$

και θέτοντας $\xi = a \cos \psi$ βρίσκουμε

$$x(t) = a \cos \left(\mp \omega t + \cos^{-1} \left(\frac{x_0}{a} \right) \right) , \quad (5.3)$$

η οποία γράφεται ισοδύναμα ως

$$x(t) = a \cos(\omega t + \phi) \quad (5.4)$$

με

$$\phi = \tan^{-1} \frac{v_0}{\omega x_0} . \quad (5.5)$$

Το αρνητικό πρόσημο στην σχέση (5.3) απορροφήθηκε στην (5.4) με κατάλληλη επιλογή της αρχικής φάσης. Στην πραγματικότητα υπάρχουν δύο τιμές του $\cos^{-1}(x_0/a)$, μία για τη λύση με το $+\omega t$ και μία για τη λύση με το $-\omega t$. Και οι δύο επιλογές οδηγούν στην ίδια λύση. Εμείς επιλέξαμε τη μια από αυτές μέσω της (5.28). Η αρχική φάση όπως ορίστηκε έχει και αυτή πρόβλημα, αφού για $v_0 \rightarrow -v_0$ και $x_0 \rightarrow -x_0$ η φάση μέσω της (5.28) είναι ίδια. Αν είμασταν πιο ακριβείς θα έπρεπε να προσδιορίσουμε επιπλέον στον ορισμό της φάσης ότι $\phi \in (0, \pi)$ για $v_0 > 0$ και $\phi \in (\pi, 2\pi)$ για $v_0 < 0$.

Η περιοδικότητα της κίνησης στη μορφή της (5.4) αναδύεται μέσω της περιοδικότητας του συνημιτόνου. Η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος από το σημείο ισορροπίας, ή αλλιώς το πλάτος της ταλάντωσης, συνδέεται με τις αρχικές συνθήκες μέσω της (5.27) και απ' ότι φαίνεται δεν επηρεάζει καθόλου την περίοδο $2\pi/\omega$ της κίνησης.

Χρησιμοποιώντας τη διατήρηση της ενέργειας, όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο μπορούμε να προσδιορίσουμε την κίνηση $x(t, x_0, v_0, \omega^2)$ (βλ. Πλαίσιο 5.1). Αντ' αυτού στο κεφάλαιο αυτό θα ακολουθήσουμε άλλο τρόπο για να προσδιορίσουμε την κίνηση προκειμένου να αναδείξουμε έναν νέο τρόπο μελέτης της εξέλιξης των φυσικών συστημάτων.

Η ύπαρξη και η μοναδικότητα της τροχιάς ενός φυσικού συστήματος, δεδομένων των αρχικών συνθηκών, διασφαλίζεται από την πρόταση ότι υπάρχει μοναδική λύση στο σύστημα των διαφορικών εξισώσεων

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n, \mu) , \quad \text{με } i = 1, \dots, n , \quad (5.6)$$

όπου μ δομένες παράμετροι, όταν οι n^2 παράγωγοι $\partial f_i / \partial x_j$ είναι συνεχείς συναρτήσεις των μεταβλητών x_i σε όλο το πεδίο ορισμού των συναρτήσεων f_i ¹. Υπό αυτές τις συνθήκες η λύση θα είναι και συνεχής και διαφορίσιμη συνάρτηση των αρχικών συνθηκών. Αν επιπλέον οι f_i είναι συνεχείς (και διαφορίσιμες) συναρτήσεις των μ τότε και η λύση θα είναι αντίστοιχα συνεχής (και διαφορίσιμη) συνάρτηση των παραμέτρων μ .

¹Μπορείτε να βρείτε τη σχετική απόδειξη σε ένα καλό βιβλίο διαφορικών εξισώσεων. Προτείνουμε το κεφ. 4 του Arnold *Ordinary Differential Equations*.

Στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή η εξίσωση κίνησης(μετατρέπεται σε σύστημα πρωτοταξίων διαφορικών εξισώσεων θέτοντας $x = x_1$ και $v = \dot{x} = x_2$, οπότε η (5.1) μετατρέπεται στο σύστημα διαφορικών εξισώσεων:

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -\omega^2 x_1, \quad (5.7)$$

με $\omega^2 = k/m$, ένα φυσικό μέγεθος με μονάδες αντιστρόφου τετραγώνου του χρόνου. Η (5.7) ως μια ειδική περίπτωση του συστήματος (5.6) με $n = 2$, ικανοποιεί προφανώς όλες τις προϋποθέσεις για την ύπαρξη μοναδικής λύσης, η δε λύση εξαρτάται συνεχώς και διαφορισίμως από τις αρχικές συνθήκες και την παράμετρο ω (στην περίπτωση αυτή οι συναρτήσεις είναι οι $f_1(x_1, x_2) = x_2$ και $f_2(x_1, x_2) = -\omega^2 x_1$).

Είναι προφανές ότι κάθε μηχανικό σύστημα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων μπορεί να γραφεί ως ένα σύστημα πρωτοβάθμιων διαφορικών εξισώσεων άρτιου πλήθους και στη συνέχεια να προσδιοριστεί η εξέλιξη του συστήματος ως η μοναδική τροχιά στον αντίστοιχο φασικό χώρο που περνά από το το αρχικό σημείο το οποίο καθορίζεται πλήρως από τις αρχικές συνθήκες.

5.2 Η γραμμικότητα του αρμονικού ταλαντωτή

Ο αρμονικός ταλαντωτής χαρακτηρίζεται από μια ιδιαίτερη ιδιότητα που τον καθιστά ξεχωριστό ανάμεσα στα διάφορα φυσικά συστήματα. Η εξίσωση κίνησής του είναι γραμμική. Μία εξίσωση λέγεται γραμμική αν οι λύσεις της εξίσωσης ικανοποιούν την αρχή της γραμμικής υπέρθεσης: δηλαδή εάν x_1 και x_2 ικανοποιούν την εξίσωση κίνησης, τότε και ο γραμμικός συνδυασμός $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ για κάθε πραγματική τιμή των α_1, α_2 ικανοποιεί την εξίσωση κίνησης. Πράγματι αν x_1 και x_2 είναι δύο λύσεις κάποιου αρμονικού ταλαντωτή, αν δηλαδή ικανοποιούν τις εξισώσεις:

$$m\ddot{x}_1 + kx_1 = 0, \quad m\ddot{x}_2 + kx_2 = 0,$$

τότε και ο γραμμικός συνδυασμός $x = \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ θα αντιστοιχεί σε λύση του αρμονικού ταλαντωτή, διότι

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= m \frac{d^2}{dt^2} (\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= \alpha_1 m \frac{d^2 x_1}{dt^2} + \alpha_2 m \frac{d^2 x_2}{dt^2} \\ &= -\alpha_1 k x_1 - \alpha_2 k x_2 \\ &= -k(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) \\ &= -kx. \end{aligned}$$

Η απόδειξη βασίστηκε στη γραμμικότητα του τελεστή της δευτέρας παραγώγου καθώς και στη γραμμικότητα της συγκεκριμένης συνάρτησης της δύναμης. Δηλαδή αν συμβολίσουμε τη δεύτερη χρονική παράγωγο με τον τελεστή $\mathcal{L} = d^2/dt^2$ τότε ο τελεστής είναι γραμμικός επειδή σχύει ότι:

$$\mathcal{L}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \mathcal{L}(x_1) + \alpha_2 \mathcal{L}(x_2). \quad (5.8)$$

Γράψαμε τον τελεστή με καλλιγραφικά στοιχεία για να τον αντιδιαστείλουμε με τις συναρτήσεις οι οποίες απεικονίζουν σημεία σε σημεία. Οι τελεστές, αντιθέτως, απεικονίζουν συναρτήσεις σε συναρτήσεις και ο ορισμός (5.8) αναφέρεται στη δράση του τελεστή \mathcal{L} επί των συναρτήσεων x_1 και x_2 . Π.χ. ο τελεστής $\mathcal{P} = d/dt$ απεικονίζει μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $x(t)$, στη συνεχή συνάρτηση $\dot{x}(t) = dx/dt$, δηλαδή αν $x(t) = \sin t$ τότε $\mathcal{P}(\sin t) = \cos t$. Ο τελεστής $\mathcal{Q} = \int_0^t$ απεικονίζει την ολοκληρωσιμη συνάρτηση $x(t)$ στη συνεχή συνάρτηση $g(t) = \int_0^t x(\tau) d\tau$, δηλαδή αν $x(t) = 2t$ τότε $\mathcal{Q}(2t) = t^2$. Τέλος, ο σταθερός τελεστής $k = k$, όπου k κάποιος πραγματικός αριθμός, απεικονίζει οποιαδήποτε συνάρτηση $x(t)$ στη συνάρτηση $g(t) = k x(t)$.

Γραμμικοί τελεστές είναι οι τελεστές οι οποίοι ικανοποιούν τη σχέση (5.8) σε κάποιο χώρο συναρτήσεων. Και οι τρεις τελεστές που αναφέραμε παραπάνω είναι γραμμικοί. Ο τελεστής \mathcal{L} όμως του οποίου η δράση είναι $\mathcal{L}(f) = (df/dt)^2$ είναι μη γραμμικός αφού $\mathcal{L}(f + g)$ δεν ισούται εν γένει με $\mathcal{L}f + \mathcal{L}g$.

Ας επιστρέψουμε τώρα στον τελεστή του αρμονικού ταλαντωτή:

$$\mathcal{L} = m \frac{d^2}{dt^2} + k, \quad (5.9)$$

δηλαδή τον τελεστή που απεικονίζει την συνάρτηση $x(t)$ στην

$$\mathcal{L}(x) = m\ddot{x} + kx$$

τότε η εξίσωση κίνησης του αρμονικού ταλαντωτή μπορεί με μεγάλη οικονομία να διατυπωθεί ως:

$$\mathcal{L}(x) = 0.$$

Επειδή ο τελεστής (5.21) που διέπει τη κίνηση του αρμονικού ταλαντωτή είναι γραμμικός, δηλαδή ικανοποιεί την (5.8), ο αρμονικός ταλαντωτής είναι ένα γραμμικό φυσικό σύστημα. Γενικά θα λέμε ότι ένα φυσικό σύστημα είναι γραμμικό αν διέπεται, με την έννοια της (5.2), από κάποιο γραμμικό τελεστή.

Η γραμμικότητα του αρμονικού ταλαντωτή έχει ενδιαφέρουσες συνέπειες για τις λύσεις του ταλαντωτή. Αν η $x(t)$ είναι μία λύση του αρμονικού ταλαντωτή, δηλαδή ικανοποιεί την εξίσωση $\mathcal{L}(x) = 0$, τότε μπορούμε αμέσως να προσδιορίσουμε μία

απειρία άλλων λύσεων. Για κάθε α , η $\alpha x(t)$ θα είναι και αυτή λύση, διότι

$$\mathcal{L}(\alpha x) = \alpha \mathcal{L}(x) = \alpha \cdot 0 = 0.$$

Συνεπώς, αν $x(t)$ είναι η κίνηση που προκύπτει με αρχική θέση x_0 και ταχύτητα v_0 , τότε η αρχική θέση kx_0 και ταχύτητα kv_0 παράγει τη κίνηση $kx(t)$. Αν τώρα έχουμε βρεί δύο λύσεις: την x_1 και την x_2 τότε κάθε γραμμικός συνδυασμός που σχηματίζεται από αυτές είναι λύση του αρμονικού ταλαντωτή. Θα δείξουμε ότι πράγματι η $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2$ είναι λύση:

$$\mathcal{L}(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 \mathcal{L}(x_1) + \alpha_2 \mathcal{L}(x_2) = \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0.$$

Αυτή η ιδιότητα μας καθιστά ικανούς να περιγράψουμε την κίνηση του ταλαντωτή με ιδιαίτερη οικονομία. Για να καταλάβουμε αυτή την κατασκευή πρέπει να δούμε την εξέλιξη του ταλαντωτή στο χώρο που ορίζουν οι θέσεις x και οι ταχύτητες $v = \dot{x}$ (δηλαδή τον φασικό χώρο). Στο χώρο αυτό μπορεί να δοθεί δομή δισδιάστατου διανυσματικού χώρου αντιστοιχώντας σε κάθε σημείο του επιπέδου την κατάσταση:

$$\begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix},$$

και ορίζοντας την πράξη πρόσθεσης δύο καταστάσεων ως

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \end{pmatrix},$$

και του πολλαπλασιασμού με κάποιο πραγματικό αριθμό λ :

$$\lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x_1 \\ \lambda x_2 \end{pmatrix}.$$

Μία βάση του χώρου αυτού θα μπορούσαν να αποτελέσουν οι καταστάσεις

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \tag{5.10}$$

και

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{5.11}$$

Κάθε στοιχείο του επιπέδου είναι γραμμικός συνδυασμός των στοιχείων της βάσης,

π.χ.

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} = x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Έτσι κάθε σημείο μπορεί να προκύψει ως γραμμικός συνδυασμός δύο στοιχείων του χώρου τα οποία μπορούν να ληφθούν ως βάση.

Κάθε αρχική συνθήκη του ταλαντωτή συνδεεται με έναν διαφορετικό γραμμικό συνδυασμό των στοιχείων της βάσης και επομένως οδηγεί σε μια μοναδική τροχιά στο χώρο των φάσεων η οποία αποτελεί μια λύση της εξίσωσης κίνησης που σέβεται τις δομένες αρχικές συνθήκες.

Η λύση αυτή μπορεί να προκύψει αν γνωρίζουμε δύο οποιοσδήποτε ανεξάρτητες λύσεις του ταλαντωτή. Με τον όρο ανεξάρτητες εννοούμε δύο λύσεις οι οποίες δεν είναι η μία πολλαπλάσιο της άλλης. Για παράδειγμα οι δύο λύσεις, που αφορούν στις αρχικές συνθήκες των (5.10,5.11):

$$\psi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\omega \sin \omega t \end{pmatrix}, \quad \psi_2(t) = \begin{pmatrix} \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ \cos \omega t \end{pmatrix}, \quad (5.12)$$

είναι ανεξάρτητες, ενώ οι

$$\tilde{\psi}_1(t) = \begin{pmatrix} \cos \omega t \\ -\omega \sin \omega t \end{pmatrix}, \quad \tilde{\psi}_2(t) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} \cos \omega t \\ \sqrt{2} \omega \sin \omega t \end{pmatrix}, \quad (5.13)$$

δεν είναι ανεξάρτητες.

5.3 Λύση του αρμονικού ταλαντωτή, βάσει της γραμμικότητάς του

Τις λύσεις του προηγούμενου εδαφίου τις κατασκευάσαμε παρατηρώντας απλώς ότι

$$\frac{d}{dt}(-\omega \sin \omega t) = -\omega^2 \cos \omega t$$

και

$$\frac{d}{dt}(\cos \omega t) = -\omega \sin \omega t = -\omega^2 \frac{\sin \omega t}{\omega}$$

δηλαδή ότι και οι δύο ικανοποιούν την εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή. Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε αυτές τις λύσεις συστηματικά βασιζόμενοι στη γραμμικότητα του αρμονικού ταλαντωτή.

Η εξίσωσή του σε επίπεδο πρωτοβάθμιων διαφορικών εξισώσεων είναι όπως είδαμε παραπάνω

$$\frac{d\Psi}{dt} = \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v \\ -\omega^2 x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ v \end{pmatrix} = \mathbf{A}\Psi \quad (5.14)$$

όπου

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.15)$$

Η εξίσωση αυτή θυμίζει καταπληκτικά την βασικότερη εξίσωση της φυσικής $\dot{\psi} = a\psi$ η οποία έχει ως λύση την $\psi(t) = e^{at}\psi_0$, μόνο που τώρα πρόκειται για μια αντίστοιχη εξίσωση πινάκων. Μολαταύτα, ας εξετάσουμε γιατί αυτή που γράψαμε είναι η λύση της αντίστοιχης μονοδιάστατης πρωτοβάθμιας διαφορικής εξίσωσης. Προς τούτο ας γράψουμε τη λύση αναλύοντας τι πραγματικά συμβολίζει η εκθετική συνάρτηση.

$$e^{at}\psi_0 = \left[1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots + \frac{(at)^n}{n!} + \dots \right] \psi_0.$$

Αν παραγωγίσουμε αυτή τη συνάρτηση θα έχουμε

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(e^{at}\psi_0) &= \frac{d}{dt} \left[1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \frac{(at)^3}{3!} + \dots + \frac{(at)^n}{n!} + \dots \right] \psi_0 \\ &= \left[a + \frac{2a^2t}{2!} + \frac{3a^3t^2}{3!} + \dots + \frac{na^n t^{n-1}}{n!} + \dots \right] \psi_0 \\ &= a \left[1 + at + \frac{(at)^2}{2!} + \dots + \frac{(at)^{n-1}}{(n-1)!} + \dots \right] \psi_0 \\ &= ae^{at}\psi_0, \end{aligned} \quad (5.16)$$

δηλαδή η εν λόγω έκφραση αποτελεί λύση της $\dot{\psi} = a\psi$ λόγω της ακριβούς μορφής της εκθετικής συνάρτησης. Αν λοιπόν ορίσουμε το αντίστοιχο της εκθετικής συνάρτησης για τετραγωνικούς πίνακες \mathbf{A} :

$$e^{\mathbf{A}t} = \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \dots, \quad (5.17)$$

όπου \mathbf{I} ο μοναδιαίος $\dim(\mathbf{A}) \times \dim(\mathbf{A})$ πίνακας, τότε ακριβώς η ίδια μορφή λύσης θα “δουλεύει” ορθά και για το αντίστοιχο σύστημα πρωτοβάθμιων εξισώσεων που περιγράφεται μέσω της μορφής που συναντήσαμε παραπάνω για την περιγραφή της δυναμικής του αρμονικού ταλαντωτή $\frac{d\Psi}{dt} = \mathbf{A}\Psi$, δηλαδή η λύση θα έχει τη μορφή

$$\Psi(t) = e^{\mathbf{A}t}\Psi(0). \quad (5.18)$$

Γεννάται τώρα το ερώτημα, πώς θα υπολογίσουμε τον 2×2 πίνακα $e^{\mathbf{A}t}$; Ας ξεκινήσουμε να υπολογίσουμε κάποιους όρους του αναπτύγματος (5.17) για τον εν λόγω

²Προσέξτε ότι εν αντιθέσει με την $e^{at}\psi_0$, όπου δεν είχε καμία σημασία η σειρά γραφής της εκθετικής συνάρτησης και της αρχικής κατάστασης, στην περίπτωση με τους πίνακες η σειρά παίζει ρόλο. Αν ήταν γραμμένα τα στοιχεία της (5.18) με ανάποδη σειρά δεν θα ήταν εφιστός ο πολλαπλασιασμός των αντίστοιχων πινάκων.

πίνακα \mathbf{A} του αρμονικού ταλαντωτή (βλ. (5.15)):

$$\mathbf{A}^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\omega^2 & 0 \\ 0 & -\omega^2 \end{pmatrix} = -\omega^2 \mathbf{I},$$

όπου \mathbf{I} ο μοναδιαίος 2×2 πίνακας. Αυτή η εξαιρετική ιδιότητα ο \mathbf{A}^2 να είναι πολλαπλάσιος του μοναδιαίου πίνακα, οπότε από το σύνολο των $\mathbf{I}, \mathbf{A}, \mathbf{A}^2, \mathbf{A}^3, \dots$ γραμμικά ανεξάρτητοι να είναι μόνο 2, οι \mathbf{I}, \mathbf{A} (και όχι 4 όπως θα περίμενε κανείς από ένα αντικείμενο που αποτελείται από 4 στοιχεία) αποτελεί την ουσία του θεμελιώδους θεωρήματος της γραμμικής άλγεβρας των Cayley-Hamilton, και αφορά όχι μόνο τον συγκεκριμένο πίνακα \mathbf{A} αλλά κάθε 2×2 πίνακα.³ Βασισμένοι σε αυτή την ιδιότητα η εκθετική συνάρτηση του εν λόγω πίνακα, σε μορφή σειράς μπορεί να μαζευτεί ως ακολούθως

$$\begin{aligned} e^{\mathbf{A}t} &= \mathbf{I} + \mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^n t^n}{n!} + \dots \\ &= \left(\mathbf{I} + \frac{\mathbf{A}^2 t^2}{2!} + \frac{\mathbf{A}^4 t^4}{4!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) + \\ &\quad \left(\mathbf{A}t + \frac{\mathbf{A}^3 t^3}{3!} + \frac{\mathbf{A}^5 t^5}{5!} + \dots + \frac{\mathbf{A}^{2n+1} t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) \\ &= \left(\mathbf{I} + \frac{(-\omega^2) \mathbf{I} t^2}{2!} + \frac{(-\omega^2)^2 \mathbf{I} t^4}{4!} + \dots + \frac{(-\omega^2)^n \mathbf{I} t^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) + \\ &\quad \left(\mathbf{A}t + \frac{(-\omega^2) \mathbf{A} t^3}{3!} + \frac{(-\omega^2)^2 \mathbf{A} t^5}{5!} + \dots + \frac{(-\omega^2)^n \mathbf{A} t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right) \\ &= \mathbf{I} \left(1 - \frac{\omega^2 t^2}{2!} + \frac{\omega^4 t^4}{4!} + \dots (-1)^n \frac{\omega^{2n} t^{2n}}{(2n)!} + \dots \right) + \\ &\quad \mathbf{A} \left(t - \frac{\omega^2 t^3}{3!} + \frac{\omega^4 t^5}{5!} + \dots (-1)^n \frac{\omega^{2n} t^{2n+1}}{(2n+1)!} + \dots \right). \end{aligned} \quad (5.19)$$

Στις δυο τελευταίες σειρές μέσα στις παρενθέσεις αναγνωρίζει κανείς το ανάπτυγμα του $\cos \omega t$ και του $(\sin \omega t)/\omega$, δηλαδή

$$e^{\mathbf{A}t} = \cos \omega t \mathbf{I} + \frac{\sin \omega t}{\omega} \mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \omega t & \frac{\sin \omega t}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t & \cos \omega t \end{pmatrix} \quad (5.20)$$

Ιδού οι λύσεις που μαντέψαμε παραπάνω (5.12) που προκύπτουν ως από τις αρχικές καταστάσεις (5.10,5.11). Είναι οι στήλες του (5.20), ή αλλιώς το αποτέλεσμα της δράσης του $e^{\mathbf{A}t}$ στις αρχικές καταστάσεις (5.10,5.11).

Αν και η κατασκευή αυτή μοιάζει περισσότερο με ένα περίεργο μαθηματικό κατασκεύασμα παρά με μια “φυσική” λύση, θα πρέπει να σημειώσουμε ότι μάλλον είναι πιο κοντά στο φυσικό μηχανισμό εξέλιξης ενός φυσικού συστήματος, παρά η

³Γενικά για πίνακες $N \times N$, γραμμικά ανεξάρτητοι είναι N και όχι N^2 πίνακες.

“μαγική” εύρεση της λύσης του αρμονικού ταλαντωτή ως εκείνη η συνάρτηση που επαληθεύει τη σχετική διαφορική εξίσωση.

5.4 Πώς μπορούμε να ελέγξουμε εάν ένα φυσικό σύστημα είναι γραμμικό.

Ο αρμονικός ταλαντωτής είναι γραμμικός επειδή η εξέλιξη του διέπεται από γραμμικούς τελεστές. Γενικότερα θα λέμε ότι ένα φυσικό σύστημα είναι γραμμικό αν διέπεται από γραμμικούς τελεστές.

Ο τελεστής του αρμονικού ταλαντωτή που είδαμε παραπάνω

$$\mathcal{L} = m \frac{d^2}{dt^2} + k, \quad (5.21)$$

είναι προφανώς γραμμικός αφού

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\alpha_1 x_1(t) + \alpha_2 x_2(t)) &= \alpha_1 \left(m \frac{d^2}{dt^2} x_1 + k x_1 \right) + \alpha_2 \left(m \frac{d^2}{dt^2} x_2 + k x_2 \right) \\ &= 0 + 0 = 0. \end{aligned} \quad (5.22)$$

Η γραμμικότητα του αρμονικού ταλαντωτή προέκυψε από τη γραμμικότητα της δεύτερης παραγώγου η οποία εμφανίζεται σε όλα τα μηχανικά συστήματα, αλλά κυρίως από την ιδιαίτερη μορφή της δύναμης στον ταλαντωτή η οποία είναι από μόνη της γραμμική (σε αντίθεση με όλες τις άλλες δυνάμεις):

$$\begin{aligned} F(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) &= -k((\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)) \\ &= \alpha_1(-k x_1) + \alpha_2(-k x_2) \\ &= \alpha_1 F(x_1) + \alpha_2 F(x_2). \end{aligned} \quad (5.23)$$

Στο σημείο αυτό θα μπορούσε να παρασυρθεί κανείς και να βγάλει το βιαστικό συμπέρασμα, ότι η περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή είναι μια πολύ ειδική περίπτωση φυσικού συστήματος και επομένως δεν έχει κάποια ιδιαίτερη αξία μεταξύ των υπολοίπων φυσικών συστημάτων. Ακόμη περισσότερο, θα μπορούσε να θεωρήσει κανείς ότι το εν λόγω φυσικό σύστημα έχει επιλεχθεί σκόπιμα, επειδή έχει μια εύκολα κατασκευάσιμη λύση (λόγω γραμμικότητας). Η πραγματικότητα είναι ότι ακριβώς αυτή η ιδιότητα της γραμμικότητας που τον καθιστά εύκολα επιλύσιμο αποτελεί και το στοιχείο εκείνο που του προσδίδει μια πολύ πιο ευρεία σπουδαιότητα. Σχεδόν κάθε φυσικό σύστημα έχει κάποιο (ή κάποια) σημείο(α) ισορροπίας. Στα σημεία αυτά η δύναμη μηδενίζεται και αν το φυσικό σύστημα τοποθετηθεί εκεί με μηδενική ταχύτητα θα παραμείνει για πάντα εκεί. Τι θα συμβεί όμως αν το σύστημα μετατοπιστεί ελαφρά από αυτό το σημείο; Το ερώτημα αυτό μπορεί να με-

τατραπεί στο ακόλουθο μαθηματικό πρόβλημα: Αν μια συνάρτηση μηδενίζεται στο σημείο x_0 , τι τιμή παίρνει η συνάρτηση στο παραπλήσιο σημείο $x \simeq x_0$; Η απάντηση σύμφωνα με το θεώρημα Taylor είναι

$$f(x) \simeq f'(x_0)(x - x_0)$$

το οποίο απλώς λέει ότι η συνάρτηση πολύ κοντά στο σημείο x_0 συμπεριφέρεται γραμμικά (το γράφημά της είναι σε πολύ καλή προσέγγιση μια ευθεία γραμμή) ως προς την απόσταση $x - x_0$ με κλίση ίση με την παράγωγο της συνάρτησης στο x_0 . Μάλιστα, η ακρίβεια της παραπάνω πρότασης είναι τόσο πιο καλή όσο πιο κοντά βρισκόμαστε στο σημείο x_0 .⁴ Επομένως η περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή περιγράφει πολύ καλά τη συμπεριφορά όλων των φυσικών συστημάτων κοντά στο σημείο ισορροπίας τους. Ακριβέστερα περιγράφει τα φυσικά συστήματα κοντά σε ευσταθή σημεία ισορροπίας τους, όπου η παράγωγος της δύναμης είναι αρνητική (όπως και στον αρμονικό ταλαντωτή).⁵ Η παραπάνω γραμμική προσέγγιση ισχύει βέβαια και για ασταθή σημεία ισορροπίας με θετική παράγωγο. Όμως η αστάθεια θα μετατοπίσει γρήγορα τα συστήματα αυτά μακριά από το σημείο ισορροπίας τους και τότε ίσως πάψει και η γραμμική συμπεριφορά τους. Από την άλλη τέτοια συστήματα κοντά σε σημείο ισορροπίας δεν είναι δυνατό να παρατηρηθούν στη φύση αφού τάχιστα απομακρύνονται από το σημείο ισορροπίας, οπότε δεν παρουσιάζουν και φυσικό ενδιαφέρον.

Ας δούμε λοιπόν στην περίπτωση του εξαιρετικά ενδιαφέροντος αυτού φυσικού συστήματος με ποιον τρόπο μπορεί κανείς να ελέγξει πειραματικά τη γραμμικότητά του. Αν προετοιμάσουμε έναν ταλαντωτή με μία από τις βάσεις του διανυσματικού χώρου των καταστάσεων του, για παράδειγμα την (5.10) και στη συνέχεια ας τον αφήσουμε να εξελιχθεί για χρόνο t_0 . Στη συνέχεια ας κάνουμε το ίδιο προετοιμάζοντας αρχικά τον ταλαντωτή στο άλλο διάνυσμα βάσης, το (5.11). Αν το σύστημα είναι γραμμικό θα πρέπει μια αρχική κατάσταση της μορφής

$$x_0 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

δηλαδή κάποιο τυχαίο γραμμικό συνδυασμό των δύο αρχικών καταστάσεων (με αρχική θέση x_0 και αρχική ταχύτητα v_0), να εξελιχθεί μετά από χρόνο t_0 στον ίδιο γραμμικό συνδυασμό των καταστάσεων στις οποίες εξελίχθηκαν οι αρχικές μας κα-

⁴Εδώ ανακύπτει το ερώτημα, αν υπάρχει ένα μέτρο σύγκρισης για το “κοντά”. Η απάντηση έρχεται μέσα από το θεώρημα Taylor: Ο επόμενος όρος του αναπτύγματος Taylor είναι ο $f''(x_0)(x - x_0)^2/2$. Επομένως για να θεωρηθεί ο επόμενος όρος αμελητέος θα πρέπει $|(x - x_0)f''(x_0)/(2f'(x_0))| \ll 1$, δηλαδή $|x - x_0| \ll |2f'(x_0)/f''(x_0)|$. Αν η 2η παράγωγος της f στο x_0 είναι 0 θα πρέπει να συσχετίσουμε αντιστοίχως τον 1ης τάξης όρο στο ανάπτυγμα Taylor με τον αμέσως επόμενο μη μηδενικό όρο.

⁵Αρκεί και η αρχική ταχύτητα να είναι τέτοια ώστε το σύστημα να μην απομακρυνθεί πολύ από το σημείο ισορροπίας.

ταστάσεις. Σχηματικά το σύστημα είναι γραμμικό εφόσον:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_0} \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} \text{ και } \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_0} \begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \end{pmatrix} \iff \\ \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix} \xrightarrow{t_0} x_0 \begin{pmatrix} x_1 \\ v_1 \end{pmatrix} + v_0 \begin{pmatrix} x_2 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 x_1 + v_0 x_2 \\ x_0 v_1 + v_0 v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ v_1 & v_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ v_0 \end{pmatrix}. \quad (5.24)$$

Προσέξτε ότι στην παραπάνω ανάλυση δεν χρειάστηκε καν να ξέρουμε τη λύση της εξέλιξης του ταλαντωτή. Η γραμμικότητα μας επέτρεψε να προβλέψουμε την εξέλιξη του συστήματος για δεδομένο χρονικό διάστημα, γνωρίζοντας, από πειράματα, την εξέλιξή του για το ίδιο χρονικό διάστημα αν αυτό ξεκινούσε από 2 τελείως αυθαίρετες αρχικές καταστάσεις, άσχετες με την αρχική κατάσταση του συγκεκριμένου συστήματος.

Προφανώς η παραπάνω διερεύνηση θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για οποιοδήποτε γραμμικό σύστημα εκτελώντας τόσα πειράματα όσο είναι το πλήθος των ανεξάρτητων καταστάσεων του φυσικού συστήματος.

5.5 Ισοχρονικότητα του αρμονικού ταλαντωτή

Από το προηγούμενο κεφάλαιο μάθαμε ότι ένα σώμα κινούμενο στο δυναμικό του αρμονικού ταλαντωτή $kx^2/2$ εκτελεί περιοδική κίνηση, υπάρχει δηλαδή ελάχιστος χρόνος T με την ιδιότητα

$$x(t+T) = x(t)$$

για κάθε t , που με τη σειρά του συνεπάγεται ότι και η ταχύτητα και όλες οι ανώτερες χρονικές παράγωγοι είναι επίσης περιοδικές συναρτήσεις. Ενώ γενικά η περίοδος T ενός μονοδιάστατου συστήματος το οποίο είναι περιορισμένο να κινείται σε ένα πεπερασμένο διάστημα αναμένεται να εξαρτάται από τις αρχικές συνθήκες x_0 και v_0 ή ακριβέστερα όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο να είναι συνάρτηση μόνο της ενέργειας του σώματος,

$$T \left(E = \frac{m}{2} (v_0^2 + \omega^2 x_0^2) \right),$$

ο αρμονικός ταλαντωτής είναι ισόχρονος και η περίοδος του δεν εξαρτάται από την ενέργεια: η περίοδος είναι ίδια είτε το σώμα έχει μέγιστη απομάκρυνση από το σημείο ισορροπίας 1 mm είτε 1 km (αρκεί βέβαια το δυναμικό να έχει σε όλη αυτή την έκταση τη μορφή του αρμονικού ταλαντωτή).

Η θέση της μάζας με αρχική θέση x_0 και αρχική ταχύτητα v_0 την χρονική στιγμή

t δίνεται απο το άθροισμα των δύο αρμονικών :

$$x(t) = x_0 \cos \omega t + \frac{v_0}{\omega} \sin \omega t, \quad (5.25)$$

όπου $\omega = \sqrt{k/m}$ η κυκλική συχνότητα της ταλάντωσης (σε μονάδες rad/s). Η λύση αυτή προκύπτει επειδή και οι δύο συναρτήσεις $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ ικανοποιούν την (5.1) και η (5.25) ικανοποιεί και τις δύο αρχικές συνθήκες και συνεπώς η (5.25) είναι η μοναδική κίνηση που προκύπτει από αυτές τις αρχικές συνθήκες. Οι συναρτήσεις $\cos \omega t$, $\sin \omega t$ είναι περιοδικές με περίοδο $\omega T = 2\pi$, οπότε και η $x(t)$ είναι πάντοτε περιοδική (δηλαδή είναι περιοδική για όλες τις αρχικές συνθήκες, ακόμα και για $x_0 = v_0 = 0$) και η περίοδος της ταλάντωσης είναι $T = 2\pi/\omega$ ή $T = 1/\nu$ με $\nu = \omega/(2\pi)$ η συχνότητα της ταλάντωσης (σε μονάδες κύκλους/s ή Hertz (Hz)).

Ισοδύναμα η θέση του ταλαντωτή μπορεί να γραφεί στη μορφή :

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} \left[\frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}} \cos \omega t + \frac{v_0/\omega}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}} \sin \omega t \right]^6 \\ &= a(\cos \phi \cos \omega t + \sin \phi \sin \omega t) \\ &= a \cos(\omega t - \phi), \end{aligned} \quad (5.26)$$

όπου

$$a = \sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}, \quad \cos \phi = \frac{x_0}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}, \quad \sin \phi = \frac{v_0/\omega}{\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}}}.$$

Γραμμένη η λύση στη μορφή αυτή διαφαίνεται αμέσως ότι η μέγιστη απομάκρυνση του σώματος από το σημείο ισορροπίας, ή το πλάτος της ταλάντωσης, είναι

$$\sqrt{x_0^2 + \frac{v_0^2}{\omega^2}} = \sqrt{\frac{2E}{m\omega^2}}, \quad (5.27)$$

και η αρχική φάση της ταλάντωσης είναι

$$\phi = \tan^{-1} \frac{v_0}{\omega x_0}, \quad (5.28)$$

με την έξτρα σημείωση ότι η τιμή του ϕ μέσω της τελευταίας σχέσης μπορεί να πάρει διπλή τιμή στο διάστημα $[0, 2\pi)$ και για να είναι κανείς πιο ακριβής θα πρέπει να προσθέσει στην τιμή της ϕ που ορίζεται μέσω της σχέσης (5.28) στο διάστημα $[-\pi/2, \pi/2)$ την τιμή π όταν η ταχύτητα είναι αρνητική.

Παρατηρήστε ότι η περίοδος της ταλάντωσης $T = 2\pi/\omega$ είναι ανεξάρτητη από τις

⁶Μπορεί κανείς να αντικαταστήσει τα 2 κλάσματα που προηγούνται των τριγωνομετρικών εξισώσεων με το συνημίτονο και το ημίτονο κάποιας συγκεκριμένης γωνίας αφού και οι 2 ποσότητες βρίσκονται στο διάστημα $[-1, 1]$ και έχουν άθροισμα τετραγώνων ίσο με 1.

αρχικές συνθήκες. Όταν η περίοδος της ταλάντωσης είναι ανεξάρτητη από το πλάτος τότε η ταλάντωση λέγεται ισόχρονη. Αυτό είναι άλλο ένα ιδιαίτερο χαρακτηριστικό του αρμονικού ταλαντωτή που προκύπτει κι αυτό εξαιτίας της γραμμικότητάς του. Ας δούμε γιατί συμβαίνει αυτό.

Όπως είδαμε στο εδάφιο που κατασκευάσαμε τη λύση του αρμονικού ταλαντωτή μέσω της εκθετικής συνάρτησης πίνακα, βρήκαμε ότι

$$\Psi(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{\mathbf{A}t} \Psi(0) = e^{\mathbf{A}t} \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix}$$

όπου ο πίνακας \mathbf{A} εμπεριέχει φυσικές παραμέτρους του ταλαντωτή k, m (και μάλιστα έναν συγκεκριμένο συνδυασμό αυτών, τον λόγο τους) και δεν έχει καμία αναφορά στις αρχικές συνθήκες που προφανώς σχετίζονται με το πλάτος ταλάντωσης και την ενέργεια του ταλαντωτή. Οι αρχικές συνθήκες, λόγω γραμμικότητας του προβλήματος, μας δίνονται ως ένα διάνυσμα πάνω στο οποίο θα δράσει η $e^{\mathbf{A}t}$. Παράλληλα γνωρίζουμε από την ανάλυση του προηγούμενου κεφαλαίου για την κίνηση σε μονοδιάστατα δυναμικά, ότι υπάρχει κάποιος συγκεκριμένος χρόνος T σε κάθε πρόβλημα ταλάντωσης (όχι κατά ανάγκη αρμονικής) μέσα σε πηγάδι δυναμικού, όπου το σύστημα επανέρχεται στην αρχική του κατάσταση $\Psi(T) = \Psi(0)$. Συνεπώς για τον αρμονικό ταλαντωτή

$$\mathbf{I} \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x(t) \\ v(t) \end{pmatrix} = e^{\mathbf{A}T} \begin{pmatrix} x(0) \\ v(0) \end{pmatrix},$$

για οποιαδήποτε $x(0), v(0)$, δηλαδή $e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I}$. Με άλλα λόγια ο T δεν μπορεί να συνδέεται παρά μόνο με την παράμετρο ω του \mathbf{A} και όχι με τις αρχικές συνθήκες. Επειδή $e^{\mathbf{A}NT} = e^{\mathbf{A}T} e^{\mathbf{A}T} \dots e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I}$ και τα πολλαπλάσια του T παίζουν ρόλο περιόδου για τον ταλαντωτή, η μικρότερη τιμή του T η οποία ικανοποιεί την $e^{\mathbf{A}T} = \mathbf{I}$, ονομάζεται περίοδος του ταλαντωτή και όπως είπαμε δεν εξαρτάται παρά μόνο από το ω . Το συμπέρασμα αυτό της ισοχρονικότητας βασίστηκε στην ανάλυση του ταλαντωτή ως γραμμικό σύστημα και θα μπορούσε να γίνει ακόμη και χωρίς την ακριβή έκφραση του πίνακα $e^{\mathbf{A}T}$. Αφού γνωρίζουμε όμως τη μορφή του πίνακα αυτού και τις ιδιότητες των τριγωνομετρικών συναρτήσεων μπορούμε να επιβεβαιώσουμε ότι η σχέση $\omega - T$ είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Αξίζει τέλος να σημειώσουμε, ότι η ομοιότητα μεταξύ των δύο τριγωνομετρικών συναρτήσεων, συνημίτονο και ημίτονο, (αρκεί να σύρουμε το γράφημα της μιας κατά $\pi/2$ και το γράφημα της μιας θα “πέσει” πάνω στις άλλης) και η σχέση τους με τη βάση της λύσης του γραμμικού προβλήματος του αρμονικού ταλαντωτή, έχει

τη ρίζα της στην ιδιότητα της εκθετικής συνάρτησης e^{At} :⁷

$$e^{A(t_1+t_2)} = e^{At_1} e^{At_2}$$

Έτσι η $\cos \omega(t_1 + t_2)$ (η εξέλιξη της (10)^T για χρόνο $t_1 + t_2$) μπορεί να γραφεί και

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \cos \omega(t_1 + t_2) \\ \dots \end{pmatrix} &= e^{At_1} e^{At_2} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= e^{At_1} \begin{pmatrix} \cos \omega t_2 & \frac{\sin \omega t_2}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t_2 & \cos \omega t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= e^{At_1} \begin{pmatrix} \cos \omega t_2 \\ -\omega \sin \omega t_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega t_1 & \frac{\sin \omega t_1}{\omega} \\ -\omega \sin \omega t_1 & \cos \omega t_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \omega t_2 \\ -\omega \sin \omega t_2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \omega t_2 \cos \omega t_1 - \sin \omega t_2 \sin \omega t_1 \\ \dots \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (5.29)$$

Μπορεί να σκεφθείτε ότι αυτός ήταν ένας πολύ μη αποδοτικός τρόπος απόδειξης της γνωστής τριγωνομετρικής ταυτότητας του συνημιτόνου αθροίσματος. Αν όμως δεν γνωρίζατε καν τι είναι το συνημίτονο και το ημίτονο και τα εκλαμβάνατε ως απλές ονομασίες για τα αναπτύγματα που εμφανίστηκαν στη σχέση (5.19), η ιδιότητα

$$\cos(a + b) = C \cos b + S \sin b$$

με $C = \cos a$, $S = -\sin a$ θα ήταν αξιοσημείωτη. Με ένα γραμμικό συνδυασμό των $\cos x$, $\sin x$ μπορούμε να αναπαράγουμε το $\cos(x + y)$ για κάθε τιμή του y !

5.6 Αρμονικός ταλαντωτής με γραμμική απόσβεση

Στο εδάφιο περί γραμμικότητας του αρμονικού ταλαντωτή είδαμε ότι εφόσον ένα σύστημα είναι γραμμικό η εξέλιξή του διέπεται από μια εκθετική συνάρτηση. Το συνημίτονο και το ημίτονο μέσω των οποίων κατασκευάστηκε η γενική λύση του αρμονικού ταλαντωτή είναι και αυτά γραμμικός συνδυασμός εκθετικών λύσεων με μιγαδικούς εκθέτες. Είναι λογικό λοιπόν να αναζητούμε λύσεις των γραμμικών συστημάτων της μορφής $e^{\lambda t}$ με κατάλληλους συντελεστές λ .

Το σύστημα που θα εξετάσουμε στη συνέχεια είναι μια λιγότερο εξιδανικευμένη παραλλαγή του αρμονικού ταλαντωτή, του ταλαντωτή με γραμμική απόσβεση. Δηλαδή ενός αρμονικού ταλαντωτή ο οποίος υπόκειται και σε δυνάμεις τριβής με γραμ-

⁷Προσοχή, η ιδιότητα αυτή ενώ φαίνεται αυτονόητη από την αριθμητική εμπειρία μας με τις δυνάμεις αριθμών, δεν είναι τόσο αυτονόητη, αφού δεν ισχύει γενικά για πίνακες ότι $e^A e^B = e^{A+B}$!

μική εξάρτηση από την ταχύτητα. Μολονότι ο τύπος αυτός τριβής δεν μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι είναι κάτι που αναμένουμε για φυσικούς λόγους να εμφανίζεται σε ταλαντούμενα φυσικά συστήματα, η κίνηση ενός σώματος μέσα σε συνεχές μέσο περιγράφεται με αρκετά καλή προσέγγιση από τέτοιου είδους δυνάμεις αντίστασης. Το σύστημα αυτό, που περιγράφεται από την εξίσωση

$$m \ddot{x} + 2\gamma m \dot{x} + k x = 0, \quad (5.30)$$

όπου $-2\gamma m \dot{x}$ είναι η δύναμη της αντίστασης ενώ ο συντελεστής της $2\gamma m$ έχει γραφεί σε αυτή τη μορφή ώστε να διευκολύνει τις αριθμητικές πράξεις στη συνέχεια. Με μια απλή ανακατανομή των όρων θα έχουμε

$$\ddot{x} + 2\gamma \dot{x} + \omega^2 x = 0, \quad (5.31)$$

όπου τώρα είναι εμφανές ότι τόσο η $\omega = \sqrt{k/m}$ όσο και η σταθερά γ (ένα μέτρο του πόσο παχύρρευστό είναι το συνεχές μέσο) έχουν διαστάσεις αντιστρόφου χρόνου.

Στο γραμμικό αυτό πρόβλημα ας δοκιμάσουμε λύση της μορφής $e^{\lambda t}$ η οποία όπως γνωρίζουμε θα είναι μια αποδεκτή μορφή λύσης. Πράγματι τότε η διαφορική εξίσωση μετατρέπεται σε μια αλγεβρική εξίσωση 2ου βαθμού:

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \omega^2 = 0.$$

Η λύση αυτής της εξίσωσης δίνει

$$\lambda_+ = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}, \quad \lambda_- = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2},$$

οπότε αμέσως βλέπουμε ότι η περίπτωση $\gamma > \omega$ και η περίπτωση $\gamma < \omega$ οδηγούν σε λύσεις αρκετά διαφορετικού μορφολογικά τύπου. Η πρώτη περίπτωση θα έχει ως βάση τις εκθετικές λύσεις

$$x_1(t) = e^{\lambda_+ t}, \quad x_2(t) = e^{\lambda_- t},$$

ενώ στη δεύτερη περίπτωση η βάση θα αποτελείται από μιγαδικές λύσεις

$$x_1(t) = e^{-\gamma t + i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t}, \quad x_2(t) = e^{-\gamma t - i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t}.$$

Μιγαδικές λύσεις; Μα η θέση του ταλαντωτή μετριέται με πραγματικές τιμές. Προσέξτε ότι οι μιγαδικές αυτές λύσεις είναι συζυγείς η μία της άλλης, οπότε αν πολλαπλασιαστούν με μιγαδικά συζυγείς συντελεστές θα μας δώσουν μια πραγματική λύση. Μην ξεχνάτε εξάλλου ότι και τα συνημίτονα και τα ημίτονα του αρμονικού

ταλαντωτή είναι γραμμικοί συνδυασμοί μιγαδικών λύσεων:

$$\cos \omega t = \frac{e^{i\omega t} + e^{-i\omega t}}{2}, \quad \sin \omega t = \frac{e^{i\omega t} - e^{-i\omega t}}{2i}.$$

Όπως και στο πρόβλημα του απλού αρμονικού ταλαντωτή η βάση για την περιγραφή του προβλήματος αποτελείται από δύο ανεξάρτητες λύσεις. Η δε λύση συναρτήσει των αρχικών συνθηκών θα είναι ένας γραμμικός συνδυασμός αυτών των λύσεων με τόσες ανεξάρτητες παραμέτρους, όσες και οι αρχικές συνθήκες, δηλαδή δύο. Έτσι η γενική λύση στην περίπτωση που $\gamma > \omega$ θα είναι η

$$x(t) = A_+ e^{\lambda_+ t} + A_- e^{\lambda_- t} = e^{-\gamma t} \left(A_+ e^{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} + A_- e^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t} \right) \quad (5.32)$$

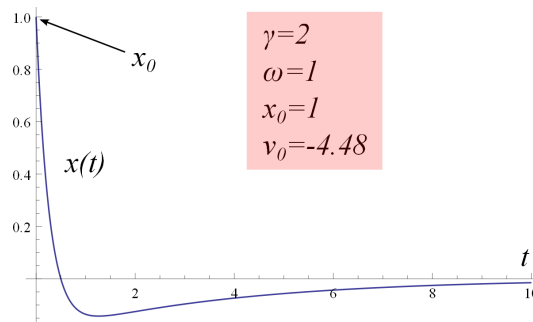
Λόγω του ότι $\gamma > \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}$ και οι δύο αυτές ανεξάρτητες λύσεις παρουσιάζουν εκθετική πτώση, πράγμα το οποίο σημαίνει ότι αργά ή γρήγορα ο ταλαντωτής θα πάψει να κινείται. Είναι εύκολο να δείξει κανείς (θέτοντας $x(0) = x_0, \dot{x}(0) = v_0$) ότι τα A_+, A_- συνδέονται με τις αρχικές συνθήκες ως ακολούθως

$$A_+ = \frac{1}{2} \left[x_0 + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}} \right], \quad A_- = \frac{1}{2} \left[x_0 - \frac{v_0 + \gamma x_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}} \right].$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής της (5.32), ώστε να θυμίζει πιο πολύ τη λύση του αρμονικού ταλαντωτή, είναι ο

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(x_0 \cosh(\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\sqrt{\gamma^2 - \omega^2}} \sinh(\sqrt{\gamma^2 - \omega^2} t) \right),$$

μαξεύοντας κατάλληλα τα εκθετικά της προηγούμενης σχέσης (5.32).



Σχήμα 5.1: Η εξέλιξη ενός ταλαντωτή με τα χαρακτηριστικά/αρχικές συνθήκες που αναγράφονται. Η σχέση αρχικής ταχύτητας - αρχικής θέσης είναι κατάλληλα επιλεγμένη ώστε ο ταλαντωτής να διέρχεται για πρώτη και τελευταία φορά από τη θέση ισορροπίας τη χρονική στιγμή $t_0 = 0.4$. Παρατηρήστε την γρήγορη εξέλιξη του ταλαντωτή μέχρι να μηδενιστεί η ταχύτητά του και τον αργό χρόνο εξέλιξης στη συνέχεια μέχρι μηδενισμού της θέσης.

Ο ταλαντωτής αυτός δεν μπορεί να εκτελέσει ταλαντώσεις. Είναι καταδικασμέ-

νος να περάσει το πολύ μια φορά από το σημείο ισορροπίας. Οι αρχικές συνθήκες είναι αυτές που θα καθορίσουν αν θα διασχίσει ποτέ το σημείο ισορροπίας. Για παράδειγμα φαίνεται αμέσως από τη μορφή της (5.6) ότι για ομόσημα x_0 και v_0 δεν υπάρχει χρόνος t που να μηδενίζεται η $x(t)$. Θα πρέπει η αρχική ταχύτητα να έχει αντίθετο πρόσημο από την αρχική θέση (και κατάλληλη τιμή) για να καταφέρει να φθάσει ο ταλαντωτής στη θέση ισορροπίας σε πεπερασμένο χρόνο. Στη μορφή (5.32) οι δύο λύσεις $e^{\lambda+t}$ και $e^{\lambda-t}$ έχουν διαφορετικό εκθετικό ρυθμό πτώσης. Η μεν $e^{\lambda+t}$ φθίνει πιο αργά (μικρότερο κατ' απόλυτη τιμή εκθέτη) από την $e^{\lambda-t}$. Οι αντίστοιχοι χαρακτηριστικοί χρόνοι

$$\tau_1 = \frac{1}{|\lambda_+|} = \frac{1}{\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}, \quad \tau_2 = \frac{1}{|\lambda_-|} = \frac{1}{\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \omega^2}}$$

που αντιστοιχούν στο χρόνο που η εκάστοτε λύση θα πέσει στο e^{-1} της αρχικής της τιμής έχουν τη σχέση διάταξης

$$\tau_1 > \frac{1}{\gamma} > \tau_2.$$

Ο μεν δεύτερος μικρός χρόνος σχετίζεται με το χρόνο που χρειάζεται για να εξισορροπηθεί η απόσβεση από την δύναμη του ταλαντωτή. Στη συνέχεια ο αργός χρόνος τ_1 είναι ο χρόνος που θα εξελιχθεί το σύστημα κρατώντας τη δύναμη της αντίστασης και τη δύναμη επαναφοράς σε διαρκή ισορροπία

$$2\gamma\dot{x} + \omega^2 x \simeq 0.$$

Η εξέλιξη ακολουθεί ένα νόμο e^{-t/τ_1} οπότε η επιτάχυνση θα είναι $(1/\tau_1^2)e^{-t/\tau_1}$, δηλαδή μικρότερη από την επιτάχυνση της απόσβεσης $2\gamma/\tau_1 e^{-t/\tau_1}$. Κατ' ουσίαν μετά από μερικούς χρόνους τ_2 περνάμε στη φάση που το σύστημα υπαγορεύεται από την αριστοτέλεια μηχανική.

Η κίνηση του ταλαντωτή όταν $\gamma > \omega$ ονομάζεται υπερκρίσιμη απόσβεση.

Η λύση για τον ταλαντωτή όταν $\gamma < \omega$ θα έχει τη μορφή

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{-\gamma t} \left(B_+ e^{i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} + B_- e^{-i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} \right) \\ &= e^{-\gamma t} \left(B_+ e^{i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} + B_+^* e^{-i\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t} \right) \\ &= |B_+| e^{-\gamma t} \left(e^{i(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \phi)} + e^{-i(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \phi)} \right) \\ &= 2|B_+| e^{-\gamma t} \cos \left(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t + \phi \right). \end{aligned} \quad (5.33)$$

Το πέρασμα στη δεύτερη σειρά της σχέσης βασίστηκε στο ότι η $x(t)$ οφείλει να είναι πραγματική οπότε οι δύο μιγαδικοί αριθμοί της πρώτης σειράς οφείλουν να είναι

συζυγείς· επομένως $B_- = B_+^*$. Επίσης, για το πέρασμα στην τρίτη σειρά το μιγαδικό B_+ γράφηκε ως $|B_+|e^{i\phi}$.

Αναπτύσσοντας το συνημίτονο του αθροίσματος των γωνιών της τελικής έκφρασης θα έχουμε

$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(C \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) + S \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) \right), \quad (5.34)$$

όπου το C αντιπροσωπεύει το $2|B_+| \cos \phi$ και το S αντιπροσωπεύει το $-2|B_+| \sin \phi$. Με αντικατάσταση στη σχέση αυτή των αρχικών συνθηκών παίρνουμε

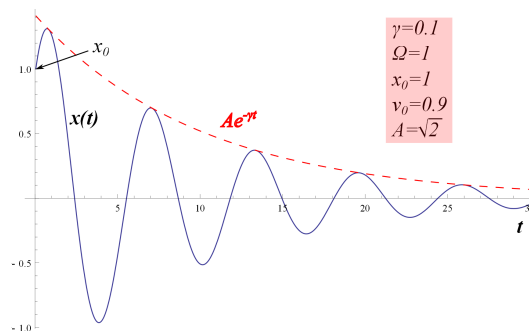
$$x(t) = e^{-\gamma t} \left(x_0 \cos(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) + \frac{v_0 + \gamma x_0}{\sqrt{\omega^2 - \gamma^2}} \sin(\sqrt{\omega^2 - \gamma^2} t) \right). \quad (5.35)$$

Παρατηρήστε την ομοιότητα της σχέσης αυτής με την (5.6). Το μόνο που αλλάζει είναι τα υπερβολικά σε κανονικά ημίτονα και συνημίτονα και το πρόσημο της υπόριζης ποσότητας. Ο λόγος για αυτή τη μορφολογική ομοιότητα (παρά τον πολύ διαφορετικό χαρακτήρα των λύσεων· εκθετικές έναντι περιοδικών τριγωνομετρικών) σχετίζεται με την συνέχεια των λύσεων σε συνεχείς αλλαγές των παραμέτρων· συγκεκριμένα όταν η τιμή του $\gamma^2 - \omega^2$ περνάει από θετικές σε αρνητικές τιμές.

Η έκφραση εντός της παρένθεσης στη (5.35) είναι μια ταλαντωτική λύση αρμονικού ταλαντωτή συχνότητας $\Omega = \sqrt{\omega^2 - \gamma^2}$ (αν και το v_0 σε αυτή την περίπτωση δεν είναι η αρχική ταχύτητα του ταλαντωτή). Επομένως το κομμάτι αυτό της λύσης εκτελεί περιοδικές ταλαντώσεις και επομένως ο ταλαντωτής διασχίζει το σημείο ισορροπίας άπειρες φορές και μάλιστα περιοδικά (η χρονική απόσταση δύο διαδοχικών μηδενισμών του x είναι π/Ω). Όμως η εκθετικά φθίνουσα συνάρτηση μπροστά από αυτή την ταλαντωτική λύση μεταβάλλει συνεχώς το πλάτος της ταλάντωσης και μάλιστα με πολύ ραγδαίο τρόπο. Μετά από χρόνο $t = N \times (1/\gamma)$ το πλάτος της ταλάντωσης πέφτει στο e^{-N} του αρχικού πλάτους ταλάντωσης, πρακτικά πολύ μικρό ποσοστό ($\simeq 0.7\%$) του αρχικού πλάτους για $N \simeq 5$. Ο χαρακτηριστικός χρόνος $\tau = 1/\gamma$ δίνει την κλίμακα του χρόνου με την οποία συμβαίνει η εκθετική πτώση. Αν συγκρίνουμε με την περίοδο της ταλάντωσης, ο χρόνος που χρειάζεται για να «πέσει» το πλάτος της ταλάντωσης σε αυτό το πρακτικά μηδαμινό μέγεθος ισοδυναμεί με $\simeq 2.5\pi(\omega/\gamma)$ πλήρεις ταλαντώσεις.

Οι φθίνουσες αυτές ταλαντώσεις οι οποίες διεξάγονται με τη συχνότητα Ω αντί της φυσικής συχνότητας ω του ταλαντωτή (δίχως την τριβή) δεν είναι ακριβώς συμμετρικές ως προς το μέσο μεταξύ δύο διαδοχικών μηδενισμών εξαιτίας της παρουσίας του εκθετικού όρου: Το μέγιστο (κατ' απόλυτη τιμή) κάθε ταλάντωσης παρουσιάζεται ελαφρώς μετατοπισμένο από το μέσο χρόνο μεταξύ των δύο διαδοχικών μηδενισμών προς τον πρώτο χρόνο.⁸

⁸Σκεφθείτε ότι μια συνάρτηση η οποία παρουσιάζει μέγιστο (μηδενισμό παραγώγου) σε κάποιο



Σχήμα 5.2: Η φθίνουσα ταλάντωση με τις παραμέτρους/αρχικές συνθήκες που αναγράφονται. Παρατηρεί κανείς τον περιορισμό της ταλαντωτικής λύσης από την περιβάλλουσα εκθετική συνάρτηση.

5.7 Η κρίσιμη απόσβεση

Στο προηγούμενο εδάφιο εξετάσαμε τις δύο δυνατές σχέσεις μεταξύ των γ και ω . Όταν ο παράγοντας της απόσβεσης υπερβείναι τη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή είχαμε μια γρήγορη και μια αργή απόσβεση χωρίς ταλάντωση. Στην αντίθετη περίπτωση είχαμε αποσβενυμένες ταλαντώσεις. Τι συμβαίνει αλήθεια όταν $\gamma = \omega$, την επονομαζόμενη *κρίσιμη απόσβεση*. Παρότι εκ πρώτης άποψης δεν θα είχε ιδιαίτερο φυσικό ενδιαφέρον αυτή η περίπτωση αφού είναι αδύνατο να κατασκευάσουμε ένα φυσικό σύστημα για το οποίο να ισχύει ακριβώς $\gamma = \omega$, επειδή οι λύσεις στις δύο περιπτώσεις μοιάζουν εξαιρετικά διαφορετικές (καθόλου ταλάντωση - περιοδική ταλάντωση) θα είχε ιδιαίτερο ενδιαφέρον να διερευνήσουμε το μεταίχμιο μεταξύ αυτών.

Αν ακολουθήσουμε τη λογική της συνέχειας των παραμέτρων θα πρέπει οι ανεξάρτητες λύσεις $x_1(t) = e^{\lambda+t}$, $x_2(t) = e^{\lambda-t}$ να μετασχηματίζονται ομαλά στις λύσεις του ζητούμενου προβλήματος καθώς το $\gamma \rightarrow \omega$ (είτε από κάτω, είτε από πάνω). Εδώ όμως προκύπτει κάτι αινιγματικό. Όταν $\gamma = \omega$ οι δύο λύσεις γίνονται ίδιες, η $e^{-\gamma t}$! Από μια τέτοια λύση όμως δεν μπορούμε να φτιάξουμε ό,τι αρχική συνθήκη θέσης/ταχύτητας επιθυμούμε. Παράλογο. Είναι δυνατό ένα τέτοιο σύστημα να μην μπορούμε να του δώσουμε κάποια αρχική θέση αλλά με μηδενική αρχική ταχύτητα; Μάλλον δεν «διαβάσαμε» σωστά τα μαθηματικά συμπεράσματα.

Ας δοκιμάσουμε να βρούμε 2 πραγματικά ανεξάρτητες λύσεις καταφεύγοντας στην έκφραση (5.6). Θα θέσουμε αρχικά $x_0 = 1$, $v_0 = -\gamma x_0 = -\gamma$ και $\gamma = \omega$. Η λύση που θα προκύψει θα είναι $e^{-\gamma t}$. Αν διαλέξουμε τώρα $x_0 = 0$, $v_0 = 1$, μια καταφανώς ανεξάρτητη λύση από την προηγούμενη, και πάμε στο όριο $\gamma \rightarrow \omega$ η λύση που θα προκύψει είναι η $t e^{-\gamma t}$, αφού

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\sinh(\epsilon t)}{\epsilon} = t.$$

σημείο, όταν πολλαπλασιαστεί με κάποια φθίνουσα συνάρτηση μετατοπίζει το μέγιστο (εφόσον αυτό εξακολουθεί να υπάρχει) προς τα πίσω.

Μα πως εμφανίστηκε αυτή η δεύτερη λύση ενώ προηγουμένως τη χάσαμε;⁹ Η απάντηση είναι ότι η λύση (5.35) αυτή σε αντίθεση με την (5.34) είναι φυσική· αφού περιέχει τις αρχικές συνθήκες ως παραμέτρους και οι οποίες μπορούν να ρυθμιστούν ανεξάρτητα η μία από την άλλη. Αντιθέτως η λύση (5.34) οδηγείται σε αφύσιες (άπειρες) παραμέτρους C, S αν θέσει κάποιος $\gamma = \omega$. Πρέπει κανείς να φτιάξει κατάλληλους γραμμικούς συνδυασμούς των δύο λύσεων οι οποίες να δίνουν ανεξάρτητα ζεύγη αρχικών συνθηκών και μετά να πάρει το όριο $\gamma \rightarrow \omega$.

Στη βάση των δύο ανεξάρτητων λύσεων που φτιάξαμε μπορούμε να κατασκευάσουμε τη γενική λύση. Αυτή θα είναι

$$x(t) = e^{-\gamma t} [x_0 + (v_0 + \gamma x_0)t]. \quad (5.36)$$

Όπως και η περίπτωση της υπερκρίσιμης απόσβεσης, στην κρίσιμη αυτή απόσβεση δεν μπορεί ο ταλαντωτής να διασχίσει περισσότερες από μια φορές το σημείο ισοροπίας. Αυτό θα συμβεί μόνο τη χρονική στιγμή

$$t_0 = -\frac{x_0}{v_0 + \gamma x_0}$$

εφόσον η ποσότητα αυτή είναι θετική. Στην κρίσιμη απόσβεση παρά τη διαφορετικότητα των δύο ανεξάρτητων λύσεων και οι δύο σβήνουν εξαιτίας του εκθετικού $e^{-\gamma t}$.¹⁰ Ο χαρακτηριστικός χρόνος είναι $\tau_K = 1/\gamma = 1/\omega$. Έτσι έχουμε το εξής παράδοξο, αλλά ενδιαφέρον σε πρακτικές εφαρμογές αποτέλεσμα. Καθώς το γ μεγαλώνει, ξεκινώντας από την περιοχή των αποσβενυμένων ταλαντώσεων ($\gamma < \omega$), ο χαρακτηριστικός χρόνος $1/\gamma$ μικραίνει και φτάνει στην περίπτωση της κρίσιμης απόσβεσης στην τιμή $1/\omega$. Αν όμως το γ συνεχίσει να μεγαλώνει πέραν της κρίσιμης τιμής, τότε εμφανίζονται δύο χαρακτηριστικοί χρόνοι, ο γρήγορος τ_2 και ο αργός τ_1 ο οποίος λόγω βραδύτητας είναι αυτός που απομένει να διέπει την τελική εξέλιξη του συστήματος. Όμως $\tau_1 > 1/\omega$. Με άλλα λόγια η κρίσιμη απόσβεση συμβαίνει ταχύτερα από κάθε άλλη (για δεδομένο ω). Αν λοιπόν σχεδιάσουμε μια συσκευή (ανάρτηση αυτοκινήτου, στήριξη βελόνας ηλεκτρονικού οργάνου-μετρητή) που στηρίζεται στην ελαστικότητα κάποιου μηχανικού μέρους αλλά θέλουμε να αποφύγουμε τις ταλαντώσεις όσο το δυνατό γρηγορότερα, θα ήταν καλό να ρυθμίσουμε την απόσβεση του έτσι ώστε να έχουμε κρίσιμη απόσβεση, δηλαδή $\gamma = \omega$!

⁹ Οι δύο αυτές λύσεις θα προέκυπταν και από την (5.35) αν θέταμε τις ίδιες αρχικές συνθήκες, αφού και τότε θα είχαμε $\lim_{\epsilon \rightarrow 0} (\sin(\epsilon t)/\epsilon) = t$.

¹⁰ Η δεύτερη λύση έχει μια μεταβατική αύξηση, αλλά το εκθετικό θα υπερισχύσει για μεγάλους χρόνους. ($e^x \gg x^n$ για οποιοδήποτε $n \in \mathbb{N}$, από κάποιο x_0 και πάνω).

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 5

- Ο αρμονικός ταλαντωτής αποτελεί ένα από τα σημαντικότερα φυσικά συστήματα γιατί κάθε μηχανικό σύστημα κοντά στο σημείο ισορροπίας του (εφόσον υπάρχει αυτό) συμπεριφέρεται σαν τον αρμονικό ταλαντωτή. Επιπλέον αποτελεί ένα έξοχο παράδειγμα γραμμικού συστήματος, η μελέτη του οποίου μας παρέχει εξαιρετικά θεωρητικά εργαλεία.
- Ο αρμονικός ταλαντωτής είναι ισόχρονος εξαιτίας της γραμμικότητάς του.
- Η μιγαδική ανάλυση βρίσκει εξαιρετο πεδίο εφαρμογής στις αρμονικές ταλαντώσεις.
- Ο αρμονικός ταλαντωτής με γραμμική απόσβεση

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

οδηγεί σε ταλαντώσεις με εκθετική απόσβεση αν $\gamma < \omega_0$ (υποκρίσιμη) και εκθετική απόσβεση δίχως ταλάντωση αν $\gamma > \omega_0$ (υπερκρίσιμη). Στην κρίσιμη απόσβεση $\gamma = \omega_0$ η λύση είναι γραμμικός συνδυασμός της $e^{-\gamma t}$ και της $t e^{-\gamma t}$.

- Η υπερκρίσιμη απόσβεση χαρακτηρίζεται από δύο χαρακτηριστικούς χρόνους, ενώ η υποκρίσιμη και η κρίσιμη από έναν. Ο γρηγορότερος χρόνος απόσβεσης συμβαίνει στην κρίσιμη απόσβεση $\tau_{\min} = 1/\gamma_{\text{κρ}} = 1/\omega_0$.

6

Διέγερση – Συντονισμός

6.1 Ταλαντωτής σε διέγερση

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με έναν ελεύθερο αρμονικό ταλαντωτή είτε χωρίς είτε με απόσβεση. Προφανώς ο δεύτερος είναι πιο ρεαλιστικό αντικείμενο, αλλά ο απλός ιδανικός (χωρίς ανάλωση) ταλαντωτής μας έδωσε τα εργαλεία τα οποία θα χρησιμοποιήσουμε στη συνέχεια για να περιγράψουμε έναν πραγματικό ταλαντωτή ο οποίος όμως υπόκειται σε τυχαία εξωτερική διέγερση

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + kx = F(t). \quad (6.1)$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια γραμμική εξίσωση βέβαια, αλλά τώρα είναι μη ομογενής. Από τη θεωρία των διαφορικών εξισώσεων ξέρουμε ότι η λύση της μπορεί να αναλυθεί σε δύο μέρη. Το ένα μέρος είναι η λεγόμενη *ομογενής λύση* που μηδενίζει το αριστερό μέλος της εξίσωσης· πρόκειται για την $x(t)$ που όπως είδαμε στο προηγούμενο κεφάλαιο περιγράφει έναν αποσβυνόμενο αρμονικό ταλαντωτή. Μια σημαντική πληροφορία για τη συνέχεια της ανάλυσής μας είναι ότι η λύση αυτή σταδιακά θα εξασθενήσει τόσο πολύ ώστε μετά από τον χαρακτηριστικό χρόνο απόσβεσης του ταλαντωτή μπορεί με ασφάλεια να εκληφθεί ως μηδενική. Το άλλο κομμάτι της λύσης είναι η *μη ομογενής λύση* που κατ' ουσίαν περιγράφει τη λύση της πλήρους εξίσωσης, δηλαδή εκείνη τη συνάρτηση $x(t)$ που λύνει την (6.1) μονοσήμαντα χωρίς να εξαρτάται από καμιά ελεύθερη παράμετρο (όπως συμβαίνει με την ομογενή λύση). Πώς όμως θα μαντέψουμε τη λύση αυτής της δύσκολης διαφορικής

εξίσωσης; Μην ξεχνάτε ότι η $F(t)$ είναι τυχαία.

Το αριστερό μέλος της εξίσωσης, όντας γραμμικό, χαρακτηρίζεται από εκθετικές –όπως μάθαμε– λύσεις και μάλιστα μιγαδικές. Μήπως να δοκιμάζαμε να βρούμε παρόμοιου τύπου λύσεις στην περίπτωση που και το δεξί μέλος είναι μια τέτοιου τύπου συνάρτηση; Προφανώς αυτό είναι μια ντρίπλα προκειμένου να καταφέρουμε (ίσως) να βρούμε κάποια απάντηση σε μια ειδική περίπτωση που προς το παρόν δεν φαίνεται να έχει καμία σχέση με το γενικό πρόβλημα. Ας το δοκιμάσουμε όμως:

$$m\ddot{z} + 2m\gamma\dot{z} + kz = F_0 e^{i\omega t}. \quad (6.2)$$

Προσέξτε ότι αντικαταστήσαμε τη ζητούμενη συνάρτηση $x(t)$ με τη μιγαδική συνάρτηση $z(t)$ αφού αποφασίσαμε εξαρχής να εργαστούμε στο πεδίο των μιγαδικών. Είναι εύκολο να φανταστεί κανείς ότι η ζητούμενη συνάρτηση $z(t)$ σε αυτή την περίπτωση θα μπορούσε να γραφεί στη μορφή

$$z(t) = z_0 e^{i\omega t}$$

αφού όλες οι παράγωγοι του αριστερού μέλους θα αφήσουν τη χρονική εξάρτηση της $z(t)$ αναλλοίωτη ώστε να ταιριάζει με τη χρονοεξάρτηση του δεξιού μέλους. Σε αντίθεση με τον ελεύθερο αρμονικό ταλαντωτή του οποίου την συχνότητα τη βρήκαμε λύνοντας μια αλγεβρική εξίσωση, εδώ δεν χρειάστηκε καν να υπολογίσουμε τη συχνότητα: τη θέσαμε ίδια με αυτήν της διέγερσης χωρίς πολύ σκέψη: αν δεν το κάναμε πώς θα “συντονίζαμε” το αριστερό με το δεξί μέλος; Η αλγεβρική εξίσωση που θα χρειαστεί να λύσουμε στη συνέχεια θα αφορά την τιμή του z_0 μόνο.

Με απλή αντικατάσταση και διαγραφή του χρονοεξαρτώμενου όρου $e^{i\omega t}$ θα έχουμε

$$-m\omega^2 z_0 + 2im\gamma\omega z_0 + kz_0 = F_0. \quad (6.3)$$

δηλαδή

$$z_0 = \frac{F_0/m}{-\omega^2 + \omega_0^2 + 2i\gamma\omega} \quad (6.4)$$

όπου θέσαμε ως ω_0 την ιδιοσυχνότητα του ταλαντωτή $\sqrt{k/m}$. Η λύση ήταν απλή και δεν μας ταλαιπώρησε καθόλου (ούτε καν λύσαμε κάποια πολυωνυμική εξίσωση). Ποιο ακριβώς φυσικό πρόβλημα όμως λύσαμε. Τι σημαίνει μια τέτοια μιγαδική λύση;

Ας πάρουμε το πραγματικό μέρος της διαφορικής εξίσωσης (6.2):

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + kx = F_0 \cos(\omega t), \quad (6.5)$$

όπου $x(t) = \Re[z(t)]$. Αυτή είναι μια καθαρά φυσική διαφορική εξίσωση που περι-

γράφει έναν αρμονικό ταλαντωτή ο οποίος διεγείρεται από μια αρμονική δύναμη (με τη μορφή συνημιτόνου). Ποια είναι η λύση; Απλά, το πραγματικό μέρος της ακατάληπτης μιγαδικής λύσης που βρήκαμε προτύτερα για το γενικότερο μιγαδικό πρόβλημα:

$$\begin{aligned}
 x(t) &= \Re \left[\frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2) + 2i\gamma\omega} e^{i\omega t} \right] \\
 &= \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} \Re \left[((\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\gamma\omega) e^{i\omega t} \right] \\
 &= \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} |Z| \Re \left[e^{i\phi} e^{i\omega t} \right] \\
 &= \frac{F_0/m}{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2} |Z| \cos(\omega t + \phi). \tag{6.6}
 \end{aligned}$$

Στις παραπάνω σχέσεις τα $|Z|$ και ϕ είναι το μέτρο και το όρισμα του μιγαδικού $Z = (\omega_0^2 - \omega^2) - 2i\gamma\omega$. Από τη μιγαδική ανάλυση γνωρίζουμε ότι

$$|w| = \sqrt{(\Re[Z])^2 + (\Im[Z])^2} = \sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}$$

και

$$\phi = \arg Z = \tan^{-1} \left(\frac{\Im[Z]}{\Re[Z]} \right) = \tan^{-1} \left(\frac{-2\gamma\omega}{\omega_0^2 - \omega^2} \right) = -\tan^{-1} \left(\frac{2\gamma/\omega}{(\omega_0/\omega)^2 - 1} \right) \tag{6.7}$$

επομένως

$$x(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \phi) \tag{6.8}$$

με ϕ τη φάση που υπολογίστηκε στη σχέση (6.7). Ο λόγος που προτιμήσαμε να γράψουμε τη φάση με αρνητικό πρόσημο θα γίνει κατανοητός στη συνέχεια.

Παρατηρήσεις:

1. Το αποτέλεσμα που καταλήξαμε με αυτή την ανορθόδοξη τακτική (διατυπώνοντας δηλαδή το πρόβλημα σε μιγαδική μορφή) είναι ότι η κίνηση του ταλαντωτή με ανάλωση δεν είναι μια αποσβενυμένη ταλάντωση, αλλά μια τέλεια αρμονική κίνηση δίχως απώλειες.
2. Η αμείωτη ταλάντωση διενεργείται όχι με τη συχνότητα του ταλαντωτή, ούτε την ενεργή συχνότητα της εξασθενημένης ταλάντωσης, αλλά με τη συχνότητα του διεγέρτη. Οποιαδήποτε άλλη συχνότητα χάνεται.
3. Το πλάτος της ταλάντωσης είναι μεν γραμμική συνάρτηση της διεγείρουσας δύναμης F_0 αλλά έχει μια πολύ πιο σύνθετη εξάρτηση από τη συχνότητα της

διεγείρουσας δύναμης την οποία θα μελετήσουμε παρακάτω.

4. Η ταλάντωση του ταλαντωτή αν και έχει την ίδια περιοδικότητα με τη διέγερση δεν είναι συγχρονισμένος με αυτήν όπως πιστοποιεί η μη μηδενική φάση ϕ . Το αρνητικό μάλιστα πρόσημο της ϕ (γεγονός το οποίο είναι προφανές σε μικρές τιμές του ω που το όρισμα της \tan^{-1} είναι θετικό) υποδηλώνει μια καθυστέρηση στην απόκριση του ταλαντωτή σε σχέση με τη διέγερση. Με άλλα λόγια ο ταλαντωτής φτάνει στο μέγιστο του πλάτους του αργότερα από τη στιγμή που η διεγείρουσα δύναμη φτάσει στη μέγιστη τιμή της.
5. Η λύση που γράψαμε δεν είναι η γενική λύση του προβλήματος παρά μόνο η ειδική λύση που λύνει τη μη ομογενή εξίσωση (6.5). Αν θέλαμε να είμαστε ακριβείς, έτσι ώστε η λύση που γράφουμε να είναι συμβατή με τις όποιες αρχικές συνθήκες καθορίζουν την κατάσταση του ταλαντωτή μας τη χρονική στιγμή $t = 0$, θα έπρεπε να προσθέσουμε δίπλα στην ειδική, λύση τη λύση της ομογενούς εξίσωσης με κατάλληλες παραμέτρους ώστε να ταιριάζει αυτή με τις αρχικές συνθήκες του πειράματός μας:

$$x_{\text{γεν}}(t) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\omega t + \phi) + e^{-\gamma t} (Ae^{\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t} + Be^{-\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}t}) \quad (6.9)$$

με

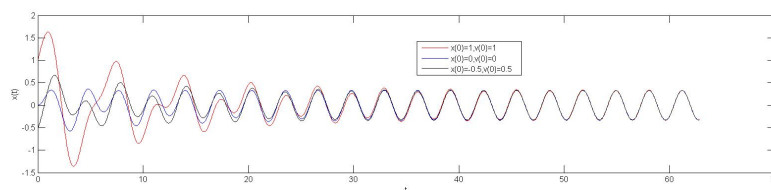
$$x(0) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \cos(\phi) + (A + B) \quad (6.10)$$

και

$$v(0) = -\frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}} \omega \sin(\phi) + \left[A(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} - \gamma) - B(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2} + \gamma) \right]. \quad (6.11)$$

Οι τελευταίες δύο σχέσεις οδηγούν στον υπολογισμό των κατάλληλων τιμών των παραμέτρων A, B . **Προσέξτε** ότι οι τιμές που θα λάβουμε για τις A, B από τις παραπάνω σχέσεις δεν συμπίπτουν με αυτές που θα παίρναμε αν εξισώναμε τις αρχικές τιμές για το x και το v της ομογενούς μόνο λύσης με τα $x(0)$ και $v(0)$. Οι συνοριακές συνθήκες θα πρέπει να τεθούν στη γενική λύση ενός προβλήματος.

Μολονότι κάναμε όλον αυτό τον κόπο για να γράψουμε τη γενική λύση, αυτή είναι κατ' ουσίαν υπερβολική και άχρηστη. Η μερική λύση είναι το μόνο που χρειαζόμαστε. Η ομογενής λύση είναι εκ φύσεως περιορισμένης εμβέλειας.



Σχήμα 6.1: Και οι τρεις αρχικές συνθήκες που αναγράφονται στη λεζάντα, οδηγούνται τελικά στην ίδια ταλάντωση $x(t)$ μετά από κάποια μεταβατική περίοδο. Εδώ $F_0/m = 1$, $\omega = 2$, $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.1$.

Μετά από μερικούς χαρακτηριστικούς χρόνους του ταλαντωτή αυτή θα σβήσει. Το μόνο που θα μείνει είναι η ειδική λύση. Οι παράμετροι A , B που συνδέονται με τις αρχικές συνθήκες εμπεριέχονται μόνο στο ομογενές κομμάτι της λύσης. Επομένως οι αρχικές συνθήκες είναι καταδικασμένες σε λήθη. Όποια και αν είναι η αρχική κατάσταση του συστήματος, αυτό, μετά από κάποια μεταβατική περίοδο (το εύρος της οποίας εξαρτάται από τα φυσικά χαρακτηριστικά του ταλαντωτή ω_0 , γ) θα κινείται σύμφωνα με τη λύση (6.8). Όλα τα χαρακτηριστικά πλέον της κίνησης σχετίζονται αποκλειστικά με τα στοιχεία της διεγείρουσας δύναμης (F_0 , ω) και τις φυσικές παραμέτρους του ταλαντωτή (m , k , γ).

Κλείνοντας το παρόν εδάφιο θα ήταν χρήσιμο να αναφέρουμε ότι η μη ομογενής λύση που κατασκευάσαμε είναι άσχετη με το ότι η δύναμη είναι συνημιτονοειδής συνάρτηση του χρόνου. Η λύση θα είναι ακριβώς ίδια ακόμη και αν η δύναμη ήταν ημιτονοειδής. Η παρατήρηση αυτή σχετίζεται με την επιλογή μας παραπάνω να λάβουμε το πραγματικό μέρος της (6.3). Αν παίρναμε το φανταστικό μέρος θα είχαμε τη λύση της

$$m\ddot{x} + 2m\gamma\dot{x} + kx = F_0 \sin(\omega t).$$

6.2 Συντονισμός

Ας δούμε τώρα πώς μεταβάλλονται τα χαρακτηριστικά της κίνησης του διεγειρόμενου ταλαντωτή με τη συχνότητα της διέγερσης. Όπως είδαμε και παραπάνω το πλάτος της ταλάντωσης μεταβάλλεται σύμφωνα με την έκφραση

$$x_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}. \quad (6.12)$$

Από τη μορφή της έκφρασης αυτής παρατηρεί κανείς ότι για $\omega \ll \omega_0$

$$x_0 \Big|_{\omega \rightarrow 0} \simeq F_0/(m\omega_0^2) = F_0/k, \quad (6.13)$$

δηλαδή το πλάτος είναι όσο θα ήταν η επιμήκυνση του ελατηρίου αν ασκούνταν πάνω του δύναμη ίση με το πλάτος της διεγείρουσας δύναμης. Αναμενόμενο; Μα

φυσικά· αφού η συχνότητα της διέγερσης είναι σχεδόν μηδενική η μάζα δέχεται μια κατ' ουσίαν σταθερή δύναμη F_0 και το ελατήριο επιμηκύνεται αναλόγως.

Από την άλλη πλευρά, αν η συχνότητα της διέγερσης είναι εξαιρετικά μεγάλη, πολύ μεγαλύτερη από τη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή ω_0 , το πλάτος της ταλάντωσης του ταλαντωτή φθίνει ως

$$x_0 \Big|_{\omega \rightarrow \infty} \simeq \frac{F_0/m}{\omega^2}. \quad (6.14)$$

Η διεγείρουσα δύναμη μεταβάλλεται τόσο γρήγορα που ο ταλαντωτής δεν προλαβαίνει να αναταποκριθεί και να ακολουθήσει την ταχύτατη εναλλαγή της φοράς της δύναμης.

Τέλος αν η συχνότητα της διέγερσης ρυθμιστεί να είναι ίση με τη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή ω_0 , το πλάτος της ταλάντωσης θα είναι

$$x_0 \Big|_{\omega=\omega_0} = \frac{F_0/m}{2\gamma\omega_0} = \left(\frac{\omega_0}{2\gamma}\right) x_0 \Big|_{\omega \rightarrow 0}, \quad (6.15)$$

δηλαδή πολύ μεγαλύτερο του “πλάτους της ταλάντωσης” σε σχεδόν σταθερή διέγερση, εφόσον ο ταλαντωτής παρουσιάζει πολύ μικρή απόσβεση.

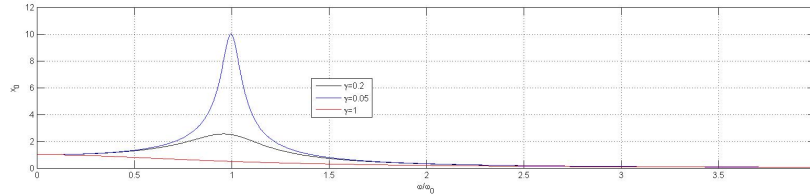
Από τις τρεις αυτές περιπτώσεις καταλαβαίνουμε ότι η καμπύλη που περιγράφει τη σχέση πλάτους – συχνότητας διέγερσης έχει κωδωνοειδή μορφή (βλ. σχήμα 6.2) με το μέγιστό της να εμφανίζεται σε μια συχνότητα κοντά στη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή. Η αλήθεια είναι ότι για $\gamma \geq \omega_0/\sqrt{2}$ το άνοιγμα της καμπάνας είναι τέτοιο ώστε δεν υπάρχει μεγιστοποίηση του πλάτους σε κάποια ενδιάμεση συχνότητα (όπως θα δούμε παρακάτω). Ο απλούστερος τρόπος για τη μελέτη των χαρακτηριστικών της καμπύλης αυτής είναι να ξαναγράψει το πλάτος στη μορφή

$$x_0 = \frac{F_0}{m\omega_0^2} [(1-y)^2 + cy]^{-1/2} \quad (6.16)$$

με $y \equiv (\omega/\omega_0)^2$ και $c \equiv (2\gamma/\omega_0)^2$. Η παραπάνω υπόρριξη ποσότητα είναι ένα πολυώνυμο δευτέρου βαθμού $y^2 + (c-2)y + 1$ που εκ κατασκευής (ως άθροισμα δύο τετραγώνων στην αρχική μορφή (6.12)) δεν μπορεί να μηδενίζεται για καμιά τιμή του $y > 0$ (το y είναι εκ κατασκευής θετικό). Η μικρότερη τιμή που μπορεί να πάρει η υπόρριξη ποσότητα (επομένως και το μεγαλύτερο πλάτος) είναι για $y_{\max} = (2-c)/2 = 1 - 2\gamma^2/\omega_0^2$. Όταν λοιπόν η παράμετρος $\gamma = \omega_0/\sqrt{2}$ η συχνότητα που το πλάτος μεγιστοποιείται είναι η μηδενική. Για γ μικρότερο από την τιμή αυτή κατωφλίου, η καμπύλη συντονισμού έχει το χαρακτηριστικό κωδωνοειδές σχήμα και η συχνότητα που εμφανίζεται το μέγιστο πλάτος είναι

$$\omega_{\text{συντ}} = \omega_0 \sqrt{y_{\max}} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{2\gamma^2}{\omega_0^2}} \quad (6.17)$$

δηλαδή σε μια συχνότητα κάπως μικρότερη της φυσικής συχνότητας του ταλαντωτή. Για $\gamma \geq \omega_0/\sqrt{2}$ η καμπύλη συντονισμού είναι γνησίως φθίνουσα και το μέγιστο πλάτος επιτυγχάνεται για $\omega = 0$.



Σχήμα 6.2: Η καμπύλη συντονισμού (πλάτος απόκρισης ως συνάρτηση της συχνότητας διέγερσης) για τρεις διαφορετικές τιμές του συντελεστή απόσβεσης (πολύ ασθενής απόσβεση $\gamma = 0.05$, μέτρια απόσβεση $\gamma = 0.2$, ισχυρή απόσβεση $\gamma = 1$). Πλάτος ίσον με 1 αντιστοιχεί στην τιμή $F_0/(m\omega_0^2)$.

Καθώς η παράμετρος γ τείνει στο μηδέν το πλάτος της ταλάντωσης απειρίζεται και ο απειρισμός αυτός εμφανίζεται ακριβώς στη φυσική συχνότητα. Εδώ όμως προκύπτει το εξής ζήτημα: Πώς καταφέρνει ο ταλαντωτής να φτάσει σε άπειρο πλάτος σε πεπερασμένο χρόνο (το χρόνο μετάβασης στη σταθερή κατάσταση της μη ομογενούς λύσης); Η απάντηση είναι ότι αν $\gamma = 0$ ο μεταβατικός χρόνος είναι άπειρος αφού ο χαρακτηριστικός χρόνος είναι $1/\gamma$ στην ασθενή απόσβεση. Ο ακριβής τρόπος που συμβαίνει αυτή η μετάβαση θα αποτελέσει ξεχωριστό εδάφιο παρακάτω.

Ας επιστρέψουμε τώρα στην αρμονικά διεγερμένη ταλάντωση και ας επικεντρωθούμε στη φάση καθυστερημένης απόκρισης του ταλαντωτή (σε σχέση με τη διέγερση). Όπως είδαμε η φάση αυτή δίνεται από τη σχέση

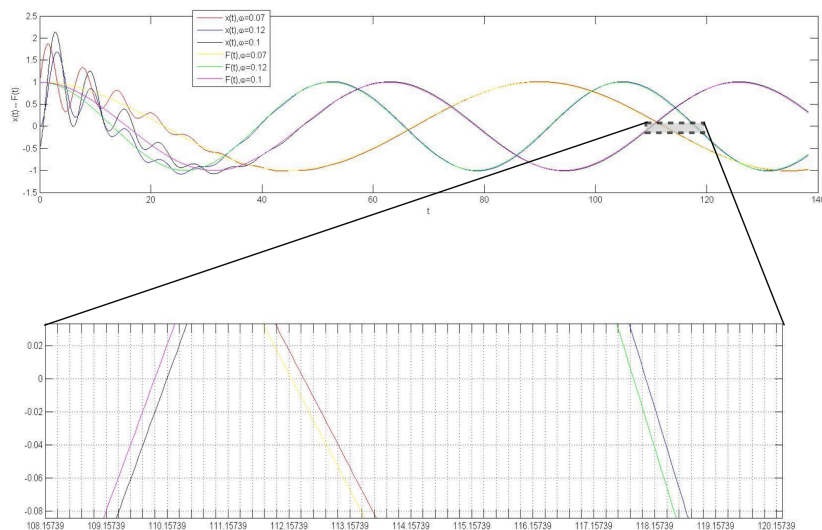
$$\phi = -\tan^{-1} \left[\frac{2\gamma/\omega}{(\omega_0/\omega)^2 - 1} \right].$$

Για $\omega \rightarrow 0$ η φάση είναι $\phi \simeq -\tan^{-1}[2(\gamma/\omega_0)(\omega/\omega_0)] \simeq -2(\gamma/\omega_0)(\omega/\omega_0)$, δηλαδή ο ταλαντωτής καθυστερεί να φτάσει στο ακρότατο σημείο σε σχέση με τη διεγείρουσα δύναμη κατά μια φάση που είναι ανάλογη της διεγείρουσας συχνότητας ω . Ο αντίστοιχος χρόνος καθυστέρησης είναι σταθερός και ανεξάρτητος από τη συχνότητα αυτή

$$t_{καθ} = \frac{|\phi|}{\omega} = \frac{2\gamma}{\omega_0^2}. \quad (6.18)$$

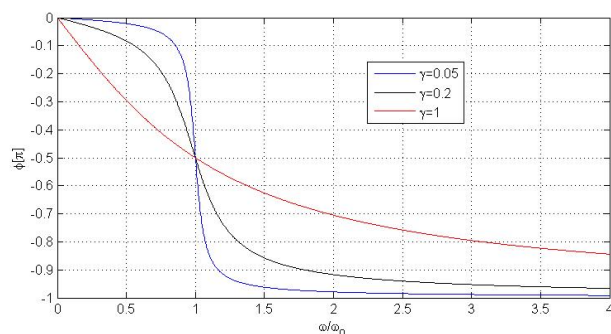
Αυτό είναι εντυπωσιακό· ένας ταλαντωτής με φυσική συχνότητα ω_0 και παράμετρο απόσβεσης γ θα παρουσιάζει την ίδια αυτή χρονική καθυστέρηση ανεξάρτητα αν η αρμονική διέγερση έχει συχνότητα $\omega = 0.1\omega_0$ ή $\omega = 0.001\omega_0$!

Καθώς η συχνότητα της διέγερσης αυξάνει και γίνεται συγκρίσιμη με την ω_0 η φάση μεγαλώνει (αρνητικά) και για $\omega = \omega_0$ η φάση λαμβάνει τη χαρακτηριστική τιμή $-\pi/2$. Πέρα από αυτή τη συχνότητα το όρισμα της \tan^{-1} στη σχέση (6.7) καθίσταται αρνητικό. Η \tan^{-1} είναι πλειότιμη συνάρτηση και θα πρέπει κανείς να ορίσει



Σχήμα 6.3: Τρεις διαφορετικές συχνότητες ($\omega = 0.07, \omega = 0.1, \omega = 0.12$) διεγείρουν το ίδιο σύστημα ($\omega_0 = 1, \gamma = 0.1$). Και οι τρεις περιπτώσεις φτάνουν γρήγορα στην τελική τους απόκριση. Και στις τρεις περιπτώσεις, όπως φαίνεται στο μεγεθυμένο διάγραμμα η χρονική καθυστέρηση στην απόκριση είναι ίδια (παρατηρήστε τις χρονικές αποστάσεις των ζευγαριών των καμπυλών στον άξονα t).

καταλλήλως το πεδίο τιμών της. Προκειμένου να είναι συνεχής συνάρτηση η $\phi(\omega)$ είναι λογικό να θεωρήσουμε ότι για $\omega > \omega_0$ η φάση παίρνει τιμές στο διάστημα $(-\pi, -\pi/2)$. Έτσι για $\omega \rightarrow \infty, \phi \rightarrow -\pi$, δηλαδή ο ταλαντωτής θα βρίσκεται σε αντίθετη φάση με τη διεγείρουσα δύναμη: όταν η δύναμη βρίσκεται στη μέγιστη θετική της τιμή, ο ταλαντωτής βρίσκεται στη μέγιστη αρνητική της. Όταν πιάσετε μια κούνια και αρχίσετε να την ταρακουνάτε πολύ γρήγορα μπορείτε να αισθανθείτε αυτή τη διαφορά φάσης κατά π . Στο διάγραμμα 6.4 φαίνεται η εξέλιξη της φάσης με τη συχνότητα της διέγερσης σε όλο το εύρος από πολύ μικρότερες μέχρι πολύ μεγαλύτερες συχνότητες σε σχέση με την ω_0 .



Σχήμα 6.4: Η συνάρτηση $\phi(\omega)$ για τρεις διαφορετικές αποσβέσεις ($\gamma = 0.05, \gamma = 0.2, \gamma = 1$). Και στις τρεις περιπτώσεις η καθυστέρηση φάσης είναι $\pi/2$ στη συχνότητα $\omega = \omega_0$.

Αν συγκρίνει κανείς το διάγραμμα του πλάτους της απόκρισης και της διαφοράς φάσης παρατηρεί ότι όσο πιο μεγάλη η απόσβεση τόσο πιο αργές είναι οι μεταβολές

(και του πλάτους και της διαφοράς φάσης) κοντά στο συντονισμό ($\omega \simeq \omega_0$). Για να ποσοτικοποιήσουμε αυτή την παρατήρηση ας επιστρέψουμε στην έκφραση (6.16). Το σχετικό πολυώνυμο μπορεί να γραφεί ως

$$\left(y + \frac{c-2}{2}\right)^2 + \left[y + \left(\frac{c-2}{2}\right)^2\right]^2.$$

Δεν είναι δύσκολο να διαπιστώσει κανείς ότι για $\gamma \ll \omega_0$, μια απόκλιση από τη συχνότητα συντονισμού κατά $\pm\gamma$ θα οδηγήσει σε $1/\sqrt{2}$ περίπου φορές μικρότερο πλάτος από το μέγιστο του συντονισμού. Αντίστοιχα η φάση θα είναι διαφορετική από το $-\pi/2$ του συντονισμού κατά περίπου $\pi/4$ αφού

$$\frac{2\gamma(\omega_0 \pm \gamma)}{\omega_0^2 - (\omega_0 \pm \gamma)^2} \simeq 1 + \mathcal{O}(\gamma/\omega_0)$$

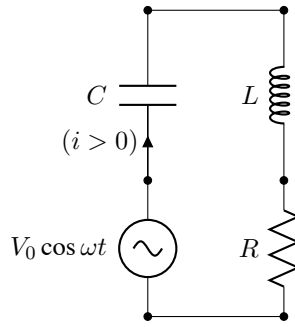
Συνοπτικά λοιπόν ένας ταλαντωτής που διεγείρεται από μια αρμονική δύναμη ταλαντώνεται με τη συχνότητα του διεγέρτη με πλάτος που εξαρτάται από τη σχέση της διεγείρουσας συχνότητας και της φυσικής συχνότητας του ταλαντωτή. Κοντά (αλλά όχι ακριβώς) στη φυσική συχνότητα το πλάτος της ταλάντωσης μεγιστοποιείται ενώ εκατέρωθεν αυτής το πλάτος είναι μικρότερο. Το εύρος της καμπάνας στην καμπύλη συντονισμού είναι 2γ . Παράλληλα υπάρχει μια καθυστέρηση φάσης στην απόκριση του ταλαντωτή σε σχέση με τη διεγείρουσα δύναμη. Η διαφορά φάσης μεγαλώνει με τη συχνότητα και καθίσταται ακριβώς ίση με $\pi/2$ για $\omega = \omega_0$. Σε απόσταση γ γύρω από αυτή τη συχνότητα η φάση μεταβάλλεται κατά $\pi/4$.

6.3 * Συσχέτιση με ηλεκτρικές ταλαντώσεις

Θα ήταν εποικοδομητικό να δούμε τις αναλογίες ανάμεσα στις μηχανικές ταλαντώσεις με διέγερση και στις ηλεκτρικές ταλαντώσεις εναλλασσόμενου ρεύματος. Ένα κύκλωμα που αποτελείται από ένα ιδανικό πηνίο αυτεπαγωγής L , μια ωμική αντίσταση R και έναν πυκνωτή χωρητικότητας C συνεδεμένα σε σειρά με μια πηγή εναλλασσόμενου ρεύματος πλάτους V_0 και συχνότητας ω , διαρρέεται από ταλαντούμενο ρεύμα, το πλάτος του οποίου σχετίζεται με τη συχνότητα της πηγής και τα φυσικά χαρακτηριστικά που χαρακτηρίζουν τα τρία ηλεκτρικά στοιχεία του κυκλώματος. Πιο συγκεκριμένα η εφαρμογή του 2ου κανόνα του Kirchhoff οδηγεί στην ακόλουθη εξίσωση:

$$L \frac{di}{dt} + iR + \frac{Q}{C} = V_0 \cos(\omega t). \quad (6.19)$$

Στην παραπάνω σχέση $L di/dt$ είναι η τάση αυτεπαγωγής που εμφανίζεται στα



Σχήμα 6.5

άκρα του πυκνωτή όταν αυτό διαρρέεται από μεταβαλλόμενο ρεύμα, iR είναι η πτώση τάσης πάνω στην αντίσταση και Q/C είναι η τάση του πυκνωτή, ενώ $V_0 \cos(\omega t)$ είναι η αρμονικά μεταβαλλόμενη τάση της πηγής εναλλασσόμενου ρεύματος. Η σχέση μεταξύ ρεύματος i και φορτίου Q του πυκνωτή είναι $i = dQ/dt$ αφού αν ακολουθήσουμε τη συμβατική φορά που φαίνεται στο σχήμα ένα θετικό ρεύμα οδηγεί σε φόρτιση του πυκνωτή. Έτσι, ξαναγράφοντας την παραπάνω εξίσωση ως προς το φορτίο του πυκνωτή καταλήγουμε στην

$$L \frac{d^2 Q}{dt^2} + R \frac{dQ}{dt} + \frac{1}{C} Q = V_0 \cos(\omega t).$$

Η διαφορική αυτή εξίσωση είναι ακριβώς ίδια με την (6.5) αρκεί να κάνει κανείς τις ακόλουθες αντικαταστάσεις φυσικών μεγεθών

$$Q \rightarrow x, L \rightarrow m, R \rightarrow 2m\gamma, \frac{1}{C} \rightarrow k, V_0 \rightarrow F_0.$$

Επομένως η λύση όσον αφορά στη χρονική εξέλιξη του φορτίου είναι της ίδιας μορφής με τη λύση για το μηχανικό ταλαντωτή (6.8). Μπορούμε λοιπόν κατευθείαν να γράψουμε

$$Q(t) = \frac{V_0/L}{\sqrt{(\frac{1}{LC} - \omega^2)^2 + \frac{R^2}{L^2} \omega^2}} \cos(\omega t + \phi), \quad (6.20)$$

με

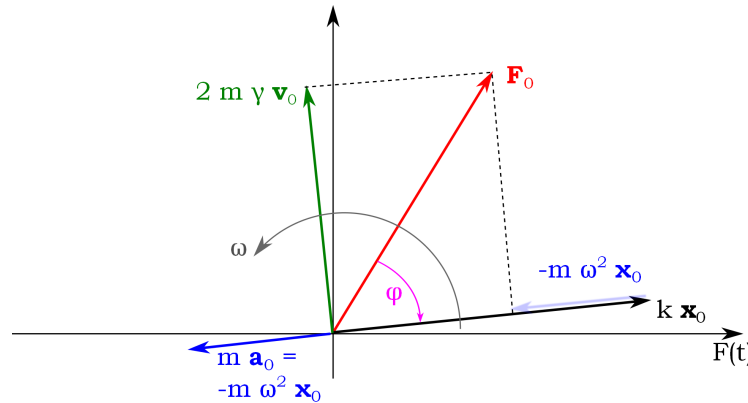
$$\phi = -\tan^{-1} \left(\frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2} \right). \quad (6.21)$$

Συνήθως σε ένα κύκλωμα μας ενδιαφέρει το ρεύμα το οποίο το διαρρέει που σύμφωνα με τα προηγούμενα έχει τη μορφή

$$i(t) = \frac{dQ(t)}{dt} = -\frac{V_0 C \omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}} \sin(\omega t + \phi). \quad (6.22)$$

Η εξάρτηση του πλάτους του ρεύματος από τη συχνότητα είναι ελαφρώς διαφο-

ρετικού τύπου από το αντίστοιχο πλάτος της μηχανικής ταλάντωσης, εξαιτίας του επιπλέον παράγοντα ω στον αριθμητή. Η έκφραση για το πλάτος μεγιστοποιείται ακριβώς στη φυσική συχνότητα του κυκλώματος $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.¹ Επομένως κάτι που μας έδωσε την ευκαιρία να ανακαλύψουμε η μελέτη των ηλεκτρικών ταλαντώσεων είναι ότι στις μηχανικές ταλαντώσεις η ταχύτητα (το αντίστοιχο του ρεύματος) και όχι η θέση παρουσιάζει μέγιστο πλάτος στη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή. Αυτό συνεπάγεται μεγιστοποίηση του πλάτους σε μια μικρότερη της φυσικής συχνότητας συχνότητα.²



Σχήμα 6.6: Το διάγραμμα περιστρεφόμενων διανυσμάτων για έναν μηχανικό ταλαντωτή. Όλα τα διανύσματα περιστρέφονται μαζί με συχνότητα ω . Η δύναμη αποτελεί τη συνισταμένη όλων των άλλων έγχρωμων διανυσμάτων. Έτσι το διάνυσμα της θέσης βρίσκεται κατά γωνία ϕ πίσω (προσέξτε τη φορά της) από τη δύναμη. Στον οριζόντιο άξονα προβάλλονται όλα τα διανύσματα προκειμένου να λαμβάνουμε τις στιγμιαίες τιμές όλων των χρονοεξαρτώμενων μεγεθών. Στο διάγραμμα φαίνεται ότι το διάνυσμα της ταχύτητας (πράσινο) βρίσκεται γωνία $\pi/2$ μπροστά από αυτό της θέσης και της επιτάχυνσης (μπλε) γωνία $\pi/2$ μπροστά από αυτό της ταχύτητας.

Μια εποπτική ανάλυση που χρησιμοποιούν συνήθως οι ηλεκτρολόγοι στην ανάλυση κυκλωμάτων εναλλασσόμενου ρεύματος είναι αυτή των περιστρεφόμενων διανυσμάτων. Όλα τα αρμονικά μεταβαλλόμενα φυσικά μεγέθη παριστάνονται με ομαλά περιστρεφόμενα διανύσματα επί του επιπέδου, ενώ οι μετρούμενες τιμές αυτών αναπαρίστανται από τις προβολές τους σε κάποιον άξονα, συνήθως τον x .³ Η ταχύτητα,

¹Είναι εύκολο να το διαπιστώσει κανείς αυτό παίρνοντας το αντίστροφο του κλάσματος του πλάτους το οποίο είναι

$$\frac{\sqrt{(\frac{1}{\omega} - LC\omega)^2 + (RC)^2}}{V_0C}$$

Το κλάσμα αυτό είναι εύκολο να δει κανείς ότι λαμβάνει την ελάχιστη τιμή του όταν ο πρώτος τετραγωνικός παράγοντας στην υπόρριξη ποσότητα μηδενίζεται, δηλαδή όταν $\omega^2 = 1/(LC)$.

²Το αποτέλεσμα αυτό το είχαμε συναγάγει παραπάνω, αλλά κατόπιν μιας σχετικά μακροσκελούς ανάλυσης. Η μεγιστοποίηση του πλάτους της ταχύτητας $v_0(\omega) = \omega x_0(\omega)$ στη φυσική συχνότητα ω_0 ήταν πολύ πιο άμεση. Έτσι δεδομένου ότι η ω αυξάνεται μονοτόνως η $x_0(\omega)$ πρέπει να είναι φθίνουσα στο $\omega = \omega_0$ που η $v_0(\omega)$ καθίσταται στάσιμη. Η μεγιστοποίηση λοιπόν του $x_0(\omega)$, αν συμβαίνει, θα πρέπει να συμβαίνει σε μικρότερη της ω_0 συχνότητας.

³Στην πραγματικότητα η απεικόνιση αυτή είναι ισοδύναμη με την απεικόνιση των μιγαδικών αριθμών με διανύσματα στο μιγαδικό πεδίο.

όντας η παράγωγος της θέσης που ως τελεστής μετατρέπει το $\cos(\omega t)$ σε $-\omega \sin(\omega t) = \omega \cos(\pi/2 + \omega t)$ και το $\sin(\omega t)$ σε $\omega \cos(\omega t) = \omega \sin(\pi/2 + \omega t)$, μπορεί λοιπόν να αναπαρασταθεί ως ένα διάνυσμα που προηγείται του διανύσματος της θέσης κατά γωνία $\pi/2$. Αντίστοιχα η επιτάχυνση μπορεί να αναπαρασταθεί ως ένα διάνυσμα που προηγείται κατά γωνία π ως προς το διάνυσμα της ταχύτητας και επομένως κατά γωνία π ως προς το διάνυσμα της θέσης. Ως προς τη σχετική θέση των διανυσμάτων όλα τακτοποιήθηκαν. Τι συμβαίνει όμως ως προς τις διαστάσεις όλων αυτών των διανυσμάτων; Θα ήταν αρκετά προβληματικό να απεικονίζουμε στο ίδιο διάγραμμα φυσικές ποσότητες διαφορετικών διαστάσεων. Αν επανέλθουμε στη βασική διαφορική εξίσωση παρατηρούμε πως όλοι οι όροι της έχουν διαστάσεις δύναμης. Αν τα περιστρεφόμενα διανύσματα λοιπόν τα σχεδιάσουμε ώστε να έχουν μήκος ίσο με το πλάτος του αντίστοιχου μεγέθους πολλαπλασιασμένου με τις κατάλληλες παραμέτρους (τη θέση επί k , την ταχύτητα επί $2m\gamma$, την επιτάχυνση επί m και τη δύναμη επί 1) ώστε τα πάντα να έχουν διαστάσεις δύναμης τότε μπορούμε να “δούμε” τη διαφορική εξίσωση ως διανυσματικό άθροισμα εικονικών δυνάμεων:

$$\mathbf{F}_0 = m\mathbf{a}_0 + 2m\gamma\mathbf{v}_0 + k\mathbf{x}_0 \quad (6.23)$$

όπου τα $\mathbf{F}_0, \mathbf{a}_0, \mathbf{v}_0, \mathbf{x}_0$ δεν αναπαριστούν κάποια διανύσματα του πραγματικού χώρου, αλλά κάποια εικονικά περιστρεφόμενα δισδιάστατα διανύσματα που σχηματίζουν τις γωνίες που αναφέραμε παραπάνω και των οποίων οι προβολές επί του άξονα x αναπαριστούν τα χρονοεξαρτώμενα αντίστοιχα μεγέθη που εμφανίζονται στη διαφορική εξίσωση (6.8). Η διανυσματική εξίσωση που αναγράφεται παραπάνω εξασφαλίζει την εξίσωση των αντίστοιχων προβολών. Επειδή τα διανύσματα \mathbf{x}_0 και \mathbf{a}_0 είναι αντιπαράλληλα το ένα στο άλλο, ενώ το \mathbf{v}_0 είναι κάθετο στα δύο πρώτα (όπως είπαμε παραπάνω) έχουμε την ακόλουθη σχέση μεταξύ των μέτρων

$$F_0^2 = (kx_0 - ma_0)^2 + (2m\gamma v_0)^2.$$

Αν επιπλέον κάνουμε τις αντικαταστάσεις

$$a_0 = \omega^2 x_0, \quad v_0 = \omega x_0$$

οι οποίες συνάγονται από τις παραγωγίσεις των των τριγωνομετρικών συναρτήσεων που είδαμε προτύτερα, τότε καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση για το πλάτος

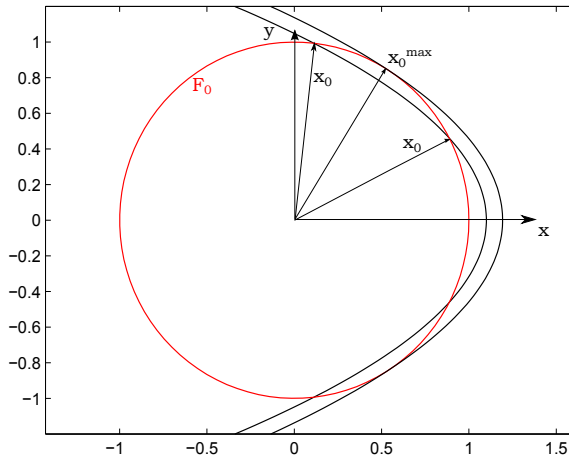
$$x_0 = \frac{F_0/m}{\sqrt{(k/m - \omega^2)^2 + (2\gamma\omega)^2}}$$

που δεν είναι άλλο παρά το πλάτος της απόκρισης που βρήκαμε στο πρώτο εδάφιο του παρόντος κεφαλαίου. Η δε καθυστερημένη φάση της απόκρισης δεν είναι άλλη

από τη γωνία μεταξύ του διανύσματος \mathbf{F}_0 και του \mathbf{x}_0 , δηλαδή

$$\tan(-\phi) = \frac{2m\gamma v_0}{kx_0 - ma_0} = \frac{2\gamma\omega}{(k/m) - \omega^2}$$

(βλ. σχήμα 6.6). Με βάση τη νέα οπτική γωνία το πλάτος της δύναμης είναι σταθερού μέτρου και αυτό που συμβαίνει καθώς αλλάζουμε τη συχνότητα της διεγείρουσας δύναμης είναι ότι τα υπόλοιπα διανύσματα (θέσης, ταχύτητας και επιτάχυνσης) αναδιευθετούνται έτσι ώστε το διανυσματικό τους άθροισμα (μαζί με τους συντελεστές τους) να δίνει πάλι το \mathbf{F}_0 . Καθώς το ω μεγαλώνει το παράλληλο στο \mathbf{x}_0 διάνυσμα μικραίνει ως $(k - m\omega^2)x_0$ ενώ το κάθετο διάνυσμα μεγαλώνει ως $2m\gamma v_0 = 2m\gamma\omega x_0$.



Σχήμα 6.7: Στο διάγραμμα φαίνονται δύο παραβολές της μορφής (6.24). Καθώς αλλάζει κανείς το πλάτος της συχνότητας το πλάτος μεταβάλλεται και μαζί μεταβάλλεται η θέση και η μορφή της παραβολής. Το πλάτος προκύπτει από την τομή της παραβολής με τον κύκλο ακτίνας F_0 . Γενικά υπάρχουν δύο τέτοιες τομές για $y \propto \omega > 0$ (βλ. διανύσματα x_0) που αντιστοιχούν στα ίσα πλάτη απόκρισης σε δύο διαφορετικές συχνότητες εκατέρωθεν της συχνότητας συντονισμού. Η απώτερη παραβολή (εξώτερη στο διάγραμμα) που εφάπτεται στον κύκλο αντιστοιχεί στο μέγιστο πλάτος x_0^{\max} της ταλάντωσης το οποίο εφόσον βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο του διαγράμματος $x > 0, y > 0$ αντιστοιχεί σε συχνότητα μικρότερη της φυσικής συχνότητας.

Αν σε καρτεσιανό σύστημα συντεταγμένων x, y θέσουμε

$$y = 2m\gamma\omega x_0, \quad x = (k - m\omega^2)x_0$$

το γράφημα της μεταξύ τους σχέση είναι της μορφής

$$x = \left[k - m \left(\frac{y}{2m\gamma x_0} \right)^2 \right] x_0 = kx_0 - \frac{y^2}{4m\gamma^2 x_0}. \quad (6.24)$$

Αυτή είναι η εξίσωση μιας παραβολής και δεδομένου ότι το πλάτος F_0 ισούται με $\sqrt{x^2 + y^2}$ η τομή της παραβολής με τον κύκλο ακτίνας F_0 αντιπροσωπεύει τη γωνιακή θέση της δύναμης στο διάγραμμα περιστρεφόμεων διανυσμάτων (βλ. σχήμα 6.7).

Ο άξονας x είναι ο άξονας του \mathbf{x}_0 , ενώ ο άξονας y είναι ο άξονας του \mathbf{v}_0 . Αν η τομή βρίσκεται στο πρώτο τεταρτημόριο ($x > 0, y > 0$) αυτό σημαίνει πως $kx_0 - m\omega^2 x_0 > 0$, δηλαδή $\omega^2 < k/m = \omega_0^2$, ενώ αν η τομή βρίσκεται στο δεύτερο τεταρτημόριο ($x < 0, y > 0$) αυτό σημαίνει πως $kx_0 - m\omega^2 x_0 < 0$, δηλαδή $\omega^2 > k/m = \omega_0^2$. Από τη μορφή της παραβολής είναι προφανές ότι το μέγιστο πλάτος (που αντιστοιχεί στην εξώτατη δυνατή παραβολή) δεν μπορεί παρά να εμφανίζεται στο πρώτο τεταρτημόριο, δηλαδή σε συχνότητα μικρότερη της φυσικής.

6.4 * Τυχαία διεγείρουσα δύναμη

Μέχρι τώρα ασχοληθήκαμε με αμιγώς αρμονικές (ημιτονικές, ή συνημιτονικές) δυνάμεις διέγερσης σε ένα ταλαντωτή. Προφανώς αυτή είναι μια πολύ ειδική περίπτωση δύναμης. Τυχαίνει όμως η εκτενής ανάλυση που κάναμε για την ειδική αυτή περίπτωση να εμπεριέχει όλη την ουσία για κάθε είδους χρονοεξαρτώμενη δύναμη. Ο λόγος είναι το θεώρημα Fourier:

Κάθε συνάρτηση $f(t)$ μπορεί να γραφεί ως επαλληλία αρμονικών συναρτήσεων.

Αν η $f(t)$ είναι περιοδική η ανάλυση γίνεται σε αρμονικές ακέραιων πολλαπλασίων της περιόδου της f , ενώ αν δεν είναι περιοδική η ανάλυση θα γίνει σε αρμονικές όλων των δυνατών συχνοτήτων. Πιο συγκεκριμένα αν $f(t + T) = f(t)$ για κάθε t

$$f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos(2\pi n t/T) + \sum_{n=1}^{\infty} s_n \sin(2\pi n t/T)$$

όπου c_n, s_n κατάλληλοι συντελεστές⁴ που καθορίζουν το πλάτος της κάθε αρμονικής συνιστώσας. Οι c_n, s_n καθορίζονται από τη μορφή της f . Ομοίως, αν η f δεν είναι περιοδική⁵ μπορεί και πάλι να αναλυθεί σε αρμονικές με συνεχές πλέον φάσμα, αντί διακριτό όπως προηγουμένως. Μπορούμε δηλαδή να γράψουμε

$$f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i\Omega t} \tilde{f}(\Omega) d\Omega,$$

⁴ Οι τιμές των c_n, s_n δίνονται από τα ακόλουθα ολοκληρώματα

$$c_n = \frac{2 - \delta_{n0}}{T} \int_0^T f(t) \cos(2\pi n t/T) dt, \quad s_n = \frac{2}{T} \int_0^T f(t) \sin(2\pi n t/T) dt.$$

⁵ Οφείλει όμως να ικανοποιεί κάποιους περιορισμούς ώστε να μπορούν να υπολογιστούν τα ακόλουθα ολοκληρώματα. Συγκεκριμένα η f θα πρέπει να είναι απολύτως ολοκληρώσιμη, δηλαδή $\int_{-\infty}^{+\infty} |f(t)| dt < \infty$.

όπου $\tilde{f}(\Omega)$ είναι μια κατάλληλη μιγαδική συνάρτηση⁶, η μορφή της οποίας μπορεί να υπολογιστεί από την ίδια την f και η οποία μας δίνει μια πλήρη πληροφόρηση σχετικά με το φάσμα συχνοτήτων της ίδιας της f .

Κατόπιν αυτής της ανάλυσης μιας οποιασδήποτε συνάρτησης, μπορούμε να αναλύσουμε την ίδια τη διέγερση $F(t)$ που ασκείται στον ταλαντωτή. Η γραμμικότητα της εξίσωσης του ταλαντωτή μας εξασφαλίζει ότι η μη ομογενής λύση υπό τη δράση μιας γενικής χρονοεξαρτώμενης δύναμης θα είναι ο αντίστοιχος γραμμικός συνδυασμός των αποκρίσεων του ταλαντωτή σε κάθε αρμονική συνιστώσα της δύναμης. Έτσι αν η εφαρμοζόμενη $F(t)$ είναι περιοδική, η γενική λύση του ταλαντωτή (μετά τη μεταβατική περίοδο προσαρμογής των αρχικών συνθηκών στην τελική κατάσταση) είναι

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{[c_n \cos(2\pi n t/T + \phi_n) + s_n \sin(2\pi n t/T + \phi_n)]/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - (2\pi n/T)^2)^2 + (4\pi n\gamma/T)^2}} \quad (6.25)$$

όπου ϕ_n είναι η φάση καθυστέρησης που αντιστοιχεί στη συχνότητα της εκάστοτε αρμονικής $\omega_n = 2\pi n/T$. Στην περίπτωση πολύ ασθενούς απόσβεσης ($\gamma \ll \omega_0$) και $\omega_N \simeq \omega_0$, μόνο η αρμονική αυτή θα δώσει μεγάλο πλάτος απόκρισης (ισχυρός συντονισμός), ενώ όλες οι άλλες αρμονικές θα επιφέρουν ταλαντώσεις μηδαμινού σχετικού πλάτους. Μπορούμε λοιπόν να γράψουμε σε αυτή την περίπτωση

$$x(t) \simeq \frac{[c_N \cos(2\pi N t/T + \phi_N) + s_N \sin(2\pi N t/T + \phi_N)]/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - (2\pi N/T)^2)^2 + (4\pi N\gamma/T)^2}} \quad (6.26)$$

για $|\omega_0 - 2\pi N/T| \ll \gamma$.

Αντίστοιχα στην περίπτωση της μη περιοδικής διέγερσης θα η γενική λύση θα είναι

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-i[\Omega t + \phi(\Omega)]} \frac{\tilde{f}(\Omega)/m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + (2\gamma\Omega)^2}} d\Omega.$$

Στην περίπτωση αυτή λόγω συνεχούς φάσματος η απόκριση του ταλαντωτή δεν θα είναι μονοχρωματική (χαρακτηριζόμενη από μια συχνότητα) αλλά θα αποτελείται από μια συνεχή κατανομή συχνοτήτων κεντραρισμένη γύρω από τη συχνότητα συντονισμού.

⁶Η $\tilde{f}(\Omega)$ υπολογίζεται από το ολοκλήρωμα

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{i\Omega t} f(t) dt$$

6.5 Η ροή ενέργειας κατά τη διέγερση

Στον ταλαντωτή με απόσβεση, δεν είχε τόσο νόημα να συζητήσουμε για την ενέργεια του συστήματος καθότι το σύστημα ήταν αναλωτικό και η ενέργεια ως άθροισμα κινητικής και δυναμικής δεν αποτελούν διατηρούμενο μέγεθος. Η γραμμική αντίσταση γνωρίζουμε ότι είναι μια μη συντηρητική δύναμη αφού είναι ταχυτητοεξαρτώμενη. Η αλήθεια είναι ότι ακόμη και γι' αυτό το σύστημα μπορούμε να κατασκευάσουμε κάποια ποσότητα που έχει τη μορφή της ενέργειας αλλά είναι σταθερή. Πρόκειται για την εκθετικά μειούμενη ενέργεια πολλαπλασιασμένη με τον κατάλληλο χρονοεξαρτώμενο εκθετικό παράγοντα ώστε οι χρονοεξαρτήσεις να αλληλοαναιρούνται.

Στην περίπτωση όμως του διεγερμένου ταλαντωτή η σταθερή κατάσταση του θα μπορούσε ίσως να συσχετιστεί με κάποιου είδους ενέργεια. Ποια μπορεί να είναι αυτή, αφού εκ φύσεως ο ταλαντωτής χάνει ενέργεια συνεχώς μέσω της γραμμικής αντίστασης; Δεδομένου ότι ο ταλαντωτής εκτελεί αμείωτες αρμονικές ταλαντώσεις κάποιας συχνότητας ω η οποία όμως δεν είναι ούτε η φυσική συχνότητα του ταλαντωτή, ούτε η διαμορφούμενη συχνότητα λόγω του συντελεστή απόσβεσης, αλλά η συχνότητα του διεγέρτη, η κινητική και η δυναμική ενέργειά του ταλαντώνονται χωρίς όμως να διατηρούν σταθερό άθροισμα. Η δυναμική του ενέργεια είναι

$$E_{\text{δυν}} = \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x_0^2 \cos^2(\omega t + \phi), \quad (6.27)$$

ενώ η κινητική είναι

$$E_{\text{κιν}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv_0^2 \sin^2(\omega t + \phi) = \frac{1}{2}m\omega^2 x_0^2 \sin^2(\omega t + \phi). \quad (6.28)$$

Παρατηρήστε ότι τα πλάτη των δύο ενεργειών δεν είναι τα ίδια ώστε να μπορεί κανείς να εκμεταλλευτεί την τριγωνομετρική ταυτότητα $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ για να κατασκευάσει μια διατήρηση από την άθροιση των δύο ενεργειών.⁷ Και πάλι όμως μπορεί κανείς να φτιάξει μια ιδότυπη διατήρηση “ενέργειας” κατασκευάζοντας την ποσότητα

$$\mathcal{E} = \frac{E_{\text{δυν}}}{\omega_0^2} + \frac{E_{\text{κιν}}}{\omega^2},$$

που δεν έχει διαστάσεις ενέργειας αλλά είναι συμμετρική, ή την

$$\mathcal{E}' = E_{\text{δυν}} \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + E_{\text{κιν}},$$

⁷Μονάχα στην περίπτωση $\omega = \omega_0$ οι δύο αυτές ενέργειες αποκτούν ίδιο πλάτος και μπορούν να οδηγήσουν σε μια άμεση διατήρηση αθροισόμενες.

που έχει μεν διαστάσεις ενέργειας αλλά δεν είναι συμμετρική, η τέλος την

$$\mathcal{E}_0 = \left(\frac{E_{\delta uv}}{\omega_0^2} + \frac{E_{\kappa uv}}{\omega^2} \right) \omega \omega_0,$$

που είναι και διαστατικά ενέργεια και διαθέτει συμμετρική γραφή.

Ας εξετάσουμε όμως πιο διεξοδικά γιατί η συνολική ενέργεια δεν διατηρείται αλλά ταλαντώνεται μεταξύ της μέγιστης κινητικής και της μέγιστης δυναμικής που η κάθε μια έχει διαφορετικό “ύψος”. Η αντίσταση προκαλεί συνεχή απώλεια ενέργειας από το σύστημα, η οποία συνήθως χάνεται υπό μορφή θερμότητας, η οποία δεν είναι τίποτε άλλο παρά κινητική ενέργεια μορίων που διαμεσολαβούν για να επιτευχθεί η αλληλεπίδραση του ταλαντωτή με το περιβάλλον του, πέραν αυτής του δυναμικού του ταλαντωτή. Είναι λογικό να φανταστεί κανείς ότι η ενέργεια αυτή με κάποιο τρόπο αναπληρώνεται από την εξωτερική διέγερση έτσι ώστε η συνολική ενέργεια (δυναμική συν κινητική) να μην μένει σταθερή αλλά να αυξομειώνεται μεταξύ δύο θετικών τιμών.

Η ενέργεια που χάνεται με την πάροδο του χρόνου είναι

$$\begin{aligned} \Delta E_{\text{αντ}}(t) &= \int_0^t F_{\text{αντ}} dx \\ &= \int_0^t -2m\gamma v dx \\ &= -2m\gamma \int_0^t v^2 dt \\ &= -2m\gamma v_0^2 \int_0^t \sin^2(\omega t' + \phi) dt' \\ &= -m\gamma \omega^2 x_0^2 \left[t' - \frac{\sin(2\omega t' + 2\phi)}{2\omega} \right]_0^t. \end{aligned} \quad (6.29)$$

όπου το “πλην” πρόσημο υποδεικνύει τη συνεχή απώλεια ενέργειας. Ο πρώτος όρος καταμετρά τη συνεχή μέση απώλεια ενέργειας ενώ ο δεύτερος όρος τις ταλαντώσεις της απώλειας καθώς άλλοτε ο ταλαντωτής τρέχει γρήγορα και έχει υψηλό ρυθμό απώλειας ενέργειας (αυτό συμβαίνει 2 φορές μέσα σε μια περίοδο) και άλλοτε κινείται αργά η σταματά και έχει χαμηλό ή μηδενικό ρυθμό απώλειας ενέργειας (και αυτό συμβαίνει 2 φορές μέσα σε μια περίοδο⁸).

Από την άλλη η ενέργεια που προσφέρεται στον ταλαντωτή από τη διεγείρουσα

⁸Παράβαλε με το συντελεστή 2 στη συχνότητα της έκφρασης (6.29).

δύναμη είναι

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\delta i \epsilon \gamma}(t) &= \int_0^t F(t) dx \\
&= \int_0^t F(t) v dt \\
&= F_0 \omega x_0 \int_0^t \cos(\omega t) [-\sin(\omega t + \phi)] dt \\
&= -F_0 \omega x_0 \int_0^t \cos(\omega t + \phi - \phi) \sin(\omega t + \phi) dt \\
&= -F_0 \omega x_0 \int_0^t [\cos(\omega t + \phi) \cos \phi + \sin(\omega t + \phi) \sin \phi] \sin(\omega t + \phi) dt \\
&= -\frac{F_0 x_0}{2} \left[-\cos \phi \frac{\cos(2\omega t' + 2\phi)}{2} + \sin \phi \left(\omega t' - \frac{\sin(2\omega t' + 2\phi)}{2} \right) \right]_0^t dt.
\end{aligned} \tag{6.30}$$

Στην παραπάνω ανάλυση αντί να αναλύσουμε το $\sin(\omega t + \phi)$ αναλύσαμε το $\cos(\omega t)$ προκειμένου να συγκρίνουμε με την αντίστοιχη χρονοεξάρτηση της απώλειας ενέργειας που υπολογίσαμε προηγουμένως.

Στο σημείο αυτό για να είναι πιο εύκολη η σύγκριση θα υπολογίσουμε αναλυτικά τις ποσότητες $F_0 x_0 \cos \phi$ και $F_0 x_0 \sin \phi$:

$$F_0 x_0 \cos \phi = F_0 x_0 \frac{kx_0 - m\omega^2 x_0}{F_0} = mx_0^2 (\omega_0^2 - \omega^2), \tag{6.31}$$

$$F_0 x_0 \sin \phi = -F_0 x_0 \frac{2m\gamma\omega x_0}{F_0} = -mx_0^2 (2\gamma\omega). \tag{6.32}$$

Ο αμεσότερος τρόπος υπολογισμού των $\cos \phi$, $\sin \phi$ επιτυγχάνεται όχι μέσω της $\tan \phi$ που μπορεί να προκαλέσει διχογνωμία ως προς τα πρόσημα, αλλά μέσω του διανυσματικού διαγράμματος των περιστρεφόμενων διανυσμάτων που είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο. Προσέξτε ότι το πρόσημο του $\sin \phi$ είναι αρνητικό αφού η γωνία μετρά την καθυστέρηση (αρνητική) της απόκρισης σε σχέση με τη δύναμη. Συνολικά λοιπόν έχουμε

$$\Delta E_{\text{αντ}}(t) = -A \left[\omega t - \frac{\sin(2\omega t + 2\phi) - \sin(2\phi)}{2} \right]. \tag{6.33}$$

και

$$\Delta E_{\delta i \epsilon \gamma}(t) = A \left[\chi_1 \frac{\cos(2\omega t + 2\phi) - \cos(2\phi)}{2} + \omega t - \chi_2 \frac{\sin(2\omega t + 2\phi) - \sin(2\phi)}{2} \right] \tag{6.34}$$

με $A = m\gamma\omega x_0^2$,

$$\chi_1 = \frac{(\omega_0^2 - \omega^2)}{2\gamma\omega}$$

και

$$\chi_2 = 1.$$

Στη γραφή αυτή είναι πλέον καθαρό ότι κατά μέσο όρο όση ενέργεια αφαιρεί η αντίσταση, τόση εισάγει η διεγείρουσα δύναμη. Προσθέτοντας τους δύο όρους καταλήγουμε στην ακόλουθη σχέση που μετρά τη μεταβολή της ενέργειας του συστήματος

$$\Delta E_{\text{ολ}}(t) = \frac{mx_0^2}{2}(\omega_0^2 - \omega^2) \frac{\cos(2\omega t + 2\phi) - \cos(2\phi)}{2}. \quad (6.35)$$

Το εύρος ταλάντωσης αυτής της ενέργειας είναι $mx_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)/4$, δηλαδή μεταβάλλει συνολικά την ενέργεια κατά $\pm mx_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)/2$ και αυξομειώνεται 2 φορές πιο γρήγορα από την ίδια την ταλάντωση. Στην πραγματικότητα η μεταβολή αυτή είναι που γεφυρώνει τη διαρκή μετάβαση από τη μέγιστη τιμή της δυναμικής ενέργειας $m\omega_0^2 x_0^2/2$ στη μέγιστη τιμή της κινητικής ενέργειας $m\omega^2 x_0^2/2$ τέσσερις φορές μέσα σε ένα κύκλο: δύο από τη δυναμική (μέγιστη απομάκρυνση) στην κινητική (θέση ισορροπίας) και δύο από την κινητική στη δυναμική.

Μολονότι η ταλάντωση της συνολικής ενέργειας έχει πλάτος $mx_0^2(\omega_0^2 - \omega^2)/4$, η κάθε μία πηγή μεταφοράς ενέργειας –αυτή της αντίστασης και εκείνη της διέγερσης– εκτός του σταθερού ρυθμού εκροής της πρώτης και εισροής της δεύτερης, ταλαντώνουν την ενέργεια του ταλαντωτή με πλάτος $A/2$ η πρώτη και πλάτος $A\sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2}/2$ η δεύτερη. Τα δύο αυτά πλάτη μπορεί να ξεπερνούν το πλάτος ταλάντωσης της ενέργειας του ταλαντωτή, αφού το ημιτονικό κομμάτι της ταλάντωσης εκροής της ενέργειας αναιρείται από το ημιτονικό κομμάτι της ταλάντωσης εισροής της ενέργειας και απομένει μονάχα το συνημιτονικό μέρος της εισροής να καθορίζει το πλάτος ταλάντωσης της ενέργειας του ταλαντωτή.

Όσον αφορά στην εξάρτηση των ενεργειακών εισροών-εκροών από τη συχνότητα της διέγερσης, μπορεί να διαπιστώσει κανείς εύκολα ότι για $\omega = \omega_0$, ο μεν ταλαντωτής διατηρεί σταθερή τη συνολική (κινητική+δυναμική) ενέργειά του, ενώ η διεγείρουσα δύναμη και η αντίσταση βρίσκονται σε απόλυτο συντονισμό έτσι ώστε ότι ενέργεια προσφέρει στιγμιαία στον ταλαντωτή η μια να την αφαιρεί η άλλη.

Αντίστοιχα στη συχνότητα συντονισμού που το πλάτος ταλάντωσης φτάνει στη μέγιστη τιμή του, το πλάτος ταλάντωσης $A\sqrt{\chi_1^2 + \chi_2^2}/2$ της ενέργειας που προσφέρεται από την εξωτερική δύναμη λαμβάνει τη μέγιστη τιμή της.

Ένας αρμονικός ταλαντωτής μπορεί να χρησιμοποιηθεί ως μια ανιχνευτική διάταξη για να εντοπιστεί ένα σήμα πολύ χαμηλής έντασης, μέσω του φαινομένου του συντονισμού. Τα ραδιόφωνα, ή οι τηλεοράσεις είναι κατ' ουσίαν τέτοιοι ηλεκτρικοί ταλαντωτές με πολύ στενό και επομένως υψηλή καμπύλη συντονισμού. Η ανι-

χνευτική τους δράση φανερώνεται ως επιλογή του εκάστοτε καναλιού. Και ένας κατάλληλος μηχανικός όμως ταλαντωτής θα μπορούσε να λειτουργήσει ως επιλογέας και ενισχυτής κάποιου μηχανικού σήματος που θα μπορούσε να τον διεγείρει. Η ιδέα αυτή προτάθηκε ως τρόπος ανίχνευσης των βαρυτικών κυμάτων. Τα βαρυτικά κύματα, την ύπαρξη των οποίων προβλέπει η Γενική θεωρία της Σχετικότητας, δημιουργούνται από κοσμικές πηγές υπερσυμπαγών αστροφυσικών σωμάτων καθώς αυτά κινούνται εξαιτίας της βαρύτητάς τους το ένα κοντά στο άλλο. Η δράση κάποιου βαρυτικού κύματος σε έναν αρμονικό ταλαντωτή λειτουργεί ως αρμονική διέγερση. Αν ο ταλαντωτής χαρακτηρίζεται από πολύ χαμηλό συντελεστή απόσβεσης, η σύμπτωση της ιδιοσυχνότητας του ταλαντωτή με τη συχνότητα ενός βαρυτικού κύματος θα μπορούσε να οδηγήσει τον ταλαντωτή σε μια αρκετά μεγάλου πλάτους ταλάντωση ώστε να είναι μετρήσιμη. Τέτοιου είδους ανιχνευτές –ονομαζόμενοι και μπάρες λόγω σχήματος– λειτουργούν αυτή τη στιγμή σε διάφορα ερευνητικά κέντρα και Πανεπιστήμια ανά τον κόσμο αλλά δεν έχουν καταφέρει ακόμη να δώσουν κάποιο απτό αποτέλεσμα ανίχνευσης. Ο λόγος είναι ότι προκειμένου να επιτύχουν υψηλή ενίσχυση της ταλάντωσης εκμεταλλευόμενοι το φαινόμενο του συντονισμού, έχουν τόσο στενό συντονισμό ώστε η πιθανότητα σύμπτωσης της συχνότητας συντονισμού με τη συχνότητα του κύματος να καθίσταται εξαιρετικά απίθανη.

*** Παράγοντας Ποιότητας Q:** Ένας αδιάστατος συντελεστής που χρησιμοποιείται σε ταλαντωτικές διατάξεις όπου επιδιώκεται ο συντονισμός είναι το κλάσμα

$$Q = \frac{\omega_0}{2\gamma}. \quad (6.36)$$

Το μέγεθος αυτό είναι τόσο μεγαλύτερο όσο πιο αποτελεσματικός ως προς το μέγεθος της απόκρισης είναι ο συντονισμός, αφού το αντίστροφο κλάσμα $2\gamma/\omega_0$ μετρά πόσο ασθενή απόσβεση παρουσιάζει ο ταλαντωτής και επομένως πόσο στενή και συνάμα ψηλή είναι η καμπύλη συντονισμού. Αν ένας ταλαντωτής που έχει υψηλό Q συντονιστεί και στη συνέχεια σβήσει η διέγερση, τότε ο χαρακτηριστικός χρόνος που θα χρειαστεί για να εκμηδενιστεί η ταλάντωσή του θα είναι

$$\tau = \frac{1}{\gamma} \simeq T\omega_0/(2\pi)\gamma = T\frac{Q}{\pi} \quad (6.37)$$

όπου T είναι η περίοδος ελεύθερης ταλάντωσης του ταλαντωτή και ω_0 είναι η συχνότητα ταλάντωσης του ταλαντωτή δίχως απόσβεση η οποία συμπίπτει προσεγγιστικά με τη συχνότητα ελεύθερης ταλάντωσης ενός ταλαντωτή με πολύ ασθενή απόσβεση. Μπορούμε λοιπόν εναλλακτικά να δούμε τον παράγοντα ποιότητας ενός συντονισμένου ταλαντωτή ως ένα μέτρο του χρόνου απόσβεσής του (η απώλειας της ενέργειάς του) σε σχέση με την περίοδο ταλάντωσης του. Για παράδειγμα ένα κρυστάλινο ποτήρι κρασιού αντηχεί για πολύ ώρα αφότου το κτυπήσει κανείς με ένα

σκληρό αντικείμενο, σε αντίθεση με ένα κοινό γυάλινο αντίστοιχου μεγέθους ποτήρι. Η διαφορά του υψηλού παράγοντα ποιότητας του πρώτου οφείλεται στην καθαρότητα του υλικού του κρυστάλλινου ποτηριού που του εξασφαλίζει χαμηλό συντελεστή απόσβεσης των ταλαντώσεων του “κύπελλου” του ποτηριού. Την ιδιότητα αυτή του ψηλού παράγοντα ποιότητας προσπαθούν κάποιες ερευνητικές ομάδες να επιτύχουν για τις μπάρες-ανιχνευτές βαρυτικών κυμάτων κατασκευάζοντάς τες από κρυσταλικά υλικά υψηλής καθαρότητας.

6.6 Συντονισμός ταλαντωτή χωρίς απόσβεση

Παρά το γεγονός ότι ένας ταλαντωτής χωρίς απόσβεση αποτελεί ένα μάλλον ιδεατό και μη ρεαλιστικό φυσικό σύστημα, θα θέλαμε να αναλύσουμε τον τρόπο που ένα τέτοιο σύστημα φτάνει στο συντονισμό, καθότι το σύστημα αυτό βάζει σε δοκιμασία τις μαθηματικές εκφράσεις που αφορούν στο συντονισμό ενός μηχανικού συστήματος. Όπως είπαμε και παραπάνω, ένας διεγερόμενος ταλαντωτής θα χάσει βαθμιαία την ελεύθερα αποσβηνόμενη λύση του (τη λύση της ομογενούς εξίσωσης) η οποία καθορίζεται από τις οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες και θα καταλήξει να ταλαντώνεται με την ταλάντωση που του υπαγορεύει η διεγείρουσα δύναμη, με τη συχνότητα που αυτή έχει. Στο όριο που ο συντελεστής απόσβεσης του ταλαντωτή τείνει στο μηδέν, ο μεν χρόνος μετάβασης καθίσταται άπειρος, το δε πλάτος της απόκρισης κατά το συντονισμό γίνεται και αυτό άπειρο. Πώς ακριβώς όμως γίνεται αυτή η μετάβαση σε άπειρο πλάτος;

Θα ξεκινήσουμε την ανάλυση με έναν ταλαντωτή φυσικής συχνότητας ω_0 , με συντελεστή απόσβεσης $\gamma = 0$, και διεγείρουσα δύναμη συχνότητας ω . Η διαφορική εξίσωση που θα διέπει το σύστημα θα είναι

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos \omega t. \quad (6.38)$$

Σύμφωνα με τα προηγούμενα η γενική λύση θα έχει τη μορφή

$$x(t) = C \cos(\omega_0 t) + S \sin(\omega_0 t) + A \cos(\omega t + \phi) \quad (6.39)$$

όπου ο συντελεστής A και η γωνία ϕ είναι τέτοια ώστε να ικανοποιούν την πλήρη διαφορική εξίσωση, ενώ οι συντελεστές C, S αφορούν στο ομογενές κομμάτι της λύσης και σχετίζονται άμεσα με τις αρχικές συνθήκες του συστήματος. Είναι εύκολο να δούμε είτε με απ' ευθείας αντικατάσταση της λύσης, είτε με τη χρήση των γενικών σχέσεων (6.12.6.7) που βρήκαμε παραπάνω, ότι

$$\phi = \begin{cases} 0, & \text{αν } \omega < \omega_0 \\ \pi, & \text{αν } \omega > \omega_0 \end{cases}$$

και

$$A = \frac{F_0/m}{|\omega_0^2 - \omega^2|}.$$

Οι δύο αυτές περιπτώσεις θα μπορούσαν να συγχωνευτούν σε μια αν θέταμε

$$\phi = 0, \text{ και } A = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2}.$$

Παρατηρήστε ότι η λύση αυτή παρουσιάζει μαθηματικά προβλήματα αν είναι $\omega_0 = \omega$. Θα δούμε όμως ότι δεν ισχύει το ίδιο για τη γενική λύση. Δεν είναι δύσκολο στο σημείο αυτό να δείξει κανείς ότι

$$C = x(0) - A, \text{ και } S = v(0)/\omega_0$$

οπότε συνολικά θα έχουμε

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{v(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2} [\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)] \quad (6.40)$$

Ο τελευταίος όρος αυτής της συνάρτησης είναι ο προηγούμενος μαθηματικά προβληματικός όρος κατάλληλα τροποποιημένος ώστε να αρθεί πλήρως η ανωμαλία στο όριο $\omega \rightarrow \omega_0$. Για να γίνει αυτό ακόμη πιο απτό θα ξαναγράψουμε την προηγούμενη σχέση στη μορφή

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{v(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) - \frac{F_0/m}{\omega_0 + \omega} \frac{\cos(\omega t) - \cos(\omega_0 t)}{\omega - \omega_0}. \quad (6.41)$$

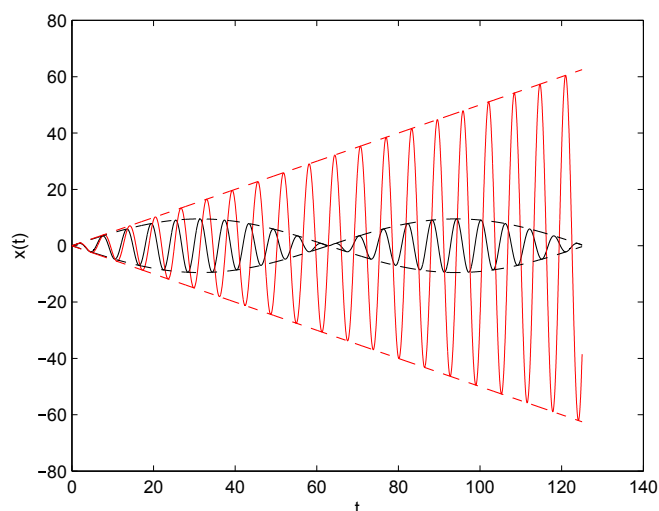
Στο όριο $\omega \rightarrow \omega_0$ το τελευταίο απροσδιόριστο κλάσμα είναι απλώς η παράγωγος

$$\left. \frac{d \cos(\omega t)}{d\omega} \right|_{\omega=\omega_0} = -t \sin(\omega_0 t).$$

Συνεπώς η ακριβής λύση του προβλήματος αν η συχνότητα της διέγερσης συμπίπτει με τη συχνότητα του ταλαντωτή, είναι

$$x(t) = x(0) \cos(\omega_0 t) + \frac{v(0)}{\omega_0} \sin(\omega_0 t) + \frac{F_0}{2m\omega_0} t \sin(\omega_0 t). \quad (6.42)$$

Ο τελευταίος όρος δείχνει ακριβώς τον τρόπο που ο ταλαντωτής συντονίζεται. Οι δύο πρώτοι όροι σχηματίζουν την ομογενή λύση η οποία δεν σβήνει με την πάροδο του χρόνου, αλλά γίνεται ολοένα και πιο ασήμαντη συγκριτικά, αφού η ίδια περιγράφει μια φραγμένη ταλάντωση σε αντίθεση με τον συντονιστικό τρίτο όρο που μεγαλώνει απεριόριστα. Μάλιστα μαθαίνουμε ότι η αύξηση του πλάτους εξελίσσεται γραμμικά με το χρόνο (όρος $F_0 t / (2m\omega_0)$). Επομένως έτσι καθίσταται άπειρο το πλάτος της ταλάντωσης μετά από άπειρο χρόνο.



Σχήμα 6.8: Στο διάγραμμα φαίνεται η χρονική εξέλιξη ενός ταλαντωτή χωρίς αναλωτικό όρο υπό την επίδραση μιας αρμονικής διέγερσης. Ο ταλαντωτής χαρακτηρίζεται από φυσική συχνότητα $\omega_0 = 1$, ενώ οι αρχικές συνθήκες που έχουν χρησιμοποιηθεί είναι $x(0) = v(0) = 0$. (i) Μαύρη συνεχής καμπύλη: ο ταλαντωτής διεγείρεται από αρμονική δύναμη συχνότητας $\omega = 1.1$. Το περίγραμμα της καμπύλης (διακεκομμένη μαύρη καμπύλη) περιγράφεται και αυτό από μια αρμονική ταλάντωση συχνότητας $(\omega - \omega_0)/2 = 0.05$. (ii) Κόκκινη συνεχής καμπύλη: Ο ταλαντωτής διεγείρεται από αρμονική δύναμη συχνότητας $\omega = 1$. Το περίγραμμα της καμπύλης (διακεκομμένη κόκκινη γραμμή) είναι η γραμμική συνάρτηση $F_0 t/(2m\omega_0)$. Στη δεύτερη περίπτωση το πλάτος μεγαλώνει επ' άπειρω.

Από μαθηματικής άποψης ο τελευταίος όρος της παραπάνω έκφρασης δεν είναι τίποτε άλλο από τη μεταμόρφωση της μη ομογενούς λύσης, αν η συνήθης λύση αυτής $\cos(\omega t)$ πάψει να είναι γραμμικά ανεξάρτητη από την ομογενή λύση $\cos(\omega_0 t)$, δηλαδή όταν το ω γίνει ίδιο με το ω_0 . Η μικρή διαφορά μεταξύ των δύο λύσεων, που θα μπορούσε να εκφραστεί μέσω της παραγώγου της λύσης ως προς ω , θα παίξει πλέον το ρόλο της νέας μη ομογενούς λύσης.

6.7 * Ροή ενέργειας στην κατάσταση στατιστικής ισορροπίας

Είδαμε ότι ο ρυθμός μεταβολής της ενέργειας του ταλαντωτή είναι:

$$\frac{dE}{dt} = -2m\gamma\dot{x}^2 + F_0\dot{x} \cos(\omega t). \quad (6.43)$$

Αν τώρα ορίσουμε ως μέση τιμή μιας ποσότητας $A(t)$ τη συνάρτηση

$$\langle A(t) \rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_t^{t+T} A(t') dt'}{T}, \quad (6.44)$$

τότε εφόσον η ενέργεια παραμένει πεπερασμένη, η μέση τιμή του ρυθμού μεταβολής της ενέργειας θα πρέπει να μηδενίζεται:

$$\left\langle \frac{dE}{dt} \right\rangle = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{\int_t^{t+T} (dE/dt') dt'}{T} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{E(t+T) - E(t)}{T} = 0, \quad (6.45)$$

όπως επίσης και οι μέσες τιμές

$$\langle \cos(\omega t) \rangle = \langle \sin(\omega t) \rangle = 0,$$

όντας παράγωγοι φραγμένων συναρτήσεων. Ισχύει επίσης η πολύ χρήσιμη σχέση ότι

$$\langle \cos^2(\omega t) \rangle = \langle \sin^2(\omega t) \rangle = 1/2,$$

αφού είναι $\cos^2(\omega t) = (1 + \cos(2\omega t))/2$ και προφανώς η μέση τιμή μιας σταθερής συνάρτησης είναι η σταθερή αυτή τιμή της συνάρτησης.

Έτσι, λαμβάνοντας τη μέση τιμή της (6.43), συμπεραίνουμε ότι η μέση ενέργεια που απορροφάται από τον ταλαντωτή ανά μονάδα χρόνου

$$I(\omega) = \langle F_0 \dot{x} \cos(\omega t) \rangle, \quad (6.46)$$

θα ισούται με το μέσο ρυθμό ανάλωσης ενέργειας από τον ταλαντωτή:

$$D(\omega) = 2m\gamma \langle \dot{x}^2 \rangle. \quad (6.47)$$

Αλλάζοντας την τιμή του συντελεστή τριβής γ , οι μέσες διακυμάνσεις των ταχυτήτων θα μεταβληθούν με τέτοιο τρόπο ώστε να είναι πάντα $I(\omega) = D(\omega)$. Ένα ενδιαφέρον ερώτημα που προκύπτει είναι αν όλες οι συχνότητες του ταλαντωτή διεγερθούν ισότιμα, δηλαδή, με ίδια πλάτη δυνάμεων διεγερσης, ποια θα είναι η μέση ενέργεια που απορροφά και αποβάλλει ο ταλαντωτής και σε ποιο βαθμό αυτή σχετίζεται με το συντελεστή τριβής. Γνωρίζουμε ότι οι διακυμάνσεις των πλατών και των ταχυτήτων θα είναι πολύπλοκες συναρτήσεις των γ, ω, ω_0 , οπότε θα περίμενε κανείς ότι το συνολικό αποτέλεσμα από διεγέρσεις διαφορετικών συχνοτήτων –αλλά ίδιας έντασης– θα είναι συνάρτηση του γ . Δεν είναι όμως όπως θα δείξουμε, για ταλαντωτές χαμηλής απόσβεσης ($\gamma \ll \omega_0$), η συνολική ενέργεια που απορροφάται από τον ταλαντωτή εξαιτίας ισότιμων διεγέρσεων όλων των συχνοτήτων, και επομένως και η συνολική ενέργεια που καταναλίσκεται από τον διεγειρόμενο ταλαντωτή, είναι κατά προσέγγιση ανεξάρτητη του συντελεστή απόσβεσης.

Θα υπολογίσουμε τα $I(\omega)$ και $D(\omega)$, που όπως είπαμε είναι ίσα, και στη συνέχεια θα τα ολοκληρώσουμε σε όλες τις συχνότητες, θεωρώντας ότι ο ταλαντωτής μας δειγνύεται από πολλές εξωτερικές διεγέρσεις όλες πλάτους F_0 αλλά διαφορετικής συχνότητας ω (φανταστείτε ένα μοριακό δίπολο το οποίο υπόκειται σε ακτινοβολία

λευκού χρώματος, δηλαδή φάσματος μη εξαρτώμενου από τη συχνότητα). Αφού $I = D$ αρκεί να υπολογίσουμε το

$$\int_0^{\infty} D(\omega) d\omega . \quad (6.48)$$

Όμως

$$\begin{aligned} D(\omega) &= 2m\gamma \langle \dot{x}^2 \rangle \\ &= 2m\gamma \frac{(F_0/m)^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} \langle [\omega \sin(\omega t + \phi)]^2 \rangle \\ &= \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma\omega^2}{(\omega^2 - \omega_0^2)^2 + (2\gamma\omega)^2} . \end{aligned}$$

Ο υπολογισμός του ολοκληρώματος της παραπάνω συνάρτησης σε όλες τις συχνότητες ω από το 0 έως το ∞ , αν και εφικτός, είναι πολύπλοκος. Θα καταφύγουμε λοιπόν σε ένα προσεγγιστικό υπολογισμό ο οποίος είναι τόσο ακριβέστερος όσο ο συντελεστής γ είναι πολύ μικρότερος από την ω_0 . Στην περίπτωση αυτή η κυρίως απορρόφηση ενέργειας συμβαίνει πολύ κοντά στο συντονισμό· συγκεκριμένα όταν η διαφορά της συχνότητας του διεγέρτη και του ταλαντωτή είναι τάξης γ , αφού ο συντελεστής γ χαρακτηρίζει το εύρος της καμπύλης συντονισμού. Για το λόγο αυτό θα αντικαταστήσουμε την παραπάνω πολύπλοκη συνάρτηση στο ολοκλήρωμα (6.48) με την

$$\begin{aligned} \tilde{D}(\omega) &= \frac{F_0^2}{m} \frac{\gamma\omega_0^2}{(2\omega_0)^2(\omega - \omega_0)^2 + (2\gamma\omega_0)^2} \\ &= \frac{F_0^2}{4m} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} . \end{aligned} \quad (6.49)$$

Το σκεπτικό που ακολουθήσαμε στην κατασκευή αυτής της νέας συνάρτησης είναι ότι μόνο η διαφορά $(\omega - \omega_0)$,⁹ που υπήρχε στον παρονομαστή στην αρχική σχέση (6.48), είναι ευαίσθητη σε μικρές μεταβολές της ω γύρω από την τιμή ω_0 . Όλοι οι άλλοι όροι ω στη σχέση (6.48) διαφοροποιούνται πολύ λίγο αν $\omega \simeq \omega_0$, και όταν αυτοί οι όροι διαφοροποιούνται πολύ, βρισκόμαστε ήδη μακριά από το συντονισμό οπότε η αντίστοιχη συνεισφορά στο ολοκλήρωμα είναι αμελητέα. Η νέα αυτή προσεγγιστική συνάρτηση $\tilde{D}(\omega)$ που περιγράφει το ρυθμό πρόσληψης και απώλειας ενέργειας από τον ταλαντωτή, είναι γνωστή ως Λορεντζιανή συνάρτηση¹⁰ και χρησιμοποιείται για να περιγράψει διάφορες στατιστικές κατανομές και πιο συγκεκριμένα το προφίλ διαφόρων φασματικών γραμμών. Στο διάγραμμα 6.9 φαίνεται η διαφορά μεταξύ της Λορεντζιανής προσεγγιστικής καμπύλης $\tilde{D}(\omega)$ και της πραγματικής κατανομής

⁹Ο όρος $(\omega_0^2 - \omega^2)$ γράφτηκε προσεγγιστικά ως $2\omega_0(\omega_0 - \omega)$ για $\omega \simeq \omega_0$.

¹⁰Προς τιμήν του Hendrik Lorentz [1858-1923].

$D(\omega)$.

Αν τώρα ολοκληρώσουμε την $\tilde{D}(\omega)$ σε όλες τις συχνότητες από 0 έως ∞ θα έχουμε:

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\infty} D(\omega) d\omega &\simeq \int_0^{\infty} \tilde{D}(\omega) d\omega \\
 &= \frac{F_0^2}{4m} \int_0^{\infty} \frac{\gamma}{(\omega - \omega_0)^2 + \gamma^2} d\omega \\
 &= \frac{F_0^2}{4m} \int_{-\omega_0}^{\infty} \frac{\gamma}{x^2 + \gamma^2} dx \\
 &\simeq \frac{F_0^2}{4m} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{x^2 + \gamma^2} dx \\
 &= \frac{F_0^2}{4m} \pi .^{11}
 \end{aligned} \tag{6.50}$$

Στην προτελευταία σχέση αλλάξαμε το κάτω όριο της ολοκλήρωσης από $-\omega_0$ σε $-\infty$. Αν και δεν είναι ακριβής η τιμή του ολοκληρώματος μετά από αυτή την αλλαγή, η διαφοροποίηση που συνεπάγεται αυτή η προσέγγιση είναι μηδαμινή, καθότι για $\gamma \ll \omega_0$ το κομμάτι του ολοκληρώματος (από $-\infty$ ως $-\omega_0$) που προσθέσαμε για να λάβουμε ένα εύκολα υπολογίσιμο αποτέλεσμα είναι μικρότερο από

$$\int_{-\infty}^{-\omega_0} \frac{\gamma dx}{x^2} = \frac{\gamma}{\omega_0} \ll 1 .^{12}$$

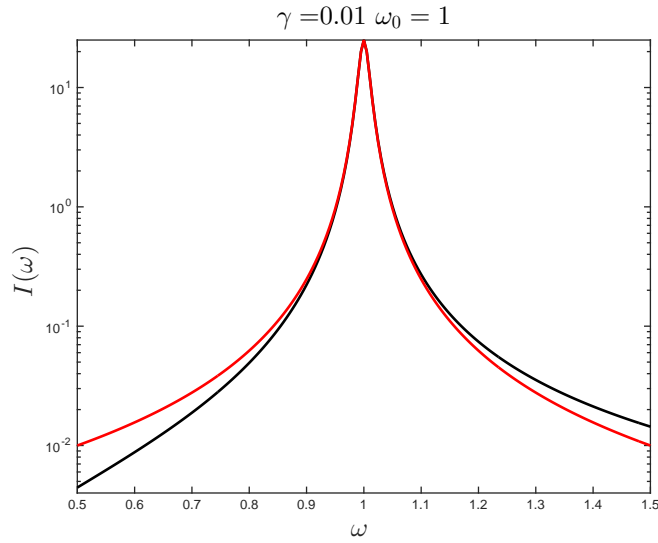
Το αποτέλεσμα είναι πολύ ενδιαφέρον, αφού η τιμή των ω_0 και γ δεν εμφανίζεται καθόλου στην τελική έκφραση, γεγονός το οποίο δηλώνει μια καθολικότητα, αν και προσεγγιστική. Αν ένας ταλαντωτής χαμηλής απόσβεσης, λοιπόν, διεγείρεται με ίδιες αρμονικές δυνάμεις σε όλες τις συχνότητες, αυτός απορροφά και απελευθερώνει υπό μορφή θερμότητας ίδια ποσότητα ενέργειας ανά μονάδα χρόνου, ανεξαρτήτως της ιδιοσυχνότητάς του και του συντελεστή απόσβεσής του! Το σχετικό σφάλμα της παραπάνω έκφρασης για την συνολική απορρόφηση είναι μικρότερο του 2% για $\gamma/\omega_0 < 0.1$ δηλαδή για συστήματα με παράγοντα ποιότητας $Q > 5$.¹³

Το μόνο που χρειάζεται για τον υπολογισμό του ρυθμού απορρόφησης/απώλειας είναι το μέτρο της διεγείρουσας δύναμης και η μάζα του ταλαντωτή. Οι διαστά-

¹¹Το ολοκλήρωμα υπολογίζεται πολύ εύκολα, αν θεωρήσουμε την αντικατάσταση $x = \gamma \tan \phi$.

¹²Το ότι είναι ασήμαντο αυτό το κομμάτι φαίνεται καθαρά αν το συγκρίνουμε με το π που είναι το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος από το $-\infty$ ως το $+\infty$.

¹³Στη φύση συναντώνται πολύ ψηλά Q . Στις υψηλές ενέργειες και σε οπτικά laser ο παράγοντας ποιότητας είναι της τάξης $Q = \mathcal{O}(10^{10})$. Ακόμη και κλασικά μακροσκοπικά αστροφυσικά συστήματα έχουν υψηλά Q . Για παράδειγμα το Q των ταλαντώσεων των θαλασσών λόγω της παλιροϊκής διεγερσής των από τη Σελήνη έχει εκτιμηθεί ότι είναι $Q \approx 13$, ενώ των ταλαντώσεων των εξωτερικών πλανητών, οι οποίοι είναι ρευστοί, εκτιμάται ότι κυμαίνεται μεταξύ $10^4 < Q < 10^6$.



Σχήμα 6.9: Σύγκριση του ρυθμού απορρόφησης/απώλειας ενέργειας $I(\omega) = D(\omega)$, συναρτήσει της συχνότητας διέγερσης ω , σύμφωνα με την ακριβή έκφραση (6.47) (μαύρη γραμμή) και την Λορεντζιανή προσέγγιση (6.49) (κόκκινη γραμμή) για $\gamma = 0.01$ και $\omega_0 = 1$. Προσέξτε ότι ο κατακόρυφος άξονας είναι λογαριθμικός, οπότε η διαφοροποίηση αν και φαίνεται σημαντική για $|\omega - \omega_0| \simeq 0.1 = 10\gamma$, ο ρυθμός απορρόφησης έχει πέσει σε αυτές κατά τουλάχιστον έναν παράγοντα 10 σε σχέση με τη μέγιστη τιμή της κορυφής. Η Λορεντζιανή κατανομή είναι συμμετρική γύρω από το ω_0 , όχι όμως και η πραγματική καμπύλη του ρυθμού απορρόφησης.

σεις του τελικού αποτελέσματος είναι $[M \cdot L^2 \cdot T^{-4}]$, δηλαδή ενέργεια ανά μονάδα χρόνου στο τετράγωνο· όχι ενέργεια ανά μονάδα χρόνου όπως θα περίμενε κανείς από έναν ρυθμό απορρόφησης ενέργειας. Η αντίφαση αυτή προκλήθηκε από την ολοκλήρωση σε όλες τις συχνότητες και αίρεται αν αντικαταστήσουμε το F_0 με μια άλλη ποσότητα $F_0 T$ (που έχει διάσταση δύναμης επί χρόνου) και μετρά τη σταθερή κατανομή της δύναμης σε κάθε συχνότητα

$$F_0 T = \frac{dF}{d\omega} . \quad (6.51)$$

Με την αντικατάσταση αυτή, το αντίστοιχο αποτέλεσμα $\pi F_0^2 T / (4m)$, μετρά πραγματι ρυθμό απορρόφησης ενέργειας ανά μονάδα χρόνου από τον ταλαντωτή.

Έτσι αν ένας ταλαντωτής, μάζας m , τοποθετηθεί μέσα σε μια δεξαμενή θερμοτήτας και διεγερθεί στοχαστικά από το περιβάλλον του με τυχαίες δυνάμεις κρούσης από τα μόρια του περιβάλλοντός του με μέση τιμή δυνάμεων αλληλεπίδρασης που ακολουθούν τη στατιστική κατανομή

$$\langle F(t)F(t') \rangle = F_0^2 T \delta(t - t') , \quad ^{14}$$

αυτός θα διεγερθεί ομοιόμορφα σε όλες τις συχνότητες και τελικά θα απορροφά

¹⁴Η δέλτα εξάρτηση δηλώνει την ανεξαρτησία δύο διαδοχικών κρούσεων. Η ποσότητα F_0 σχετίζεται με το μέγεθος των δυνάμεων κρούσης, ενώ το T με τη χρονική κλίμακα του ρυθμού των κρούσεων

ενέργεια από τη θερμική δεξαμενή με σταθερό ρυθμό $\pi F_0^2 T / (4m)$ και θα τον αποδίδει πάλι υπό μορφή θερμότητας πίσω στην δεξαμενή θερμότητας.

Όταν ο ταλαντωτής φτάσει σε θερμική ισορροπία με τη δεξαμενή, μέσα στην οποία είναι τοποθετημένος, θα έχει μέση κινητική ενέργεια ίση με

$$\langle \frac{1}{2} m \dot{x}^2 \rangle = \frac{1}{2} k T_\theta, \quad (6.52)$$

όπου T_θ η θερμοκρασία της δεξαμενής και k η σταθερά του Boltzman. Η ενέργεια αυτή δεν θα πρέπει να συγγέεται με την ενέργεια που προσροφάται και αποβάλλεται συνεχώς από τον ταλαντωτή, αλλά είναι η ενέργεια που διατηρεί κατά μέσο όρο ο ταλαντωτής. Έτσι παρόλο που η ποσότητα $D(\omega)$ εκφράζεται ως $2m\gamma\langle\dot{x}^2\rangle$ (βλ. σχέση (6.47)), δηλαδή είναι $2\gamma k T_\theta$, αυτό δεν σημαίνει ότι ο ρυθμός αποβολής ενέργειας είναι σταθερός και ανεξάρτητος του ω , αλλά ότι υπάρχει κάποια συχνότητα ω της διεγείρουσας δύναμης που αντιστοιχεί σε αυτή την τιμή του ρυθμού απώλειας. Στην πραγματικότητα, ο ταλαντωτής διεγείρεται από όλες τις συχνότητες με διαφορετικό πλάτος κάθε φορά και έχει αντίστοιχη απώλεια ενέργειας σε κάθε συχνότητα. Η μέση τιμή της διέγερσής του, όμως, εξαρτάται από τη θερμοκρασία της δεξαμενής. Η ποσότητα $F_0^2 T \pi / (4m)$ μετράει τη συνολική ροή ενέργειας προς και από τον ταλαντωτή από το θερμικό του περιβάλλον, ενώ η ποσότητα $2\gamma k T_\theta$ τη ροή ενέργειας ενός ταλαντωτή που κινείται με κινητική ενέργεια $k T_\theta / 2$, όσο, δηλαδή, η μέση ενέργεια αυτού μέσα στη δεξαμενή θερμότητας.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 6

- Όταν ένας αρμονικός ταλαντωτής με γραμμική απόσβεση διεγείρεται με αρμονική δύναμη οδηγείται τελικά (μετά από μια μεταβατική κατάσταση χρονικής διάρκειας $\sim 1/\gamma$) σε μια αμείωτη αρμονική ταλάντωση συχνότητας ίδιας με αυτή της διεγείρουσας δύναμης. Το πλάτος της ταλάντωσης και η διαφορά φάσης σε σχέση με τη διέγερση είναι ομαλές συναρτήσεις της συχνότητας της διέγερσης ω , της ιδιοσυχνότητας του ταλαντωτή ω_0 και του συντελεστή απόσβεσης γ (κωδωνοειδής καμπύλη συντονισμού). Για $\gamma \ll \omega_0$ και $\omega \simeq \omega_0$ το πλάτος καθίσταται μέγιστο και η διαφορά φάσης $\pi/2$ (συντονισμός). Όσο πιο μικρό είναι το κλάσμα γ/ω_0 , τόσο πιο ψηλή και στενή είναι η καμπύλη συντονισμού.
- Οι αρχικές συνθήκες του ταλαντωτή «ξεχνιούνται» κατά τη διάρκεια

και έχει εισαχθεί για να ισορροπήσει τις μονάδες, δεδομένου ότι η συνάρτηση $\delta(t)$ έχει μονάδες αντιστρόφου χρόνου. Οι δέλτα-κατανομές έχουν φάσμα ανεξάρτητο της συχνότητας (βλ. μετασχηματισμό Fourier στο εδάφιο 6.4). Στη θεώρηση αυτή για τις μοριακές κρούσεις ο παράγοντας T με διαστάσεις χρόνου που βάλαμε προωτύτερα (σχέση (6.51)) με το χέρι προκειμένου η τελική έκφραση για το ρυθμό απορρόφησης/απώλειας ενέργειας να έχει σωστές διαστάσεις, εισέρχεται τώρα με φυσικό τρόπο.

της μεταβατικής περιόδου και η τελική ταλάντωση δεν εξαρτάται από αυτές.

- Η λύση επιτυγχάνεται εύκολα λύνοντας μια αλγεβρική εξίσωση –αντί μιας διαφορικής εξίσωσης– αρκεί να εισάγει κανείς μια υποθετική μιγαδική λύση $e^{i\omega t}$, της ίδιας δηλαδή μορφής με τη διεγείρουσα δύναμη.
- Η απόκριση ενός αρμονικού ταλαντωτή σε χρονομεταβαλλόμενη –αλλά όχι αρμονική– διέγερση υπολογίζεται από την επαλληλία των αποκρίσεων στις συνιστώσες Fourier της εν λόγω διέγερσης.
- Η ενέργεια κατά τη διάρκεια της διέγερσης «πηγαινοέρχεται» μεταξύ της διεγείρουσας πηγής και του ταλαντωτή, ενώ η τριβή συνεχώς (όχι με σταθερό ρυθμό όμως) αφαιρεί ενέργεια από το σύστημα.
- Η οριακή περίπτωση συντονισμού, χωρίς απόσβεση υπολογίζεται από το όριο της φυσικής λύσης (με δεδομένη αρχική θέση/ταχύτητα) και όχι από αυτό της μαθηματικής λύσης που οδηγεί σε απροσδιοριστία.
- Ένας αρμονικός ταλαντωτής σε στοχαστική διέγερση απορροφά κατά προσέγγιση ενέργεια με σταθερό ρυθμό ανεξάρτητο από τις παραμέτρους ω_0, γ του ταλαντωτή.

7

Διανύσματα

7.1 Τι είναι τα διανύσματα

Μέχρι τώρα έχουμε εξετάσει τις επιπτώσεις των νόμων του Νεύτωνα σε ένα μονοδιάστατο κόσμο. Τώρα θα αναπτύξουμε τη μηχανική στο χώρο των τριών διαστάσεων. Είναι ιδιαίτερος χρήσιμο και αποτελεσματικό να βασιστούμε στο διανυσματικό λογισμό για να περιγράψουμε και στη συνέχεια να μελετήσουμε τη θεωρία αυτή. Στο παρόν κεφάλαιο θα εξηγήσουμε τι είναι τα διανύσματα και το λόγο που οι φυσικοί νόμοι μπορούν να γραφούν σε διανυσματική μορφή. Ο διανυσματικός λογισμός είναι αποτέλεσμα των εργασιών των Josiah Willard Gibbs και Oliver Heaviside¹.

Με το διανυσματικό λογισμό εισάγονται νέα σύμβολα στη φυσική και διαμορφώνεται έτσι μια νέα γλώσσα με την οποία μπορούμε να διατυπώσουμε τους φυσικούς νόμους. Μπορεί να σκέφτεστε ότι η εισαγωγή νέων συμβόλων είναι ένα τυπικό ή απλώς αισθητικό θέμα και ότι δεν έχει ιδιαίτερη ουσία, δεδομένου ότι τα ίδια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν ακόμη και χωρίς τη χρήση των νέων αυτών συμβόλων. Για παράδειγμα ο Maxwell κατασκεύασε τις εξισώσεις του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού, εξήγησε τους γνωστούς στην εποχή του νόμους των ηλεκτρικών και μαγνητικών φαινομένων, προέβλεψε με τις εξισώσεις του την ύπαρξη ηλεκτρομα-

¹ Ο Gibbs παρουσιάζει το 1898 τα διανύσματα σε ένα 85σέλιδο εγχειρίδιο για χρήση από τους φοιτητές του. Ο Heaviside παρουσιάζει τον λογισμό αυτό το 1892 στο άρθρο “*On the forces, stresses, and fluxes of energy in the electromagnetic field*”, Philosophical Transactions of the Royal Society of London A 183:423–80. Ο μαθητής του πρώτου Edwin Bidwell Wilson δημοσιεύει το 1901 το “*Vector Analysis: A Text-book for the Use of Students of Mathematics and Physics, based upon the lectures of Willard Gibbs*” το οποίο ακόμα και σήμερα χρησιμοποιείται ως εγχειρίδιο για την εκμάθηση του διανυσματικού λογισμού.

γνητικών κυμάτων δίχως τη χρήση διανυσμάτων. Μια τέτοια θεώρηση παραβλέπει όμως ότι όπως η γραφή είναι ουσιαστικό συστατικό για την ανάπτυξη της σκέψης έτσι και το είδος ή ακόμα και η τεχνολογία της γραφής έχει καίρια σημασία. Σκεφθείτε για παράδειγμα τη σημασία της εισαγωγής του συμβόλου της παραγώγισης ή της ολοκλήρωσης στη ανάπτυξη της φυσικής. Όσο δε η αντίληψή μας για το φυσικό κόσμο ωριμάζει, μαζί εξελίσσεται και η μαθηματική γραφή· γίνεται περιεκτικότερη και απλούστερη και συνεπώς κομψότερη. Θα έλεγε μάλιστα κανείς ότι τα μαθηματικά δεν είναι απλώς η γλώσσα της φυσικής, όπως είπε ο Γαλιλαίος, αλλά τα ίδια τα φυσικά φαινόμενα υπαγορεύουν τα μαθηματικά και διαμορφώνουν τη γραφή που χρησιμοποιούμε για να τα εξηγήσουμε.

Ο λόγος που χρησιμοποιούμε τα διανύσματα είναι διότι μέσω αυτών, οι νόμοι της φυσικής παίρνουν μορφή που είναι ανεξάρτητη από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς και το φυσικό περιεχόμενο των νόμων προσδιορίζεται χωρίς να χρειάζεται να αναφερθούμε σε κάποιο σύστημα αναφοράς. Για να καταλάβουμε καλύτερα την παραπάνω πρόταση ας θεωρήσουμε την κίνηση ενός σωματιδίου μάζας m , υπό την επίδραση δύναμης με συνιστώσες (F_x, F_y, F_z) σε ένα αδρανειακό καρτεσιανό σύστημα αναφοράς με συντεταγμένες (x, y, z) . Η κίνηση του σωματιδίου εξελίσσεται σύμφωνα με τις δυναμικές εξισώσεις του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = F_x, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = F_y, \quad m \frac{d^2z}{dt^2} = F_z. \quad (7.1)$$

Η παράγωγος υπολογίζεται επί των χρονοεξαρτημένων συντεταγμένων $x(t), y(t), z(t)$ της θέσης του σωματιδίου. Επιλέγουμε τώρα ένα άλλο αδρανειακό σύστημα αναφοράς (x', y', z') με διαφορετικό προσανατολισμό. Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα απαιτεί η κίνηση του ίδιου σωματιδίου να ικανοποιεί τις εξισώσεις:

$$m \frac{d^2x'}{dt^2} = F_{x'}, \quad m \frac{d^2y'}{dt^2} = F_{y'}, \quad m \frac{d^2z'}{dt^2} = F_{z'}, \quad (7.2)$$

όπου $(F_{x'}, F_{y'}, F_{z'})$ οι συνιστώσες της δύναμης στο νέο σύστημα αναφοράς. Σημειώνουμε ότι για να γράψουμε το νόμο του Νεύτωνα στο νέο σύστημα αναφοράς έχουμε υποθέσει ότι η τιμή της μάζας, m , δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς, δηλαδή η τιμή της αδρανειακής μάζας δεν εξαρτάται από την διεύθυνση της κίνησης. Όταν η αριθμητική τιμή ενός φυσικού μεγέθους δεν εξαρτάται από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς το φυσικό μέγεθος λέγεται *βαθμωτό* (scalar). Τα βαθμωτά φυσικά μεγέθη προσδιορίζονται από ένα μόνο πραγματικό αριθμό και ο αριθμός αυτός είναι ο ίδιος ανεξαρτήτως του προσανατολισμού του συστήματος αναφοράς. Η μάζα, το φορτίο, η θερμοκρασία και η πίεση σε κάποιο σημείο στο χώρο, είναι όλα παραδείγματα βαθμωτών μεγεθών.

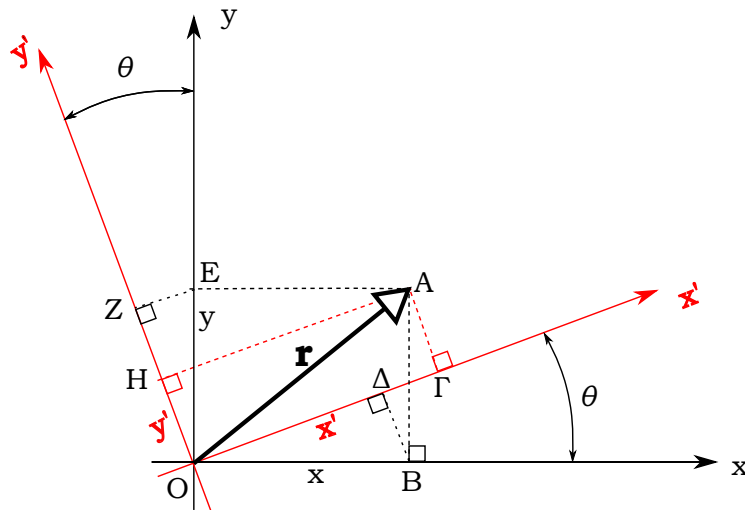
Στις εξισώσεις (7.1) και (7.2) οι συντεταγμένες του σωματιδίου διαφέρουν στα δύο συστήματα αναφοράς αλλά και οι συνιστώσες των δυνάμεων που ασκούνται

είναι διαφορετικές. Εγείρεται λοιπόν το ερώτημα αν η κίνηση του σωματιδίου που πρόβλεπεται από τις (7.1) και (7.2) είναι η ίδια. Αν δεν είναι ίδια τότε ο νόμος του Νεύτωνα θα εξαρτάται από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς και αντιθέτως αν είναι ίδια τότε ο νόμος του Νεύτωνα δεν θα εξαρτάται από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς.

Για να εξετάσουμε πιο διεξοδικά το ζήτημα θα θεωρήσουμε αρχικά ότι το δεύτερο σύστημα αναφοράς προκύπτει από το πρώτο με στροφή κατά σταθερή γωνία θ περί τον άξονα z . Συνεπώς, οι συντεταγμένες στα δύο συστήματα συνδέονται μέσω του (γραμμικού) μετασχηματισμού στροφής (βλ. Σχήμα 7.1):

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\y' &= y \cos \theta - x \sin \theta, \\z' &= z.\end{aligned}\tag{7.3}$$

Διαφορίζοντας την (7.3) μία φορά προκύπτει ότι οι συντεταγμένες της ταχύτητας



Σχήμα 7.1: Όπως φαίνεται από το σχήμα $x' = OG = OD + DG = OB \cos \theta + AB \sin \theta = x \cos \theta + y \sin \theta$. Όμοια $y' = OH = OZ - ZH = OE \cos \theta - AE \sin \theta = y \cos \theta - x \sin \theta$.

του σωματιδίου στα δύο συστήματα

$$v_x = \frac{dx}{dt}, v_y = \frac{dy}{dt}, v_z = \frac{dz}{dt}, v_{x'} = \frac{dx'}{dt}, v_{y'} = \frac{dy'}{dt}, v_{z'} = \frac{dz'}{dt}\tag{7.4}$$

μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον εξής κανόνα:

$$\begin{aligned}v_{x'} &= v_x \cos \theta + v_y \sin \theta, \\v_{y'} &= v_y \cos \theta - v_x \sin \theta, \\v_{z'} &= v_z,\end{aligned}\tag{7.5}$$

και διαφορίζοντας την (7.5) άλλη μία φορά προκύπτει ότι οι συνισταμένες της επιτάχυνσης του σωματιδίου

$$a_x = \frac{d^2x}{dt^2}, \quad a_y = \frac{d^2y}{dt^2}, \quad a_z = \frac{d^2z}{dt^2}, \quad a_{x'} = \frac{d^2x'}{dt^2}, \quad a_{y'} = \frac{d^2y'}{dt^2}, \quad a_{z'} = \frac{d^2z'}{dt^2} \quad (7.6)$$

μετασχηματίζονται όπως ακριβώς και οι ταχύτητες:

$$\begin{aligned} a_{x'} &= a_x \cos \theta + a_y \sin \theta, \\ a_{y'} &= a_y \cos \theta - a_x \sin \theta, \\ a_{z'} &= a_z. \end{aligned} \quad (7.7)$$

Δηλαδή οι συνιστώσες των ταχυτήτων και των επιταχύνσεων μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο που μετασχηματίζονται οι συνιστώσες των θέσεων.

Αν η κίνηση του σωματιδίου είναι η ίδια και στα δύο συστήματα αναφοράς τότε οι συντεταγμένες της τροχιάς στα δύο συστήματα αναφοράς πρέπει να συνδέονται κάθε χρονική στιγμή με τις σχέσεις (7.3) και συνεπώς και οι επιταχύνσεις με τις σχέσεις (7.7). Πολλαπλασιάζοντας την (7.7) με τη μάζα m και κάνοντας χρήση του νόμου του Νεύτωνα (7.1) και (7.2) όπως αποτυπώνεται σε κάθε σύστημα αναφοράς προκύπτει ότι για να είναι η τροχιά ίδια και στα δύο συστήματα οι συνιστώσες της δύναμης θα πρέπει να μετασχηματίζονται και αυτές με τον ίδιο κανόνα:

$$\begin{aligned} F_{x'} &= F_x \cos \theta + F_y \sin \theta, \\ F_{y'} &= F_y \cos \theta - F_x \sin \theta, \\ F_{z'} &= F_z. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Δηλαδή οι συνιστώσες της δύναμης θα πρέπει να μετασχηματίζονται στις στροφές ακριβώς όπως και οι συντεταγμένες της θέσης. Όταν συμβαίνει αυτό το φυσικό περιεχόμενο των νόμων του Νεύτωνα είναι ανεξάρτητο από τον προσανατολισμό του συστήματος αναφοράς. Το ίδιο συμπέρασμα θα προέκυπτε αν είχαμε εκτελέσει ένα γενικό μετασχηματισμό στροφής γύρω από οποιοδήποτε άξονα. Ο μετασχηματισμός αυτός θα είχε πιο περίπλοκη μορφή από τον (7.3), όπως θα δούμε στο επόμενο μάθημα, αλλά θα ήταν και αυτός γραμμικός ως προς τις διάφορες συνιστώσες και θα οδηγούμασταν, ακολουθώντας τα ίδια βήματα, και πάλι στο συμπέρασμα ότι για να είναι οι επιπτώσεις του νόμου του Νεύτωνα ανεξάρτητοι του προσανατολισμού του συστήματος αναφοράς απαιτείται οι συνιστώσες της δύναμης να μετασχηματίζονται στις στροφές όπως και οι συντεταγμένες της θέσης.

Φυσικά μεγέθη που προσδιορίζονται από μία τριάδα πραγματικών αριθμών και έχουν επιπλέον την ιδιότητα να μετασχηματίζονται στις στροφές όπως και οι συντεταγμένες της θέσης λέγονται *διανυσματικά μεγέθη*. Ισοδυνάμως ονομάζουμε *διανύ-*

σματα τις τριάδες που μετασχηματίζονται στις στροφές όπως και οι συντεταγμένες των χωρικών μετατοπίσεων. Αντιθέτως, *βαθμωτά μεγέθη* είναι αυτά που προσδιορίζονται από ένα πραγματικό αριθμό που παραμένει αναλλοίωτος στους μετασχηματισμούς των στροφών.

Η ταχύτητα και η επιτάχυνση, όντας μεγέθη παράγωγα της θέσης, είναι διανυσματικά μεγέθη διότι μετασχηματίζονται όπως και οι μετατοπίσεις. Ο διανυσματικός χαρακτήρας όμως της δύναμης δεν προκύπτει μέσω μαθηματικών πράξεων· προκύπτει κατόπιν διενέργειας πειραμάτων από τα οποία διαπιστώθηκε ότι οι συνιστώσες της δύναμης μετασχηματίζονται όπως και οι θέσεις και το γεγονός αυτό πρέπει να αποτυπωθεί ως ξεχωριστός θεμελιώδης νόμος. Ο Νεύτων ουσιαστικά προϋποθέτει ότι η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος –δίχως να το γράφει εκπεφρασμένα– και επομένως ισχύει γι' αυτήν η αρχή της ανεξαρτησίας των δυνάμεων. Ο Νεύτων γράφει σχετικά: “*Σώμα στο οποίο ασκούνται συγχρόνως δύο δυνάμεις διαγράφει τη διαγώνιο ενός παραλληλογράμμου στον ίδιο χρόνο που θα διέγραφε τις πλευρές του παραλληλογράμμου αν αυτές οι δυνάμεις ασκούνταν ξεχωριστά*” (Πόρισμα 1 της Principia). Με άλλα λόγια οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα συμπεριφέρονται όπως και οι μετατοπίσεις: μπορούν να προστεθούν με τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Δεχόμενοι αυτή την πρόταση μπορεί να αποδειχτεί ότι οι δυνάμεις μετασχηματίζονται στις στροφές όπως και οι μετατοπίσεις: Ας λάβουμε δύο σύστημα αναφοράς όπως στο Σχήμα 7.1 και ας υπολογίσουμε τις προβολές της δύναμης στο νέο σύστημα αξόνων. Αυτό απαιτεί τον προσδιορισμό των προβολών των δυνάμεων στους νέους άξονες που μπορεί να γίνει άμεσα αφού έχουμε υποθέσει ότι οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σώμα μπορούν να προστεθούν με τον κανόνα του παραλληλογράμμου. Θα έχουμε τότε ότι $F_{z'} = F_z$ διότι ο άξονας z παραμένει ο ίδιος. Η δύναμη στον άξονα x' θα δίνεται από την προβολή στον άξονα αυτό (1) της δύναμης F_x που ασκείται κατά τη διεύθυνση του άξονα x και (2) της δύναμης F_y που ασκείται κατά τη διεύθυνση του άξονα y , δηλαδή $F_{x'} = F_x \cos \theta + F_y \sin \theta$. Ομοίως υπολογίζουμε την $F_{y'}$ από τις προβολές των F_x, F_y στον άξονα y' . Συνεπώς οι συνιστώσες της δύναμης μετασχηματίζονται σύμφωνα με τον κανόνα (7.8), δηλαδή όπως και οι μετατοπίσεις.

Ο διανυσματικός χαρακτήρας της δύναμης υποδεικνύει ότι αν ισχύει ο νόμος του Νεύτωνα σε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς, θα ισχύει και σε οποιοδήποτε άλλο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς προκύπτει από στροφή του αρχικού. Οι νόμοι του Νεύτωνα δεν εξαρτώνται δηλαδή από κάποια διεύθυνση στο χώρο και είναι αποτύπωση φυσικών νόμων που διέπουν ένα ισοτροπικό κόσμο ο οποίος δεν έχει κάποιον προεξάρχοντα προσανατολισμό.

Αν συμβολίσουμε τώρα τις τρεις συνιστώσες της δύναμης με το σύμβολο²

$$\mathbf{F} = (F_x, F_y, F_z),$$

της ταχύτητας με το

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right),$$

και της επιτάχυνσης με το

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \left(\frac{d^2x}{dt^2}, \frac{d^2y}{dt^2}, \frac{d^2z}{dt^2} \right),$$

τότε ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί ως

$$m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \mathbf{F}, \quad (7.9)$$

όπου με την ισότητα μεταξύ δύο διανυσμάτων εννοούμε ισότητα των συνιστωσών τους σε ένα οποιοδήποτε σύστημα αναφοράς.

Η έκφραση του δεύτερου νόμου στη μορφή (7.9) για να έχει έννοια απαιτεί οι συνιστώσες του συμβόλου της δύναμης και του συμβόλου της επιτάχυνσης να μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο όταν οι καρτεσιανοί άξονες στραφούν· αλλιώς δεν θα ισχύει ο ίδιος νόμος σε όλα τα συστήματα αναφοράς ανεξαρτήτως από την κατεύθυνση τους στο χώρο και θα έπρεπε μαζί με το νόμο να σημειώσουμε και σε ποιο ειδικό σύστημα ισχύει η εξίσωση. Επειδή όμως η δύναμη είναι διανυσματικό μέγεθος και μετασχηματίζεται όπως και οι συντεταγμένες της θέσης, ενώ το ίδιο ισχύει και για το γινόμενο της μάζας επί την επιτάχυνση (είναι διανυσματικό μέγεθος και μετασχηματίζεται και αυτό όπως και οι συντεταγμένες της θέσης επειδή η μάζα είναι βαθμωτό μέγεθος), ο νόμος του Νεύτωνα μπορεί να γραφεί με την συμβολική μορφή (7.9). Ο νόμος εκπεφρασμένος με τα νέα σύμβολα αφορά ισότητα διανυσμάτων και επομένως ισχύει χωρίς να χρειάζεται να προσδιορισθεί το σύστημα αναφοράς.

Πρέπει να γίνει σαφές ότι κάθε τριάδα αριθμών δεν σχηματίζει διάνυσμα. Για να είναι διάνυσμα πρέπει να μετασχηματίζεται όπως και οι μετατοπίσεις. Π.χ. εάν το $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ είναι διάνυσμα, τότε η τριάδα $(a_x, 2a_y, a_z)$ δεν σχηματίζει διάνυσμα (δείξτε το). Επίσης διανύσματα μπορεί να είναι και πιο περίπλοκα αντικείμενα. Ξεχωριστό παράδειγμα είναι η τριάδα

$$\nabla = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right), \quad (7.10)$$

²Ενώ στη χειρόγραφο γραφή συνηθίζεται να χρησιμοποιείται το σύμβολο \vec{F} για την αναπαράσταση ενός διανύσματος, εδώ θα επιλέξουμε την έντονη γραφή \mathbf{F} η οποία συνηθίζεται στην επιστημονική βιβλιογραφία και καθιστά πιο παραστατική τη διαφορά διανυσματικών και μη διανυσματικών μεγεθών.

που σχηματίζει ένα διανυσματικό τελεστή, δηλαδή οι “συντεταγμένες” ή αλλιώς τα στοιχεία του τελεστή μετασχηματίζονται όπως και οι μετατοπίσεις. Πράγματι αν λάβω δύο συστήματα αναφοράς (x, y, z) και το στραμμένο σύστημα (x', y', z') , σύμφωνα με τον μετασχηματισμό (7.3), τα στοιχεία της τριάδας

$$\left(\frac{\partial}{\partial x'}, \frac{\partial}{\partial y'}, \frac{\partial}{\partial z'} \right), \quad (7.11)$$

θα είναι, σύμφωνα με τον κανόνα της αλυσίδας, ίσα με:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \frac{\partial x}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial x'} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= \frac{\partial x}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial y'} \frac{\partial}{\partial z}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial x}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z}. \end{aligned}$$

Για να υπολογίσουμε τις μερικές παραγώγους στις παραπάνω ισότητες πρέπει να κατασκευάσουμε τον αντίστροφο του μετασχηματισμού (7.3). Ο αντίστροφος μετασχηματισμός είναι ο ίδιος μετασχηματισμός στροφής, αλλά όμως με γωνία $-\theta$, διότι αν ο (7.3) είναι στροφή περί τον άξονα z κατά γωνία θ που μετασχηματίζει τα (x, y, z) στα (x', y', z') , μια στροφή περί τον ίδιο άξονα κατά γωνία $-\theta$ μετασχηματίζει τα (x', y', z') στα (x, y, z) . Συνεπώς ο αντίστροφος μετασχηματισμός του (7.3) είναι:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y &= y' \cos \theta + x' \sin \theta, \\ z &= z'. \end{aligned} \quad (7.12)$$

Καταλήγουμε λοιπόν ότι οι συνιστώσες του τελεστή (7.11) μετασχηματίζονται όπως ακριβώς μετασχηματίζονται και οι μετατοπίσεις:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x'} &= \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial y'} &= -\sin \theta \frac{\partial}{\partial x} + \cos \theta \frac{\partial}{\partial y}, \\ \frac{\partial}{\partial z'} &= \frac{\partial}{\partial z}, \end{aligned}$$

και ο διαφορικός τελεστής (7.10) σύμφωνα με τον ορισμό, σχηματίζει διάνυσμα. Ο τελεστής συμβολίζεται ως ∇ και λέγεται ανάδελτα ή βαθμίδα. Όταν δράσει ο τελεστής αυτός σε ένα βαθμωτό πεδίο $\phi(\mathbf{r})$, το οποίο παραμένει αναλλοίωτο στις στροφές, τότε σχηματίζεται το διάνυσμα $\nabla \phi$ που ονομάζεται βαθμίδα του πεδίου ϕ .

7.2 Διανυσματική άλγεβρα

Τις βασικές ιδιότητες των διανυσμάτων τις γνωρίζετε. Θα εξετάσουμε όμως πάλι μερικά βασικά θέματα υπό το πρίσμα του ορισμού του διανύσματος που δόθηκε στο προηγούμενο εδάφιο. Επανερχόμαστε στον ορισμό της ισότητας μεταξύ δύο διανυσμάτων. Τα διανύσματα \mathbf{a} , \mathbf{b} με συντεταγμένες (a_x, a_y, a_z) και (b_x, b_y, b_z) αντίστοιχα, είναι ίσα

$$\mathbf{a} = \mathbf{b} , \quad (7.13)$$

αν σε κάποιο σύστημα αναφοράς ισχύει:

$$a_x = b_x , \quad a_y = b_y , \quad a_z = b_z . \quad (7.14)$$

Προσέξτε ότι μολονότι η ισότητα (7.14) ελέγχεται μόνο σε ένα σύστημα αναφοράς, επειδή τα \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι διανύσματα και οι συντεταγμένες (a_x, a_y, a_z) και (b_x, b_y, b_z) μετασχηματίζονται με τον ίδιο τρόπο στις στροφές, η ισότητα των συντεταγμένων (7.14) ισχύει σε όλα τα συστήματα αναφοράς και γράφεται χωρίς αναφορά πλέον στο σύστημα αναφοράς ως (7.13).

Με τον ορισμό της πράξης της πρόσθεσης διανυσμάτων μπορούμε να κατασκευάσουμε νέα διανυσματικά μεγέθη. Είναι εύκολο να επιβεβαιώσει κανείς ότι το άθροισμα των συντεταγμένων δύο διανυσμάτων ορίζει ένα νέο διάνυσμα, το οποίο και ορίζουμε ως άθροισμα των διανυσμάτων. Πράγματι, αν (a_x, a_y, a_z) και (b_x, b_y, b_z) είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων \mathbf{a} , \mathbf{b} τότε η τριάδα των αθροισμάτων $(a_x + b_x, a_y + b_y, a_z + b_z)$ μετασχηματίζεται ως διάνυσμα, το οποίο συμβολίζουμε $\mathbf{a} + \mathbf{b}$. Η πρόσθεση διανυσμάτων ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a} ,$$

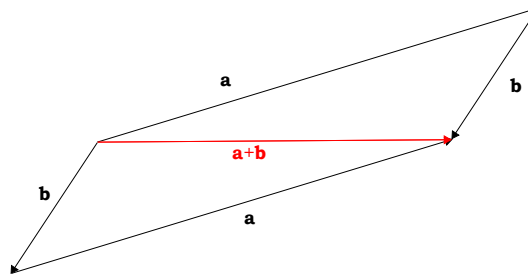
οπότε δεν έχει σημασία η σειρά που αθροίζουμε δύο διανύσματα, και επίσης την προσεταιριστική ιδιότητα

$$\mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} ,$$

οπότε το άθροισμα τριών ή και περισσότερων διανυσμάτων είναι καλώς ορισμένο και δεν εξαρτάται από τη σειρά με την οποία προσθέτουμε τα διανύσματα. Έχοντας ορίσει το άθροισμα πολλών διανυσμάτων μπορούμε τώρα να ορίσουμε και το ολοκλήρωμα διανυσμάτων, π.χ. αν η ταχύτητα ενός σωματίου είναι $\mathbf{v}(t)$ τότε η συνολική μετατόπιση του σωματίου είναι $\int_0^t \mathbf{v}(t) dt$, ως άθροισμα των στοιχειωδών μετατοπίσεων $d\mathbf{r} = \mathbf{v}(t) dt$.

Τα διανύσματα επειδή συμπεριφέρονται όπως και οι μετατοπίσεις στο χώρο μπορούν να παρασταθούν όπως και οι μετατοπίσεις. Η πράξη της πρόσθεσης δύο διανυ-

σμάτων μετατόπισης \mathbf{a} και \mathbf{b} μπορεί εύκολα να επιτευχθεί χωρίς ουδεμία αναφορά σε σύστημα συντεταγμένων αν στο άκρο του διανύσματος \mathbf{a} μεταφέρουμε την αρχή του διανύσματος \mathbf{b} . Το άθροισμα $\mathbf{c} = \mathbf{a} + \mathbf{b}$ τότε θα είναι η συνολική μετατόπιση που προκαλείται αν κάνουμε τη μετατόπιση \mathbf{a} ακολουθούμενη από τη μετατόπιση \mathbf{b} . Το \mathbf{c} τότε μπορεί να παρασταθεί με τη διαγώνιο του παραλληλογράμμου που σχηματίζουν τα διανύσματα \mathbf{a} και \mathbf{b} η οποία ξεκινά από την αρχή του \mathbf{a} και καταλήγει στην αιχμή του \mathbf{b} , όπως φαίνεται στο Σχήμα 7.2 (ή από την αρχή του \mathbf{b} μέχρι την αιχμή του \mathbf{a} αν μεταφέρουμε την αρχή του \mathbf{a} στο άκρο του \mathbf{b}).



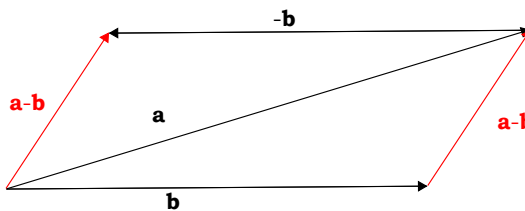
Σχήμα 7.2: Πρόσθεση διανυσμάτων. Λαμβάνοντας ένα σύστημα αναφοράς χρησιμοποιήστε τον ορισμό της πρόσθεσης διανυσμάτων για να αποδείξετε το κανόνα πρόσθεσης του σχήματος.

Επίσης αν πολλαπλασιάσουμε τις συνιστώσες ενός διανύσματος \mathbf{a} με κάποιο αριθμό k τότε πάλι θα έχουμε ένα νέο διάνυσμα. Πράγματι, αν (a_x, a_y, a_z) είναι διάνυσμα τότε και η τριάδα (ka_x, ka_y, ka_z) ορίζει ένα νέο διάνυσμα που το συμβολίζουμε $k\mathbf{a}$. Το διάνυσμα $k\mathbf{a}$ παριστάνει μια μετατόπιση που είναι k φορές μεγαλύτερη από την \mathbf{a} . Αν ο αριθμός k είναι αρνητικός τότε το $k\mathbf{a}$ παριστάνει μια μετατόπιση που είναι $|k|$ φορές μεγαλύτερη από την \mathbf{a} και έχει την αντίθετη φορά από αυτήν του \mathbf{a} .

Έχοντας ορίσει το άθροισμα δύο διανυσμάτων και τον πολλαπλασιασμό διανύσματος με αριθμό μπορούμε να ορίσουμε τη διαφορά δύο διανυσμάτων ως

$$\mathbf{a} - \mathbf{b} \equiv \mathbf{a} + (-1)\mathbf{b}.$$

Η αφαίρεση δύο διανυσμάτων παρουσιάζεται γραφικά στο Σχήμα 7.3.



Σχήμα 7.3: Αφαίρεση διανυσμάτων ιδωμένη είτε ως ένα διάνυσμα που ξεκινά από το τέλος του αφαιρετέου \mathbf{b} και φτάνει έως το τέλος του μειωτέου \mathbf{a} , είτε ως το άθροισμα $\mathbf{a} + (-\mathbf{b})$.

Αν οι συνιστώσες ενός διανύσματος είναι συναρτήσεις του χρόνου τότε η παράγωγος των συνιστωσών σχηματίζει πάλι ένα διάνυσμα το οποίο λέγεται χρονική πα-

ράγωγος του διανύσματος. Κατ' ουσίαν η χρονική παράγωγος ενός διανυσματικού μεγέθους προκύπτει από την αφαίρεση δύο διανυσμάτων σε δύο διαδοχικές χρονικές στιγμές, προς το βαθμωτό μέγεθος του χρόνου που μεσολάβησε, στο όριο που το χρονικό αυτό διάστημα τείνει να γίνει μηδενικό. Έτσι η ταχύτητα

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt},$$

και η επιτάχυνση

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt},$$

είναι διανύσματα, τα οποία, με τη χρήση μιας υπερκείμενης τελείας προκειμένου να συμβολίσουμε τη χρονική παραγωγή, γράφονται αντιστοιχα και ως $\dot{\mathbf{r}}$ και $\dot{\mathbf{v}}$. Ομοίως και η ορμή

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v}$$

είναι διανυσματικό μέγεθος.

7.3 Πίνακες στροφής και ορθογώνιοι μετασχηματισμοί

Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων (7.3) ενός διανύσματος μπορεί να γραφεί συνοπτικά με τη χρήση πινάκων ως:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R} \mathbf{a}, \quad (7.15)$$

όπου με \mathbf{a} , \mathbf{a}' συμβολίζουμε τώρα τη στήλη των συντεταγμένων του διανύσματος, αντιστοίχως, στα δύο συστήματα αναφοράς,

$$\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}, \quad \mathbf{a}' = \begin{pmatrix} a_{x'} \\ a_{y'} \\ a_{z'} \end{pmatrix},$$

και \mathbf{R} είναι ο πίνακας στροφής (rotation matrix) (7.3) περί τον άξονα z κατά γωνία θ :³

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta & 0 \\ -\sin \theta & \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (7.16)$$

³Ο πίνακας αυτός είναι ο λεγόμενος πίνακας ενεργητικής στροφής, ο οποίος σε δεδομένο σύστημα αναφοράς στρέφει το διάνυσμα στο οποίο δρα κατά γωνία θ . Υπάρχει όμως και ο πίνακας παθητικής στροφής ο οποίος κρατάει το διάνυσμα ακίνητο και στρέφει το σύστημα αναφοράς κατά γωνία θ . Αν η φορά των δύο αυτών στροφών είναι ίδια, τότε ο δεύτερος πίνακας έχει την ίδια ακριβώς μορφή με τον πρώτο, αλλά με παράμετρο $-\theta$ στη θέση της θ , αφού η ενεργητική και η παθητική στροφή έχουν αντίθετο αποτέλεσμα όσον αφορά στη στροφή διανύσματος σε σχέση με το σύστημα αναφοράς.

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι ο πίνακας (7.16) είναι ορθογώνιος δηλαδή ότι ο αντίστροφός του ισούται με τον ανάστροφό του και ικανοποιεί τη σχέση:

$$\mathbf{R}^T \mathbf{R} = \mathbf{R}^{-1} \mathbf{R} = \mathbf{I},$$

όπου \mathbf{I} ο μοναδιαίος πίνακας και \mathbf{R}^T ο ανάστροφος και \mathbf{R}^{-1} ο αντίστροφος του \mathbf{R} .

Αποδεικνύεται όμως ότι ισχύει εν μέρει και το αντίστροφο· δηλαδή ότι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι εν γένει μετασχηματισμοί στροφής. Για να εξετάσουμε το θέμα αυτό ας περιοριστούμε στις δύο διαστάσεις και ας θεωρήσουμε τον ορθογώνιο μετασχηματισμό

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Επειδή ο μετασχηματισμός έχει θεωρηθεί ορθογώνιος

$$\mathbf{A}^T \mathbf{A} = \mathbf{I}, \quad (7.17)$$

όπου \mathbf{I} ο μοναδιαίος πίνακας σε δύο διαστάσεις τώρα, τα 4 στοιχεία του πίνακα θα πρέπει να ικανοποιούν τις τρεις ακόλουθες σχέσεις:

$$a^2 + c^2 = 1, \quad ab + cd = 0, \quad b^2 + d^2 = 1. \quad (7.18)$$

Επομένως ο μετασχηματισμός αυτός αφήνει μία παράμετρο ελεύθερη, ενώ οι υπόλοιπες 3 δεσμεύονται από τις παραπάνω σχέσεις. Άρα οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί σε δύο διαστάσεις προσδιορίζονται από μία ελεύθερη παράμετρο⁴, θ . Αν θέσουμε

$$a = d = \cos \theta \quad \text{και} \quad b = -c = \sin \theta,$$

τότε οι παραπάνω σχέσεις ικανοποιούνται και προκύπτει ο μετασχηματισμός της στροφής κατά γωνία θ σε δύο διαστάσεις:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}, \quad (7.19)$$

που ισοδυναμεί με τον μετασχηματισμό στροφής (7.16) στις τρεις διαστάσεις περί τον άξονα z .⁵

Δεν έχουμε όμως εξαντλήσει όλες τις λύσεις. Επειδή ο \mathbf{A} είναι ορθογώνιος η ορίζουσα του λαμβάνει μόνο τις διακριτές τιμές $+1$ ή -1 . Πράγματι λαμβάνοντας την

⁴Στο σημείο αυτό η παράμετρος θ δεν είναι η γωνία στροφής· είναι απλώς μια παράμετρος. Θα αποκτήσει το φυσικό περιεχόμενο γωνίας αμέσως παρακάτω.

⁵Θα μπορούσαμε εναλλακτικά να θέσουμε $a = -d = \cos \theta$ και $b = c = \sin \theta$. Ένας τέτοιος πίνακας δεν θα αναπαριστά μια στροφή, αλλά αυτό που λίγο παρακάτω θα ονομάσουμε κατοπτρισμό.

ορίζουσα της (7.17) έχουμε

$$\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = 1 ,$$

και επειδή για κάθε πίνακα είναι: $\det(\mathbf{A}^T) = \det(\mathbf{A})$, και η ορίζουσα του γινομένου δύο πινάκων ισούται με το γινόμενο των οριζουσών των πινάκων, έχουμε

$$\det(\mathbf{A}^T \mathbf{A}) = \det(\mathbf{A}^T) \det(\mathbf{A}) = (\det(\mathbf{A}))^2 = 1$$

οπότε η ορίζουσα κάθε ορθογωνίου πίνακα είναι

$$\det(\mathbf{A}) = \pm 1 .$$

Παρατηρούμε ότι ο πίνακας (7.19) έχει ορίζουσα +1, επομένως αν θέλουμε να συμπεριλάβουμε όλους τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς χρειάζεται να προσθέσουμε και μια δεύτερη οικογένεια λύσεων⁶ με ορίζουσα -1 η οποία μπορεί να παραχθεί από το μετασχηματισμό του κατοπτρισμού $x \rightarrow x$ και $y \rightarrow -y$, ο πίνακας του οποίου είναι ο

$$\mathbf{K}_y = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} .$$

Ο πίνακας αυτός δεν μπορεί να αποτελεί στροφή αφού δεν υπάρχει καμία τιμή του θ για τον πίνακα (7.19) που να μπορεί να οδηγήσει στον \mathbf{K}_y . Οι κατοπτρισμοί αποτελούν μια ξεχωριστή κλάση ορθογώνιων μετασχηματισμών⁷.

Από τον πίνακα αυτό κατοπτρισμού και τους πίνακες στροφής της μορφής (7.19) μπορούν να προκύψουν όλοι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί στις δύο διαστάσεις. Έτσι οι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί σε δύο διαστάσεις αναγνωρίζονται ως στροφές ή γενικότερα ως στροφές με κατοπτρισμό. Τα ίδια συμπεράσματα μπορούν να εξαχθούν για τους ορθογώνιους μετασχηματισμούς σε τρεις διαστάσεις. Στις τρεις διαστάσεις, η δεύτερη οικογένεια λύσεων με ορίζουσα -1 εξαντλείται από ένα μόνο μετασχηματισμό κατοπτρισμού σε ένα οποιοδήποτε επίπεδο ή από τον μετασχηματισμό ομοτιμίας (parity) $\mathbf{r} \rightarrow -\mathbf{r}$ με πίνακα μετασχηματισμού:

$$\mathbf{P} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} . \quad (7.20)$$

Αν για παράδειγμα επιλέγαμε τον μετασχηματισμό κατοπτρισμού στο επίπεδο (x, y)

⁶Θα μπορούσαμε να κατασκευάσουμε ένα μέλος αυτής της οικογένειας αν είχαμε διαλέξει την εναλλακτική λύση της (7.18): $a = -d = \cos \theta$ και $b = c = \sin \theta$ που είδαμε στην υποσημείωση 5. Ένας τέτοιος πίνακας \mathbf{A} δεν είναι στροφή αφού $\mathbf{A}(\theta = 0) \neq \mathbf{I}$.

⁷Υπό μια έννοια οι πίνακες κατοπτρισμού λειτουργούν σαν τη φανταστική μονάδα, όπου μόνο ο πολλαπλασιασμός δύο κατοπτρισμών μπορεί να μας οδηγήσει σε πραγματική στροφή.

(δηλαδή $z \rightarrow -z$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad (7.21)$$

τότε ο μετασχηματισμός ομοτιμίας, \mathbf{P} , (7.20) προκύπτει αν μετά τον κατοπτρισμό εκτελέσουμε στροφή, \mathbf{R} , (σχέση (7.16)) κατά γωνία π περί τον άξονα z με πίνακα $\mathbf{R}(\theta = \pi)$:⁸

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

διότι είναι:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Συνολικά, λοιπόν, η ομοτιμία, παρότι μοιάζει με στροφή υπό την έννοια ότι μετασχηματίζει ένα διάνυσμα διατηρώντας το μέτρο του διανύσματος στο οποίο δρα, δεν είναι στροφή, αφού το καινούργιο διάνυσμα που προκύπτει μετά τη δράση του δεν προκαλεί την ίδια σχετική μεταβολή σε όλα τα διανύσματα. Θα μπορούσε, για παράδειγμα, ένα διάνυσμα στον x άξονα να το στρέψει κατά γωνία π γύρω από τον y άξονα, αλλά μια τέτοια δράση δεν θα προκαλούσε την ανάκλαση που προκαλεί η ομοτιμία σε ένα διάνυσμα του y άξονα. Στις δύο διαστάσεις, όμως, η ομοτιμία κάνει ακριβώς ότι και η στροφή στο επίπεδο $x - y$ κατά γωνία π και επομένως είναι στροφή.

7.4 Διανύσματα και ψευδοδιανύσματα

Έχοντας εισαγάγει τους μετασχηματισμούς της στροφής \mathbf{R} και της ομοτιμίας \mathbf{P} , ως διανυσματικά μεγέθη ορίζονται πλέον τα φυσικά μεγέθη που μετασχηματίζονται στους μετασχηματισμούς στροφής και ομοτιμίας (ή κάποιου κατοπτρισμού ως προς ένα επίπεδο) όπως και οι συντεταγμένες των μετατοπίσεων, δηλαδή το \mathbf{a} είναι διάνυσμα αν οι συντεταγμένες \mathbf{a}' μετά από μία στροφή είναι

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R} \mathbf{a},$$

⁸Όπως βλέπουμε, η ομοτιμία $\mathbf{r} \xrightarrow{\mathbf{P}} -\mathbf{r}$ σε δύο διαστάσεις (και γενικά σε άρτιο πλήθος διαστάσεων) είναι τελικά μια αμιγής στροφή.

και μετά από μετασχηματισμό ομοτιμίας

$$\mathbf{a}' = \mathbf{P} \mathbf{a} = -\mathbf{a} .$$

Παραδείγματα διανυσμάτων αποτελούν η ορμή, η βαθμίδα ενός βαθμωτού μεγέθους και η δύναμη.

Ψευδοδιανύσματα ή πολικά διανύσματα (pseudovectors ή polar vectors) είναι τα φυσικά μεγέθη που μετασχηματίζονται στις στροφές όπως οι μετατοπίσεις αλλά παραμένουν αναλλοίωτα στους μετασχηματισμούς κατοπτρισμού ή ομοτιμίας. Μετασχηματίζονται δηλαδή ως:

$$\mathbf{a}' = \mathbf{R} \mathbf{a} , \mathbf{P} \mathbf{a} = \mathbf{a} .$$

Ψευδοδιανύσματα είναι για παράδειγμα η στροφορμή, η γωνιακή ταχύτητα και το μαγνητικό πεδίο.

Ομοίως βαθμωτά μεγέθη είναι αυτά που παραμένουν αναλλοίωτα στις στροφές αλλά και στους μετασχηματισμούς ομοτιμίας ή κατοπτρισμού ενώ ψευδοβαθμωτά μεγέθη (pseudoscalars) είναι αυτά που παραμένουν αναλλοίωτα μόνο στις στροφές και αλλάζουν πρόσημο στους μετασχηματισμούς ομοτιμίας. Το γινόμενο ενός βαθμωτού μεγέθους με ένα διανυσματικό μέγεθος παράγει ένα διανυσματικό μέγεθος ενώ το γινόμενο ενός ψευδοβαθμωτού με ένα διάνυσμα ή ενός βαθμωτού με ένα ψευδοδιάνυσμα παράγει ένα ψευδοδιανυσματικό μέγεθος. Τέλος το γινόμενο ενός ψευδοβαθμωτού με ένα ψευδοδιάνυσμα παράγει ένα διάνυσμα. Συμβολικά αν ψ, β συμβολίζουν ψευδοβαθμωτά ή βαθμωτά μεγέθη, αντίστοιχα, ενώ Ψ, Δ συμβολίζουν ψευδοδιανύσματα ή διανύσματα, αντίστοιχα, θα είναι

$$\begin{aligned} \beta\beta &= \beta \\ \beta\psi &= \psi \\ \beta\Delta &= \Delta \\ \psi\Delta &= \Psi \\ \beta\Psi &= \Psi \\ \psi\Psi &= \Delta \\ \Delta \cdot \Delta &= \beta \\ \Delta \cdot \Psi &= \psi \\ \Psi \cdot \Psi &= \beta \\ \Delta \times \Delta &= \Psi \\ \Delta \times \Psi &= \Delta \\ \Psi \times \Psi &= \Psi , \end{aligned} \tag{7.22}$$

Το εξωτερικό γινόμενο (βλ. περισσότερα στο Κεφάλαιο 8) δημιουργεί ψευδοδιανύσματα από διανύσματα αφού αντιστρέφεται η φορά και των δύο διανυσμάτων του γινομένου του⁹.

Ένας φυσικός νόμος όταν γράφεται σε διανυσματική μορφή πρέπει να περιλαμβάνει ομοειδή φυσικά μεγέθη: πρέπει να έχει τη μορφή ισότητας μεταξύ διανυσμάτων ή μεταξύ ψευδοδιανυσμάτων. Επειδή οι φυσικοί νόμοι της μηχανικής, του ηλεκτρισμού και του μαγνητισμού καθώς και οι περισσότεροι νόμοι που γνωρίζουμε έχουν και κατοπτρική συμμετρία ή συμμετρία ομοτιμίας, που σημαίνει ότι δεν υπάρχει διάκριση μεταξύ δεξιόστροφων και αριστερόστροφων καταστάσεων, θα πρέπει να είναι διανυσματικοί νόμοι. Ο κατοπτρισμός όμως συμβαίνει να μην αποτελεί θεμελιώδη συμμετρία της φύσης. Οι Yang και Lee το 1954 απέδειξαν πειραματικά ότι οι ασθενείς πυρηνικές αλληλεπιδράσεις δεν είναι αναλλοίωτες στους κατοπτρισμούς. Στον δεύτερο νόμο του Νεύτωνα η ταχύτητα, \mathbf{v} , και η επιτάχυνση, \mathbf{a} , είναι διανύσματα ενώ η μάζα είναι βαθμωτό μέγεθος (θεωρείται ότι είναι αναλλοίωτη και σε κατοπτρισμούς), όπως επίσης και η ορμή, $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$, είναι διανυσματικό μέγεθος. Συνεπώς, για να είναι ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα διανυσματικός νόμος πρέπει και η δύναμη να είναι διάνυσμα, πρέπει δηλαδή να μετασχηματίζεται στους μετασχηματισμούς κατοπτρισμού ή ομοτιμίας όπως και οι μετατοπίσεις. Αυτή η πρόταση είναι θεμελιώδης αρχή και όπως αναφέραμε και προηγουμένως πρέπει να ελεγχθεί η ακρίβειά της πειραματικά. Η δύναμη της βαρύτητας που ασκείται μεταξύ δύο σωματίων είναι διάνυσμα όπως και η ηλεκτρική δύναμη Coulomb σε φορτισμένο σωματίο καθώς και η δύναμη Lorentz όταν το φορτισμένο σωματίο βρίσκεται μέσα σε μαγνητικό πεδίο¹⁰.

7.5 Μέτρο διανύσματος

Είναι εύκολο να διαπιστώσει κανείς ότι η στροφή του καρτεσιανού συστήματος που δίνεται από το μετασχηματισμό (7.3) αφήνει αναλλοίωτη την ποσότητα $x^2 + y^2 + z^2$ η οποία δεν είναι άλλη από την απόσταση του σημείου από την αρχή των αξόνων. Δηλαδή κατά τις στροφές ισχύει ότι:

$$x^2 + y^2 + z^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 .$$

⁹ Θα μπορούσε κανείς να φτιάξει τον ακόλουθο γενικό μνημονικό κανόνα: Σε οποιοδήποτε “ψευδο”-μέγεθος αντιστοιχεί ένα “-” πρόσημο. Αν το αποτέλεσμα οποιουδήποτε γινομένου (εσωτερικού, εξωτερικού, ή με βαθμωτό) είναι “+” το αντίστοιχο παράγωγο μέγεθος είναι “κανονικό”, αλλιώς είναι “ψευδο”-μέγεθος.

¹⁰ Από την τελευταία παρατήρηση αντιλαμβανόμαστε ότι το μαγνητικό πεδίο πρέπει είναι ψευδοδιάνυσμα, προκειμένου μέσω του εξωτερικού γινομένου του με την ταχύτητα να δημιουργήσει τη δύναμη Lorentz που οφείλει να είναι διάνυσμα όπως όλες οι δυνάμεις.

Η πρόταση αυτή γράφεται υπό μορφή πινάκων ως:

$$\mathbf{r}^\top \mathbf{r} = \mathbf{r}'^\top \mathbf{r}' . \quad (7.23)$$

όπου \mathbf{r} και \mathbf{r}' είναι οι στήλες των συντεταγμένων της μετατόπισης προ και μετά στροφής αντίστοιχα. Η ισχύς της πρότασης αυτής είναι διαισθητικά προφανής διότι το $x^2 + y^2 + z^2$ είναι το τετράγωνο του μήκους της μετατόπισης \mathbf{r} , το οποίο αναμένεται να είναι βαθμωτό μέγεθος, δηλαδή μέγεθος ανεξάρτητο από το σύστημα αναφοράς. Η αναλλοιώτητα (7.23) προκύπτει άμεσα από το γεγονός ότι οι στροφές, \mathbf{R} , είναι ορθογώνιοι μετασχηματισμοί και αν $\mathbf{r}' = \mathbf{R}\mathbf{r}$ θα έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'^\top \mathbf{r}' &= (\mathbf{R}\mathbf{r})^\top (\mathbf{R}\mathbf{r}) \\ &= \mathbf{r}^\top (\mathbf{R}^\top \mathbf{R}) \mathbf{r} \quad ^{11} \\ &= \mathbf{r}^\top \mathbf{r} . \end{aligned}$$

Επειδή όλα τα διανύσματα μετασχηματίζονται στις στροφές όπως και οι μετατοπίσεις, το άθροισμα των τετραγώνων των συντεταγμένων κάθε διανύσματος παραμένει και αυτό αναλλοίωτο δηλαδή θα ισχύει αντίστοιχα με την (7.23) η:

$$\mathbf{a}^\top \mathbf{a} = \mathbf{a}'^\top \mathbf{a}' , \quad (7.24)$$

ή

$$a_x^2 + a_y^2 + a_z^2 = a_{x'}^2 + a_{y'}^2 + a_{z'}^2 . \quad (7.25)$$

Η (7.25) αποδεικνύει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των συντεταγμένων ενός διανύσματος ορίζει ένα θετικά ορισμένο βαθμωτό μέγεθος το οποίο μας επιτρέπει να ορίσουμε το μέτρο ενός διανύσματος ως:

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2} . \quad (7.26)$$

Το μέτρο αυτό αναφέρεται και ως ευκλείδειο μέτρο και η τιμή του δεν εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς.

Έχοντας εισαγάγει την έννοια του μέτρου διανύσματος, η απόσταση δύο σημείων που βρίσκονται στις θέσεις \mathbf{r}_1 και \mathbf{r}_2 είναι $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$. Μπορούμε τώρα να γράψουμε τη διανυσματική έκφραση της βαρυτικής δύναμης που ασκείται μεταξύ ενός σημειακού σωματιδίου μάζας m_1 στη θέση \mathbf{r}_1 και σωματιδίου μάζας m_2 στη θέση \mathbf{r}_2 (βλ.

¹¹ Χρησιμοποιήσαμε την ιδιότητα του αναστροφού ενός γινομένου πινάκων $(\mathbf{A}\mathbf{B})^\top = \mathbf{B}^\top \mathbf{A}^\top$.

Σχήμα 7.4). Η δύναμη που ασκείται στο 1 από το 2 είναι:

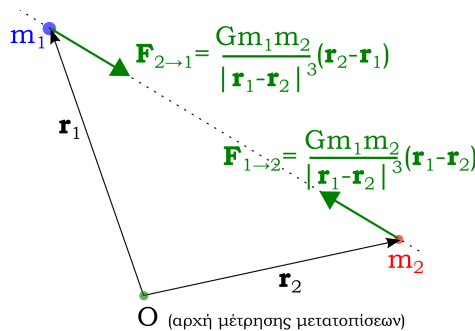
$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1), \quad (7.27)$$

ενώ η δύναμη που ασκείται στο 2 από το 1 είναι:

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2).$$

Προσέξτε ότι δεν χρειάζονται αρνητικά πρόσημα στις παραπάνω εκφράσεις για να δηλωθεί ότι η δύναμη είναι ελκτική: η διεύθυνση της δύναμης που προσδιορίζει αν η δύναμη είναι ελκτική ή απωστική προσδιορίζεται από τη διεύθυνση του διανύσματος $\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ ή του αντιθέτου του. Παρατηρούμε, επίσης ότι η βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ δύο σωματιδίων ικανοποιεί τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα:

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2}.$$



Σχήμα 7.4: Η βαρυτική δύναμη μεταξύ δύο σημειακών μαζών m_1, m_2 στις θέσεις $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ αντίστοιχα.

Εισάγοντας την έννοια του μέτρου μπορούμε να κανονικοποιήσουμε τα διανύσματα και να κατασκευάσουμε μοναδιαία διανύσματα δηλαδή διανύσματα που έχουν μέτρο ίσο με τη μονάδα διαιρώντας το διάνυσμα με το μέτρο του. Για παράδειγμα το διάνυσμα

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|}$$

είναι μοναδιαίο: $|\hat{\mathbf{r}}| = 1$. Το διάνυσμα αυτό $\hat{\mathbf{r}}$ ονομάζεται μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα με συντεταγμένες:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{1}{r}(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}.$$

Συχνά τοποθετούμε ένα καπέλο “ $\hat{\cdot}$ ” πάνω στα μοναδιαία διανύσματα για να ξεχωρίζουν¹². Έτσι όλα τα διανύσματα μπορούν να διαχωριστούν στο μέτρο τους (βαθμωτό μέγεθος) και στην κατεύθυνσή τους μέσω του αντίστοιχου μοναδιαίου διανύσματος¹³:

$$\mathbf{a} = |\mathbf{a}| \hat{\mathbf{a}} .$$

Ομοίως, στη περίπτωση της βαρυτικής δύναμης χρησιμοποιήσαμε το μοναδιαίο διάνυσμα:

$$\hat{\mathbf{r}}_{2 \rightarrow 1} = \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} ,$$

που έχει τη διεύθυνση του ευθυγράμμου τμήματος που ενώνει το σωματίο 2 με το 1, με κατεύθυνση προς το δεύτερο. Έτσι αν ξεχωρίσουμε το συνδυασμό αυτό διανυσμάτων από την έκφραση (7.27) η έκφραση θα πάρει την γνωστή μορφή αντιστρόφου τετραγώνου:

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = \frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^2} \hat{\mathbf{r}}_{2 \rightarrow 1} .$$

Χρήσιμα μοναδιαία διανύσματα είναι τα διανύσματα βάσης του καρτεσιανού συστήματος με φορά τις διευθύνσεις των αξόνων (x, y, z) του καρτεσιανού συστήματος, αντιστοίχως τα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$. Ονομάζονται διανύσματα βάσης διότι κάθε διάνυσμα \mathbf{a} μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των \mathbf{i}, \mathbf{j} και \mathbf{k} όπως θα δούμε παρακάτω.

7.6 Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων

Αφού έχουμε ορίσει το άθροισμα διανυσμάτων, μπορούμε μήπως κατ’ αναλογία να ορίσουμε και το γινόμενο διανυσμάτων; Αυτό αποδεικνύεται αβέβαιο και μάλλον ριψοκίνδυνο εγχείρημα. Για παράδειγμα αν τα (a_x, a_y, a_z) και (b_x, b_y, b_z) είναι διανύσματα, μήπως η τριάδα $(a_x b_x, a_y b_y, a_z b_z)$ ορίζει κάποιο διάνυσμα. Η απάντηση είναι κατηγορηματικά **όχι**, αλλά το άθροισμα των γινομένων των αντιστοιχών συντεταγμένων $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ ορίζει ένα βαθμωτό φυσικό μέγεθος που έχει την ίδια τιμή ανεξάρτητα από τον προσανατολισμό του καρτεσιανού συστήματος! Δηλαδή, αν $(a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$ και $(b_{x'}, b_{y'}, b_{z'})$ είναι οι συντεταγμένες των διανυσμάτων \mathbf{a} και \mathbf{b} σε ένα στραμμένο καρτεσιανό σύστημα τότε θα ισχύει ότι:

$$a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = a_{x'} b_{x'} + a_{y'} b_{y'} + a_{z'} b_{z'} . \quad (7.28)$$

Η απόδειξη ακολουθεί τα βήματα του προηγούμενου εδαφίου. Οι συντεταγμένες των διανυσμάτων στα δύο συστήματα αναφοράς συνδέονται υπό μορφή πινάκων με τις σχέσεις $\mathbf{a}' = \mathbf{R} \mathbf{a}$ και $\mathbf{b}' = \mathbf{R} \mathbf{b}$, όπου \mathbf{R} ο ορθογώνιος πίνακας της στροφής

¹²Στις διαλέξεις αυτές χρησιμοποιούμε το συμβολισμό αυτό πάντα εκτός από τα μοναδιαία διανύσματα $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ επί των τριών αξόνων, x, y, z , αντίστοιχα.

¹³Η γραφή αυτή μοιάζει με το διαχωρισμό ενός μιγαδικού στο μέτρο του και τη φάση του $z = |z|e^{i\theta}$.

μεταξύ των δύο συστημάτων, οπότε αντιστρέφοντας έχουμε $\mathbf{a} = \mathbf{R}^{-1}\mathbf{a}' = \mathbf{R}^T\mathbf{a}'$ και $\mathbf{b} = \mathbf{R}^T\mathbf{b}'$. Η αναλλοιώτητα της (7.28) στις στροφές αποδεικνύεται ως εξής:

$$\begin{aligned} a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z &= \mathbf{a}^T \mathbf{b} \\ &= (\mathbf{R}^T \mathbf{a}')^T (\mathbf{R}^T \mathbf{b}') \\ &= \mathbf{a}'^T \left((\mathbf{R}^T)^T \mathbf{R}^T \right) \mathbf{b}' \\ &= \mathbf{a}'^T (\mathbf{R} \mathbf{R}^T) \mathbf{b}' \\ &= \mathbf{a}'^T \mathbf{I} \mathbf{b}' \\ &= \mathbf{a}'^T \mathbf{b}' \\ &= a_{x'} b_{x'} + a_{y'} b_{y'} + a_{z'} b_{z'}. \end{aligned}$$

Ορίζουμε λοιπόν το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων \mathbf{a}, \mathbf{b} και το συμβολίζουμε $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ ως εξής:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z .$$

Η τελεία μεταξύ των διανυσμάτων *πρέπει* να γράφεται, διότι δεν συμβολίζει ένα σύνηθες γινόμενο, συμβολίζει το συγκεκριμένο γινόμενο μεταξύ δύο διανυσμάτων ενώ το μέγεθος $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ δεν έχει καν ορισθεί. Αντιθέτως δεν βάζουμε τελεία στο γινόμενο ενός βαθμωτού μεγέθους με ένα διανυσματικό, π.χ. στο $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}$ που μπορεί να γραφεί και ως $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c}$ που είναι το διανυσματικό μέγεθος που προκύπτει από το γινόμενο του βαθμωτού μεγέθους $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ με το διάνυσμα \mathbf{c} . Προσέξτε ότι τα διανύσματα $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \mathbf{c}$ και $\mathbf{a} \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \mathbf{a}$ είναι διαφορετικά διανύσματα, τα οποία διαφοροποιούνται από τη θέση της τελείας· το πρώτο έχει τη διεύθυνση του \mathbf{c} , ενώ το δεύτερο του \mathbf{a} .

Το εσωτερικό γινόμενο διανυσμάτων αφορά μόνο δύο διανύσματα¹⁴. Ικανοποιεί την αντιμεταθετική ιδιότητα:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} ,$$

και δρα γραμμικά ως προς τη πράξη της πρόσθεσης διανυσμάτων:

$$\mathbf{a} \cdot (\beta \mathbf{b} + \gamma \mathbf{c}) = \beta \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \gamma \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} ,$$

όπου β και γ αριθμοί ή βαθμωτά μεγέθη.

Το ευκλείδειο μέτρο ενός διανύσματος προκύπτει πλέον αβίαστα ως το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος με τον εαυτό του:

$$|\mathbf{a}|^2 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} .$$

¹⁴Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να ορισθεί ως μία διγραμμική απεικόνιση δύο διανυσμάτων στους πραγματικούς αριθμούς, δηλαδή το ζεύγος διανυσμάτων \mathbf{a}, \mathbf{b} απεικονίζεται στον πραγματικό αριθμό $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ και η απεικόνιση $\mathbf{a} \xrightarrow{\mathbf{b}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση του \mathbf{a} για δεδομένο \mathbf{b} , καθώς και η απεικόνιση $\mathbf{b} \xrightarrow{\mathbf{a}} \mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ είναι μια γραμμική απεικόνιση του \mathbf{b} για δεδομένο \mathbf{a} .

Χρησιμοποιώντας τώρα τις ιδιότητες του εσωτερικού γινομένου μπορούμε να αποδείξουμε ότι το τετράγωνο αθροισμάτων διανυσμάτων ικανοποιεί μια αντίστοιχη ταυτότητα με αυτή του αθροίσματος αριθμών:

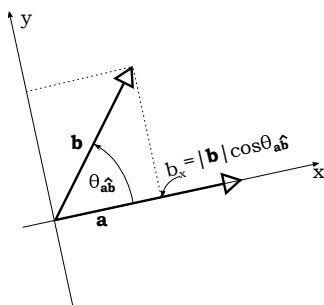
$$\begin{aligned}
 |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\
 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{a} + (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{b} \\
 &= \mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \\
 &= \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\
 &= |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 + 2 \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} .
 \end{aligned}$$

Από αυτή τη ταυτότητα μπορούμε να αποδείξουμε την αναλλοιότητα του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ στις στροφές βασιζόμενοι στην αναλλοιότητα του μέτρου ενός διανύσματος, παρατηρώντας ότι τα $|\mathbf{a}|^2$, $|\mathbf{b}|^2$ και $|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2$ είναι αναλλοίωτα στις στροφές πρέπει να είναι αναλλοίωτο και το $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ το οποίο βάσει της προηγούμενης ταυτότητας ισούται με το

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} (|\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 - |\mathbf{a}|^2 - |\mathbf{b}|^2) .$$

Εάν συμπεριλάβουμε και τους κατοπτρισμούς αντιλαμβανόμαστε από τον ορισμό του εσωτερικού γινομένου ότι το μεν εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων είναι βαθμωτό μέγεθος αλλά το εσωτερικό γινόμενο διανύσματος με ψευδοδιάνυσμα ορίζει ένα ψευδοβαθμωτό μέγεθος ενώ το εσωτερικό γινόμενο δύο ψευδοδιανυσμάτων ορίζει ένα βαθμωτό μέγεθος.

Για να αντιληφθούμε το γεωμετρικό νόημα του εσωτερικού γινομένου δύο διανυσμάτων \mathbf{a} και \mathbf{b} λαμβάνουμε ένα καρτεσιανό σύστημα αναφοράς με τον άξονα x στην διεύθυνση του \mathbf{a} και το επίπεδο των αξόνων (x, y) να συμπίπτει με το επίπεδο που ορίζεται από τα δύο διανύσματα \mathbf{a} και \mathbf{b} (βλ. Σχήμα 7.5). Σε αυτό το σύστημα οι



Σχήμα 7.5: Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων \mathbf{a}, \mathbf{b} ισούται με $|\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}$.

συντεταγμένες του \mathbf{a} είναι $(a_x, 0, 0)$, του $\mathbf{b} = (b_x, b_y, 0)$ και συνεπώς $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_x b_x$. Επιπλέον είναι $a_x = |\mathbf{a}|$, $b_x = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{i}} = |\mathbf{b}| \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{i}} = |\mathbf{b}| \cos \theta_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}$ και $b_y = \mathbf{b} \cdot \hat{\mathbf{j}} = |\mathbf{b}| \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{j}} = |\mathbf{b}| \sin \theta_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}$, όπου $\theta_{\hat{\mathbf{a}}\hat{\mathbf{b}}}$ είναι η γωνία που σχηματίζεται από τα \mathbf{a} και \mathbf{b} . Συνεπώς προκύπτει ότι η

τιμή του εσωτερικού γινομένου είναι:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta_{\widehat{\mathbf{ab}}} . \quad (7.29)$$

Επειδή όμως το εσωτερικό γινόμενο είναι βαθμωτό μέγεθος η (7.29) θα ισχύει σε κάθε σύστημα αναφοράς. Μάλιστα, η γωνία $\theta_{\widehat{\mathbf{ab}}}$ μεταξύ των δύο διανυσμάτων αποδεικνύεται με αυτό τον τρόπο, όπως εξάλλου είναι αναμενόμενο, ότι είναι βαθμωτό μέγεθος και μπορεί να προσδιορισθεί μέσω του εσωτερικού γινομένου. Όταν η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων είναι $\theta = \pm\pi/2$ τα διανύσματα \mathbf{a} και \mathbf{b} είναι κάθετα μεταξύ τους και το εσωτερικό τους γινόμενο είναι μηδέν.

Τα διανύσματα βάσης $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ και $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ είναι μοναδιαία και κάθετα μεταξύ τους:

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1 , \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 0 , \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = 0 , \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = 0 .$$

Συνεπώς επειδή

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = a_x , \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = a_y , \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = a_z ,$$

κάθε διάνυσμα μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{a} = a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k} .$$

Αποδεικνύουμε τώρα τρία λήμματα τα οποία είναι πολύ χρήσιμα.

Λήμμα 1. Εάν για κάθε διάνυσμα \mathbf{a} είναι

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0 , \quad (7.30)$$

τότε το διάνυσμα \mathbf{b} θα είναι το μηδενικό διάνυσμα $\mathbf{0}$.

Απόδειξη: Αν επιλέξουμε ως \mathbf{a} το $(1, 0, 0)$ τότε η (7.30) συνεπάγεται ότι $b_x = 0$. Ομοίως η επιλογή $\mathbf{a} = (0, 1, 0)$ συνεπάγεται $b_y = 0$ και η επιλογή $\mathbf{a} = (0, 0, 1)$ συνεπάγεται $b_z = 0$. Συνεπώς το \mathbf{b} είναι το μηδενικό διάνυσμα. Με άλλα λόγια το μόνο διάνυσμα που είναι κάθετο σε όλα τα διανύσματα του χώρου είναι το μηδενικό διάνυσμα.

Λήμμα 2. Εάν για κάθε διάνυσμα \mathbf{a} , η τριάδα (b_x, b_y, b_z) έχει την ιδιότητα σε κάθε σύστημα αξόνων η ποσότητα $a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z$ να είναι αναλλοίωτη (να είναι δηλαδή ένα βαθμωτό μέγεθος) τότε η τριάδα (b_x, b_y, b_z) αποτελεί διάνυσμα¹⁵.

Απόδειξη: Έστω \mathbf{R} μια στροφή των αξόνων που μετασχηματίζουν το \mathbf{a} στο \mathbf{a}' με $\mathbf{a}' = \mathbf{R} \mathbf{a}$, όπου \mathbf{a}' και \mathbf{a} είναι οι κολώνες των συντεταγμένων των \mathbf{a}' και \mathbf{a} , αντίστοιχα. Η

¹⁵Εδώ προϋποτίθεται ότι γνωρίζουμε πως να βρούμε τις συνιστώσες του \mathbf{b} , (b_x, b_y, b_z) , σε κάθε ορθογώνιο σύστημα αξόνων.

αναλλοιότητα του εσωτερικού γινομένου συνεπάγεται ότι $\mathbf{a}'^\top \mathbf{b}' = \mathbf{a}^\top \mathbf{b}$, άρα επειδή $\mathbf{a}'^\top = \mathbf{a}^\top \mathbf{R}^\top$ θα είναι:

$$\mathbf{a}^\top (\mathbf{R}^\top \mathbf{b}' - \mathbf{b}) = 0 .$$

Επειδή η παραπάνω ισότητα ισχύει για κάθε \mathbf{a} , θα είναι σύμφωνα με το Λήμμα 1, $\mathbf{R}^\top \mathbf{b}' - \mathbf{b} = \mathbf{0}$, άρα

$$\mathbf{b}' = \mathbf{R} \mathbf{b} ,$$

δηλαδή το \mathbf{b} είναι διάνυσμα.

Λήμμα 3. Εάν η συνιστώσα κάποιου φυσικού μεγέθους στη διεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$, είναι $b_n = b_x n_x + b_y n_y + b_z n_z$, για κάθε μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ και (b_x, b_y, b_z) οι συνιστώσες του φυσικού μεγέθους σε τρεις ορθογώνιους άξονες, τότε το \mathbf{b} είναι διάνυσμα.

Απόδειξη: Δεν θα δώσουμε τη γενικότερη απόδειξη διότι δεν έχουμε κατασκευάσει το γενικό μετασχηματισμό στροφής. Θα αρκεστούμε στην απόδειξη του διανυσματικού χαρακτήρα του \mathbf{b} σε στροφές περί τον άξονα z . Έστω ότι κατά τη στροφή ο άξονας x μετασχηματίζεται στον x' και ο άξονας y στον y' . Λαμβάνουμε πρώτα το $\hat{\mathbf{n}} = (\cos \theta, \sin \theta, 0)$ όπου θ η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των x και x' , οπότε το $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στη διεύθυνση του x' . Συνεπώς από την υπόθεση η συνιστώσα στην διεύθυνση x' είναι:

$$b_{x'} = b_x \cos \theta + b_y \sin \theta .$$

Ομοίως λαμβάνοντας το μοναδιαίο διάνυσμα κατά τη διεύθυνση του y' : $\hat{\mathbf{n}} = (-\sin \theta, \cos \theta, 0)$, θα έχουμε ότι η συνιστώσα του \mathbf{b} στη διεύθυνση y' είναι:

$$b_{y'} = -b_x \sin \theta + b_y \cos \theta .$$

Λαμβάνοντας τέλος $\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1)$ έχουμε ότι η συνιστώσα στην διεύθυνση z' είναι:

$$b_{z'} = b_z .$$

Συνεπώς οι συνιστώσες του \mathbf{b} μετασχηματίζονται στις στροφές όπως και οι μετατοπίσεις και επομένως το \mathbf{b} είναι πράγματι διάνυσμα.

7.7 Υπολογισμός της παραγώγου εσωτερικού γινομένου – Γεωμετρική ερμηνεία της βαθμίδας

Έστω $\mathbf{a}(t)$ και $\mathbf{b}(t)$ δύο χρονοεξαρτώμενα διανύσματα. Η παράγωγος του εσωτερικού γινομένου ικανοποιεί τον ίδιο κανόνα που ισχύει για την παράγωγο γινομένου συναρτήσεων, αφού το εσωτερικό γινόμενο δεν είναι τίποτε άλλο από άθροισμα γι-

νομένων. Πράγματι επιλέγοντας ένα σύστημα αναφοράς έχουμε διαδοχικά:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) &= \frac{d}{dt}(a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z) \\ &= \frac{d(a_x b_x)}{dt} + \frac{d(a_y b_y)}{dt} + \frac{d(a_z b_z)}{dt} \\ &= \left(\frac{da_x}{dt} b_x + \frac{da_y}{dt} b_y + \frac{da_z}{dt} b_z \right) + \left(a_x \frac{db_x}{dt} + a_y \frac{db_y}{dt} + a_z \frac{db_z}{dt} \right) \\ &= \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{b}}{dt} .\end{aligned}$$

Επειδή όμως η παραπάνω ισότητα αφορά βαθμωτά μεγέθη, ο τύπος για την παραγωγή εσωτερικού γινομένου ισχύει σε όλα τα συστήματα αναφοράς. Μια ειδική περίπτωση της σχέσης αυτής εμφανίζεται συχνά στη μηχανική. Υπολογίζουμε την παράγωγο του εσωτερικού γινομένου $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$ που είναι ίσο με το $a^2 = |\mathbf{a}|^2$, όπου $a = |\mathbf{a}|$ είναι το μέτρο του \mathbf{a} . Αυτό μπορεί να γίνει με δύο τρόπους. Αφενός,

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}) = \mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} + \frac{d\mathbf{a}}{dt} \cdot \mathbf{a} = 2\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} ,$$

και αφετέρου:

$$\frac{da^2}{dt} = 2a \frac{da}{dt} ,$$

και επειδή είναι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a^2$ έχουμε την ταυτότητα

$$\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = a \frac{da}{dt} . \quad (7.31)$$

Προσέξτε ότι στην παραπάνω σχέση το αριστερό σκέλος είναι το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσματικών (ή ψευδοδιανυσματικών) μεγεθών ενώ το δεξιό σκέλος είναι το σύννηθες γινόμενο δύο βαθμωτών (ή ψευδοβαθμωτών) μεγεθών.

Ένα χρήσιμο πόρισμα της (7.31) που θα συναντήσουμε επανειλημμένα είναι το ακόλουθο: Εάν ένα διάνυσμα \mathbf{a} που εξαρτάται από μια μεταβλητή, t , έχει σταθερό μέτρο, a , και συνεπώς είναι $\dot{a} = 0$, τότε από την (7.31) προκύπτει ότι

$$\mathbf{a} \cdot \frac{d\mathbf{a}}{dt} = 0 ,$$

δηλαδή το διάνυσμα \mathbf{a} είναι κάθετο στο διάνυσμα, $\dot{\mathbf{a}} = d\mathbf{a}/dt$.

Ας δούμε τώρα ποιο είναι το φυσικό και γεωμετρικό νόημα της βαθμίδας¹⁶ ενός βαθμωτού πεδίου $V(\mathbf{r})$. Σύμφωνα με το θεώρημα του Taylor η μεταβολή της τιμής

¹⁶Η βαθμίδα ενός βαθμωτού πεδίου ∇V συχνά γράφεται και ως $\text{grad}V$.

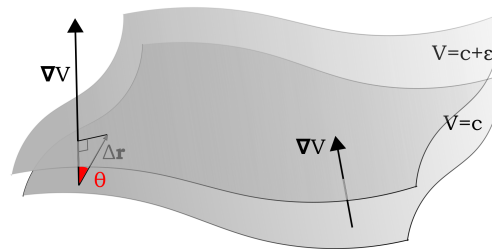
του βαθμωτού πεδίου, ΔV , όταν μετατοπιστούμε από το σημείο \mathbf{r} κατά $\Delta \mathbf{r} = (\Delta x, \Delta y, \Delta z)$:

$$\begin{aligned}\Delta V &= V(\mathbf{r} + \Delta \mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) \\ &= \frac{\partial V}{\partial x} \Delta x + \frac{\partial V}{\partial y} \Delta y + \frac{\partial V}{\partial z} \Delta z + O(|\Delta \mathbf{r}|^2) \\ &= \nabla V \cdot \Delta \mathbf{r} + O(|\Delta \mathbf{r}|^2) .\end{aligned}\quad (7.32)$$

Συνεπώς η διαφορική μεταβολή του V ικανοποιεί τη σχέση:

$$dV = (\nabla V) \cdot d\mathbf{r} , \quad (7.33)$$

η οποία μάλιστα μπορεί να ληφθεί και ως ορισμός της βαθμίδας. Πράγματι από



Σχήμα 7.6: Στο σχήμα έχουν σχεδιαστεί δύο επιφάνειες σταθερού V . Σε δύο σημεία της κάτω επιφάνειας (χαμηλότερου V) έχει σχεδιαστεί το ∇V . Το διάνυσμα αυτό είναι κάθετο στην επιφάνεια. Στα σημεία που οι ισο- V επιφάνειες είναι πυκνότερες το ∇V έχει μεγαλύτερο μέτρο.

το Λήμμα 2 του προηγούμενου εδαφίου προκύπτει ότι το ∇V είναι διάνυσμα δεδομένου ότι το dV είναι βαθμωτό μέγεθος (ως (απειροστή) διαφορά δύο βαθμωτών) και το $d\mathbf{r}$ διάνυσμα. Γεωμετρικά η σχέση αυτή μας υποδεικνύει ότι η βαθμίδα έχει τη διεύθυνση της καθέτου στην επιφάνεια $V = c$, όπου c κάποια σταθερά. Πράγματι αν σχεδιάσουμε την επιφάνεια $V = c$ και την επιφάνεια $V = c + \epsilon$ βλέπουμε από την (7.32) ότι σε πρώτη τάξη η μετατόπιση $\Delta \mathbf{r}$ για να μεταφερθούμε από τη μία επιφάνεια στην άλλη ικανοποιεί την

$$\epsilon = \nabla V \cdot \Delta \mathbf{r} .$$

Το μέτρο της μετατόπισης $\delta = |\Delta \mathbf{r}|$ είναι σε πρώτη τάξη:

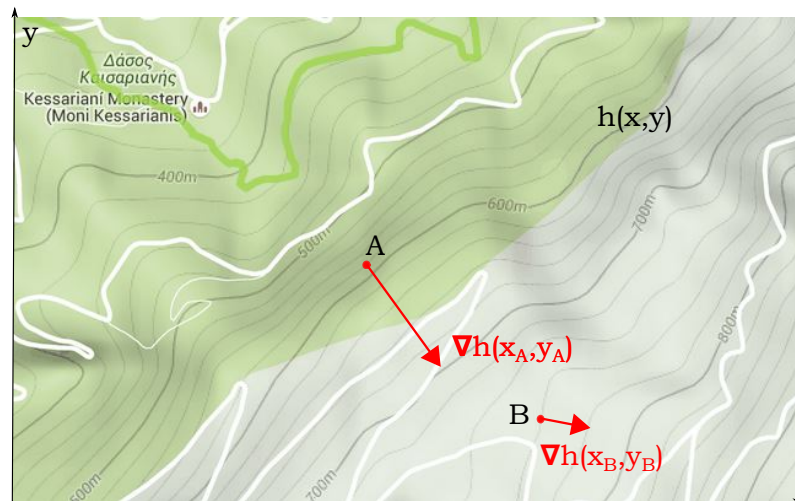
$$\delta = \frac{\epsilon}{|\nabla V| \cos \theta} ,$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζει η ∇V με τη μετατόπιση $\Delta \mathbf{r}$ (βλ. Σχήμα 7.6). Όταν το

δ γίνει ελάχιστο τότε η μετατόπιση είναι στη διεύθυνση της καθέτου στην επιφάνεια. Αυτό συμβαίνει όταν η γωνία μεταξύ βαθμίδας και μετατόπισης είναι $\theta = 0$, όταν δηλαδή η διεύθυνση της βαθμίδας και της κοντινότερης αυτής απόστασης ταυτίζονται. Συνεπώς η βαθμίδα, ∇V , έχει ως διεύθυνση την κάθετο στην επιφάνεια $V = c$. Η κατεύθυνση τώρα της ∇V είναι αυτή που δείχνει προς την αύξηση της τιμής του V . Το δε μέτρο της ∇V , σύμφωνα με τις προηγούμενες σχέσεις, είναι

$$|\nabla V| = \frac{\epsilon}{\delta_{\perp}},$$

όπου δ_{\perp} είναι η χωρική απόσταση (κάθετα στην επιφάνεια) δύο επιφανειών των οποίων οι τιμές του V διαφέρουν κατά ϵ . Επομένως το $|\nabla V|$ είναι μεγαλύτερο εκεί που οι επιφάνειες είναι πολύ κοντά και μικρό εκεί που οι επιφάνειες απέχουν περισσότερο. Αν η V σημειώνει το υψόμετρο σε ένα δισδιάστατο τοπογραφικό χάρτη, οι ισοϋψείς στο χάρτη αυτό (καμπύλες και όχι επιφάνειες) πυκνώνουν εκεί που το ύψος μεταβάλλεται απότομα και τότε η βαθμίδα του ∇V έχει μεγάλο μέτρο (βλ. Σχήμα 7.7).



Σχήμα 7.7: Στο σχήμα φαίνεται ένας τοπογραφικό χάρτης μέρους του Υμητού. Στο χάρτη είναι χαραγμένες οι ισοϋψείς καμπύλες καθώς και η βαθμίδα του ύψους, $\nabla h(x, y)$ σε δύο σημεία: στο A με υψόμετρο 580 m και στο B με υψόμετρο 760 m. Στο A που οι καμπύλες είναι πυκνές και το υψόμετρο αλλάζει απότομα η ∇h έχει μεγάλο μέτρο, ενώ στο B που οι καμπύλες είναι αραιές και η πλαγιά του βουνού είναι λιγότερο απότομη, το $|\nabla h|$ είναι σαφώς μικρότερο.

Είναι χρήσιμο να σημειώσουμε ότι η βαθμίδα της απόστασης σημείου από την αρχή των αξόνων, ∇r , είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$. Αυτό συμβαίνει διότι οι επιφάνειες $r = \text{σταθερό}$ είναι σφαίρες. Η κάθετος σε μία σφαίρα έχει ακτινική διεύθυνση οπότε η ∇r έχει την διεύθυνση του r , το δε μέτρο του ∇r είναι, αν θέσουμε $V = r$ στην (7.33):

$$|\nabla r| = \frac{dr}{dr} = 1.$$

Συνεπώς

$$\nabla r = \hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{r}. \quad (7.34)$$

Προσπαθήστε να υπολογίσετε το ∇r και από τις καρτεσιανές συνιστώσες του r , $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$.

7.8 Διανύσματα στη γεωμετρία

Στο εδάφιο αυτό θα χρησιμοποιήσουμε την ερφαλειοθήκη των διανυσμάτων για να κατασκευάσουμε, σε διανυσματική μορφή, την εξίσωση μιας σφαίρας, ενός επιπέδου, ενός κυλίνδρου και ενός κώνου.

- (i.) **Σφαίρα:** Τα σημεία της επιφάνειας μίας σφαίρας η οποία έχει ακτίνα R και κέντρο το σημείο \mathbf{r}_0 , ισαπέχουν από το κέντρο. Συνεπώς κάθε σημείο της σφαίρας, που προσδιορίζεται από το διάνυσμα \mathbf{r} ικανοποιεί την διανυσματική εξίσωση της σφαίρας:

$$|\mathbf{r}_{\text{σφ}} - \mathbf{r}_0| = R.$$

- (ii.) **Επίπεδο:** Επίσης επίπεδη επιφάνεια είναι εκείνη η οποία σε κάθε σημείο της, το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα είναι ίδιο (έχει σταθερή διεύθυνση). Συνεπώς, ένα επίπεδο προσδιορίζεται πλήρως αν δοθεί το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα σε αυτό και η ελάχιστη απόσταση του επιπέδου από την αρχή των αξόνων. Εάν η ελάχιστη απόσταση είναι d και το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα στο επίπεδο είναι $\hat{\mathbf{n}}$, τότε κάθε σημείο του επιπέδου ικανοποιεί την εξίσωση:

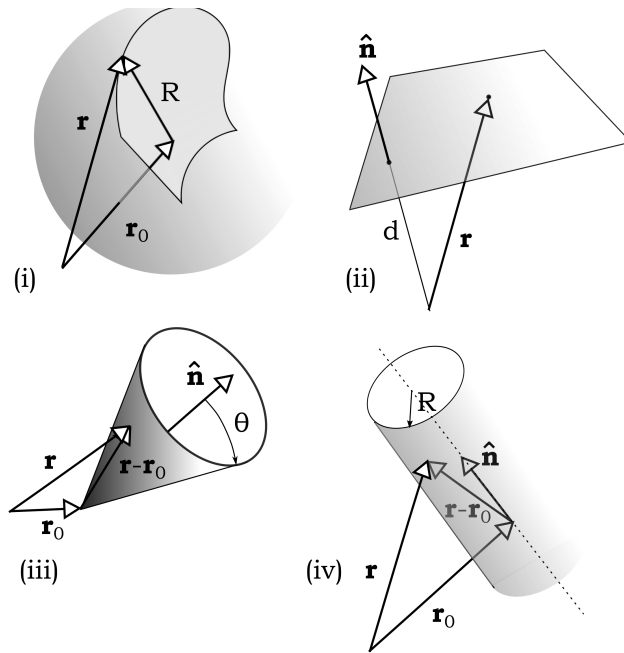
$$\mathbf{r}_{\text{επιπ}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = d,$$

διότι η ελάχιστη απόσταση μεταξύ της αρχής και των σημείων του επιπέδου δίδεται από το μήκος της καθέτου στο επίπεδο που περνά από την αρχή των αξόνων (βλ. Σχήμα 7.8). Εναλλακτικά, το γεγονός ότι το μοναδιαίο κάθετο διάνυσμα θα πρέπει να είναι σταθερό, ισοδυναμεί με το ότι η επιφάνεια $V(\mathbf{r}) = V_0$ που αντιστοιχεί σε ένα επίπεδο θα πρέπει να έχει $\nabla V / |\nabla V| = \hat{\mathbf{n}}$. Επομένως θα πρέπει η V να είναι μια γραμμική συνάρτηση του \mathbf{r} , δηλαδή θα πρέπει να έχει τη μορφή

$$V(\mathbf{r}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r} + a_0$$

με \mathbf{a} κάποιο κατάλληλο σταθερό διάνυσμα και a_0 κάποιο σταθερό αριθμό. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι $\nabla V = \mathbf{a}$. Συνεπώς θα πρέπει να είναι $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|\hat{\mathbf{n}}$. Επίσης η ελάχιστη απόσταση που θα πρέπει να απέχει ένα σημείο της επιφάνειας αυτής από την αρχή είναι d , οπότε θα έχουμε

$$V_0 = \mathbf{a} \cdot \mathbf{r}_{\text{min}} + a_0 = |\mathbf{a}|d + a_0.$$



Σχήμα 7.8: Οι τέσσερις επιφάνειες, σφαίρα, επίπεδο, κώνος και κύλινδρος σε διανυσματική μορφή.

Δηλαδή $|\mathbf{a}| = (V_0 - a_0)/d$. Συνθέτωντας όλα τα παραπάνω στοιχεία θα λάβουμε την ακόλουθη εξίσωση για το επίπεδο

$$\frac{V_0 - a_0}{d} \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} + a_0 = V_0 \quad \text{με άλλα λόγια} \quad \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} = d,$$

στην ίδια ακριβώς εξίσωση που καταλήξαμε παραπάνω.

- (iii.) **Κώνος:** Ένας κώνος με κορυφή το σημείο \mathbf{r}_0 , άξονα στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$ και άνοιγμα θ είναι ο τόπος όλων των σημείων \mathbf{r} που η σχετική τους θέση ως προς το \mathbf{r}_0 σχηματίζει με το $\hat{\mathbf{n}}$ γωνία θ . Δηλαδή

$$\frac{(\mathbf{r}_{\kappa\omega\nu} - \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}}{|\mathbf{r}_{\kappa\omega\nu} - \mathbf{r}_0|} = \cos \theta = \text{σταθ}. \quad (7.35)$$

- (iv.) **Κύλινδρος:** Ένας κύλινδρος ο άξονας του οποίου διέρχεται από το σημείο \mathbf{r}_0 και έχει τη διεύθυνση του μοναδιαίου $\hat{\mathbf{n}}$ χαρακτηρίζεται από σημεία που απέχουν από τον άξονα απόσταση R , ίση με την ακτίνα του κυλίνδρου. Επομένως $|\mathbf{r}_{\kappa\upsilon\lambda} - (\mathbf{r}_0 + \lambda\hat{\mathbf{n}})| = R$, όπου λ είναι κατάλληλος αριθμός που αντιστοιχεί στο $\mathbf{r}_{\kappa\upsilon\lambda}$ το εγγύτερο σημείο του άξονα. Πρόκειται για το μήκος της προβολής του $\mathbf{r}_{\kappa\upsilon\lambda} - \mathbf{r}_0$ στο $\hat{\mathbf{n}}$. Συνεπώς

$$|(\mathbf{r}_{\kappa\upsilon\lambda} - \mathbf{r}_0) - \hat{\mathbf{n}} (\mathbf{r}_{\kappa\upsilon\lambda} - \mathbf{r}_0) \cdot \hat{\mathbf{n}}| = R. \quad (7.36)$$

Κλείνοντας το εδάφιο αυτό, δίνουμε μια χρήσιμη εφαρμογή του εσωτερικού γινομένου· τον προσδιορισμό της πλευράς ενός τριγώνου όταν είναι γνωστές οι άλλες δύο. Έστω τρίγωνο ABC . Η μετατόπιση από τη κορυφή A στη κορυφή B ορίζει το διάνυσμα \mathbf{c} που έχει μέτρο ίσο με το μήκος του ευθύγραμμου τμήματος AB , c . Η μετατόπιση από το A στο C ορίζει το διάνυσμα \mathbf{b} που έχει μέτρο b , και η μετατόπιση από το B στο C ορίζει το διάνυσμα $\mathbf{a} = \mathbf{b} - \mathbf{c}$ που έχει μέτρο a . Δίδεται και η γωνία του τριγώνου $\theta = \angle CAB$. Ζητείται να προσδιορισθεί το μήκος της τρίτης πλευράς a συναρτήσει των b, c και θ . Προς τούτο:

$$\begin{aligned} a^2 &= |\mathbf{b} - \mathbf{c}|^2 \\ &= |\mathbf{b}|^2 + |\mathbf{c}|^2 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{c} \\ &= b^2 + c^2 - 2bc \cos \theta, \end{aligned}$$

που είναι γνωστός ως νόμος των συνημιτόνων.

7.9 Το φυσικό νόημα της απόκλισης πεδίου

Στο εδάφιο 7 είδαμε ποια είναι η δράση του ∇ , το οποίο αποδείξαμε νωρίτερα ότι είναι διάνυσμα –ή έστω δρα ως διάνυσμα–, σε μια βαθμωτή συνάρτηση. Τώρα θα εξετάσουμε ποια είναι η δράση του ως εσωτερικό γινόμενο σε μια διανυσματική συνάρτηση, και τι σημαίνει το αποτέλεσμα της δράσης από γεωμετρική άποψη.

Όπως εξηγήσαμε στο παρόν Κεφάλαιο, δύο διανύσματα μπορούν να πολλαπλασιαστούν, μέσω εσωτερικού γινομένου, και να προκύψει ένα βαθμωτό μέγεθος¹⁷. Θα μελετήσουμε λοιπόν το αποτέλεσμα της δράσης του διανυσματικού τελεστή ∇ πάνω σε μια διανυσματική συνάρτηση $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ υπό τη μορφή εσωτερικού γινομένου¹⁸:

$$\begin{aligned} \varrho(\mathbf{r}) = \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \cdot (A_x(x, y, z), A_y(x, y, z), A_z(x, y, z)) \\ &= \frac{\partial A_x(x, y, z)}{\partial x} + \frac{\partial A_y(x, y, z)}{\partial y} + \frac{\partial A_z(x, y, z)}{\partial z}. \end{aligned}$$

Προσοχή: η γραφή της τελείας που δηλώνει εσωτερικό γινόμενο είναι απαραίτητη και δεν θα πρέπει να παραλείπεται· αν δεν υπάρχει δεν θα ξέρουμε ποια ακριβώς πράξη γινομένου να εκτελέσουμε.

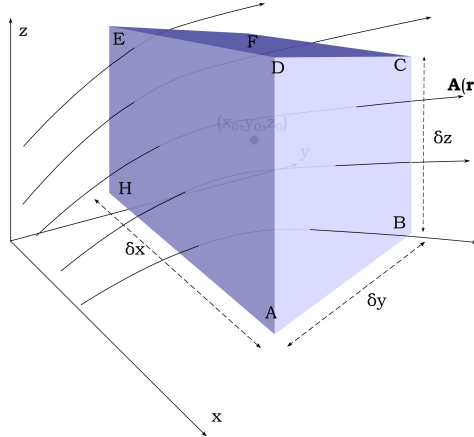
Το αποτέλεσμα δεν αποτελεί διάνυσμα (λόγω εσωτερικού γινομένου), αλλά μια

¹⁷Στα Κεφάλαια 8 και 9 θα εξετάσουμε άλλη μια μορφή γινομένου διανυσμάτων, το εξωτερικό γινόμενο, από το οποίο μπορεί να προκύψει ένα νέο διανυσματικό μέγεθος.

¹⁸Προφανώς ο τελεστής ∇ πρέπει να προηγείται της συνάρτησης $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ώστε να δράσει κάπου και να μας δώσει μια συνάρτηση. Το αντίστροφο της διάταξης εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla$ αποτελεί και αυτό μια λογική κατασκευή και μάλιστα βαθμωτή, αλλά πρόκειται πάλι για τελεστή ο οποίος περιμένει να δράσει κάπου, και όχι για συνάρτηση, όπως το $\nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r})$. Ο τελεστής $\mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot \nabla$ είναι η κατευθυνόμενη παράγωγος στο σημείο \mathbf{r} στη διεύθυνση $\mathbf{A}(\mathbf{r})$.

νέα βαθμωτή ποσότητα η οποία ως τέτοια έχει αυθύπαρκτο γεωμετρικό νόημα και δεν εξαρτάται από το σύστημα αναφοράς. Ποιο όμως είναι αυτό;

Ας φανταστούμε το $\mathbf{A}(\mathbf{r})$ ως ένα διανυσματικό πεδίο που γεμίζει το χώρο και ας κατασκευάσουμε ένα μικρό ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με κέντρο το σημείο $\mathbf{r}_0 = (x_0, y_0, z_0)$ και πλευρές $\delta x, \delta y, \delta z$ αντίστοιχα (βλ. Σχήμα 7.9). Η ροή του πεδίου \mathbf{A}



Σχήμα 7.9: Το ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο $ABCDEFGH$ με διαστάσεις $\delta x \times \delta y \times \delta z$ είναι κεντραρισμένο στο σημείο (x_0, y_0, z_0) . Η ροή F που διαπερνά την επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου $S(V)$ σχετίζεται με την απόκλιση του πεδίου $\nabla \cdot \mathbf{A}$ στο σημείο (x_0, y_0, z_0) .

μέσα από την επιφάνεια-σύνορο του παραλληλεπιπέδου ορίζεται ως το επιφανειακό ολοκλήρωμα

$$F = \int_{S(V)} \mathbf{A}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}), \quad (7.37)$$

όπου F είναι η ροή (βαθμωτό μέγεθος) του πεδίου, $S(V)$ είναι η επιφάνεια του παραλληλεπιπέδου που περικλείει το χωρίο όγκου $V = \delta x \delta y \delta z$, και $d\mathbf{S}$ μια στοιχειώδης επιφάνεια¹⁹ του παραλληλεπιπέδου στη θέση \mathbf{r} και στην οποία το διάνυσμα του πεδίου είναι $\mathbf{A}(\mathbf{r})$. Η ροή εμφανίζεται υπό τη μορφή εσωτερικού γινομένου, αφού όταν η επιφάνεια είναι κάθετη στο πεδίο (το διάνυσμα της επιφάνειας είναι παράλληλο στο πεδίο) η ροή είναι μέγιστη, ενώ όταν είναι παράλληλη με το πεδίο (το διάνυσμα της επιφάνειας είναι κάθετο στο πεδίο) η ροή είναι μηδενική²⁰. Προφανώς από στοιχειώδη επιφάνεια σε στοιχειώδη επιφάνεια αλλάζει το πεδίο, αλλά λόγω της μικρής έκτασης του χωρίου (σε σχέση με την κλίμακα που συμβαίνουν αξιοσημείωτες μα-

¹⁹Μολονότι η επιφάνεια η επιφάνεια δεν φαίνεται να εμπεριέχει κάποιο διανυσματικό χαρακτήρα, θα δούμε στο Κεφάλαιο 8 ότι στις 3 διαστάσεις μπορεί κανείς αυθόρμητα να κατασκευάσει ένα διάνυσμα κάθετο σε μια επιφάνεια το μέτρο του οποίου να είναι ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας αυτής. Η επιφάνεια ως διάνυσμα είναι προσανατολισμένη και ο προσανατολισμός της σχετίζεται με τις δύο πλευρές της επιφάνειας.

²⁰Ένας εναλλακτικός τρόπος να αντιλαμβάνεται κανείς τη ροή είναι με την καταμέτρηση των γραμμών ροής που διαπερνούν την επιφάνεια.

ταβολές του πεδίου \mathbf{A}) θα γράψουμε σε κάθε θέση το πεδίο ως ανάπτυγμα Taylor και θα κρατήσουμε μονάχα εκείνους τους όρους που θα μας δώσουν μια χρήσιμη πληροφορία. Έτσι

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{A}(x_0, y_0, z_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}_0} \Delta x + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}_0} \Delta y + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}_0} \Delta z + \mathcal{O}(\Delta^2), \quad (7.38)$$

όπου οι μερικές παράγωγοι²¹ υπολογίζονται στο κέντρο του παραλληλεπιπέδου και τα $\Delta x, \Delta y, \Delta z$ μετρούν τη μετατόπιση του εκάστοτε σημείου στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το \mathbf{A} από το κέντρο (x_0, y_0, z_0) . Οι δε όροι $\mathcal{O}(\Delta^2)$ είναι όροι διγραμμικοί ως προς τις μετατοπίσεις, δηλαδή όροι της μορφής $(\Delta x)(\Delta y), (\Delta z)^2$ κλπ.

Στη μια έδρα του παραλληλεπιπέδου, την $ABCD$ που είναι παράλληλη στο επίπεδο $y - z$ και επομένως έχει την κατεύθυνση του \mathbf{i} (αφού ως θετική λαμβάνουμε συμβατικά την κατεύθυνση που κοιτάζει κάθετα στην επιφάνεια και προς το εξωτερικό μέρος της κλειστής επιφάνειας) το πεδίο έχει τη μορφή:

$$\mathbf{A}(x, y, z) = \mathbf{A}(x_0, y_0, z_0) + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}_0} \frac{\delta x}{2} + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}_0} \xi + \left. \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}_0} \zeta + \mathcal{O}(\Delta^2),$$

και στον υπολογισμό της ροής οι μεταβλητές $\xi = y - y_0$ και $\zeta = z - z_0$ διατρέχουν τα διαστήματα $[-\delta y/2, +\delta y/2]$ και $[-\delta z/2, +\delta z/2]$, αντίστοιχα²². Κατά την ολοκλήρωση από τα διανύσματα \mathbf{A} και τις μερικές παραγώγους αυτού θα παραμείνουν μόνο οι x -συνιστώσες εξαιτίας του εξωτερικού γινομένου με το μοναδιαίο \mathbf{i} της επιφάνειας, οπότε

$$F_{ABCD} = \int_{-\delta y/2}^{+\delta y/2} \int_{-\delta z/2}^{-\delta z/2} d\xi d\zeta \left[A_x(x_0, y_0, z_0) + \left. \frac{\partial A_x}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}_0} \frac{\delta x}{2} + \left. \frac{\partial A_x}{\partial y} \right|_{\mathbf{r}_0} \xi + \left. \frac{\partial A_x}{\partial z} \right|_{\mathbf{r}_0} \zeta + \mathcal{O}(\Delta^2) \right].$$

Στο ολοκλήρωμα αυτό οι ολοκληρώσεις $\int \xi d\xi$ και $\int \zeta d\zeta$ θα δώσουν μηδέν λόγω συμμετρικών ορίων οπότε αυτό που θα μένει θα είναι

$$F_{ABCD} = \left[A_x(x_0, y_0, z_0) + \left. \frac{\partial A_x}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}_0} \frac{\delta x}{2} + \mathcal{O}(\Delta^2) \right] \delta y \delta z.$$

Δεν είναι δύσκολο να δείξει κανείς ότι το αντίστοιχο ολοκλήρωμα της ροής στην απέναντι έδρα $EFGH$ είναι ίσο με

$$F_{EFGH} = - \left[A_x(x_0, y_0, z_0) - \left. \frac{\partial A_x}{\partial x} \right|_{\mathbf{r}_0} \frac{\delta x}{2} + \mathcal{O}(\Delta^2) \right] \delta y \delta z.$$

όπου το αρνητικό “-” οφείλεται στην κατεύθυνση της μας επιφάνειας προς το $-\mathbf{i}$, ενώ

²¹ Οι παράγωγοι δρουν σε ολόκληρο το διάνυσμα \mathbf{A} δηλαδή σε κάθε συνιστώσα αυτού.

²² Εδώ αντικαταστήσαμε στην (7.38) τις μετατοπίσεις: $\Delta x = \delta x/2, \Delta y = y - y_0, \Delta z = z - z_0$.

το “-” στο ανάπτυγμα Taylor οφείλεται στο ότι μετράμε το πεδίο όχι μπροστά από το x_0 , αλλά πίσω από αυτό κατά $\delta x/2$. Το άθροισμα των ροών των δύο από τις έξι αυτών εδρών είναι

$$F_{ABCD} + F_{EFGH} = \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_{\mathbf{r}_0} \delta x + \mathcal{O}(\Delta^2) \right] \delta y \delta z = \frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_{\mathbf{r}_0} \delta x \delta y \delta z + \mathcal{O}(\delta^4) \quad (7.39)$$

Στο τελικό αποτέλεσμα, τους όρους ανώτερης τάξης τους γράψαμε $\mathcal{O}(\delta^4)$ αντί $\mathcal{O}(\Delta^4)$ αφού τα όρια των ολοκληρώσεων σχετίζονται με το μέγεθος των πλευρών και όχι με την οποιαδήποτε μετατόπιση Δx ή Δy ή Δz , η οποία λαμβάνει κάποια τιμή εντός του εύρους του παραλληλεπίπεδου προ ολοκληρώσεως. Τώρα πλέον μπορούμε κατ’ αναλογία να κατασκευάσουμε τις ροές σε όλα τα άλλα ζευγάρια απέναντι εδρών και να καταλήξουμε ότι η ολική ροή μέσα από την επιφάνεια είναι

$$\begin{aligned} F &= \left[\frac{\partial A_x}{\partial x} \Big|_{\mathbf{r}_0} + \frac{\partial A_x}{\partial y} \Big|_{\mathbf{r}_0} + \frac{\partial A_x}{\partial z} \Big|_{\mathbf{r}_0} \right] \delta x \delta y \delta z + \mathcal{O}(\delta^4) \\ &= \nabla \cdot \mathbf{A}(\mathbf{r}) \Big|_{\mathbf{r}_0} \delta V + \mathcal{O}(\delta^4). \end{aligned} \quad (7.40)$$

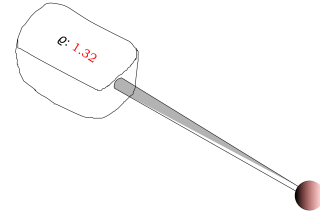
Παρατηρούμε ότι η ποσότητα που σχετίζεται με το πεδίο και μετρά τη ροή είναι η τιμή του $\nabla \cdot \mathbf{A}$ υπολογισμένη στο κέντρο του χωρίου όγκου δV . Αν λοιπόν σχηματίσουμε το λόγο $F_{S(\delta V)}/\delta V$ και λάβουμε το όριο²³

$$\lim_{\delta V \rightarrow 0} \frac{F_{S(\delta V)}}{\delta V}, \quad (7.41)$$

αυτό το οποίο θα προκύψει είναι η τιμή του

$$\nabla \cdot \mathbf{A} \Big|_{\mathbf{r}_0}.$$

Με άλλα λόγια η ποσότητα $\rho(\mathbf{r})$, που ορίσαμε στην (7.37) και η οποία ονομάζεται *απόκλιση* του διανυσματικού πεδίου \mathbf{A} , μετρά τη ροή ανά μονάδα όγκου που διαπερνά μια μικροσκοπική κλειστή επιφάνεια γύρω από το σημείο \mathbf{r} . Η απόκλιση συμβολίζεται εκτός από $\nabla \cdot \mathbf{A}$ και $\text{div} \mathbf{A}$. Εμείς θα προτιμήσουμε τον πρώτο συμβολισμό που αναδεικνύει τον βαθμωτό χαρακτήρα του νέου μεγέθους.



Σχήμα 7.10: Μια διάταξη που θα μετρούσε την απόκλιση του πεδίου \mathbf{A} σε κάποιο σημείο θα αποτελούνταν από μια μικροσκοπική σφαίρα, η επιφάνεια της οποίας θα ήταν ευαίσθητη σε ανίχνευση ροής του \mathbf{A} . Η συνολική ροή δια τον όγκο της σφαίρας θα αναγραφόταν στον πίνακα ενδείξεων του οργάνου.

²³ Από τον υπολογισμό της ροής F και τη μορφή των όρων ανώτερης τάξης καταλαβαίνει κανείς ότι δεν αρκεί να στείλει οριακά το δV στο 0, αλλά θα πρέπει αυτό να γίνει ομοιόμοφα για όλες τις διαστάσεις του χωρίου $\delta x \rightarrow 0$, $\delta y \rightarrow 0$ και $\delta z \rightarrow 0$, ώστε οι όροι ανώτερης τάξης να μηδενίζονται σίγουρα.

Αν θέλαμε να κατασκευάσουμε ένα μηχάνημα το οποίο να μετρά την απόκλιση ενός πεδίου, θα έπρεπε να αποτελείται από ένα σφαιρίδιο μικρών διαστάσεων με την επιφάνειά της καλυμμένη από έναν ευαίσθητο ανιχνευτή ικανό να μετρά ροή του πεδίου. Η βαθμονόμηση της ολικής ροής ως ηλεκτρικό σήμα διαιρεμένη δια τον όγκο του σφαιριδίου θα ήταν ικανή να μετρήσει την απόκλιση στο σημείο που θα την τοποθετούσαμε. Κατ' ουσίαν θα επρόκειτο για ένα ροόμετρο (βλ. Σχήμα 7.10).

Η σύνδεση της ροής του πεδίου διαμέσου της εξωτερικής επιφάνειας ενός στοιχειώδους όγκου και της απόκλισης, μάς επιτρέπει να μετράμε τη ροή ενός πεδίου επί μιας κλειστής επιφάνειας με έμμεσο τρόπο μετρώντας το χωρικό ολοκλήρωμα της απόκλισής του, και αντίστροφα:

$$\int_{S(V)} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{S} = \int_V (\nabla \cdot \mathbf{A}) dV. \quad (7.42)$$

Το αποτέλεσμα αυτό προκύπτει ουσιαστικά από τη σχέση (7.41) που όπως είπαμε μετράει την απόκλιση του πεδίου. Μπορεί να καταλάβει κανείς πώς το όριο των απειροστών όγκων οδηγεί στο πεπερασμένο αποτέλεσμα της (7.42) αν διαιρέσει τον πεπερασμένο όγκο V σε απειροστά ορθογώνια παραλληλεπίπεδα. Τα εσωτερικά σύνορα αυτών θα συνεισφέρουν μηδενική ροή, αφού όση ροή εξέρχεται από την μια έδρα του ενός παραλληλεπίπεδου, τόση εισέρχεται στην κοινή έδρα του γειτονικού παραλληλεπίπεδου (βλ. ένθετο Σχήματος 7.11). Η μοναδική ροή που απομένει τότε σε ολόκληρο το πλήθος των παραλληλεπίπεδων είναι αυτή των εξωτερικών εδρών, δηλαδή η ροή στην εξωτερική επιφάνεια S του V . Η τελευταία σχέση αποτελεί το περιεχόμενο του θεωρήματος του Gauss το οποίο θα μελετήσουμε διεξοδικά στο Κεφάλαιο 13.

7.10 Διατήρηση της ενέργειας σωματιδίου

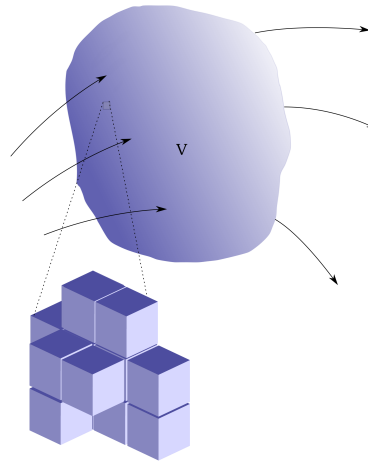
Στο Κεφάλαιο 4 είδαμε ότι στις μονοδιάστατες κινήσεις υπάρχει μια ιδιόμορφη ποσότητα που διατηρείται όταν η δύναμη εξαρτάται αποκλειστικά από τη θέση η ενέργεια. Το ένα κομμάτι αυτής της ποσότητας σχετίζεται με την κίνηση του σωματιδίου

$$K = \frac{1}{2}mv^2$$

και ονομάζεται κινητική ενέργεια. Η κινητική ενέργεια ενός σωματιδίου που κινείται στον τρισδιάστατο χώρο με ταχύτητα \mathbf{v} ορίζεται ως η ποσότητα (κατ' αναλογία με τη μονοδιάστατη κίνηση)

$$K = \frac{m}{2} \mathbf{v} \cdot \mathbf{v} = \frac{m}{2} (v_x^2 + v_y^2 + v_z^2). \quad (7.43)$$

Η κινητική ενέργεια, όπως και κάθε άλλη μορφή ενέργειας είναι βαθμωτό μέγεθος.



Σχήμα 7.11: Η σχέση (7.42) προκύπτει από τη σχέση ροής-απόκλισης. Προσθέτοντας τις αποκλίσεις από όλα στοιχειώδη παραλληλεπίπεδα που συνθέτουν τον όγκο V λαμβάνουμε την ροή στις εξωτερικές έδρες αυτών, δηλαδή τη ροή στην επιφάνεια του όγκου V .

Το έργο μιας σταθερής δύναμης, \mathbf{F} που επιτελείται επί ενός σωματιδίου όταν αυτό μετατοπίζεται κατά \mathbf{a} ορίζεται ως:

$$W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{a} .$$

Εάν το σωματίδιο κινείται επί κάποιας τροχιάς, εν γένει καμπύλης, το συνολικό έργο που ασκείται από τη δύναμη στο σωματίδιο όταν αυτό μεταβεί από το σημείο \mathbf{r}_1 στο \mathbf{r}_2 διαγράφοντας την καμπύλη γ είναι:

$$W = \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \quad (7.44)$$

Προσέξτε ότι για να προσδιορισθεί το ολοκλήρωμα απαιτείται η εκ των προτέρων γνώση της τροχιάς, γ , που ενώνει το αρχικό με το τελικό σημείο. Η δύναμη βρίσκεται μέσα στο ολοκλήρωμα διότι μπορεί να μην είναι σταθερή. Αν η δύναμη είναι σταθερή το έργο της δύναμης είναι $W = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)$, ανεξαρτήτως της διαδρομής, αφού τότε μπορούμε να την “βγάλουμε” έξω από το ολοκλήρωμα:

$$W = \mathbf{F} \cdot \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} d\mathbf{r} .$$

Αν τώρα σχηματίσουμε το εσωτερικό γινόμενο του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα με το διάνυσμα της ταχύτητας $\mathbf{v} = \dot{\mathbf{r}}$ θα έχουμε:

$$\mathbf{v} \cdot \left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{F} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} .$$

Το αριστερό μέλος ισούται με την χρονική παράγωγο της κινητικής ενέργειας (7.43)

$$m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dK}{dt}$$

όπου η K ορίσθηκε παραπάνω στην (7.43) και εξ αυτού συμπεραίνουμε ότι η χρονική παράγωγος της κινητικής ενέργειας ισούται με την ισχύ που ασκεί η δύναμη επί του σωματίου:

$$\frac{dK}{dt} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} .$$

Εάν το σωματίδιο βρίσκεται στη θέση \mathbf{r}_1 τη χρονική στιγμή t_1 και στην θέση \mathbf{r}_2 τη χρονική στιγμή t_2 ακολουθώντας την τροχιά γ τότε η διαφορά της κινητικής ενέργειας στις δύο αυτές θέσεις είναι:

$$\begin{aligned} K(t_2) - K(t_1) &= \int_{t_1}^{t_2} \frac{dK}{dt} dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{r}} dt \\ &= \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = W . \end{aligned} \quad (7.45)$$

Στην τρίτη κατά σειρά σχέση αλλάξαμε τη μεταβλητή από το χρόνο στη θέση επί της τροχιάς, γ , θέτοντας $\dot{\mathbf{r}} dt = d\mathbf{r}$. Συνεπώς η μεταβολή της κινητικής ενέργειας μεταξύ δύο θέσεων του σωματιδίου ισούται με το έργο της δύναμης που το μετακίνησε²⁴. Γενικά το έργο εξαρτάται από τη διαδρομή που ακολούθησε το σωματίδιο. Στην περίπτωση αυτή δεν μπορούμε να πούμε κάτι περισσότερο για τη μεταβολή της κινητικής ενέργειας του σωματιδίου.

Εμείς θα εστιάσουμε την προσοχή μας σε μία ειδική μορφή δυνάμεων οι οποίες λέγονται *συντηρητικές δυνάμεις*²⁵. Αυτές οι δυνάμεις εξαρτώνται μόνο από τη θέση \mathbf{r} και δεν εξαρτώνται από την ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}$ και το χρόνο t και έχουν επιπλέον την ιδιότητα το έργο που ασκούν σε ένα σωματίδιο να είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή, γ . Η πρόταση αυτή συνεπάγεται (όπως θα δούμε αναλυτικά στο Κεφάλαιο 10) ότι το έργο σε κάθε κλειστή διαδρομή γ , που ονομάζεται και κυκλοφορία της δύναμης, είναι πάντοτε μηδενικό:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 . \quad (7.46)$$

Το \oint_{γ} συμβολίζει το ολοκλήρωμα σε μία κλειστή διαδρομή γ . Η πρόταση αυτή ισχύει διότι αν το έργο της δύναμης είναι ανεξάρτητο από τη διαδρομή, τότε το έργο στη μη τετριμμένη διαδρομή γ που αρχίζει από το A και καταλήγει στο A είναι το ίδιο με

²⁴ Αν πολλές δυνάμεις δρουν στο σωματίδιο και εξαιτίας όλων αυτών συμβαίνει η μετακίνηση το έργο είναι το έργο όλων των δυνάμεων.

²⁵ Στο Κεφάλαιο 10 θα μελετήσουμε πιο διεξοδικά το αντικείμενο των συντηρητικών δυνάμεων κάνοντας χρήση του εξωτερικού γινομένου

το έργο στην τετριμμένη διαδρομή που αποτελείται μόνο από το σημείο A και είναι εκ κατασκευής μηδενικό.

Αποτελεί θεμελιώδη ιδιότητα ότι αυτές οι δυνάμεις μπορούν να γραφούν ως η βαθμίδα μιας βαθμωτής συνάρτησης, $V(\mathbf{r})$, που ονομάζεται δυναμική ενέργεια²⁶, δηλαδή οι συντηρητικές δυνάμεις έχουν αναγκαστικά τη μορφή:

$$\mathbf{F} = -\nabla V(\mathbf{r}) . \quad (7.47)$$

Όταν η δύναμη έχει τη μορφή της (7.47), το έργο δεν εξαρτάται πράγματι από τη διαδρομή διότι:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} \nabla V \cdot d\mathbf{r} \\ &= - \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} dV \\ &= - [V(\mathbf{r}_2) - V(\mathbf{r}_1)] . \end{aligned} \quad (7.48)$$

Στο προτελευταίο βήμα χρησιμοποιήσαμε την (7.33). Συνεπώς από την (7.45) προκύπτει:

$$K(t_1) + V(t_1) = K(t_2) + V(t_2) ,$$

και επειδή οι χρόνοι t_1 και t_2 είναι αυθαίρετοι, προκύπτει ότι η ποσότητα

$$E = K + V , \quad (7.49)$$

παραμένει σταθερή κατά τη κίνηση και ονομάζεται ενέργεια.

Αποδείξαμε στην (7.48) ότι το έργο μίας συντηρητικής δύναμης εξαρτάται μόνο από τη διαφορά της δυναμικής ενέργειας μεταξύ του αρχικού και του τελικού σημείου της διαδρομής και είναι παντελώς ανεξάρτητο από τη διαδρομή που συνδέει το \mathbf{r}_1 με το \mathbf{r}_2 , ακόμη και αν η διαδρομή αυτή απομακρύνεται πολύ από τη γειτονιά του αρχικού και του τελικού σημείου. Αυτή η ιδιότητα των συντηρητικών δυνάμεων μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια αμέσως αν γνωρίζουμε τη δύναμη, \mathbf{F} , αντιστρέφοντας με τον τρόπο αυτό την (7.47). Αν το έργο της δύναμης δεν

²⁶Συχνά στη Φυσική χρησιμοποιείται ο όρος δυναμικό αντί της δυναμικής ενέργειας. Το δυναμικό είναι μια ποσότητα που εξαρτάται από το πεδίο της δύναμης μέσα στο οποίο κινείται το σωματίδιο και όχι από το σωματίδιο αυτό καθαυτό. Η σχέση του δυναμικού με τη δυναμική ενέργεια –η οποία εξαρτάται από το σωματίδιο– είναι ότι το δυναμικό ισούται με τη δυναμική ενέργεια προς το “φορτίο” που φέρει το σωματίδιο έτσι ώστε να αισθάνεται το πεδίο της δύναμης. Για την περίπτωση της βαρυτικής δύναμης το φορτίο είναι η μάζα, ενώ για το πεδίο Coulomb, το φορτίο είναι το ηλεκτρικό φορτίο.

εξαρτάται από τη διαδρομή τότε για δεδομένο \mathbf{r}_0 το ολοκλήρωμα

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'$$

είναι συνάρτηση μόνο του \mathbf{r} (και δεν εξαρτάται από όλα τα ενδιάμεσα σημεία τα οποία έχουν παρεμβληθεί στην ολοκλήρωση²⁷) και το ολοκλήρωμα:

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}', \quad (7.50)$$

που δίνει τη δυναμική ενέργεια είναι μία καλώς ορισμένη συνάρτηση του \mathbf{r} . Το σημείο \mathbf{r}_0 είναι ένα αυθαίρετο σημείο αναφοράς που χρησιμεύει απλώς για την βαθμονόμηση της δυναμικής ενέργειας, δηλαδή για τον καθορισμό του μηδενός της δυναμικής ενέργειας. Θα δείξουμε τώρα ότι η συνάρτηση (7.50) συνεπάγεται την (7.47):

$$\nabla V(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r}).$$

Η πρόταση αυτή αποτελεί γενίκευση σε πολλαπλές διαστάσεις της πιο γνώριμης αντίστοιχης πρότασης σε μία διάσταση. Αν το $V(x)$ είναι το δυναμικό της δύναμης $f(x)$ σε μία διάσταση :

$$V(x) = - \int_{x_0}^x f(x') dx'$$

και η $f(x)$ είναι συνεχής συνάρτηση προκύπτει από το θεμελιώδες θεώρημα του ολοκληρωτικού λογισμού ότι:

$$f(x) = - \frac{dV}{dx}.$$

Γι' αυτό το λόγο σε μία διάσταση όλες οι δυνάμεις της μορφής $f(x)$ είναι συντηρητικές (πάντοτε ισχύει η (7.46)) και οδηγούν πάντοτε σε διατήρηση της ενέργειας

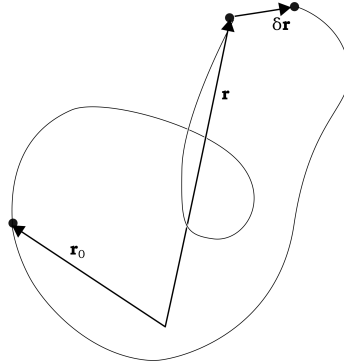
$$E = \frac{m}{2} \dot{x}^2 + V(x).$$

Για να υπολογίσουμε τη βαθμίδα της V από τη σχέση (7.50), υπολογίζουμε τη μεταβολή $\delta V(\mathbf{r})$ σε μικρή μετατόπιση $\delta \mathbf{r}$:

$$\begin{aligned} \delta V &= V(\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}) - V(\mathbf{r}) \\ &= - \left(\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' \right) \\ &= - \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r} + \delta \mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}'. \end{aligned} \quad (7.51)$$

Η τελευταία σχέση ισχύει διότι το ολοκλήρωμα επί της κλειστής διαδρομής: $\mathbf{r}_0 \rightarrow$

²⁷Οπότε δεν χρειάζεται να αναγράφεται και η τροχιά επί της οποίας γίνεται η ολοκλήρωση.



Σχήμα 7.12: Το έργο μιας συντηρητικής δύναμης στην κλειστή διαδρομή $\mathbf{r}_0 \rightarrow \mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ είναι μηδέν.

$\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r} + \delta\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}_0$ (βλ. Σχήμα 7.12) είναι μηδενικό:

$$\int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' + \int_{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}}^{\mathbf{r}_0} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' = 0 .$$

Αν τώρα στην (7.51) αλλάξουμε μεταβλητή ολοκλήρωσης και θέσουμε $\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \epsilon\delta\mathbf{r}$, η ανεξαρτησία της τιμής του ολοκληρώματος από τη διαδρομή, μας επιτρέπει να εκτιμήσουμε το ολοκλήρωμα ως εξής:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbf{r}}^{\mathbf{r}+\delta\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' &= \int_0^1 \mathbf{F}(\mathbf{r} + \epsilon\delta\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r} d\epsilon \\ &= \int_0^1 [\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \epsilon(\delta\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{F}(\mathbf{r}) + \dots] \cdot \delta\mathbf{r} d\epsilon \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r} \int_0^1 d\epsilon + \mathcal{O}(|\delta\mathbf{r}|^2) \\ &= \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot \delta\mathbf{r} + \mathcal{O}(|\delta\mathbf{r}|^2) \end{aligned}$$

και καταλήγουμε ότι στο όριο $\delta\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{0}$ αφενός μεν:

$$dV(\mathbf{r}) = -\mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} ,$$

ενώ από τον ορισμό της ∇V είναι

$$dV(\mathbf{r}) = \nabla V \cdot d\mathbf{r} .$$

Η ισότητα αυτών των δύο εκφράσεων του $dV(\mathbf{r})$ για κάθε $d\mathbf{r}$ συνεπάγεται την $\mathbf{F}(\mathbf{r}) = -\nabla V$, όπως θέλαμε να δείξουμε.

Για την απόδειξη της διατήρησης της ενέργειας (7.49) απαιτείται και η δύναμη και

η δυναμική ενέργεια να είναι χρονοανεξάρτητα. Αν το δυναμικό, $V(\mathbf{r}, t)$, είχε χρονική εξάρτηση τότε η παράγωγος ως προς το χρόνο της ενέργειας δεν μηδενίζεται και ισούται με:

$$\begin{aligned}\frac{dE}{dt} &= \frac{dK}{dt} + \frac{dV}{dt} \\ &= m\mathbf{v} \cdot \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla V \cdot \dot{\mathbf{r}} + \frac{\partial V}{\partial t} \\ &= \left(m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \nabla V \right) \cdot \mathbf{v} + \frac{\partial V}{\partial t} \\ &= \frac{\partial V}{\partial t},\end{aligned}$$

αφού $m\dot{\mathbf{v}} = \mathbf{F} = -\nabla V$.

7.11 Συντηρητικές κεντρικές δυνάμεις

Οι κεντρικές δυνάμεις της μορφής:

$$\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}, \quad (7.52)$$

είναι συντηρητικές. Στην παραπάνω έκφραση $\mathbf{r} = r\hat{\mathbf{r}}$ είναι η θέση του σωματιδίου, r είναι η απόσταση του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων και $\hat{\mathbf{r}}$ το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα. Το κέντρο της δύναμης έχει υποθεθεί εδώ ότι βρίσκεται στην αρχή των αξόνων, και η διεύθυνση της δύναμης είναι στη διεύθυνση της ευθείας που ενώνει το σωματίδιο με το σώμα, για αυτό και ονομάζεται κεντρική αυτού του τύπου η δύναμη. Όπως έχει διατυπωθεί ο νόμος της δύναμης, το σωματίδιο έλκεται προς το κέντρο όταν $f(r) < 0$ και απωθείται από το κέντρο όταν $f(r) > 0$. Όλες οι κεντρικές δυνάμεις, όπως θα συζητήσουμε και στο κεφάλαιο των κεντρικών δυνάμεων (Κεφάλαιο 12), δεν είναι αναγκαστικά συντηρητικές. Αν η βαθμωτή συνάρτηση $f(\mathbf{r})$ εξαρτάται και από τη διεύθυνση του διανύσματος θέσης τότε η κεντρική δύναμη δεν είναι αναγκαστικά συντηρητική.

Χαρακτηριστικές κεντρικές δυνάμεις είναι η ελκτική δύναμη που ασκείται σε ένα σωματίδιο στο χώρο από ένα γραμμικό ελατήριο:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} = -kr\hat{\mathbf{r}}.$$

και η δύναμη της βαρύτητας που ασκείται σε σωματίδιο μάζας m όταν στην αρχή των αξόνων υπάρχει ακλόνητη σημειακή μάζα M :

$$\mathbf{F} = -\frac{GmM}{r^2}\hat{\mathbf{r}}.$$

Οι δύο απλές αυτές κεντρικές δυνάμεις έχουν εξέχοντα ρόλο στη Φυσική. Επιπλέον,

όπως θα δούμε στο Κεφάλαιο 13, οδηγούν και σε εξαιρετικά απλές τροχιές με ιδιαίτερα χαρακτηριστικά.

Για να αποδείξουμε την ανεξαρτησία του έργου των κεντρικών δυνάμεων (7.52) από τη διαδρομή υπολογίζουμε το έργο σε κάποια διαδρομή, γ , που συνδέει το \mathbf{r}_1 με το \mathbf{r}_2 :

$$W = \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} f(r) \hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r}, \quad (7.53)$$

και αποδεικνύουμε ότι το έργο δεν εξαρτάται από τη διαδρομή. Παρατηρούμε τώρα ότι

$$d\mathbf{r} = d(r\hat{\mathbf{r}}) = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\hat{\mathbf{r}},$$

δηλαδή, μία διαφορική μετατόπιση του διανύσματος θέσης μπορεί να επιτελεστεί με μία μετατόπιση μέτρου dr κατά την ακτινική διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ και μία μετατόπιση $r d\hat{\mathbf{r}}$ σε διεύθυνση κάθετη στο $\hat{\mathbf{r}}$, επειδή το $\hat{\mathbf{r}}$ είναι μοναδιαίο και συνεπώς θα είναι

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot d\hat{\mathbf{r}} = 0$$

όπως δείξαμε και στο εδάφιο 7. Συνεπώς

$$\hat{\mathbf{r}} \cdot d\mathbf{r} = dr \quad (7.54)$$

Η παραπάνω σχέση θα μπορούσε να αποδειχθεί αμέσως διαιρώντας με r την ταυτότητα (7.31) (αν αντί για \mathbf{a} είχαμε \mathbf{r}):

$$\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = r dr .$$

Έτσι το έργο της κεντρικής δύναμης (7.52) μετατρέπεται σε ένα μονοδιάστατο ολοκλήρωμα ως προς την πραγματική μεταβλητή r :

$$W = \int_{r_1}^{r_2} f(r) dr,$$

που εξαρτάται μόνο από τα άκρα της ολοκλήρωσης.

Αποδείξαμε λοιπόν ότι οι κεντρικές δυνάμεις της μορφής (7.52) είναι συντηρητικές και η δυναμική τους ενέργεια υπολογίζεται από τη σχέση:

$$V = - \int_{r_0}^r f(r) dr . \quad (7.55)$$

Στη φύση οι κεντρικές δυνάμεις είναι της μορφής (7.52) με την συνάρτηση f να εξαρτάται μόνο από την απόσταση του σωματιδίου r από το κέντρο της δύναμης και να μην εξαρτάται από τη διεύθυνση της θέσης του σωματιδίου. Εάν υπήρχε εξάρτηση από την διεύθυνση του σωματιδίου τότε θα παραβιάζονταν η ισοτροπία του χώρου,

θα μπορούσαμε δηλαδή με μετρήσεις της δύναμης να προσδιορίζουμε τον προσανατολισμό μας στο χώρο. Είναι ενδιαφέρον ότι στην περίπτωση κεντρικών δυνάμεων απαιτείται και η ισοτροπία του χώρου προκειμένου να έχουμε διατήρηση της ενέργειας του σωματιδίου.

Συνηθίζεται να λαμβάνεται ως r_0 η απόσταση στην οποία η κεντρική δύναμη μηδενίζεται. Στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή, λαμβάνοντας $r_0 = 0$, προκύπτει η δυναμική ενέργεια:

$$V = k \frac{r^2}{2} .$$

Στην περίπτωση της βαρύτητας, λαμβάνοντας $r_0 = \infty$, προκύπτει η δυναμική ενέργεια:

$$V = -\frac{GmM}{r} .$$

Μπορείτε να επιβεβαιώσετε ότι οι παραπάνω δυναμικές ενέργειες παράγουν τις αντίστοιχες δυνάμεις χρησιμοποιώντας την παρακάτω ταυτότητα:

$$\nabla f(r) = \frac{df}{dr} \nabla r = f'(r) \hat{\mathbf{r}} ,$$

όπου $f'(r) \equiv df/dr$. Η ταυτότητα αυτή μας δίνει την r -συνιστώσα του ∇ σε σφαιρικές συντεταγμένες, αφού η συνάρτηση στην οποία υποθέσαμε ότι δρα είναι συνάρτηση μόνο του r . Η πλήρης μορφή του ∇ στις σφαιρικές συντεταγμένες είναι

$$\nabla = \hat{\mathbf{r}} \frac{\partial}{\partial r} + \hat{\boldsymbol{\theta}} \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} + \hat{\boldsymbol{\phi}} \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \phi} . \quad (7.56)$$

(Προσπαθήστε να εξαγάγετε το παραπάνω αποτέλεσμα γράφοντας τη σχέση (7.33) σε σφαιρικές συντεταγμένες. Δοκιμάστε να ανακαλύψτε και την αντίστοιχη έκφραση για το ∇ σε κυλινδρικές συντεταγμένες.)

7.12 Αθροιστική σύμβαση – Τανυστές

Ένα διάνυσμα προσδιορίζεται στον τριδιάστατο χώρο με τρεις αριθμούς, τις συντεταγμένες του ως προς κάποιο καρτεσιανό σύστημα αναφοράς. Συνήθως ονομάζουμε αυτές τις συνιστώσες x, y, z συντεταγμένες του διανύσματος. Αντ' αυτού μπορούμε να τις αριθμούμε οπότε θα τις ονομάζουμε με τον αριθμό του άξονα που αντιστοιχεί στην πρώτη, δεύτερη και τρίτη συντεταγμένη. Οπότε το διάνυσμα \mathbf{a} προσδιορίζεται και από τις συντεταγμένες του a_i όπου $i = 1, 2, 3$ και η ισότητα $\mathbf{a} = \mathbf{b}$ γράφεται και ως $a_i = b_i$, υπονοώντας ότι, αφού δεν διευκρινίζεται ποια είναι η τιμή του i , το i παίρνει κάθε δυνατή τιμή. Το εσωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων γράφεται τότε:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{i=1}^3 a_i b_i .$$

Παρατηρούμε ότι ο δείκτης εμφανίζεται δύο φορές και επειδή αθροίζεται σε όλες τις δυνατές τιμές θα μπορούσε να αντικατασταθεί με κάποιο άλλο γράμμα π.χ. θα μπορούσαμε να γράψουμε το εσωτερικό γινόμενο ισοδυνάμως ως $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \sum_{j=1}^3 a_j b_j$. Τα ζεύγη επαναλαμβανόμενων δεικτών που εμφανίζονται σε άθροισμα γινομένων συντεταγμένων λέγονται *εικονικοί δείκτες* (dummy indices)²⁸. Οι δείκτες που δεν επαναλαμβάνονται δηλώνουν τη συγκεκριμένη συντεταγμένη του διανύσματος. Στις περιπτώσεις επαναλαμβανόμενων δεικτών σε γινόμενα συντεταγμένων το σύμβολο του αθροίσματος μπορεί και να παραληφθεί και να συμφωνηθεί ότι όταν εμφανίζονται ζευγάρια δεικτών σε γινόμενα συνισταμένων διανυσμάτων οι δείκτες αυτοί είναι εικονικοί και υπονοείται η άθροισή τους. Η σύμβαση αυτή λέγεται αθροιστική σύμβαση ή σύμβαση του Einstein. Με την αθροιστική σύμβαση το εσωτερικό γινόμενο γράφεται απλώς ως:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = a_i b_i .$$

Χρειάζεται όμως προσοχή να μην επαναλαμβάνεται το ίδιο γράμμα δείκτη πάνω από δύο φορές, διότι η έκφραση τότε δεν θα έχει σαφές νόημα, π.χ. η έκφραση $a_i b_i c_i d_i$ στερείται διανυσματικού νοήματος αφού αν \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} , \mathbf{d} διανύσματα το άθροισμα

$$a_x b_x c_x d_x + a_y b_y c_y d_y + a_z b_z c_z d_z$$

δεν αποτελεί κάποια βαθμωτή ποσότητα. Αν θέλαμε να γράψουμε την έκφραση

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) ,$$

με την αθροιστική σύμβαση θα έπρεπε να την γράψουμε

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = a_i b_i c_j d_j ,$$

κάνοντας χρήση δύο διαφορετικών εικονικών δεικτών με τη σύμβαση ότι ο κάθε εικονικός δείκτης που επαναλαμβάνεται αθροίζεται οπότε το $a_i b_i c_j d_j$ είναι το διπλό άθροισμα:

$$\sum_{i=1}^3 \sum_{j=1}^3 a_i b_i c_j d_j .$$

Θα πρέπει να τονίσουμε ότι η σειρά των στοιχείων του γινομένου δεν έχει καμία σημασία αφού πρόκειται για γινόμενο αριθμών· επομένως το παραπάνω διπλό εσω-

²⁸Dummy index σημαίνει κατά λέξη βουβός δείκτης ή δείκτης που υπάρχει μόνο κατ' όνομα. Θα μπορούσε να μεταφραστεί μη δηλωτικός δείκτης, ή δείκτης μπαλαντέρ, αλλά μάλλον πιο κομψή είναι η μετάφραση που αναφέρεται στο κείμενο την οποία πρότεινε φοιτητής του Φυσικού Αθηνών.

τερικό γινόμενο θα μπορούσε να γραφεί και

$$(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})(\mathbf{c} \cdot \mathbf{d}) = c_j a_i d_j b_i .$$

Ένα άλλο παράδειγμα: Έστω \mathbf{R} ένας μετασχηματισμός στροφής. Τότε με αθροιστική σύμβαση οι συντεταγμένες ενός διανύσματος στο μετασχηματισμένο σύστημα αναφοράς θα είναι:

$$a'_i = R_{ij} a_j ,$$

όπου, R_{ij} , το στοιχείο της i -οστής γραμμής και της j -οστής στήλης του πίνακα στροφής και a'_i οι τρεις συντεταγμένες του διανύσματος στο νέο σύστημα αξόνων. Παρατηρήστε ότι με αυτή τη γραφή το όνομα των αξόνων παραμένει πάντοτε 1, 2, 3· αυτό που αλλάζει στους μετασχηματισμούς είναι οι συντεταγμένες του διανύσματος οι οποίες τονίζονται αφού αναφέρονται σε νέους άξονες που δεν έχουν σχέση με τους αρχικούς, οι συντεταγμένες δηλαδή μετασχηματίζονται στις (a'_1, a'_2, a'_3) . Το αποτέλεσμα αυτό αφορά ένα νέο διάνυσμα το \mathbf{a}' και θα πρέπει να διακρίνεται από το $(a_{x'}, a_{y'}, a_{z'})$ που αποτελεί ανάλυση του αρχικού διανύσματος \mathbf{a} σε νέους άξονες (παθητική στροφή).

Όπως όταν γράφουμε a_i εννοούμε τις τρεις συντεταγμένες του διανύσματος, \mathbf{a} , έτσι και όταν γράφουμε

$$a_i b_j ,$$

εννοούμε τους 9 αριθμούς που σχηματίζονται από όλα τα δυνατά γινόμενα των συνιστωσών των δύο διανυσμάτων που συνιστούν τον 3×3 πίνακα με στοιχείο στην i -οστή γραμμή και j -οστή στήλη το $a_i b_j$. Με τον ίδιο τρόπο μπορούμε να θεωρήσουμε ότι οι 3^N αριθμοί

$$a_{i_1} b_{i_2} \cdots z_{i_N}$$

όπου i_1, i_2, \dots, i_N αριθμοί από το 1 ως το 3, σχηματίζουν έναν $\underbrace{3 \times 3 \times \cdots \times 3}_N$ υπερκύβο. Επειδή κάθε γράμμα του αντικειμένου αυτού μετασχηματίζεται ως διάνυσμα σε στροφές των αξόνων οι 3^N αυτοί αριθμοί μετασχηματίζονται σε στροφές των αξόνων με τον εξής τρόπο:

$$a_{i_1} b_{i_2} \cdots z_{i_N} = R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_N j_N} a_{j_1} b_{j_2} \cdots z_{j_N} , \quad (7.57)$$

χρησιμοποιώντας την αθροιστική σύμβαση σύμφωνα με την οποία όλοι οι δείκτες που επαναλαμβάνονται αθροίζονται, οπότε η παραπάνω έκφραση είναι συντομογραφία των N αθροισμάτων:

$$a_{i_1} b_{i_2} \cdots z_{i_N} = \sum_{j_1=1}^3 \sum_{j_2=1}^3 \cdots \sum_{j_N=1}^3 R_{i_1 j_1} R_{i_2 j_2} \cdots R_{i_N j_N} a_{j_1} b_{j_2} \cdots z_{j_N} .$$

Γενικότερα όταν οι 3^N αριθμοί που συμβολίζονται με

$$T_{i_1 \dots i_N}$$

μετασηματίζονται σε στροφές των αξόνων σύμφωνα με τη σχέση (7.57) τότε λέγεται ότι σχηματίζουν ένα τανυστή N τάξης, και αποτελούν γενίκευση των διανυσμάτων τα οποία είναι στην ουσία τανυστές πρώτης τάξης (ενώ τα βαθμωτά μεγέθη μηδενικής τάξης).

Ποιο φυσικό μέγεθος άραγε θα μπορούσε να αναπαρασταθεί με έναν τανυστή τάξης μεγαλύτερης ή ίσης του 2; Θα καθυστερήσουμε λίγο την απάντηση παίζοντας λίγο με τανυστές που προκύπτουν αβίαστα στη διανυσματική ανάλυση και κάνουν τη ζωή μας ευκολότερη (αρκεί να εξασκηθούμε πρώτα στη γυμναστική των δεικτών).

Ο τανυστής δ_{ij} : Ας ξεκινήσουμε με έναν τανυστή 2ης τάξης (πίνακα 3×3) που εμφανίζεται συχνά στη μαθηματική ανάλυση φυσικών προβλημάτων. Πρόκειται για το μοναδιαίο πίνακα **I**. Με δείκτες ο τανυστής αυτός συμβολίζεται με το δέλτα του Kronecker:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{εάν } i = j \\ 0, & \text{εάν } i \neq j. \end{cases}$$

(Δείξτε ότι ο δ_{ij} είναι πράγματι τανυστής 2ης τάξης χρησιμοποιώντας την ιδιότητα της ορθογωνιότητας του πίνακα στροφών).

Ο τανυστής αυτός είναι συμμετρικός $\delta_{ij} = \delta_{ji}$ και οι συνιστώσες ενός διανύσματος μπορούν να γραφούν με τη χρήση του δ_{ij} ως εξής:

$$a_i = \delta_{ij} a_j,$$

δηλαδή το δ_{ij} λειτουργεί ως φίλτρο που επιλέγει το δείκτη που δεν αθροίζεται. Η $\delta(x)$ που είδαμε στο Κεφάλαιο 3 είναι η συνεχής εκδοχή του δ_{ij} σε άπειρες διαστάσεις, διότι η διακριτή εκδοχή του

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x_j) \delta(x_j - x_i) dx_j = f(x_i),$$

σε 3 διαστάσεις είναι, χωρίς αθροιστική σύμβαση (ώστε να διακρίνεται το σύμβολο που αντικαθιστά το ολοκλήρωμα), η:

$$\sum_{j=1}^3 f_j \delta_{ji} = f_i.$$

Το εσωτερικό γινόμενο μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \delta_{ij} a_i b_j .$$

Ομοίως επειδή το ίχνος του μοναδιαίου πίνακα είναι 3 θα έχουμε ότι

$$\delta_{ii} = 3$$

και όχι 1, όπως αφελώς θα απαντούσε κάποιος αμελώντας την αθροιστική σύμβαση.

Μια πολλή χρήσιμη ταυτότητα που εμφανίζεται συχνά όταν παραγωγίζουμε συναρτήσεις πολλών μεταβλητών είναι η

$$\frac{\partial x_i}{\partial x_j} = \delta_{ij} .$$

Έχουμε δείξει ότι η βαθμίδα $\nabla \phi$ σχηματίζει ένα διάνυσμα με συνιστώσες τις $\partial \phi / \partial x_i$. Ας υπολογίσουμε τη βαθμίδα ∇r της ακτινικής απόστασης r ενός σημείου από την αρχή των αξόνων με χρήση δεικτών. Η απόσταση r με δείκτες και αθροιστική σύμβαση γράφεται ως: $r = \sqrt{x_i x_i}$ οπότε

$$\begin{aligned} (\nabla r)_i &= \frac{\partial \sqrt{x_j x_j}}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{2\sqrt{x_j x_j}} \frac{\partial (x_j x_j)}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{r} x_j \frac{\partial x_j}{\partial x_i} \\ &= \frac{1}{r} x_j \delta_{ji} \\ &= \frac{x_i}{r} . \end{aligned}$$

Χρησιμοποιήσαμε έναν διαφορετικό δείκτη j στην έκφραση της απόστασης κατά την παραγωγή για να μην εμφανιστούν τρεις ίδιοι δείκτες και καταστεί η γραφή ασαφής. Καταλήγουμε έτσι στο αποτέλεσμα που βρήκαμε παραπάνω στο παρόν Κεφάλαιο:

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r} ,$$

δηλαδή η βαθμίδα της ακτινικής απόστασης είναι το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα, που συμβολίζουμε και ως $\hat{\mathbf{r}}$. Επίσης ορίζουμε τη Λαπλασιανή (Laplacian) ως τον βαθμωτό τελεστή που προκύπτει από το εσωτερικό γινόμενο:

$$\nabla^2 \equiv \nabla \cdot \nabla = \frac{\partial}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial x_i} = \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} .$$

Για να εξασκηθούμε περαιτέρω στους δείκτες θα δείξουμε ότι αν $r \neq 0$

$$\nabla^2 \frac{1}{r} = 0 \text{ }^{29}.$$

Πράγματι:

$$\begin{aligned} \nabla^2 \frac{1}{r} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \frac{1}{r} \right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(-\frac{x_i}{r^3} \right) \\ &= -\frac{1}{r^3} \frac{\partial x_i}{\partial x_i} + \frac{3x_i x_i}{r^5} \\ &= -\frac{\delta_{ii}}{r^3} + \frac{3}{r^3} = 0 . \end{aligned}$$

Ο τανυστής ϵ_{ijk} : Ένας άλλος πολύ χρήσιμος τανυστής είναι ο καλούμενος *πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής 3ης τάξης ϵ_{ijk}* που είναι μηδέν εάν δύο τουλάχιστον δείκτες είναι ίσοι (21 μηδενικά στοιχεία από τα 27 συνολικά) και έχει 6 μη μηδενικά στοιχεία. Από αυτά, τα 3 λαμβάνουν την τιμή +1 όταν το (i, j, k) αποτελεί κυκλική μετάθεση των $(1, 2, 3)$, δηλαδή το (i, j, k) είναι ένας από τους ακόλουθους συνδυασμούς $(1, 2, 3), (2, 3, 1), (3, 1, 2)$. Τα υπόλοιπα 3 λαμβάνουν τη τιμή -1 όταν το (i, j, k) αποτελεί κυκλική μετάθεση των $(2, 1, 3)$, δηλαδή όταν το (i, j, k) είναι ένας από τους ακόλουθους συνδυασμούς $(2, 1, 3), (1, 3, 2), (3, 2, 1)$. Έτσι μερικά στοιχεία του ϵ_{ijk} είναι:

$$\epsilon_{111} = \epsilon_{122} = 0 , \epsilon_{321} = -1 \quad \epsilon_{231} = +1.$$

(Προσπαθήστε να αποδείξετε ότι το περίεργο αυτό αντικείμενο είναι πράγματι τανυστής, δηλαδή ότι

$$\epsilon_{abc} = R_{ai} R_{bj} R_{ck} \epsilon_{ijk} ,$$

ελέγχοντας αν το αποτέλεσμα είναι μηδενικό όταν δύο δείκτες από τους (abc) είναι ίδιοι.)

Θεωρήστε τώρα το $\epsilon_{ijk} a_j b_k$ το οποίο ορίζει μία τριάδα αριθμών, δεδομένου ότι οι δείκτες j και k είναι εικονικοί (αθροίζονται). Η τριάδα αυτή είναι:

$$\begin{aligned} (\epsilon_{1jk} a_j b_k, \epsilon_{2jk} a_j b_k, \epsilon_{3jk} a_j b_k) &= (\epsilon_{123} a_2 b_3 + \epsilon_{132} a_3 b_2, \epsilon_{231} a_3 b_1 + \epsilon_{213} a_1 b_3, \epsilon_{312} a_1 b_2 + \epsilon_{321} a_2 b_1) \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1) . \end{aligned} \quad (7.58)$$

Παρατηρήστε ότι κάθε στοιχείο της τριάδας προκύπτει από το προηγούμενο με κυ-

²⁹Στο Κεφάλαιο 13 θα δείξουμε ότι η Λαπλασιανή αυτή είναι στην πραγματικότητα μια δέλτα συνάρτηση αφού αν και 0 παντού έχει περιεργες ιδιότητες όταν ολοκληρώνεται.

κλική μετάθεση των (1, 2, 3). Σε επόμενο κεφάλαιο (Κεφάλαιο 8) θα αποδείξουμε ότι η τριάδα αυτή σχηματίζει διάνυσμα αν οι τριάδες a_i και b_i είναι συντεταγμένες διανυσμάτων.

Επίσης μπορείτε να επιβεβαιώσετε εκτελώντας τις πράξεις ότι η ορίζουσα του 3×3 πίνακα A_{ij} είναι:

$$\det(\mathbf{A}) = \epsilon_{ijk} A_{i1} A_{j2} A_{k3} .$$

Τέλος μια πολύ χρήσιμη ταυτότητα είναι η ακόλουθη που αφορά τους $3^4 = 81$ αριθμούς:

$$\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm} = \delta_{jl} \delta_{km} - \delta_{jm} \delta_{kl} . \quad (7.59)$$

Για να αποδείξουμε αυτή τη σχέση πρέπει να εξετάσουμε περιπτώσεις. Αν $j = l$ και $k = m \neq j$ τότε και τα δύο ϵ έχουν το ίδιο πρόσημο (ή είναι μηδέν), οπότε όταν το i λάβει την τρίτη τιμή (διαφορετική από τα j και k) το γινόμενο $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm}$ θα γίνει ίσο με $+1$. Αν όμως $j = m$ και $k = l \neq j$ τα δύο ϵ έχουν αντίθετο πρόσημο οπότε όταν το i λάβει την τρίτη τιμή (διαφορετική από τα j και k) το γινόμενο $\epsilon_{ijk} \epsilon_{ilm}$ θα γίνει ίσο με -1 . Από τις περιπτώσεις αυτές προκύπτουν τα πρόσημα των γινομένων των δ . Μέσω αυτής της ταυτότητας μπορούμε να αποδείξουμε αρκετά σύνθετες διανυσματικές ταυτότητες στις οποίες εμπλέκεται η βαθμίδα ∇ .

Αν και τα δύο παραδείγματα τανυστών που είδαμε παραπάνω μοιάζουν καθαρά μαθηματικά αντικείμενα, στη Φυσική υπάρχουν πολλά μεγέθη τα οποία έχουν τη δομή τανυστή και οι εξισώσεις στις οποίες εμπλέκονται είναι τανυστικές εξισώσεις, στις οποίες τα τανυστικά αντικείμενα του αριστερού μέλους οφείλουν να ταυτίζονται με τα τανυστικά αντικείμενα του δεξιού μέλους. Μια τέτοια εξίσωση θα μπορούσε να έχει τη μορφή

$$T_{ij} = a_i b_j$$

με \mathbf{a}, \mathbf{b} διανύσματα (τανυστές πρώτης τάξης) και \mathbf{T} τανυστή δεύτερης τάξης, αλλά δεν θα μπορούσαμε ποτέ να δεχτούμε μια εξίσωση της μορφής

$$a_i = T_{ij} .$$

Ένα φυσικό μέγεθος το οποίο συμπεριφέρεται ως τανυστής 2ης τάξης είναι η πίεση, αφού μια επιφάνεια μπορεί να πιεστεί με τρεις τρόπους: μια κάθετα στην επιφάνεια και δύο στους δύο άξονες παράλληλα με την επιφάνεια (διατμητική τάση). Όντας τρεις οι δυνατές επιφάνειες (στα 3 επίπεδα), είναι 9 οι ανεξάρτητες συνιστώσες της πίεσης ενός ρευστού:

$$p_{ij} = F_j / S_i$$

όπου F_j είναι η j συνιστώσα της δύναμης που ασκείται στην επιφάνεια S_i η οποία είναι κάθετη στην i κατεύθυνση.

Ένα άλλο φυσικό μέγεθος που περιγράφεται και πάλι από τανυστή 2ης τάξης είναι η ροπή αδράνειας ενός στερεού³⁰. Στα πρώτα μαθήματα μηχανικής που παίρνει κανείς διδάσκεται ότι η ροπή αδράνειας είναι ένα μέγεθος που περιγράφει την αδράνεια ενός αξονικά συμμετρικού στερεού σε περιστροφή γύρω από τον άξονα συμμετρίας του. Το μέγεθος αυτό υπολογίζεται ως ακολούθως

$$I = \int_V dm r_{\perp}^2$$

όπου r_{\perp} η απόσταση του dm από τον άξονα συμμετρίας. Τι συμβαίνει όμως αν το αντικείμενο περιστραφεί γύρω από κάποιο άλλο άξονα; Η απάντηση είναι ότι πρέπει να ληφθούν υπόψη όλες οι ακόλουθες 9 ποσότητες

$$I_{ij} = \int_V dm x_i x_j. \quad (7.60)$$

Αν για παράδειγμα ο άξονας συμμετρίας του αντικειμένου είναι ο z , τότε $r_{\perp}^2 = x^2 + y^2$, οπότε $I = I_{11} + I_{22} = \tilde{I}_{33}$ (βλ. υποσημείωση 28). Η πλήρης μελέτη όμως του τρόπου με τον οποίο θα κινηθεί το σώμα στο χώρο, ακόμη και αν είναι ελεύθερο από δυνάμεις, απαιτεί τη γνώση και των 9 ποσοτήτων I_{ij} .

Οι τανυστές είναι αντικείμενα εξέχουσας σημασίας στη Γενική Σχετικότητα, όπου όλες οι σχέσεις που συνδέουν φυσικά μεγέθη είναι τανυστικές. Για παράδειγμα η βασική εξίσωση της Σχετικότητας που συνδέει την καμπύλωση του χώρου (που περιγράφεται από τον τανυστή καμπυλότητας $G_{\alpha\beta}$) με την πυκνότητα ύλης-ενέργειας (που περιγράφεται από τον τανυστή ενέργειας-ορμής $T_{\alpha\beta}$) έχει την τανυστική μορφή

$$G_{\alpha\beta} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\alpha\beta}.$$

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 7

- Τα διανύσματα του τριδιάστατου χώρου δεν είναι απλώς διατεταγμένες τριάδες αριθμών. Έχουν ανεξάρτητη από το σύστημα συντεταγμένων γεωμετρική υπόσταση και επομένως θα πρέπει να υπακούουν σε κάποιους κανόνες μετασχηματισμού των συντεταγμένων τους σε αλλαγή του συστή-

³⁰Ο πραγματικός τανυστής της ροπής αδράνειας ενός στερεού που υπεισέρχεται στις σχέσεις που αφορούν τη δυναμική των στερεών σωμάτων δεν είναι ακριβώς αυτός που δίνεται παρακάτω στη σχέση (7.60), αλλά ο

$$\tilde{I}_{ij} = \delta_{ij} I_{kk} - I_{ij},$$

με τη βοηθητική χρήση του τανυστή δέλτα του Kronecker.

ματος αναφοράς. Συγκεκριμένα πρέπει να αλλάζουν όπως και το διάνυσμα θέσης σε στροφές του συστήματος συντεταγμένων.

- Ορίζονται οι πράξεις πρόσθεση, αφαίρεση διανυσμάτων μέσω του κανόνα του παραλληλογράμμου. Ο πολλαπλασιασμός διανυσμάτων είναι διττός. Το εσωτερικό γινόμενο παράγει βαθμωτά μεγέθη, ενώ το εξωτερικό νέα διανύσματα. Κανενός άλλου είδους «πολλαπλασιασμός» δεν μπορεί να έχει φυσικό (γεωμετρικό) νόημα.
- Ο διανυσματικός τελεστής ανάδελτα ∇ είναι ένα διάνυσμα.
- Ο μετασχηματισμός των συντεταγμένων ενός διανύσματος σε στροφές του συστήματος αναφοράς είναι ένας ορθογώνιος μετασχηματισμός που ικανοποιεί τη σχέση $\mathbf{R}\mathbf{R}^T = \mathbf{I}$. Εκτός πάο τους πίνακες στροφής ορθογώνιοι μετασχηματισμοί είναι και οι μετασχηματισμοί ομοτιμίας που προκαλούν κατοπτρισμό των διανυσμάτων. Τα διανύσματα που συμπίπτουν με τα κατοπτρικά τους ονομάζονται ψευδοδιανύσματα (π.χ. ροπή).
- Το $\nabla\Phi(\mathbf{r})$ είναι διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια σταθερού Φ .
- Η απόκλιση $\nabla \cdot \mathbf{A}$ μετράει την τοπική ροή του πεδίου σε μια κλειστή απειροστή επιφάνεια προς τον στοιχειώδη όγκο που αυτή περικλείει. Το θεώρημα του Gauss μας επιτρέπει να υπολογίσουμε τη ροή ενός διανυσματικού πεδίου σε μια κλειστή επιφάνεια από το χωρικό ολοκλήρωμα της απόκλισης του πεδίου.
- Οι συντηρητικές δυνάμεις μπορούν να γραφούν ως η κλίση ενός βαθμωτού δυναμικού πεδίου.
- Γενίκευση των διανυσμάτων αποτελούν οι τανυστές με D^k συνιστώσες, όπου D η διάσταση του χώρου και k η τάξη του τανυστή. Τα διανύσματα είναι τανυστές τάξης 1. Οι εξισώσεις της Φυσικής είναι εξισώσεις μεταξύ τανυστών ίδιας τάξης.
- Εξαιρετικής σημασίας τανυστές (στις 3 διαστάσεις) αποτελούν οι δ_{ij} (δέλτα του Kronecker) και ϵ_{ijk} (πλήρως αντισυμμετρικός τανυστής).

8

Εξωτερικό γινόμενο & περιστροφές

8.1 Εξωτερικό γινόμενο

Στο προηγούμενο κεφάλαιο ξεκινώντας από δύο διανυσματικά μεγέθη κατασκευάσαμε ένα βαθμωτό μέσω του ορισμού του εσωτερικού γινομένου. Δεν έχουμε όμως καταφέρει ακόμη να κατασκευάσουμε ένα νέο διάνυσμα από δύο άλλα διανύσματα. Υπάρχει ένας καταπληκτικός συνδυασμός των συνιστωσών δύο διανυσμάτων που δημιουργούν ένα νέο διάνυσμα. Θα δείξουμε ότι αν $\mathbf{a} = (a_x, a_y, a_z)$ και $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$ είναι διανύσματα τότε η τριάδα

$$(a_{yz}, a_{zx}, a_{xy})$$

με στοιχεία τον ιδιόμορφο συνδυασμό γινομένων:

$$a_{yz} = a_y b_z - a_z b_y, \quad a_{zx} = a_z b_x - a_x b_z, \quad a_{xy} = a_x b_y - a_y b_x, \quad (8.1)$$

σχηματίζει ένα διάνυσμα που ονομάζεται *εξωτερικό γινόμενο* των δύο διανυσμάτων \mathbf{a} και \mathbf{b} και συμβολίζεται με:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b}.$$

Προσέξτε ότι κάθε συνιστώσα του διανύσματος προκύπτει από την προηγούμενη με κυκλική μετάθεση των γραμμάτων xyz , δηλαδή αντικαθιστώντας το x με το y , το y με το z και το z με το x .

Θα ελέγξουμε αν ο παραπάνω συνδυασμός μετασχηματίζεται στις στροφές όπως

και οι μετατοπίσεις. Θα θεωρήσουμε για απλότητα μια στροφή περί τον άξονα z κατά γωνία θ , όπως και στο προηγούμενο κεφάλαιο, σύμφωνα με την οποία οι συντεταγμένες (x, y, z) μετασχηματίζονται στις

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\y' &= y \cos \theta - x \sin \theta, \\z' &= z.\end{aligned}\tag{8.2}$$

Έτσι σε αυτή τη στροφή οι συνιστώσες του \mathbf{a} μετασχηματίζονται στις

$$\begin{aligned}a_{x'} &= a_x \cos \theta + a_y \sin \theta, \\a_{y'} &= a_y \cos \theta - a_x \sin \theta, \\a_{z'} &= a_z,\end{aligned}\tag{8.3}$$

και οι συνιστώσες του \mathbf{b} στις

$$\begin{aligned}b_{x'} &= b_x \cos \theta + b_y \sin \theta, \\b_{y'} &= b_y \cos \theta - b_x \sin \theta, \\b_{z'} &= b_z.\end{aligned}\tag{8.4}$$

Θα δείξουμε ότι και οι συνιστώσες του $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ μετασχηματίζονται στις στροφές όπως ακριβώς και τα διανύσματα. Πράγματι, χρησιμοποιώντας τις (8.3) και (8.4), έχουμε διαδοχικά ότι η πρώτη συνιστώσα του εξωτερικού γινομένου είναι:

$$\begin{aligned}a_{y'z'} &= a_{y'}b_{z'} - a_{z'}b_{y'} \\&= (a_y \cos \theta - a_x \sin \theta)b_z - a_z(b_y \cos \theta - b_x \sin \theta) \\&= (a_y b_z - a_z b_y) \cos \theta + (a_z b_x - a_x b_z) \sin \theta \\&= a_{yz} \cos \theta + a_{zx} \sin \theta.\end{aligned}$$

Παρομοίως η δεύτερη συντεταγμένη είναι η:

$$a_{z'x'} = a_{zx} \cos \theta - a_{yz} \sin \theta,$$

και η τρίτη:

$$\begin{aligned}a_{x'y'} &= a_{x'}b_{y'} - a_{y'}b_{x'} \\&= (a_x \cos \theta + a_y \sin \theta)(b_y \cos \theta - b_x \sin \theta) - (a_y \cos \theta - a_x \sin \theta)(b_x \cos \theta + b_y \sin \theta) \\&= (a_x b_y - a_y b_x)(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \\&= a_{xy}.\end{aligned}$$

Συνεπώς οι συνιστώσες του $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ μετασχηματίζονται όπως και οι μετατοπίσεις

$$\begin{aligned} a_{y'z'} &= a_{yz} \cos \theta + a_{zx} \sin \theta, \\ a_{z'x'} &= a_{zx} \cos \theta - a_{yz} \sin \theta, \\ a_{x'y'} &= a_{xy}, \end{aligned} \quad (8.5)$$

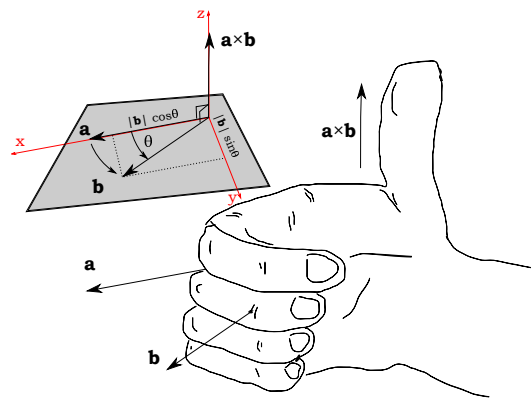
και επομένως το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι πράγματι διάνυσμα. Για να είμαστε πιο ακριβείς το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι ένα ψευδοδιάνυσμα διότι δεν μετασχηματίζεται στους κατοπτρισμούς όπως οι μετατοπίσεις. Σε ένα μετασχηματισμό ομοτιμίας τα \mathbf{a} και \mathbf{b} αλλάζουν πρόσημο ενώ το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ παραμένει ίδιο.

Το εξωτερικό γινόμενο είναι διάνυσμα μόνο στον τριδιάστατο χώρο,¹ και αυτό γιατί στον τριδιάστατο χώρο κάθε επίπεδο του καρτεσιανού χώρου μπορεί να προσδιορισθεί με τον αντίστοιχο του κάθετο άξονα, το επίπεδο yz με τον άξονα x , το επίπεδο zx με τον άξονα y και τέλος το επίπεδο xy με τον άξονα z . Λόγω αυτής της ιδιαιτερότητας του τριδιαστάτου χώρου οι συνιστώσες του εξωτερικού γινομένου στα επίπεδα a_{yz}, a_{zx}, a_{xy} μπορούν να αντιστοιχισθούν στους αντίστοιχους καρτεσιανούς άξονες, σχηματίζοντας μια τριάδα αριθμών η οποία με την κατάλληλη κατασκευή τελικά σχηματίζει διάνυσμα. Στην κατασκευή μάλιστα προσέξαμε οι συνιστώσες του εξωτερικού γινομένου να είναι συνεπείς με τον προσανατολισμό των αξόνων που επιλέξαμε. Θα μπορούσαμε χωρίς κανένα πρόβλημα να είχαμε επιλέξει τον αντίθετο προσανατολισμό με τις συνιστώσες να προκύπτουν από κυκλική μετάθεση των xzy αντί των xyz . Αν ο χώρος ήταν διδιάστατος και ορίζαμε ως διανύσματα τις δυάδες αριθμών που μετασχηματίζονται όπως οι μετατοπίσεις στο επίπεδο, τότε στο επίπεδο xy αντιστοιχεί μόνο το $a_{xy} = a_x b_y - a_y b_x$ που ορίζει ένα ψευδοβαθμωτό μέγεθος, αναλλοίωτο στις διδιάστατες στροφές (οι πρώτες δύο σχέσεις της (8.2) περιγράφουν τον διδιάστατο μετασχηματισμό στροφής στο επίπεδο xy). Επομένως, σε δύο διαστάσεις, το εξωτερικό γινόμενο διδιαστάτων διανυσμάτων ορίζει ένα ψευδοβαθμωτό μέγεθος. Αν ο χώρος ήταν τετραδιάστατος, όπως στη σχετικότητα, με το χρόνο να αποτελεί την τέταρτη διάσταση, θα είχαμε έξι επίπεδα και έξι συνιστώσες $a_{xy}, a_{yz}, a_{zx}, a_{tx}, a_{ty}$ και a_{tz} οι οποίες, προφανώς, δεν μπορούν να αντιστοιχιστούν στις τέσσερις συνιστώσες ενός διανύσματος σε αυτό το χώρο και συνεπώς το εξωτερικό γινόμενο δεν μπορεί να ορίσει ένα διάνυσμα, τουλάχιστον έτσι όπως το ορίζουμε στον τριδιάστατο χώρο.²

Επανερχόμενοι στις τρεις διαστάσεις, το εξωτερικό γινόμενο των \mathbf{a} και \mathbf{b} έχει μέ-

¹ Για την ακρίβεια μπορεί να αποδειχθεί ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο διανυσμάτων μπορεί να ορισθεί μόνο σε τριδιάστατο και επαδιάστατο χώρο. Ο Cayley έδωσε τη κατασκευή του αντίστοιχου εξωτερικού γινομένου στον επαδιάστατο χώρο, το οποίο ικανοποιεί όλες τις ιδιότητες του τριδιάστατου εξωτερικού γινομένου πλην της ταυτότητας του Jacobi (8.11) (βλ. το προσιτό άρθρο του Massey, W.S., 1983: "Cross products in higher dimensional Euclidean spaces" The American Mathematical Monthly, 90, 697-701).

² Μπορεί όμως να ορίσει έναν αντισυμμετρικό τανυστή δεύτερης τάξης με 6 ανεξάρτητα στοιχεία.



Σχήμα 8.1: Η φορά του εξωτερικού γινομένου προσδιορίζεται από τον δεξιόστροφο κοχλία, ή το δεξί χέρι.

τρο την επιφάνεια του παραλληλογράμμου με πλευρές τα \mathbf{a} και \mathbf{b} και διεύθυνση την κάθετο στο επίπεδο του παραλληλογράμμου

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta \hat{\mathbf{n}}, \quad (8.6)$$

όπου θ η γωνία που σχηματίζεται από τα \mathbf{a} και \mathbf{b} και $\hat{\mathbf{n}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τα \mathbf{a} και \mathbf{b} (βλ. σχήμα 8.1). Η φορά του εξωτερικού γινομένου δίνεται από την κατεύθυνση στην οποία θα προχωρήσει ένας δεξιόστροφος κοχλίας όταν στρέφεται από το \mathbf{a} προς το \mathbf{b} κατά τη συντομότερη γωνία³. Για να αποδείξουμε την (8.6) επιλέγουμε ένα κατάλληλο σύστημα αξόνων. Επειδή αφορά διανυσματικό μέγεθος αν αποδειχθεί ότι ισχύει η (8.6) σε ένα σύστημα αξόνων θα ισχύει σε όλα. Λαμβάνουμε το καρτεσιανό σύστημα με επίπεδο xy το επίπεδο που ορίζεται από τα \mathbf{a} και \mathbf{b} και άξονα x στη διεύθυνση του διανύσματος \mathbf{a} . Σε αυτό το σύστημα τα διανύσματα έχουν συντεταγμένες $\mathbf{a} = |\mathbf{a}|(1, 0, 0)$, $\mathbf{b} = |\mathbf{b}|(\cos \theta, \sin \theta, 0)$ και από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου (8.1) προκύπτει ότι

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (0, 0, |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta) = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta \hat{\mathbf{n}}, \quad (8.7)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στο επίπεδο που ορίζεται από τα \mathbf{a} και \mathbf{b} (σε αυτό το σύστημα αξόνων $\mathbf{n} = (0, 0, 1)$). Εξ' αυτού συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι κάθετο και στο \mathbf{a} και στο \mathbf{b} , δηλαδή $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$. Το γεγονός ότι το μέτρο του διανύσματος $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ είναι αυτό ενός παραλληλογράμμου με πλευρές \mathbf{a} , \mathbf{b} , μας οδηγεί να ορίζουμε τις επιπέδες επιφάνειες (στον τριδιάστατο χώρο) ως διανύσματα κάθετα σε αυτές με μέτρο ίσο με το εμβαδόν της επιφάνειας. Η φορά του διανύσματος της επιφάνειας μπορεί να κοιτάζει είτε προς τη μια είτε προς την άλλη πλευρά αυτής. Συνήθως όταν έχουμε μια κλειστή επιφάνεια, το προς τα έξω μέρος αυτής

³Σκεφθείτε όταν η γωνία είναι π αν εμφανίζεται καμιά διχογνωμία στον διανυσματικό χαρακτήρα του $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$.

θεωρείται ότι ορίζει την κατεύθυνσή κάθε στοιχειώδους κομματιού αυτής. Αλλιώς, αν η επιφάνεια δεν είναι κλειστή πρέπει να ορίσουμε τον προσανατολισμό της.

8.2 Αλγεβρικές ιδιότητες του εξωτερικού γινομένου

Το εξωτερικό γινόμενο ικανοποιεί τις εξής ιδιότητες οι οποίες εύκολα αποδεικνύονται:

1. $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$,
2. $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -\mathbf{b} \times \mathbf{a}$,
3. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = 0$,
4. $(c\mathbf{a}) \times \mathbf{b} = c(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$,
5. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \mathbf{c}$.
6. $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 = |\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2$.

Το εξωτερικό γινόμενο δύο ίδιων διανύσματος είναι το μηδενικό διάνυσμα. Αυτή η ιδιότητα καθώς και η αντισυμμετρικότητα του εξωτερικού γινομένου (ιδιότητα 2) το διαφοροποιούν από τα συνήθη γινόμενα και από το εσωτερικό γινόμενο. Οι ιδιότητα 3 είναι πολύ σημαντική διότι χαρακτηρίζει τη διεύθυνση του εξωτερικού γινομένου: είναι διάνυσμα που είναι κάθετο στο επίπεδο που σχηματίζεται από τα \mathbf{a} και \mathbf{b} , αφού είναι κάθετο και στα δύο διανύσματα. Οι ιδιότητες 4 και 5 αποδεικνύουν ότι το εξωτερικό γινόμενο, όπως και το εσωτερικό, εξαρτώνται γραμμικά από τα διανύσματα που απαρτίζουν το γινόμενο. Η ιδιότητα 6 προκύπτει αμέσως από την εξίσωση (8.7) δεδομένου ότι $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta$, όπου θ η γωνία μεταξύ των \mathbf{a} και \mathbf{b} , και είναι κατ'ουσίαν αναδιατύπωση της $\sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta$. Επίσης πρέπει να σημειώσουμε ότι η παράγωγος του εξωτερικού γινομένου διανυσμάτων που εξαρτώνται από το χρόνο ικανοποιεί τον συνήθη κανόνα παραγωγίσις γινομένου συναρτήσεων:

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \frac{d\mathbf{a}}{dt} \times \mathbf{b} + \mathbf{a} \times \frac{d\mathbf{b}}{dt}.$$

Χρήσιμα εξωτερικά γινόμενα είναι τα γινόμενα των μοναδιαίων διανυσμάτων $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ και $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$. Από τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου έχουμε:

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0},$$

ενώ

$$\mathbf{j} \times \mathbf{i} = -\mathbf{k}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{j} = -\mathbf{i}, \quad \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j}.$$

Σε ένα σύστημα συντεταγμένων το εξωτερικό γινόμενο των $\mathbf{a} = a_x\mathbf{i} + a_y\mathbf{j} + a_z\mathbf{k}$ και $\mathbf{b} = b_x\mathbf{i} + b_y\mathbf{j} + b_z\mathbf{k}$ προκύπτει, κάνοντας χρήση των παραπάνω ιδιοτήτων, ότι

είναι

$$\begin{aligned}\mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (a_x \mathbf{i} + a_y \mathbf{j} + a_z \mathbf{k}) \times (b_x \mathbf{i} + b_y \mathbf{j} + b_z \mathbf{k}) \\ &= (a_y b_z - a_z b_y) \mathbf{i} + (a_z b_x - a_x b_z) \mathbf{j} + (a_x b_y - a_y b_x) \mathbf{k},\end{aligned}$$

αποτέλεσμα σύμφωνο με τον ορισμό του εξωτερικού γινομένου. Η παραπάνω έκφραση μάς επιτρέπει να εκφράσουμε το εξωτερικό γινόμενο υπό τη μορφή μιας ορίζουσας:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}. \quad (8.8)$$

8.3 Τριπλά γινόμενα

Τρία διανύσματα μπορούν να ορίσουν τα εξής τριπλά γινόμενα:

- i. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$
- ii. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$
- iii. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$

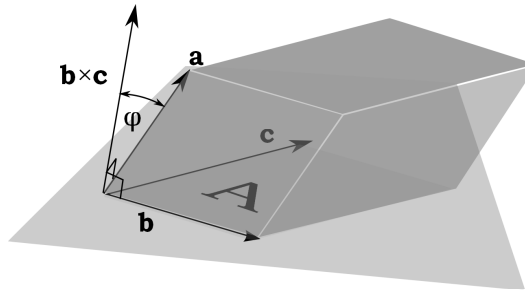
Το πρώτο είναι είναι διάνυσμα, το δεύτερο είναι ένα ψευδοβαθμωτό μέγεθος διότι είναι το εσωτερικό γινόμενο του διανύσματος \mathbf{a} με το ψευδοδιάνυσμα $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ και το τρίτο είναι διάνυσμα διότι είναι το εξωτερικό γινόμενο διανύσματος με το ψευδοδιάνυσμα $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$. Στη συνέχεια θα μελετήσουμε τις ιδιότητες των τριπλών γινομένων (ii) και (iii).

Υπολογίζουμε πρώτα το τριπλό γινόμενο $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$. Αν σχηματίσουμε το παραλληλεπίπεδο με πλευρές τα \mathbf{b} , \mathbf{c} και \mathbf{a} (βλ. σχήμα 8.2) τότε το $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ είναι κάθετο στο επίπεδο \mathbf{b} , \mathbf{c} και έχει μέτρο A , το εμβαδό της βάσης του παραλληλεπιπέδου με πλευρές \mathbf{b} , \mathbf{c} . Αν ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει το $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ με το \mathbf{a} , το ύψος του παραλληλεπιπέδου είναι $|\mathbf{a}| \cos \phi$ και το τριπλό γινόμενο ισούται με τον όγκο του παραλληλεπιπέδου $V = A|\mathbf{a}| \cos \phi$ διότι:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| |\mathbf{a}| \cos \phi = A |\mathbf{a}| \cos \phi = V.$$

Συνεπώς, επειδή το παραλληλεπίπεδο που σχηματίζεται από τα \mathbf{a} , \mathbf{b} και \mathbf{c} θα είναι το ίδιο και θα έχει τον ίδιο όγκο, αν αναδιευθετήσουμε τα τρία αυτά διανύσματα, όλα τα τριπλά γινόμενα που προέρχονται από κυκλική μετάθεση των διανυσμάτων, ώστε να παραμείνει το ίδιο πρόσημο στα αντίστοιχα τριπλά γινόμενα των συνιστωσών των διανυσμάτων,

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}), \quad (8.9)$$



Σχήμα 8.2: Το $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ αναπαριστά τον (προσανατολισμένο) όγκο του παραλληλεπιπέδου που σχηματίζουν τα τρία διανύσματα.

είναι ίσα. Αυτή η ιδιότητα φαίνεται καθαρά αν γραφεί το τριπλό γινόμενο ως

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \\ c_x & c_y & c_z \end{vmatrix}, \quad (8.10)$$

χρησιμοποιώντας την γραφή του εξωτερικού γινομένου στη μορφή της ορίζουσας (8.8). Επειδή η τιμή της ορίζουσας δεν αλλάζει όταν οι σειρές (ή/και οι κολώνες) της ορίζουσας μετατεθούν κυκλικά προκύπτει η ταυτότητα (8.9).

Ερχόμαστε τώρα στο διανυσματικό τριπλό γινόμενο $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ το οποίο αλλάζει στις κυκλικές μεταθέσεις των διανυσμάτων. Μάλιστα οι κυκλικές μεταθέσεις ικανοποιούν τη σημαντική ταυτότητα του Jacobi που αφορά το άθροισμα των κυκλικών μεταθέσεων αυτού του γινομένου:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) + \mathbf{b} \times (\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + \mathbf{c} \times (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) = \mathbf{0}. \quad (8.11)$$

Η ταυτότητα του Jacobi προκύπτει από τη σημαντική ταυτότητα:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}, \quad (8.12)$$

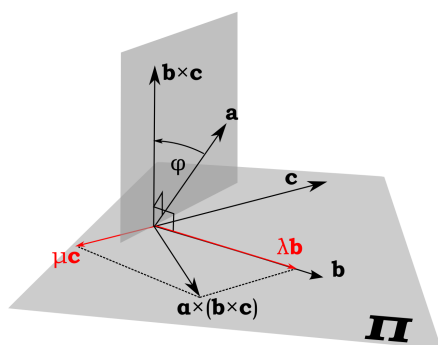
την οποία θα αποδείξουμε διότι η αποδεικτική μέθοδος είναι και ενδιαφέρουσα αλλά και μεθοδολογικά χρήσιμη στη φυσική.

Απόδειξη: Αν τα \mathbf{b} και \mathbf{c} είναι στην ίδια ευθεία και $\mathbf{b} = \lambda\mathbf{c}$ τότε η ταυτότητα (8.12) είναι αληθής. Μένει να αποδειχθεί λοιπόν η ταυτότητα όταν τα \mathbf{b} και \mathbf{c} δεν βρίσκονται στην ίδια ευθεία και ορίζουν κάποιο επίπεδο. Έστω Π το επίπεδο που ορίζεται από τα \mathbf{b} και \mathbf{c} (βλ. σχήμα 8.3). Το διάνυσμα $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ είναι κάθετο στο επίπεδο Π , συνεπώς το διάνυσμα $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ που είναι κάθετο στο $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ θα κείται αναγκαστικά στο επίπεδο Π . Επειδή κάθε διάνυσμα στο επίπεδο Π μπορεί να γραφεί ως γραμμικός

συνδυασμός των \mathbf{b} και \mathbf{c} , το τριπλό εξωτερικό γινόμενο θα είναι:

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}, \quad (8.13)$$

με κατάλληλα λ και μ , που πρέπει να είναι αμφότερα βαθμωτά μεγέθη ούτως ώστε η



Σχήμα 8.3: Το τριπλό εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ είναι ένα διάνυσμα που κείται στο επίπεδο των \mathbf{b}, \mathbf{c} . Επομένως μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός αυτών $\lambda \mathbf{b} + \mu \mathbf{c}$.

(8.13) να είναι ισότης μεταξύ διανυσμάτων (το $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ είναι διάνυσμα, διότι είναι το εξωτερικό γινόμενο του διανύσματος \mathbf{a} με το ψευδο-διάνυσμα $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$). Επιπλέον το αριστερό μέλος της (8.13) έχει γραμμική εξάρτηση από το \mathbf{a}, \mathbf{b} και από το \mathbf{c} , συνεπώς το λ πρέπει να είναι μία βαθμωτή συνάρτηση με γραμμική εξάρτηση και από το \mathbf{a} και το \mathbf{c} , και δεν μπορεί να εξαρτάται από το \mathbf{b} . Η μόνη τέτοια βαθμωτή συνάρτηση είναι το εσωτερικό γινόμενο $\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$.⁴ Συνεπώς είναι $\lambda = \alpha_1 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})$ όπου α_1 μία σταθερά. Ομοίως καταλήγουμε ότι $\mu = \alpha_2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$, όπου α_2 μία άλλη σταθερά. Έχουμε αποδείξει ήδη ότι

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \alpha_1 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) \mathbf{b} + \alpha_2 (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{c}, \quad (8.14)$$

και απομένει να προσδιορίσουμε τις σταθερές α_1 και α_2 οι οποίες είναι ανεξάρτητες από τα διανύσματα και το σύστημα αναφοράς. Για να υπολογίσουμε την α_1 επιλέγουμε: $\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{c} = \mathbf{i}$ και $\mathbf{b} = \mathbf{k}$, και με αυτά τα διανύσματα το αριστερό σκέλος της (8.14) είναι:

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) = \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k},$$

ενώ το δεξί: $\alpha_1 \mathbf{k}$. Άρα $\alpha_1 = 1$. Ομοίως επιλέγοντας, $\mathbf{a} = \mathbf{i}, \mathbf{b} = \mathbf{i}$ και $\mathbf{c} = \mathbf{j}$, το αριστερό σκέλος της (8.14) είναι

$$\mathbf{i} \times (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{i} \times \mathbf{k} = -\mathbf{j},$$

⁴Η $|\mathbf{a}||\mathbf{c}|$ δεν είναι γραμμική συνάρτηση των \mathbf{a} και \mathbf{c} αφού $|\mathbf{a}_1 + \mathbf{a}_2| \neq |\mathbf{a}_1| + |\mathbf{a}_2|$.

ενώ το δεξί $\alpha_2 \mathbf{j}$. Συνεπώς $\alpha_2 = -1$. Άρα η ταυτότητα (8.12) είναι αληθής.

8.4 Στροφορμή

Το εξωτερικό γινόμενο χρησιμοποιείται συχνά στη Φυσική για την παραγωγή νέων διανυσματικών μεγεθών από άλλα. Τα νέα αυτά διανύσματα παρουσιάζουν ξεχωριστές ιδιότητες και μέσω αυτών μπορούμε να μελετάμε τη δομή και την εξέλιξη διαφόρων φυσικών συστημάτων.

Έτσι ορίζουμε ως στροφορμή ενός σωματιδίου το ψευδοδιάνυσμα:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} ,$$

όπου $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ η ορμή του σωματιδίου και ως ροπή δύναμης το ψευδοδιάνυσμα:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F} .$$

Παρατηρήστε ότι ενώ η ορμή δεν εξαρτάται από την επιλογή της αρχής των αξόνων (παρά μόνο από το σύστημα αναφοράς, όσον αφορά στο \mathbf{p}), η στροφορμή και η ροπή εξαρτώνται από την επιλογή της αρχής των αξόνων, αφού αν αλλάξει η αρχή των αξόνων θα αλλάξει το διάνυσμα θέσης \mathbf{r} του σωματιδίου. Επομένως τα δύο νέα αυτά μεγέθη δεν έχουν απόλυτο νόημα σε κάποιο σύστημα αναφοράς και πρέπει να μας δίνεται η αρχή μέτρησης του \mathbf{r} προκειμένου να τα υπολογίσουμε.

Αντίστοιχα με το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F} , \quad (8.15)$$

για την ορμή ενός σωματιδίου, έχουμε και έναν νόμο για την στροφορμή του σωματιδίου

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} , \quad (8.16)$$

ο οποίος προκύπτει πολλαπλασιάζοντας εξωτερικά την (8.15) με το \mathbf{r} και κάνοντας χρήση της ταυτότητας:

$$\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(\mathbf{r} \times \mathbf{p})}{dt} - \mathbf{v} \times \mathbf{p} = \frac{d\mathbf{L}}{dt} .$$

Στην παραπάνω σχέση το $\mathbf{v} \times \mathbf{p} = \mathbf{0}$ επειδή τα \mathbf{v} και \mathbf{p} είναι συγγραμμικά διανύσματα.

Θα έλεγε κανείς ότι αφού η δεύτερη εξίσωση προκύπτει από την πρώτη εμπεριέχει την ίδια πληροφορία για την κίνηση του σωματιδίου. Ωστόσο οι διατηρήσεις των δύο μεγεθών \mathbf{p} και \mathbf{L} μπορεί να έχουν διαφορετικό φυσικό αίτιο. Από την (8.15) και την (8.16) προκύπτει ο νόμος διατήρησης της ορμής \mathbf{p} του σωματιδίου όταν $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ και της στροφορμής \mathbf{L} όταν $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{0}$. Όμως η ροπή δεν είναι μηδενική μόνο στην

περίπτωση που είναι μηδενική η δύναμη. Η ροπή μηδενίζεται και όταν η δύναμη έχει τη διεύθυνση της \mathbf{r} , είναι δηλαδή κεντρική δύναμη $\mathbf{F} = f(\mathbf{r})\hat{\mathbf{r}}$. Αυτό σημαίνει ότι μπορούμε να έχουμε διατήρηση της στροφορμής του σωματιδίου όταν σε αυτό ασκούνται κεντρικές δυνάμεις, χωρίς να διατηρείται η ορμή του σωματιδίου. Για παράδειγμα στην κίνηση της Γης γύρω από τον Ήλιο, κατά πολύ μεγάλη προσέγγιση, η στροφορμή της Γης ως προς το κέντρο του Ήλιου είναι σταθερή ενώ η ορμή της Γης αλλάζει καθώς αυτή γυρίζει γύρω από τον Ήλιο.

Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο των κεντρικών δυνάμεων, η διατήρηση της στροφορμής οδηγεί σε περιορισμό της τροχιάς του σωματιδίου σε ένα επίπεδο και σε προσδιορισμό της φοράς της περιστροφής περί το κέντρο της δύναμης. Το επίπεδο της τροχιάς είναι το επίπεδο που είναι κάθετο στο σταθερό διάνυσμα της στροφορμής. Αυτό προκύπτει από τον ορισμό της στροφορμής $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ σύμφωνα με τον οποίο τα διανύσματα \mathbf{r} και \mathbf{p} βρίσκονται πάντοτε στο επίπεδο το κάθετο στο $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$.

8.5 Στροφές περί άξονα – Κυκλική κίνηση

Θεωρήστε ότι η θέση στο χώρο, $\mathbf{r}(\epsilon)$, είναι συνάρτηση μιας πραγματικής μεταβλητής, ϵ , και μεταβάλλεται σύμφωνα με την εξίσωση:

$$\frac{d\mathbf{r}}{d\epsilon} = \hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r} , \quad (8.17)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ κάποιο μοναδιαίο διάνυσμα. Αν ολοκληρώσουμε την (8.17) μπορούμε να προσδιορίσουμε το $\mathbf{r}(\epsilon)$ στο οποίο θα εξελιχθεί το αρχικό διάνυσμα $\mathbf{r}(0)$ ⁵, όταν η παράμετρος λάβει τη τιμή ϵ . Υπό αυτή την έννοια η (8.17) αποτελεί τη διαφορική μορφή του μετασχηματισμού $R(\epsilon)$, ο οποίος για κάθε ϵ απεικονίζει κάθε σημείο του χώρου $\mathbf{r} \equiv \mathbf{r}(0)$ στο $\mathbf{r}' \equiv \mathbf{r}(\epsilon)$:

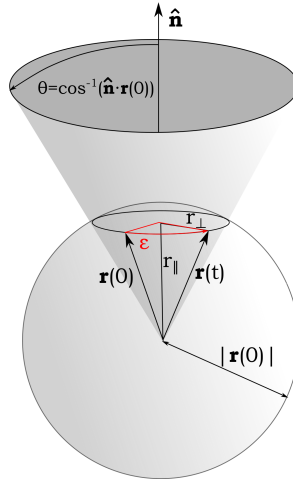
$$\mathbf{r} \xrightarrow{R(\epsilon)} \mathbf{r}' . \quad (8.18)$$

Ο μετασχηματισμός $R(\epsilon)$ ⁶ έχει συνεχή (και διαφορίσιμη) εξάρτηση από το ϵ , το οποίο ονομάζεται και παράμετρος του μετασχηματισμού. Για $\epsilon = 0$ ο μετασχηματισμός είναι ταυτοτικός, $R(0) = I$ απεικονίζει, δηλαδή, κάθε αρχική θέση στον εαυτό της: $\mathbf{r} \rightarrow \mathbf{r}$, ενώ, καθώς το ϵ μεταβάλλεται συνεχώς, το διάνυσμα θέσης $\mathbf{r}' = \mathbf{r}(\epsilon)$ διαγράφει μία καμπύλη στο χώρο με αρχικό σημείο το $\mathbf{r} = \mathbf{r}(0)$. Ως παράμετρος του μετασχηματισμού, ϵ , θα μπορούσε να ληφθεί ο χρόνος, t , και μέσω αυτής της παραμέτρου το $\mathbf{r}(t)$ είναι η τροχιά σωματιδίου με αρχική θέση το $\mathbf{r}(0)$. Το ερώτημα

⁵ Προσέξτε ότι η διαφορική εξίσωση είναι πρώτης τάξης, επομένως μας αρκεί μια αρχική συνθήκη.

⁶ Παρουσιάζουμε εδώ μια εναλλακτική εικόνα της επίλυσης μιας διαφορικής εξίσωσης, όπου η λύση αποτελεί απεικόνιση μιας αρχικής κατάστασης στην τελική, μέσω μιας παραμέτρου η οποία υπεισέχεται ως παράμετρος του μετασχηματισμού που εκτελεί την απεικόνιση.

που θέλουμε να απαντήσουμε είναι ποιός μετασχηματισμός κρύβεται πίσω από την (8.17), ή ισοδυνάμως τι τροχιά διαγράφει η θέση σωματιδίου που ικανοποιεί την (8.17);



Σχήμα 8.4: Η κίνηση διεξάγεται στην τομή μιας σφαίρας ακτίνας $|\mathbf{r}(0)|$ και ενός κώνου με άνοιγμα $\cos^{-1}(\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}(0))$. Μάλιστα η κίνηση σε αυτό τον κύκλο γίνεται με σταθερή ταχύτητα ως προς την παράμετρο ϵ .

Θα δείξουμε ότι ο μετασχηματισμός $R(\epsilon)$ που κατασκευάζει λύσεις της (8.17) αντιστοιχεί σε περιστροφή του \mathbf{r} περί τον άξονα $\hat{\mathbf{n}}$, κατά γωνία ϵ (βλ. σχήμα 8.4). Καταρχάς, ο γεωμετρικός τόπος των σημείων που ικανοποιούν την (8.17) είναι ο κύκλος που προκύπτει από την τομή σφαίρας ακτίνας $|\mathbf{r}(0)|$ και της κωνικής επιφάνειας περί τον άξονα $\hat{\mathbf{n}}$ με γωνιακό άνοιγμα, θ , τέτοιο ώστε $\cos \theta = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}(0)/|\mathbf{r}(0)|$ (βλ. σχήμα 8.4). Ας δούμε γιατί: Παρατηρούμε πρώτα ότι το μέτρο του διανύσματος παραμένει σταθερό στο μετασχηματισμό $R(\epsilon)$ για κάθε ϵ , δηλαδή είναι:

$$|\mathbf{r}'| = |\mathbf{r}|, \quad (8.19)$$

επειδή:

$$\begin{aligned} \frac{d|\mathbf{r}|^2}{d\epsilon} &= 2\mathbf{r} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\epsilon} \\ &= 2\mathbf{r} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Συνεπώς για κάθε ϵ :

$$|\mathbf{r}(0)| = |\mathbf{r}(\epsilon)|.$$

Αυτό σημαίνει ότι το $\mathbf{r}(\epsilon)$ περιορίζεται σε μια σφαιρική επιφάνεια ακτίνας $|\mathbf{r}(0)|$. Επίσης η γωνία, θ , που σχηματίζει το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ με το \mathbf{r} παραμένει και

αυτή σταθερή κατά το μετασχηματισμό, αφού $\hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r} = |\mathbf{r}| \cos \theta = |\mathbf{r}(0)| \cos \theta$ και

$$\begin{aligned} \frac{d \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}}{d\epsilon} &= \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\epsilon} \\ &= \hat{\mathbf{n}} \cdot (\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}) \\ &= \mathbf{0}. \end{aligned}$$

Με άλλα λόγια το $\mathbf{r}(\epsilon)$ βρίσκεται σε μια κωνική επιφάνεια με άξονα το $\hat{\mathbf{n}}$ και άνοιγμα τη σταθερή αυτή γωνία θ . Από τις δύο παραπάνω διατηρήσεις συμπεραίνουμε ότι το $\mathbf{r}(\epsilon)$ κινείται επί της κυκλικής τομής των δύο αυτών επιφανειών.

Η σταθερή ποσότητα $r_{\parallel} = \hat{\mathbf{n}} \cdot \mathbf{r}$ είναι το μήκος της συνιστώσας του \mathbf{r} κατά μήκος του $\hat{\mathbf{n}}$. Επίσης σταθερο είναι και το $r_{\perp} = |\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}| = |\mathbf{r}| \sin \theta$ (η ακτίνα του κύκλου επί του οποίου βρίσκεται το \mathbf{r}) που είναι το μήκος της συνιστώσας του \mathbf{r} στο επίπεδο το κάθετο στο $\hat{\mathbf{n}}$. Το διάνυσμα θέσης, λοιπόν, διαγράφει την κυκλική καμπύλη:

$$\mathbf{r} = r_{\parallel} \hat{\mathbf{n}} + \mathbf{r}_{\perp}, \quad (8.20)$$

όπου, \mathbf{r}_{\perp} , η σταθερού μέτρου συνιστώσα του \mathbf{r} στο επίπεδο που είναι κάθετο στο $\hat{\mathbf{n}}$.

Συνεπώς ο μετασχηματισμός (8.17) είναι μετασχηματισμός στροφής του \mathbf{r} περί τον άξονα $\hat{\mathbf{n}}$. Μένει να δείξουμε ότι είναι μετασχηματισμός στροφής κατά γωνία ϵ δηλαδή ότι το \mathbf{r}_{\perp} κατά τον μετασχηματισμό $R(\epsilon)$ διαγράφει κυκλικό τόξο μήκους ϵr_{\perp} (βλ. σχήμα 8.4). Προς τούτο υπολογίζουμε το διαφορικό μήκος τόξου που διαγράφεται κατά τον μετασχηματισμό:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{d\epsilon} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\epsilon} (d\epsilon)^2 \\ &= |\hat{\mathbf{n}} \times \mathbf{r}|^2 (d\epsilon)^2 \\ &= |\mathbf{r}|^2 \sin^2 \theta (d\epsilon)^2 \\ &= r_{\perp}^2 (d\epsilon)^2. \end{aligned}$$

Συνεπώς ισχύει ότι

$$\frac{ds}{d\epsilon} = r_{\perp}, \quad (8.21)$$

και το συνολικό μήκος τόξου που διαγράφει το άκρο του \mathbf{r} κατά τον μετασχηματισμό είναι:

$$s = \epsilon r_{\perp}. \quad (8.22)$$

Αν ένα οποιοδήποτε διάνυσμα ξ εξελίσσεται με το χρόνο t^7 , σύμφωνα με την

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega \times \xi, \quad (8.23)$$

μπορούμε να μετασχηματίσουμε αυτή την εξίσωση στη βασική της μορφή (8.17) (που αναλύσαμε παραπάνω) ως ακολούθως:

$$\frac{d\xi}{dt} = \omega \frac{\omega}{\omega} \times \xi \xrightarrow{\epsilon=t\omega} \frac{d\xi}{d\epsilon} = \hat{\mathbf{n}}_{\omega} \times \xi \quad (8.24)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}_{\omega} = \omega/\omega$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση του ω . Επομένως το διάνυσμα ξ διαγράφει έναν κύκλο κάθετο στο ω , σε απόσταση $\xi_{\parallel} = \xi(0) \cdot \hat{\mathbf{n}}_{\omega} = \xi(0) \cdot \omega/\omega$ από την αρχή μέτρησης του ξ με γωνιακή ταχύτητα $\epsilon/t = \omega$.

Στην περίπτωση που το υπό εξέταση χρονοεξαρτώμενο διάνυσμα είναι η ταχύτητα ενός σωματιδίου, η τροχιά που διαγράφει το άκρο της ταχύτητας ονομάζεται *οδογράφος*. Την ιδέα της οδογράφου την σκέφτηκε για πρώτη φορά ο Hamilton, και την χρησιμοποίησε προκειμένου να εξαγάγει την ίδια την τροχιά του σωματιδίου. Στην περίπτωση που η ταχύτητα υπακούει σε μια σχέση σαν την (8.23) η οδογράφος είναι ένας κύκλος. Την παρατήρηση αυτή θα την εκμεταλλευτούμε στο εδάφιο που ακολουθεί.

8.6 Κίνηση σωματιδίου σε σταθερό μαγνητικό πεδίο

Στο εδάφιο αυτό θα μελετήσουμε την κίνηση ενός σωματιδίου μέσα σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο, μιας και η μαγνητική δύναμη εμφανίζεται υπό τη μορφή εξωτερικού γινομένου. Στη συνέχεια θα δούμε πώς η εισαγωγή και ομογενούς ηλεκτρικού πεδίου (μαζί με το μαγνητικό) οδηγεί σε λύσεις της ίδιας μορφής με αυτήν που θα βρούμε μόνο για το μαγνητικό πεδίο.

Η μαγνητική δύναμη Lorentz που ασκείται σε ένα κινούμενο σημειακό φορτίο μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι

$$\mathbf{F} = q \mathbf{v} \times \mathbf{B}, \quad (8.25)$$

οπότε η δυναμική εξίσωση του Νεύτωνα λαμβάνει την ακόλουθη μορφή:

$$m\dot{\mathbf{v}} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}. \quad (8.26)$$

Ορίζοντας το νέο διάνυσμα

$$\boldsymbol{\Omega} = -\frac{q}{m}\mathbf{B}$$

⁷Η διαφορική αυτή εξίσωση εμφανίζεται συχνά σε θεμελιώδη προβλήματα Φυσικής, οπότε καθίσταται ιδιαίτερα χρήσιμο να γνωρίζει κανείς τη λύση της, κατ' αναλογία με την εκθετική συνάρτηση στα γραμμικά προβλήματα.

η εξίσωση που ικανοποιεί η ταχύτητα είναι

$$\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} . \quad (8.27)$$

Από το προηγούμενο εδάφιο μάθαμε ότι μια τέτοια εξίσωση έχει ως λύση μια κυκλική τροχιά (οδογράφος) για την \mathbf{v} σε επίπεδο κάθετο στο $\boldsymbol{\Omega}$ και σε απόσταση $\mathbf{v}(0) \cdot \boldsymbol{\Omega}/\Omega$ από την αρχή των διανυσμάτων ταχύτητας. Θα προτιμήσουμε, όμως, μια εναλλακτική μέθοδο πολύ χρήσιμη στη Φυσική την οποία χρησιμοποιήσαμε και στην ανάλυση των διεγερμένων αρμονικών ταλαντωτών: Την μαγαδοποίηση των εξισώσεων.

Γνωρίζοντας τη δράση του εξωτερικού γινομένου είναι φρόνιμο να γράψουμε την ταχύτητα ως

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\parallel} + \mathbf{v}_{\perp} = [(\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}}] + [\mathbf{v} - (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}}] = (\mathbf{v} \cdot \hat{\mathbf{B}})\hat{\mathbf{B}} + \hat{\mathbf{B}} \times (\mathbf{v} \times \hat{\mathbf{B}}) ,$$

όπου $\hat{\mathbf{B}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα $\mathbf{B}/|\mathbf{B}|$ στην κατεύθυνση του \mathbf{B} . Στην τελευταία ισότητα επικαλεστήκαμε τη σχέση του τριπλού γινομένου (8.12). Η \mathbf{v}_{\parallel} διατηρείται αφού $\mathbf{B} \times \mathbf{v}_{\parallel} = \mathbf{0}$, ενώ για την \mathbf{v}_{\perp} θα έχουμε

$$\dot{\mathbf{v}}_{\perp} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\perp} . \quad (8.28)$$

Παρατηρούμε ότι η δεύτερη αυτή εξίσωση εξελίσσεται στο επίπεδο το κάθετο στο \mathbf{B} , αφού και η \mathbf{v}_{\perp} και η μεταβολή της $\dot{\mathbf{v}}_{\perp}$, που εκφράζεται από το διάνυσμα $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}_{\perp}$, βρίσκονται στο επίπεδο το κάθετο στο \mathbf{B} . Θα ορίσουμε λοιπόν το επίπεδο αυτό ως το $x - y$ επίπεδο με τον άξονα z στραμένο στην κατεύθυνση του $\boldsymbol{\Omega}$ και θα έχουμε για τις δύο συνιστώσες της \mathbf{v}_{\perp} :

$$\dot{v}_x = -\Omega v_y , \quad (8.29)$$

$$\dot{v}_y = +\Omega v_x . \quad (8.30)$$

Η συμπλεκτική αυτή μορφή των εξισώσεων (παρόμοιά της θα δούμε στο Κεφάλαιο 13 όταν θα εξετάσουμε την κίνηση σώματος υπό την επίδραση της βαρυτικής δύναμης) μας “ωθεί” να δοκιμάσουμε το μαγαδικό της alter ego:

$$\dot{\zeta} = i\Omega\zeta \quad (8.31)$$

με $\zeta = v_x + i v_y$. Η γραμμικότητα των εξισώσεων (8.30) έχει εμφανιστεί τώρα στη μαγαδική της παραλλαγή καθαρή και αποσυμπλεγμένη. Η λύση της (8.31) είναι η

$$\zeta(t) = \zeta_0 e^{i\Omega t}$$

με $\zeta_0 = v_x(0) + iv_y(0)$. Η ταχύτητα \mathbf{v}_\perp λοιπόν διαγράφει ένα κύκλο στο επίπεδο $x - y$ με μέτρο $|\mathbf{v}_\perp(0)|$, και με σταθερή γωνιακή ταχύτητα Ω . Η φορά διαγραφής της κυκλικής οδογράφου είναι μάλιστα αυτή του Ω δηλαδή αντίθετη του \mathbf{B} (για θετικό q). Αν χρησιμοποιήσουμε και την πληροφορία της σταθερής \mathbf{v}_\parallel , η οδογράφος είναι κύκλος παράλληλος στο επίπεδο $x - y$ αλλά σε απόσταση \mathbf{v}_\parallel από αυτό.

Ας υπολογίσουμε τώρα και τη θέση του φορτισμένου σωματιδίου από την εξέλιξη της ταχύτητας:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) + \int_0^t \mathbf{v}(t') dt' .$$

Δεν θα ήταν παράλογο να διαχωρίσουμε και πάλι την κίνηση σε παράλληλες και κάθετες στην Ω συνιστώσες. Έτσι

$$\mathbf{r}_\parallel(t) = z(t)\hat{\zeta} = (z(0) + v_z(0)t)\hat{\zeta} \quad (8.32)$$

και

$$\begin{aligned} w(t) = x(t) + iy(t) &= x(0) + iy(0) + \int_0^t \zeta(t') dt' \\ &= x(0) + iy(0) + \frac{v_x(0) + iv_y(0)}{i\Omega} (e^{i\Omega t} - 1) . \end{aligned} \quad (8.33)$$

Χωρίζοντας την παραπάνω σχέση σε πραγματικό και φανταστικό μέρος

$$x(t) = x(0) + \frac{v_y(0)}{\Omega} (\cos(\Omega t) - 1) + \frac{v_x(0)}{\Omega} \sin(\Omega t) , \quad (8.34)$$

$$y(t) = y(0) - \frac{v_x(0)}{\Omega} (\cos(\Omega t) - 1) + \frac{v_y(0)}{\Omega} \sin(\Omega t) . \quad (8.35)$$

Με μια επιπλέον αναδιάταξη για να διαχωριστούν οι σταθεροί όροι από τους ταλαντωτικούς

$$x(t) = x(0) - \frac{v_y(0)}{\Omega} + \left[\frac{v_y(0)}{\Omega} \cos(\Omega t) + \frac{v_x(0)}{\Omega} \sin(\Omega t) \right] , \quad (8.36)$$

$$y(t) = y(0) + \frac{v_x(0)}{\Omega} + \left[-\frac{v_x(0)}{\Omega} \cos(\Omega t) + \frac{v_y(0)}{\Omega} \sin(\Omega t) \right] . \quad (8.37)$$

Οι όροι εντός των αγκυλών στις δύο παραπάνω σχέσεις είναι αρμονικοί ταλαντωτικοί όροι του ίδιου μέτρου και έχουν διαφορά φάσης $\pi/2$ αφού

$$\begin{aligned} \frac{v_y(0)}{\Omega} \cos(\Omega t) + \frac{v_x(0)}{\Omega} \sin(\Omega t) &= \frac{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}}{\Omega} [\cos \phi \cos(\Omega t) + \sin \phi \sin(\Omega t)] \\ &= \frac{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}}{\Omega} \cos(\Omega t - \phi) , \end{aligned} \quad (8.38)$$

και

$$\begin{aligned} -\frac{v_x(0)}{\Omega} \cos(\Omega t) + \frac{v_y}{\Omega} \sin(\Omega t) &= \frac{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}}{\Omega} [-\sin \phi \cos(\Omega t) + \cos \phi \sin(\Omega t)] \\ &= \frac{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}}{\Omega} \sin(\Omega t - \phi), \end{aligned} \quad (8.39)$$

όπου χρησιμοποιήσαμε τη βοηθητική γωνία ϕ που προσδιορίζεται από τις τριγωνομετρικές σχέσεις

$$\cos \phi = \frac{v_y(0)}{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}}, \quad \sin \phi = \frac{v_x(0)}{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}}.$$

Επομένως η κίνηση επί του επιπέδου $x-y$ του κάθετου στο \mathbf{B} είναι κύκλος με κέντρο το

$$(x_c, y_c) = \left(x(0) - \frac{v_y(0)}{\Omega}, y(0) + \frac{v_x(0)}{\Omega} \right)$$

και ακτίνα

$$R = \frac{\sqrt{v_x(0)^2 + v_y(0)^2}}{\Omega}.$$

Αν συμπεριλάβουμε και την παράλληλη στο \mathbf{B} ομαλή κίνηση θα είναι

$$\begin{aligned} x(t) &= x_c + R \cos(\Omega t - \phi) \\ y(t) &= y_c + R \sin(\Omega t - \phi) \\ z(t) &= z(0) + v_z(0)t. \end{aligned} \quad (8.40)$$

Αν θέλουμε τώρα να επανέλθουμε σε εκφράσεις ανεξάρτητες συστήματος αναφοράς παρατηρούμε ότι

$$\begin{aligned} (0, 0, v_z(0)) &= \frac{\mathbf{v}(0) \cdot \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2} \boldsymbol{\Omega}, \\ (v_x(0), v_y(0), 0) &= \mathbf{v}(0) - \frac{\mathbf{v}(0) \cdot \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2} \boldsymbol{\Omega} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}(0) \times \boldsymbol{\Omega})}{\Omega^2}, \end{aligned}$$

(βάσει της (8.12)) και

$$(v_y(0), -v_x(0), 0) = \frac{\mathbf{v}(0) \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega}.$$

Η διανυσματική λοιπόν μορφή της κίνησης είναι

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}(0) - \mathbf{a} + \mathbf{a} \cos(\Omega t) + \mathbf{b} \sin(\Omega t) + \mathbf{c} t \quad (8.41)$$

με

$$\begin{aligned} \mathbf{a} &= \frac{\mathbf{v}(0) \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2}, \\ \mathbf{b} &= \frac{\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v}(0) \times \boldsymbol{\Omega})}{\Omega^3} \end{aligned}$$

και

$$\mathbf{c} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \cdot \mathbf{v}(0)}{\Omega^2} \boldsymbol{\Omega}.$$

Η εξίσωση αυτή είναι μια παραμετρική εξίσωση κυλινδρικής έλικας η οποία διαγράφεται με σταθερή ταχύτητα ως προς το χρόνο t . Η ακτίνα της είναι

$$R = |\mathbf{b}|,$$

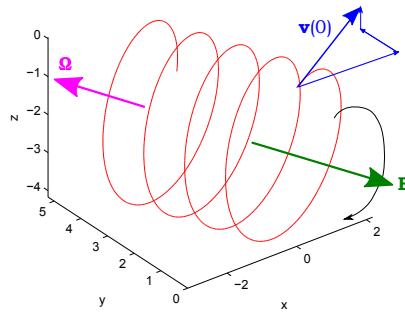
το βήμα της είναι

$$h = |\mathbf{c}|T = 2\pi|\mathbf{c}|/\Omega$$

η γωνιακή της περιστροφή είναι

$$\Omega = q|\mathbf{B}|/m$$

και έχει τη φορά περιστροφής του δεξιόστροφου κοχλίου που προχωρά κατά το $-\mathbf{B}$ για θετικά q και του \mathbf{B} για αρνητικά q . Στο σημείο αυτό αξίζει να σημειώσουμε ότι η παραπάνω κατασκευή της γνωστής μας έλικας σε ομογενές μαγνητικό πεδίο, ακολούθησε όχι την απλούστερη οδό, προκειμένου ο αναγνώστης να εξασκηθεί στα διανύσματα και τις πράξεις αυτών. Η έλικα προκύπτει πολύ πιο απλά αν στρέψουμε τον άξονα z κατά μήκος του μαγνητικού πεδίου όπως κάναμε στην αρχή προτού γενικεύσουμε διανυσματικά την κατασκευή.



Σχήμα 8.5: Η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι μια κυλινδρική έλικα. Στο διάγραμμα φαίνονται τα \mathbf{B} , $\boldsymbol{\Omega}$, $\mathbf{v}(0)$ και οι 3 καρτεσιανές συνιστώσες του $\mathbf{v}(0)$. Τα 3 διανύσματα έχουν αυθαίρετες συνιστώσες. Η φορά περιστροφής είναι αυτή του $\boldsymbol{\Omega}$.

Αν εκτός από το μαγνητικό πεδίο υπήρχε και ηλεκτρικό (ομογενές και αυτό) η εξίσωση κίνησης που θα επιχειρούσαμε να λύσουμε θα ήταν η

$$m\dot{\mathbf{v}} = q(\mathbf{E} + \mathbf{v} \times \mathbf{B}) \quad (8.42)$$

και ακολουθώντας τη συνοπτική συμβολιστική που χρησιμοποιήσαμε στο μαγνη-

τικό πεδίο

$$\dot{\mathbf{v}} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v} + \mathbf{H} \quad (8.43)$$

με $\mathbf{H} = q\mathbf{E}/m$. Η τελευταία αυτή έκφραση αν και διαθέτει στο ομογενές της μέρος τη γραμμικότητα της αντίστοιχης εξίσωσης για το μαγνητικό πεδίο, το μη ομογενές της μέρος δύσκολα στριμώνχεται στο καλούπι παράλληλων και κάθετων μιγαδικών συνιστωσών. Για το λόγο αυτό θα ακολουθήσουμε ένα τέχνασμα προκειμένου να απαλλαγούμε από την πρόσθετη δυσκολία που επέφερε η παρουσία του ηλεκτρικού πεδίου. Αντί να γράψουμε την εξίσωση για το \mathbf{v} θα τη γράψουμε για το $\mathbf{v} - \mathbf{U}$ με \mathbf{U} κάποιο κατάλληλο σταθερό διάνυσμα που θα προσδιορίσουμε αργότερα. Έτσι

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} - \mathbf{U}) = \boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{v} - \mathbf{U}) + \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} + \mathbf{H}. \quad (8.44)$$

Η εξίσωσή μας θα απλοποιούνται εξαιρετικά (και τη λύση της θα μπορούσαμε να τη διαβάσουμε στις προηγούμενες παραγράφους που αναφέρονταν σε αμιγές μαγνητικό πεδίο) αν

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} + \mathbf{H} = \mathbf{0}.$$

Δυστυχώς κάτι τέτοιο δεν είναι εν γένει εφικτό αφού το $\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}$ είναι κάθετο στο $\boldsymbol{\Omega}$ και επομένως δεν μπορεί να σβήσει το τυχαίο \mathbf{H} (εκτός και αν τα $\boldsymbol{\Omega}$ και \mathbf{H} που έχουν τις διευθύνσεις των δύο πεδίων ήταν εξαρχής κάθετα). Θα συμβιβαστούμε λοιπόν φροντίζοντας να σβήσουμε μια από τις συνιστώσες του \mathbf{H} ελπίζοντας αυτή που θα μείνει να μην είναι ιδιαίτερα προβληματική στην περαιτέρω ανάλυση. Δεδομένου του $\boldsymbol{\Omega}$ είναι λογικό να αναλύσουμε το \mathbf{H} σε παράλληλη και κάθετη συνιστώσα στο $\boldsymbol{\Omega}$:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_{\parallel} + \mathbf{H}_{\perp} = \frac{\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2} \boldsymbol{\Omega} + \left(\mathbf{H} - \frac{\mathbf{H} \cdot \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2} \boldsymbol{\Omega} \right).$$

Έτσι θα ρυθμίσουμε καταλλήλως το \mathbf{U} ώστε να “φαγωθεί” η κάθετη συνιστώσα \mathbf{H}_{\perp} :

$$\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} + \mathbf{H}_{\perp} = \mathbf{0}.$$

Θα μας βοηθήσει ο εναλλακτικός τρόπος που χρησιμοποιήσαμε παραπάνω για να γράψουμε το διάνυσμα \mathbf{b} στη γενική εξίσωση κίνησης στο μαγνητικό πεδίο (8.41). Συγκεκριμένα

$$\mathbf{H}_{\perp} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \times (\mathbf{H} \times \boldsymbol{\Omega})}{\Omega^2},$$

οπότε θέλουμε

$$\boldsymbol{\Omega} \times \left(\mathbf{U} + \frac{\mathbf{H} \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2} \right) = \mathbf{0}.$$

Αυτή λύνεται αυτόματα αν θέσουμε

$$\mathbf{U} = -\frac{\mathbf{H} \times \boldsymbol{\Omega}}{\Omega^2} = \frac{\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{H}}{\Omega^2}. \quad (8.45)$$

Μέσω της νέας αυτής διανυσματικής ποσότητας η εξίσωση κίνησης έχει λάβει τη μορφή

$$\dot{\mathbf{v}}' = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}' + \mathbf{H}_{\parallel}. \quad (8.46)$$

με $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{U}$. Η μόνη διαφοροποίηση της νέας αυτής εξίσωσης από την (8.28) είναι η \mathbf{H}_{\parallel} συνιστώσα η οποία ευτυχώς έχει την κατεύθυνση του $\boldsymbol{\Omega}$ και επομένως δεν θα αλλοιώσει το δύσκολο κομμάτι της εξίσωσης που αφορά τη στροφή της κάθετης συνιστώσας του \mathbf{v}' στο $\boldsymbol{\Omega}$. Θα έχουμε λοιπόν

$$\dot{\mathbf{v}}'_{\parallel} = \mathbf{H}_{\parallel} \quad (8.47)$$

και

$$\dot{\mathbf{v}}'_{\perp} = \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{v}'_{\perp}. \quad (8.48)$$

Τη δεύτερη εξίσωση την έχουμε ξαναλύσει, ενώ για την πρώτη τα πράγματα είναι εξαιρετικά απλά:

$$\mathbf{v}'_{\parallel} = \mathbf{v}'_{\parallel}(0) + \mathbf{H}_{\parallel} t.$$

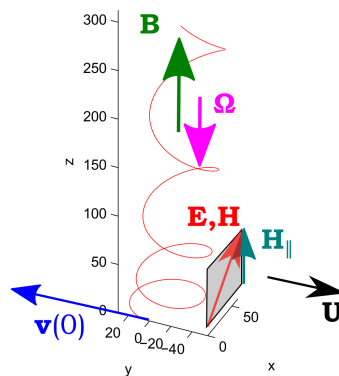
Αν προχωρήσουμε τη λύση στην κατασκευή της τροχιάς θα έχουμε

$$\mathbf{r}'(t) = \mathbf{r}'(0) - \mathbf{a}' + \mathbf{a}' \cos(\Omega t) + \mathbf{b}' \sin(\Omega t) + \mathbf{c}' t + \frac{1}{2} \mathbf{H}_{\parallel} t^2 \quad (8.49)$$

όπου \mathbf{r}' , η θέση του σωματιδίου σε ένα σύστημα Σ_U που κινείται σε σχέση με το αρχικό σύστημα παρατήρησης του σωματιδίου με την ταχύτητα \mathbf{U} που κατασκευάσαμε στην (8.45), αφού η $\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \mathbf{U}$ είναι η ταχύτητα του σωματιδίου που παρατηρεί το σύστημα Σ_U . Τα \mathbf{a}' , \mathbf{b}' , \mathbf{c}' δίνονται από τις ίδιες εκφράσεις με τα \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} παραπάνω αρκεί να αντικαταστήσει κανείς σε αυτές την $\mathbf{v}(0)$ με $\mathbf{v}'(0) = \mathbf{v}(0) - \mathbf{U}$. Στο τέλος μπορεί κανείς να επανέλθει στο αρχικό σύστημα με έναν απλό μετασχηματισμό αλλαγής συστήματος αναφοράς:

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}'(t) + \mathbf{U} t.$$

Αξίζει να παρατηρήσει κανείς ότι υπάρχει μια καινούργια χρονική εξάρτηση στις τελικές σχέσεις εξαιτίας του όρου $\frac{1}{2} \mathbf{H}_{\parallel} t^2$. Αυτό οφείλεται στην παράλληλη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου στο μαγνητικό πεδίο που φυσικά επιταχύνει το σωματίδιο, όπως θα ανέμενε κανείς, αφού σε αυτή την κατεύθυνση το μαγνητικό πεδίο δεν ασκεί καμία δύναμη.



Σχήμα 8.6: Η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου μέσα σε ομογενές μαγνητικό πεδίο και ηλεκτρικό πεδίο. Οι διευθύνσεις όλων των διανυσματικών πεδίων έχουν σχεδιασθεί. Η ελικοειδής τροχιά έχει τη φορά περιστροφής του Ω , το βήμα της ανήγει στην κατεύθυνση του H_{\parallel} , και παρασύρεται (στραβώνει) στην κατεύθυνση του $U \propto \Omega \times H$.

Παράλληλα η U κίνηση που συμβαίνει κάθετα στο επίπεδο μαγνητικού-ηλεκτρικού πεδίου (βλ. σχέση (8.45)) είναι μια νέα κίνηση εξαιτίας της εισαγωγής του ηλεκτρικού πεδίου. Το σωματίδιο εκτός από το να εκτελεί μια ελικοειδή κίνηση γύρω από το μαγνητικό πεδίο και να επιταχύνεται κατά μήκος του μαγνητικού εξαιτίας της παράλληλης συνιστώσας του ηλεκτρικού, παρασύρεται και με ομαλή ταχύτητα κάθετα στο ηλεκτρικό και το μαγνητικό πεδίο.

Ας σημειωθεί ότι στη Σχετικότητα όπου δεν είναι δυνατό να επιτευχθεί ταχύτητα μεγαλύτερη αυτής του φωτός δεν είναι δυνατό να βρούμε κατάλληλη ταχύτητα ώστε να σβήσουμε την κάθετη συνιστώσα του ηλεκτρικού πεδίου όταν το ηλεκτρικό πεδίο είναι αρκετά μεγάλο (ηλεκτρικού τύπου πεδίο). Μπορούμε όμως σε αυτή την περίπτωση να βρούμε κατάλληλη ταχύτητα για να σβήσουμε το μαγνητικό πεδίο το κάθετο στο ηλεκτρικό. Η κατάσταση είναι τότε σαν αυτή που περιγράψαμε παραπάνω (με μοναδική διαφορά ότι ο βασικός άξονας –το Ω – θα έχει την διεύθυνση του E και όχι του B). Αφού υπολογίσουμε την τροχιά στο σύστημα αυτό, μπορούμε να επιστρέψουμε στο αρχικό σύστημα.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 8

- Το εξωτερικό γινόμενο ορίζει επιφάνεια.
- Το τριπλό γινόμενο $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ ορίζει όγκο παραλληλεπιπέδου με ακμές $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}$.
- Η στροφορμή ορίζεται ως $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$ και ο ρυθμός αλλαγής της ισούται με τη ροπή $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$.
- Η εξίσωση $d\boldsymbol{\xi}/dt = \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\xi}$ περιγράφει ομαλή περιστροφή του $\boldsymbol{\xi}$ γύρω

από το ω με γωνιακή ταχύτητα $|\omega|$.

- Η κίνηση ενός φορτισμένου σωματιδίου σε ένα ομογενές μαγνητικό πεδίο είναι μια ορθή κυλινδρική έλικα που περιελίσσεται γύρω από της μαγνητικές δυναμικές γραμμές με σταθερό βήμα. Αν υπάρχει και ομογενές ηλεκτρικό πεδίο, εκτός της επιπλέον επιτάχυνσης του φορτίου κατά μήκος του ηλεκτρικού πεδίου, το σωματίδιο ολισθαίνει επίσης κάθετα στο επίπεδο του ηλεκτρικού και του μαγνητικού πεδίου με σταθερή ταχύτητα.

9

Καμπυλόγραμμες συντεταγμένες

9.1 Οι νόμοι του Νεύτωνα σε πολικές συντεταγμένες

Ένα σωματίδιο που κινείται στο επίπεδο η θέση του μπορεί να προσδιοριστεί σε κάθε χρονική στιγμή με τις καρτεσιανές συντεταγμένες αυτής (x, y) . Η τροχιά του σωματιδίου είναι η καμπύλη που διαγράφεται από το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου καθώς αυτό κινείται. Αν χρησιμοποιηθεί ο χρόνος για να παραμετρίσουμε την τροχιά, αυτή είναι $\mathbf{r}(t) = (x(t), y(t))$, και οι συντεταγμένες ικανοποιούν το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα:

$$m\ddot{x} = F_x \quad , \quad m\ddot{y} = F_y \quad . \quad (9.1)$$

Αν είχαμε επιλέξει ένα διαφορετικό σύστημα καρτεσιανών συντεταγμένων, τότε και πάλι οι συντεταγμένες του σωματιδίου θα ικανοποιούσαν το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα με κατάλληλα μετασχηματισμένες τις συνιστώσες της δύναμης. Δηλαδή ο νόμος του Νεύτωνα έχει την ίδια γνώριμη μορφή:

$$\begin{array}{l} \text{μάζα} \times \text{δεύτερη παράγωγος της εκάστοτε} \\ \text{συντεταγμένης της θέσης ως προς} \\ \text{το χρόνο} \end{array} = \begin{array}{l} \text{αντίστοιχη} \\ \text{συνιστώσα} \\ \text{της δύναμης} \end{array}$$

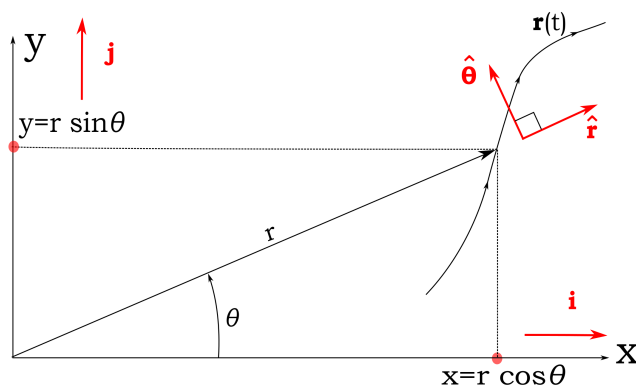
σε όλα τα καρτεσιανά συστήματα αναφοράς.

Θα προσπαθήσουμε τώρα να περιγράψουμε τη κίνηση σε πολικές συντεταγμένες.

Το ερώτημα που ανακύπτει είναι το εξής: τι μορφή παίρνει ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα σε αυτές τις συντεταγμένες; Θα έχει την ίδια μορφή με το νόμο γραμμένο σε καρτεσιανές;

Οι συντεταγμένες του σωματιδίου στο επίπεδο στις πολικές συντεταγμένες είναι (r, θ) . Το $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ είναι το μέτρο του διανύσματος \mathbf{r} ή η απόσταση του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων. Η $\theta = \tan^{-1}(y/x)$ είναι η γωνία που σχηματίζει το διάνυσμα της θέσης του σωματιδίου με τον άξονα x , ή ισοδυνάμως ορίζεται από την $\cos \theta = \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{i}$ (βλ. σχήμα 9.1). Από τις πολικές συντεταγμένες προκύπτουν οι καρτεσιανές από τις σχέσεις:

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$



Σχήμα 9.1: Η σχέση πολικών - καρτεσιανών συντεταγμένων.

Το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου τη χρονική στιγμή t είναι

$$\mathbf{r}(t) = r(t) \hat{\mathbf{r}}(t), \quad (9.2)$$

του οποίου και το μέτρο, $r(t)$, αλλά και το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα, $\hat{\mathbf{r}}(t)$, είναι συναρτήσεις του χρόνου. Οι καρτεσιανές συντεταγμένες του μοναδιαίου ακτινικού διανύσματος προσδιορίζονται αν συγκρίνουμε την (9.2) με την καρτεσιανή έκφραση για τη θέση:

$$\begin{aligned} \mathbf{r} &= x \mathbf{i} + y \mathbf{j} \\ &= r(\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}). \end{aligned}$$

Έχουμε λοιπόν ότι:

$$\hat{\mathbf{r}} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}. \quad (9.3)$$

Επειδή το $\hat{\mathbf{r}}$ είναι μοναδιαίο γνωρίζουμε ότι η παράγωγός του ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή είναι διάνυσμα κάθετο στο $\hat{\mathbf{r}}$ (βλ. Κεφ. 7.7). Παράλληλα, η παράγωγος του $\hat{\mathbf{r}}$ ως προς θ είναι:

$$\frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = -\sin\theta \mathbf{i} + \cos\theta \mathbf{j} \equiv \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (9.4)$$

όπου η τελευταία ισότητα είναι ο ορισμός του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ που έχει κατεύθυνση κάθετη¹ στο $\hat{\mathbf{r}}$ και φορά αυτή κατά την οποία αυξάνεται η γωνία θ . Πάλι, δηλαδή, το διάνυσμα που προκύπτει από την παραγωγή είναι κάθετο στο $\hat{\mathbf{r}}$ που στη συγκεκριμένη περίπτωση είναι ταυτόχρονα και μοναδιαίο διάνυσμα:

$$\left| \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} \right| = 1.$$

Επειδή και το $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ είναι μοναδιαίο διάνυσμα, η παράγωγός του ως προς οποιαδήποτε μεταβλητή είναι κάθετη στο $\hat{\boldsymbol{\theta}}$, και άρα συννευθιακή με το $\hat{\mathbf{r}}$, εφόσον είμαστε στις δύο διαστάσεις. Πράγματι, η παράγωγος του $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ ως προς θ ορίζει το μοναδιαίο διάνυσμα $-\hat{\mathbf{r}}$:

$$\frac{d\hat{\boldsymbol{\theta}}}{d\theta} = -\cos\theta \mathbf{i} - \sin\theta \mathbf{j} = -\hat{\mathbf{r}}. \quad (9.5)$$

Έτσι η χρονική παράγωγος του μοναδιαίου ακτινικού διανύσματος είναι:

$$\dot{\hat{\mathbf{r}}} \equiv \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{dt} = \dot{\theta} \frac{d\hat{\mathbf{r}}}{d\theta} = \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}.$$

Η $\dot{\theta}$ είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής του σωματιδίου, η οποία σε δύο διαστάσεις είναι ένα βαθμωτό μέγεθος.

Τώρα είμαστε σε θέση να υπολογίσουμε την ταχύτητα, την κινητική ενέργεια και τη στροφορμή σε πολικές συντεταγμένες. Υπολογίζουμε την ταχύτητα παραγωγίζοντας την (9.2) ως προς το χρόνο:

$$\begin{aligned} \mathbf{v} &= \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\hat{\mathbf{r}}} \\ &= \dot{r} \hat{\mathbf{r}} + r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \end{aligned} \quad (9.6)$$

Η ταχύτητα στις πολικές συντεταγμένες απαρτίζεται από την ακτινική συνιστώσα της ταχύτητας:

$$v_r = \dot{r}, \quad (9.7)$$

η οποία προσδιορίζει την ταχύτητα με την οποία μετατοπίζεται το σωματίδιο στην ακτινική διεύθυνση απομακρυνόμενο από την αρχή των αξόνων (θετική v_r) ή πλη-

¹ Δείξτε με απευθείας υπολογισμό του εσωτερικού γινομένου ότι $\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}} = 0$.

σιάζοντάς την (αρνητική v_r) και τη γωνιακή συνιστώσα της ταχύτητας²:

$$v_\theta = r\dot{\theta}, \quad (9.8)$$

η οποία προσδιορίζει την ταχύτητα με την οποία μετατοπίζεται το σωματίδιο γωνιακά διαγράφοντας κυκλικό τόξο ακτίνας r . Επειδή οι μετατοπίσεις σε μικρό χρονικό διάστημα, δt , είναι δr και $r\delta\theta$ οι αντίστοιχες ταχύτητες είναι οι (9.7) και (9.8) και επιπλέον, επειδή οι μετατοπίσεις αυτές είναι κάθετες μεταξύ τους, το τετράγωνο της ταχύτητας, σύμφωνα με το Πυθαγόρειο θεώρημα, είναι:

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2, \quad (9.9)$$

και η κινητική ενέργεια του σωματιδίου είναι:

$$K = \frac{m}{2} (\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2).$$

Η στροφορμή του σωματιδίου στις δύο διαστάσεις έχει μία μόνο συνιστώσα (βαθμωτό μέγεθος) η οποία σε καρτεσιανές συντεταγμένες είναι:

$$L = m(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

ενώ σε πολικές είναι:

$$L = mr^2\dot{\theta},$$

διότι:

$$\begin{aligned} L &= m(x\dot{y} - y\dot{x}) \\ &= mr \cos \theta (\dot{x} \sin \theta + r\dot{\theta} \cos \theta) - mr \sin \theta (\dot{x} \cos \theta - r\dot{\theta} \sin \theta) \\ &= mr^2\dot{\theta}. \end{aligned}$$

Στο ίδιο αποτέλεσμα καταλήγουμε και αν θεωρήσουμε ότι η κίνηση είναι μεν επίπεδη, αλλά υπάρχει και μια τρίτη διάσταση, οπότε η στροφορμή είναι το διάνυσμα:

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = m(r \hat{\mathbf{r}}) \times (r \dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}) = mr^2\dot{\theta} \mathbf{k}, \quad (9.10)$$

με μία μη μηδενική συνιστώσα στη διεύθυνση z . Το μοναδιαίο διάνυσμα στη τρίτη διεύθυνση είναι $\mathbf{k} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$, διότι:

$$\hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}} = (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) \times (-\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}) = (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}.$$

²Προσέξτε ότι η γωνιακή συνιστώσα της ταχύτητας που έχει διαστάσεις $[L T^{-1}]$ είναι διαφορετικό μέγεθος από τη γωνιακή ταχύτητα που έχει διαστάσεις $[T^{-1}]$.

Ας υπολογίσουμε τώρα την επιτάχυνση σε πολικές συντεταγμένες παραγωγίζοντας την (9.6) ως προς το χρόνο:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{v}} &= \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + \dot{r} \dot{\hat{\mathbf{r}}} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} + r\dot{\theta} \dot{\hat{\boldsymbol{\theta}}} \\ &= \ddot{r} \hat{\mathbf{r}} + \dot{r}\dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} + (\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}} - r\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} \\ &= (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \hat{\mathbf{r}} + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \hat{\boldsymbol{\theta}}.\end{aligned}\quad (9.11)$$

Σε πολικές συντεταγμένες η ακτινική επιτάχυνση έχει εντελώς διαφορετική μορφή από τη γωνιακή επιτάχυνση. Αν τέλος αναλύσουμε και τη δύναμη στην ακτινική και γωνιακή συνιστώσα της:

$$F_r = \mathbf{F} \cdot \hat{\mathbf{r}}, \quad F_\theta = \mathbf{F} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα παίρνει τη μορφή:

$$m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) = F_r, \quad (9.12)$$

$$m(r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) = F_\theta. \quad (9.13)$$

Μπορούμε να παρατηρήσουμε ότι: (α) Η μεν ακτινική επιτάχυνση έχει δύο συνιστώσες: ένα μέρος της οφείλεται στο ρυθμό μεταβολής της ακτινικής ταχύτητας (\ddot{r}) και ένα μέρος που οφείλεται στη στροφή του διανύσματος της ταχύτητας ($-r\dot{\theta}$). (β) Η δε γωνιακή επιτάχυνση έχει και αυτή δύο συνιστώσες: ένα μέρος της οφείλεται στο μεταβαλλόμενο ρυθμό περιστροφής του σωματιδίου ($r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta}$) και το υπόλοιπο μέρος ($\dot{r}\dot{\theta}$) οφείλεται στη στροφή της ακτινικής συνιστώσας της ταχύτητας. Προφανώς στην περίπτωση της κυκλικής τροχιάς θα απουσιάζουν το πρώτο μέρος της ακτινικής επιτάχυνσης και το μισό του πρώτου μέρους μαζί με το δεύτερο μέρος της γωνιακής επιτάχυνσης, αφού τότε δεν θα υπάρχει ακτινική ταχύτητα.

Η μορφή του νόμου του Νεύτωνα είναι πράγματι πολύ διαφορετική σε πολικές συντεταγμένες από τη καρτεσιανή διατύπωση (9.1). Αυτό οφείλεται στο ότι ο νόμος του Νεύτωνα έχει ως μεταβλητή την επιτάχυνση η οποία αλλάζει –όπως είδαμε– μορφή με το σύστημα συντεταγμένων.

9.2 Κυκλική κίνηση στο επίπεδο

Αν το σωματίδιο εκτελεί κυκλική κίνηση στο επίπεδο ακτίνας, l , τότε λαμβάνοντας ως αρχή των αξόνων το κέντρο της κυκλικής κίνησης, η κίνηση του σωματιδίου σε πολικές συντεταγμένες προσδιορίζεται πλήρως από τη γωνία θ . Το διάνυσμα θέσης του σωματιδίου είναι αμιγώς ακτινικό:

$$\mathbf{r} = l \hat{\mathbf{r}}.$$

Η ταχύτητα

$$\mathbf{v} = l\dot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

είναι εφαπτόμενη στην κυκλική τροχιά και η φορά της κίνησης προσδιορίζεται από το πρόσημο της $\dot{\theta}$. Τέλος η επιτάχυνση έχει και ακτινική αλλά και γωνιακή συνιστώσα

$$\mathbf{a} = -l\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} + l\ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (9.14)$$

Η ακτινική συνιστώσα είναι η γνώριμη από το σχολείο κεντρομόλος επιτάχυνση και κατευθύνεται προς το κέντρο της κίνησης, εξ ου και το όνομά της.

Αν η κυκλική κίνηση είναι ομαλή, η γωνιακή ταχύτητα, $\dot{\theta} = \omega$ είναι σταθερή, η ταχύτητα είναι

$$\mathbf{v} = l\omega \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (9.15)$$

και έχει σταθερό μέτρο

$$v = l\omega,$$

και ίσο με το γινόμενο $\omega \times$ (ακτίνα κύκλου τροχιάς). Έτσι αν σχεδιάσουμε τα διαδοχικά διανύσματα της ταχύτητας, διαλέγοντας κάποια κοινή αρχή για όλα, το άκρο του διανύσματος της ταχύτητας διαγράφει και αυτό κύκλο ακτίνας $l\omega$. Η επιτάχυνση σε αυτή την περίπτωση είναι απλώς η κεντρομόλος επιτάχυνση:

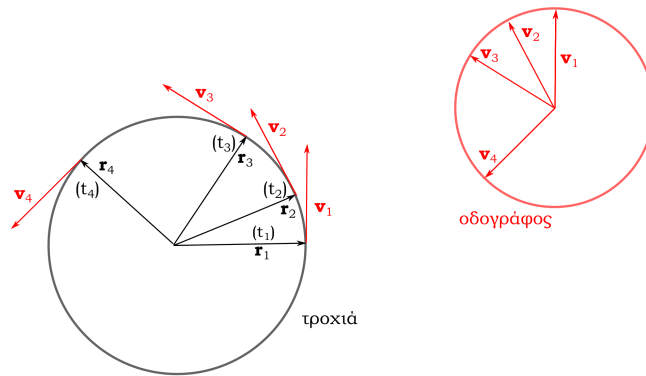
$$\mathbf{a} = -l\omega^2 \hat{\mathbf{r}} = -\frac{v^2}{l} \hat{\mathbf{r}}. \quad (9.16)$$

Για να μπορεί λοιπόν να πραγματοποιηθεί ομαλή κυκλική κίνηση ακτίνας l και ταχύτητας v πρέπει οι συνιστώσες της δύναμης να έχουν τις σταθερές τιμές:

$$F_r(l, \theta) = -m\frac{v^2}{l}, \quad F_\theta(l, \theta) = 0$$

πάνω στον κύκλο ακτίνας l .

Καθώς το άκρο του διανύσματος θέσης διαγράφει την τροχιά του σωματιδίου, το άκρο του διανύσματος της ταχύτητας διαγράφει μία καμπύλη η οποία ονομάζεται *οδογράφος*. Στην ομαλή κυκλική κίνηση η οδογράφος είναι ένας κύκλος ακτίνας $l\omega$. Ένα κινητό που διαγράφει την οδογράφο έχει γωνιακή ταχύτητα πάλι ω , οπότε η ταχύτητα του κινητού επί της οδογράφου, η οποία είναι κατ' ουσίαν η επιτάχυνση του σωματιδίου, θα ισούται με $\omega \times$ (ακτίνα κύκλου οδογράφου) = $l\omega^2$, όπως ακριβώς στην (9.16).



Σχήμα 9.2: Η οδογράφος της ομαλής κυκλικής κίνησης (αριστερά) είναι και αυτή κύκλος (δεξιά) που διαγράφεται με γωνιακή ταχύτητα ω , όπως και η ίδια η κυκλική κίνηση.

9.3 Οι εξισώσεις του Νεύτωνα στο επίπεδο με ενδογενείς συντεταγμένες

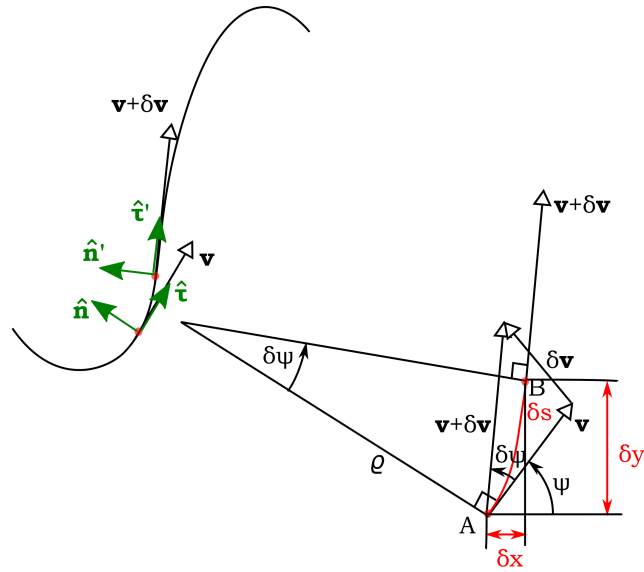
Μέχρι τώρα οι εξισώσεις του Νεύτωνα για την κίνηση ενός σωματιδίου γράφονταν όπως θα τις έγραφε ένας παρατηρητής διαφορετικός από το σωματίδιο. Ένας τέτοιος παρατηρητής επιλέγει ένα σύστημα αναφοράς, γράφει τους νόμους του Νεύτωνα και περιγράφει την κίνηση στις συντεταγμένες αυτού του συστήματος αναφοράς, οι οποίες αναφέρονται και ως *εξωγενείς* (extrinsic) συντεταγμένες του σωματιδίου.

Αν θέλουμε να περιγράψουμε την κίνηση του σωματιδίου σε *ενδογενείς* (intrinsic) συντεταγμένες οι οποίες συνδέονται αποκλειστικά με το κινούμενο σωματίδιο, χωρίς καμία αναφορά σε κάποιο σύστημα αναφοράς έξω από το σωματίδιο³, οφείλουμε να βασιστούμε στα ίδια τα στοιχεία της κίνησης του σωματιδίου: α) την εφαπτόμενη διεύθυνση της κίνησης του επί της τροχιάς (χαρακτηριστικό στοιχείο μιας καμπύλης), β) την διεύθυνση της καθέτου στην τροχιά (σε δύο διαστάσεις είναι μόνο μία αυτή η διεύθυνση, αλλιώς υπάρχει ένα ολόκληρο επίπεδο κάθετο) και γ) το μήκος της διαδρομής που ακολουθεί το σωματίδιο.

Ας υποθέσουμε ότι το σωματίδιο βρίσκεται τη χρονική στιγμή t στο σημείο A του επιπέδου στη θέση $\mathbf{r}(t)$ και τη χρονική στιγμή $t + \delta t$ στο σημείο B στη θέση $\mathbf{r}(t) + \delta \mathbf{r}$. Η ταχύτητα στο σημείο A είναι \mathbf{v} και έχει διεύθυνση κατά την εφαπτομένη της τροχιάς στο A και η ταχύτητα στο B είναι $\mathbf{v} + \delta \mathbf{v}$, και έχει διεύθυνση κατά την εφαπτομένη της τροχιάς στο B (βλ. σχήμα 9.2). Το διαφορικό μήκος τόξου από το A στο B , στο όριο $\delta t \rightarrow 0$, είναι:

$$ds = |d\mathbf{r}| = \sqrt{d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r}} = \sqrt{(dx)^2 + (dy)^2}, \quad (9.17)$$

³Είναι σαν να περιγράψουμε την κίνηση ενός αυτοκινήτου όχι παρακαλουθώντας από μακριά την πορεία του, αλλά κοιτάζοντας το δρόμο μέσα από μια τρύπα στον πάτο του αυτοκινήτου.



Σχήμα 9.3: Ανάλυση της καμπυλόγραμμης κίνησης σε ένα απειροστό τόξο. Στη λεπτομέρεια δεξιά διακρίνονται οι λεπτομέρειες του τόξου. Πάνω στην τροχιά διακρίνονται τα μοναδιαία διανύσματα των ενδογενών συντεταγμένων $\hat{\tau}$, \hat{n} (πράσινα βέλη) στο αρχικό σημείο της κίνησης και λίγο αργότερα στο B ($\hat{\tau}'$, \hat{n}').

και η σχέση αυτή είναι κατά προσέγγιση ακριβής για μικρά δs . Το μέτρο της ταχύτητας του σωματιδίου, όπως μετράται από έναν παρατηρητή που συνταξιδεύει με το σωματίδιο, είναι:

$$v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}. \quad (9.18)$$

Συνεπώς το διάνυσμα της ταχύτητας είναι:

$$\mathbf{v} = \frac{ds}{dt} \hat{\tau}, \quad (9.19)$$

όπου $\hat{\tau}$ το μοναδιαίο διάνυσμα με διεύθυνση την εφαπτομένη στην τροχιά και φορά την ίδια με αυτή της ταχύτητας. Αν η ταχύτητα γραφεί ως:

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} \frac{ds}{dt},$$

αναγνωρίζουμε ότι το εφαπτομενικό μοναδιαίο διάνυσμα που γράψαμε προηγουμένως δεν είναι άλλο από το:

$$\hat{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}. \quad (9.20)$$

Ότι το (9.20) είναι μοναδιαίο διάνυσμα φαίνεται εξάλλου και υπολογίζοντας κατευθείαν το μέτρο του (9.20) και χρησιμοποιώντας την (9.17).

Γράφοντας την ταχύτητα όπως στην (9.19) χρησιμοποιήσαμε μόνο στοιχεία της τροχιάς: τη μεταβλητή μήκος τόξου $s(t)$ επί της τροχιάς, που προσδιορίζει το σημείο

που βρισκόμαστε επί της τροχιάς και θα μπορούσε να αντικαταστήσει το χρόνο ως ανεξάρτητη μεταβλητή, και το εφαπτομενικό διάνυσμα της τροχιάς $\hat{\tau}$. Το διάνυσμα $\hat{\tau}$ μεταβάλλεται καθώς κινείται το σωματίδιο επί της τροχιάς και μπορούμε να το θεωρήσουμε ότι είναι συνάρτηση του μήκους τόξου s , $\hat{\tau}(s)$, όπως ακριβώς κάναμε με τη θέση του σωματιδίου, $\mathbf{r}(s)$, όταν ορίσαμε το $\hat{\tau}$ στην (9.20). Έστω λοιπόν ότι το εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{\tau}(s + \delta s)$ στο σημείο B σχηματίζει γωνία $\delta\psi$ με το εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{\tau}(s)$ στο σημείο A (βλ. σχήμα 9.2). Επειδή λοιπόν $|\hat{\tau}| = 1$ και η στροφή αυτού κατά τη διαδρομή ds είναι $d\psi$ θα είναι

$$d\hat{\tau} = \hat{\mathbf{n}} d\psi, \quad (9.21)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που είναι κάθετο στην τροχιά ($\hat{\tau} \perp \hat{\mathbf{n}}$ διότι $|\hat{\tau}| = 1$) και έχει φορά προς το κοίλο (εσωτερικό) πλευρό της καμπύλης (βλ. σχήμα 9.3).

Έτσι η επιτάχυνση του σωματιδίου μπορεί να γραφεί χρησιμοποιώντας μόνο ενδογενείς συντεταγμένες ως:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\hat{\tau}) = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\frac{d\hat{\tau}}{dt} = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\frac{d\psi}{dt}\hat{\mathbf{n}}. \quad (9.22)$$

Η γωνία στροφής $d\psi$ του $\hat{\tau}$ είναι επίσης η επίκεντρη γωνία που βλέπει στο τόξο ds (βλ. σχήμα 9.2). Επομένως:

$$d\psi = \frac{ds}{\rho}, \quad (9.23)$$

όπου ρ είναι η ακτίνα του εγγύτερου κύκλου⁴ στο συγκεκριμένο στοιχειώδες τόξο. Η ακτίνα αυτή ονομάζεται *ακτίνα καμπυλότητας* της τροχιάς στο εν λόγω σημείο. Έτσι,

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + v\frac{1}{\rho}\frac{ds}{dt}\hat{\mathbf{n}} = \frac{dv}{dt}\hat{\tau} + \frac{v^2}{\rho}\hat{\mathbf{n}}. \quad (9.24)$$

Τις συνιστώσες αυτές θα μπορούσαμε να τις λάβουμε και άμεσα από τη γεωμετρία του σχήματος 9.3. Η *επιτρόχια επιτάχυνση* (η εφαπτομενική στην κίνηση) είναι:

$$\mathbf{a} \cdot \hat{\tau} = \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}| \cos(\delta\psi) - |\mathbf{v}|}{\delta t} = \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}| - |\mathbf{v}|}{\delta t} = \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \frac{\delta|\mathbf{v}|}{\delta t} = \frac{d|v|}{dt} = \frac{dv}{dt} \quad (9.25)$$

⁴Κάθε ομαλή καμπύλη μπορεί να προσεγγιστεί τοπικά με ένα κυκλικό τόξο. Ο εγγύτερος κύκλος (osculating circle, που οφείλει την ονομασία του –circulus osculans=κύκλος που φιλάει–στον Leibniz) σε μια καμπύλη, σε κάποιο σημείο αυτής, είναι ο κύκλος που εφάπτεται με τον καλύτερο δυνατό τρόπο στην καμπύλη, δηλαδή αυτός που ελαχιστοποιεί τις αποστάσεις του από την καμπύλη σε μια περιοχή του εν λόγω σημείου, κατ' αναλογία με την ευθεία ελαχίστων τετραγώνων η οποία ελαχιστοποιεί τις αποστάσεις της σε σχέση με κάθε άλλη ευθεία από ένα σύνολο σημείων.

Η δε κεντρομόλος επιτάχυνση (η κάθετη στην κίνηση) είναι:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{a} \cdot \hat{\mathbf{n}} &= \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}| \sin(\delta\psi)}{\delta t} \\
 &= \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{v} + \delta\mathbf{v}| \delta\psi}{\delta t} \\
 &= \lim_{\delta\psi \rightarrow 0} \frac{|\mathbf{v}| \delta\psi}{\delta t} = v \frac{d\psi}{dt} \\
 &= v \frac{d\psi}{ds} \frac{ds}{dt} = \frac{v^2}{\rho}, \tag{9.26}
 \end{aligned}$$

εξαιτίας της (9.23).

Ως εφαρμογή των παραπάνω υποθέστε ότι ένα σωματίδιο είναι “ελεύθερο” να κινείται πάνω σε μια δοσμένη καμπύλη, όπως για παράδειγμα μια χάντρα περασμένη σε ένα άκαμπτο σύρμα. Στην πραγματικότητα η χάντρα δεν είναι πραγματικά ελεύθερη, αφού σε αυτή ασκούνται δυνάμεις από το σύρμα που την αναγκάζουν να ακολουθεί την καμπύλη του σύρματος. Η ελευθερία εδώ έγκειται στο ότι δεν υπάρχει καμία τριβή στην κίνηση της χάντρας, δηλαδή η δύναμη από το σύρμα στη χάντρα δεν έχει συνιστώσα κατά μήκος της εφαπτομένης του σύρματος:

$$\mathbf{F} \cdot \hat{\boldsymbol{\tau}} = 0. \tag{9.27}$$

Ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα για τη χάντρα παίρνει την ακόλουθη μορφή στις ενδογενείς συντεταγμένες:

$$\mathbf{F} = F\hat{\mathbf{n}} = m \left(\frac{dv}{dt} \hat{\boldsymbol{\tau}} + \frac{v^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}} \right). \tag{9.28}$$

Με άλλα λόγια το μέτρο της ταχύτητα της χάντρας επί του σύρματος είναι σταθερό:

$$\frac{dv}{dt} = 0, \tag{9.29}$$

και διατηρείται κατά τη κίνηση επί του σύρματος η κινητική ενέργεια της χάντρας:

$$K = \frac{mv^2}{2}.$$

Η αντίδραση του σύρματος στη χάντρα έχει την κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{n}}$ (προς τα κοίλα της καμπύλης) και μέτρο αντιστρόφως ανάλογο με την ακτίνα καμπυλότητας στο εκάστοτε σημείο. Επομένως αν εκτοξεύσουμε μια χάντρα με μεγάλη ταχύτητα σε ένα σύρμα, αυτό κινδυνεύει να σπάσει σε κάποιο σημείο που είναι πολύ έντονα κεκαμμένο.

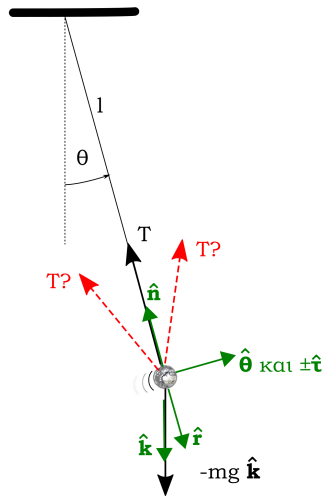
9.4 Το επίπεδο μαθηματικό εκκρεμές

Το μαθηματικό εκκρεμές αποτελείται από μία αβαρή ράβδο μήκους l , της οποίας το ένα άκρο είναι πακτωμένο και παραμένει ακλόνητο στην αρχή των αξόνων, ενώ το άλλο, στο οποίο είναι συγκεντρωμένη κάποια μάζα m , εκτελεί κυκλική κίνηση στο κατακόρυφο επίπεδο $x - z$ υπό την επίδραση ομογενούς πεδίου βαρύτητας που ασκεί δύναμη $\mathbf{F} = -mg \mathbf{k}$ στη μάζα της ράβδου (\mathbf{k} το μοναδιαίο διάνυσμα στη z διεύθυνση) (βλ. σχήμα 9.4). Θέλουμε να προσδιορίσουμε την κίνηση του εκκρεμούς χρησιμοποιώντας το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα. Η εφαρμογή του δεύτερου νόμου του Νεύτωνα στο πρόβλημα αυτό δεν είναι προφανής. Ο νόμος του Νεύτωνα έχει διατυπωθεί για τη κίνηση ενός απομονωμένου σωματιδίου, εδώ πρέπει να περιγράψουμε τη κίνηση ενός συνθέτου συστήματος του οποίου η μάζα είναι συγκεντρωμένη σε ένα σημείο και είναι αναγκασμένη από τη ράβδο να κινείται σε κύκλο που σημαίνει ότι η ράβδος ασκεί κάποια δύναμη σε αυτή τη μάζα, η οποία όμως δεν είναι γνωστή. Στη διατύπωση του δεύτερου νόμου οι δυνάμεις που ασκούνται σε ένα σωματίδιο είναι γνωστές. Στη μάζα του εκκρεμούς ασκείται η δύναμη της βαρύτητας αλλά ασκείται και μία άγνωστη δύναμη από τη ράβδο. Συνεπώς, σε επίπεδο πρώτων αρχών, το πρόβλημα του εκκρεμούς δεν μπορεί να λυθεί πριν προσδιορίσουμε το νόμο της δύναμης που ασκείται στη μάζα από τη ράβδο και αυτό απαιτεί να υπολογίσουμε όλες τις ηλεκτρομαγνητικές αλληλεπιδράσεις σε ατομικό επίπεδο στο εσωτερικό της ράβδου για να καταλήξουμε στη δύναμη αυτή. Αυτό τον υπολογισμό δεν τον έχει επιτύχει κανείς μέχρι σήμερα, παρά τις μεγάλες προόδους στη φυσική των πολλών σωμάτων. Παρ' όλα αυτά, η Νευτώνεια θεώρηση επιτυγχάνει να περιγράψει με ακρίβεια την κίνηση του εκκρεμούς, ακόμη κι αν δεν γνωρίζουμε τη δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ της μάζας και της ράβδου. Η ακρίβεια μάλιστα της περιγραφής είναι τέτοια, που για πολλούς αιώνες η μέτρηση του χρόνου είχε εναποτεθεί σε ρολόγια των οποίων ο μηχανισμός βασιζόταν στην κίνηση του εκκρεμούς όπως αυτή προκύπτει ύστερα από τις παραδοχές για τη δύναμη που θα παρουσιάσουμε στη συνέχεια.

Επειδή η μάζα στο άκρο του εκκρεμούς κινείται σε κυκλική τροχιά, η κίνηση του εκκρεμούς προσδιορίζεται πλήρως από τη γωνία θ και ο δεύτερος νόμος του Νεύτωνα, χρησιμοποιώντας την έκφραση για την επιτάχυνση της κυκλικής κίνησης σε πολικές συντεταγμένες (9.14), παίρνει την εξής μορφή:

$$-ml\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} + ml\ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = -mg \mathbf{k} + \mathbf{T}, \quad (9.30)$$

όπου \mathbf{T} είναι η άγνωστη δύναμη που ασκείται στο σωματίδιο από τη ράβδο. Αν τώρα υποθέσουμε ότι η δύναμη που ασκείται από τη ράβδο στο σώμα έχει ακτινική



Σχήμα 9.4: Το μαθηματικό εκκρεμές και οι δυνατές τάσεις της ράβδου. Εξ υποθέσεως, όσον αφορά στη συμπεριφορά του στερεού σώματος της ράβδου, και κατόπιν πειραματικών επαληθεύσεων θεωρούμε ότι η τάση δεν έχει τις τυχαίες κόκκινες κατευθύνσεις, αλλά την κατεύθυνση της ράβδου. Στο σχήμα διακρίνονται με πράσινα βέλη όλα τα μοναδιαία διανύσματα των εξωγενών συντεταγμένων $\hat{\mathbf{k}}, \hat{\mathbf{r}}, \hat{\boldsymbol{\theta}}$, αλλά και των ενδογενών $\hat{\mathbf{n}}, \hat{\boldsymbol{\tau}}$. (Προσέξτε ότι το εφαπτομενικό μοναδιαίο $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ δεν έχει πάντα την κατεύθυνση της $\hat{\boldsymbol{\theta}}$ αφού το $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ εξαρτάται από τη φορά της κίνησης. Έτσι στο ίδιο σημείο της τροχιάς το $\hat{\boldsymbol{\tau}}$ μπορεί να κοιτάζει προς τη μια ή την άλλη κατεύθυνση.)

διεύθυνση⁵:

$$\mathbf{T} = T\hat{\mathbf{r}}, \quad (9.31)$$

δηλαδή στη κατεύθυνση της ράβδου, τότε η άγνωστη δύναμη μπορεί να απαλειφθεί και η κίνηση του εκκρεμούς να προσδιορισθεί χωρίς να γνωρίζουμε το νόμο της άγνωστης αυτής δύναμης. Πράγματι η (9.30) με αυτή τη παραδοχή γίνεται:

$$-ml\dot{\theta}^2 \hat{\mathbf{r}} + ml\ddot{\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} = -mg \mathbf{k} + T\hat{\mathbf{r}}, \quad (9.32)$$

οπότε η γωνιακή συνιστώσα της (9.32) δίνει την εξίσωση κίνησης της θ από την οποία έχει απαλειφθεί η άγνωστη δύναμη:

$$ml\ddot{\theta} = -mg \mathbf{k} \cdot \hat{\boldsymbol{\theta}}, \quad (9.33)$$

και η οποία αρκεί για να προσδιορισθεί η κίνηση του εκκρεμούς, δεδομένων των

⁵Η υπόθεση αυτή, μολονότι μας φαίνεται αυτονόητη –ίσως λόγω της μακρόχρονης σχολικής ενασχόλησης με αυτό το σύστημα– δεν είναι καθόλου προφανής. Σκεφθείτε ότι αν χτυπήσουμε ένα αντικείμενο με μια ράβδο, η ράβδος ασκεί δυνάμεις κάθετες στην ίδια. Όταν το εκκρεμές εκτελεί ταλαντώσεις πιθανώς η ράβδος να αισθάνεται πλευρικές τάσεις προκειμένου να επιταχύνει ή να επιβραδύνει τη μάζα. Στο όριο βέβαια που η ράβδος τείνει να γίνει άμαξη δεν μπορεί παρά οι πλευρικές δυνάμεις να εξαφανίζονται προκειμένου η άμαξη ράβδος να κινείται με πεπερασμένη γωνιακή επιτάχυνση.

αρχικών συνθηκών $\theta(0) = \theta_0, \dot{\theta}(0) = \dot{\theta}_0$.

Αφού προσδιορισθεί η κίνηση από την (9.33), η αντίδραση T μπορεί να υπολογισθεί εκ των υστέρων, διότι για λόγους συνέπειας πρέπει να ικανοποιεί την

$$T = mg \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{r}} - ml\dot{\theta}^2, \quad (9.34)$$

η οποία προκύπτει από την ακτινική συνιστώσα της (9.33). Προσέξτε ότι με την (9.34) δεν έχουμε προσδιορίσει το νόμο της άγνωστης δύναμης, αλλά τη (μη σταθερή) τιμή της στη δεδομένη κατάσταση. Η (9.34) απλώς προσδιορίζει τη τιμή της δύναμης. Όπως έχουμε συζητήσει στο 1ο Κεφάλαιο, το γεγονός αυτό δεν ισοδυναμεί με γνώση του νόμου της δύναμης.

Επειδή

$$-\mathbf{k} = \cos \theta \hat{\mathbf{r}} - \sin \theta \hat{\boldsymbol{\theta}},$$

(βλ. σχήμα 9.4), η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς (9.33), αν διαιρέσουμε τα μέλη της με το ml και ορίζοντας τη συχνότητα,

$$\omega = \sqrt{\frac{g}{l}}, \quad (9.35)$$

παίρνει τη μορφή:

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \sin \theta = 0. \quad (9.36)$$

Πολλαπλασιάζοντας την εξίσωση (9.36) με $\dot{\theta}$ (όπως συνήθως κάνουμε όταν έχουμε κάποιο πρόβλημα που η δύναμη είναι συνάρτηση της θέσης) θα έχουμε ότι

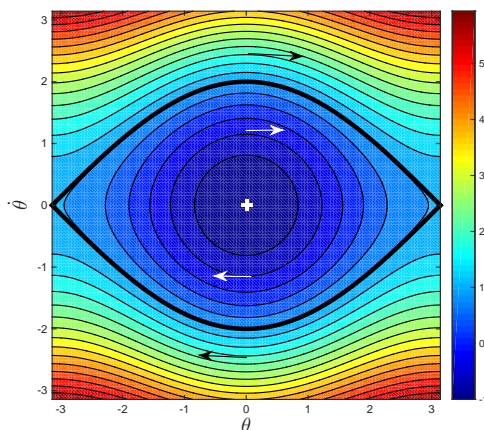
$$\begin{aligned} 0 &= \dot{\theta} \ddot{\theta} + \omega^2 \dot{\theta} \sin \theta \\ &= \frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega^2 \cos \theta \right) \end{aligned}$$

και συνεπώς η ενεργειακού τύπου ποσότητα

$$\frac{\dot{\theta}^2}{2} - \omega^2 \cos \theta = \epsilon, \quad (9.37)$$

διατηρείται κατά την κίνηση. Η ενέργεια του εκκρεμούς είναι $E = ml^2\epsilon$ και το ϵ είναι $\epsilon = \dot{\theta}_0^2/2 - \omega^2 \cos \theta_0$ για την κίνηση με αρχικές συνθήκες $\theta_0, \dot{\theta}_0$.

Η διατήρηση της (9.37) είναι ικανή να δώσει ποιοτική περιγραφή της κίνησης του εκκρεμούς. Το εκκρεμές θα διαγράφει καμπύλες σταθερού ϵ στο χώρο των φάσεων $(\theta, \dot{\theta})$. Οι καμπύλες αυτές σχεδιάζονται για διαφορετικές τιμές του ϵ στο σχήμα 9.5. Η γωνία λαμβάνει τιμές στο ανοικτο-κλειστό διάστημα $\theta = (-\pi, \pi]$ και επειδή οι γωνίες $\theta = -\pi$ και $\theta = \pi$ αναφέρονται στην ίδια γωνιακή θέση, ο χώρος των φάσεων



Σχήμα 9.5: Οι τροχιές σταθερού ϵ που διαγράφει το εκκρεμές στο χώρο των φάσεων για $\omega = 1$. Τα χρώματα αντιστοιχούν σε διαφορετικές τιμές του ϵ και τα βέλη υποδεικνύουν τη φορά της κίνησης. Η μαύρη γραμμή σημειώνει την διαχωρίζουσα τροχιά $\dot{\theta} = \pm 2 \cos(\theta/2)$ που ενώνει το ασταθές σημείο ισορροπίας $(\theta, \dot{\theta}) = (\pm\pi, 0)$ με τον εαυτό του (το πραγματικό σημείο που αντιστοιχεί στο $\theta = \pi$ είναι το ίδιο με αυτό που αντιστοιχεί στο $\theta = -\pi$). Ο σταυρός στο κέντρο σημειώνει το ευσταθές σημείο ισορροπίας $(\theta, \dot{\theta}) = (0, 0)$.

είναι επιφάνεια κυλίνδρου με γενέτειρα την ευθεία $\theta = \pi$ και το σχήμα 9.5 είναι το επίπεδο ανάπτυγμα του κυλινδρικού αυτού χώρου των φάσεων.

Κάθε καμπύλη σταθερού ϵ αντιστοιχεί σε μια ξεχωριστή τροχιά του εκκρεμούς στο χώρο των φάσεων. Υπάρχουν 4 ειδών τροχιές που περιγράφουν 5 διαφορετικές καταστάσεις κίνησης του εκκρεμούς ανάλογα με την ενεργειακή του στάθμη, ϵ .

- (α) $\epsilon = -\omega^2$. Η τροχιά αυτή αντιστοιχεί στην ελάχιστη ενεργειακή στάθμη του εκκρεμούς και είναι η σημειακή τροχιά του σημείου ισορροπίας $\theta = \dot{\theta} = 0$.
- (β) $-\omega^2 < \epsilon < \omega^2$. Οι τροχιές είναι κλειστές καμπύλες. Η κίνηση είναι ταλαντωτική μεταξύ των μεγίστων αποκλίσεων $\Theta_{\max/\min} = \pm \cos^{-1}(\epsilon/\omega^2)$ από τη θέση ευσταθούς ισορροπίας. Η ταλάντωση είναι και περιοδική (όπως συμβαίνει με όλες τις μονοδιάστατες ταλαντώσεις) με την περίοδο, T , να τείνει στο άπειρο καθώς το $\epsilon \rightarrow \omega^2$ και κατά τη μέγιστη απόκλιση το εκκρεμές να προσεγγίζει την κατακόρυφο $\Theta_{\min/\max} \rightarrow \pm\pi$.
- (γ) $\epsilon = \omega^2$. Εδώ έχουμε τρεις μη επικοινωνούσες τροχιές. Η μια τροχιά ξεκινά από το $-\pi$ και κινούμενη αντιωρολογιακά καταλήγει, μετά από άπειρο χρόνο, στο $+\pi$ (πάνω καμπύλη της διαχωρίζουσας στο χώρο των φάσεων). Η δεύτερη εκτελεί την ανάποδη κίνηση (κάτω καμπύλη στο χώρο των φάσεων). Το σημείο $\pm\pi$, όντας ασταθές δεν είναι προσεγγίσιμο από τις καμπύλες αυτές, οι οποίες όμως φτάνουν οσοδήποτε κοντά στα ακραία αυτά σημεία. Στην ενέργεια αυτή ανήκει και η τρίτη σημειακή τροχιά: η $(\theta = \pm\pi, \dot{\theta} = 0)$ (είναι μία διότι τα σημεία $\theta = \pm\pi$ ταυτίζονται) η οποία όμως είναι πρακτικώς μη υλοποιήσιμη

καθότι η παραμικρή λανθασμένη τοποθέτηση σε αυτές τις ιδιαίτερες αρχικές συνθήκες θα έχει ως αποτέλεσμα τη γρήγορη απομάκρυνση του εκκρεμούς από αυτή την ασταθή ισορροπία.

- (δ) $\epsilon > \omega^2$. Η ενέργεια είναι τόσο μεγάλη, ώστε το εκκρεμές περιστρέφεται αενάως, είτε ωρολογιακά (κάτω από τον κάτω κλάδο της διαχωρίζουσας), είτε αντιωρολογιακά (πάνω από τον πάνω κλάδο της διαχωρίζουσας). Στην περίπτωση αυτή η $\dot{\theta}$ διατηρεί σταθερό πρόσημο και δεν μηδενίζεται ποτέ.

Η εξίσωση κίνησης του εκκρεμούς (9.36) είναι μια μη γραμμική εξίσωση και συνεπώς δεν μπορούμε να κατασκευάσουμε τη γενική λύση μέσω υπέρθεσης δύο λύσεων του εκκρεμούς με διαφορετικές αρχικές συνθήκες, όπως συμβαίνει στους αρμονικούς ταλαντωτές. Όμως κοντά σε ένα ευσταθές σημείο ισορροπίας οι εξισώσεις γίνονται κατά προσέγγιση γραμμικές και μπορούμε τότε να αξιοποιήσουμε όλα τα ευεργετήματα της γραμμικής ανάλυσης.

Όπως είπαμε παραπάνω, το εκκρεμές έχει δύο σημεία ισορροπίας στις θέσεις και ταχύτητες

$$\Theta_1 = (\theta, \dot{\theta}) = (0, 0) \text{ και } \Theta_2 = (\pi, 0) ,$$

διότι οι σημειακές τροχιές:

$$\theta(t) = 0 \text{ , } \theta(t) = \pi \text{ ,}$$

είναι λύσεις του εκκρεμούς με αρχικές συνθήκες Θ_1 και Θ_2 αντίστοιχα. Μάλιστα επειδή οι λύσεις των νευτώνειων προβλημάτων είναι μοναδικές, καμμία άλλη κίνηση δεν μπορεί να καταλήξει σε αυτές σε πεπερασμένο χρόνο.

Το Θ_1 είναι ευσταθές σημείο ισορροπίας και πλησίον του σημείου $\Theta_1 = (0, 0)$ στο χώρο φάσεων η κίνηση του εκκρεμούς είναι κατά προσέγγιση γραμμική. Πράγματι διαταραχθεί το Θ_1 κατά $\theta_0 \ll 1$, $\dot{\theta}_0/\omega \ll 1$, και χρησιμοποιώντας την προσέγγιση για μικρές γωνίες

$$\sin \theta \approx \theta \text{ ,}$$

η εξίσωση κίνησης (9.36) είναι κατά προσέγγιση η γραμμική εξίσωση του αρμονικού ταλαντωτή

$$\ddot{\theta} + \omega^2 \theta = 0 .$$

Τότε η θ εκτελεί αρμονική ταλάντωση και η κίνηση είναι ευσταθής, διότι η θ φράσσεται (αποδειξτε το) :

$$\theta^2 \leq \theta_0^2 + \frac{\dot{\theta}_0^2}{\omega^2} .$$

Συνεπώς το εκκρεμές παραμένει στην περιοχή του σημείου ισορροπίας και η κίνηση παραμένει γραμμική, αφού $\theta_0 \ll 1$ και $\dot{\theta}_0/\omega \ll 1$.

Το σημείο $\Theta_2 = (\pi, 0)$ είναι ασταθές σημείο ισορροπίας. Θέτοντας $\theta = \pi + \theta'$

$$\sin(\pi + \theta') \approx -\theta' ,$$

για $\theta' \ll 1$. Η εξίσωση κίνησης παίρνει τότε τη μορφή

$$\ddot{\theta}' - \omega^2 \theta' = 0 ,$$

με λύση την

$$\theta' = \theta_0 \cosh(\omega t) + \frac{\dot{\theta}_0}{\omega} \sinh(\omega t)$$

όπου

$$\cosh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} + e^{-\omega t}}{2} , \quad \sinh(\omega t) = \frac{e^{\omega t} - e^{-\omega t}}{2} .$$

Αν οι αρχικές συνθήκες δεν συνδέονται με την ιδιαίτερη σχέση $\theta_0 = -\dot{\theta}_0/\omega$, το εκθετικό μέρος της λύσης $e^{\omega t}$, ακόμη και αν είναι πολύ μικρό, θα κάνει πολύ γρήγορα εμφανή την παρουσία του και θα απομακρύνει το εκκρεμές από το σημείο ισορροπίας του, καταστρέφοντας την προσεγγιστική σχέση για το ημίτονο και επομένως τη διαφορική εξίσωση της κίνησης (η εξίσωση θα πάψει να είναι γραμμική λόγω της ύπαρξης του ημιτόνου και του γεγονότος ότι η γωνία θ' θα πάψει να είναι πολύ μικρή). Η λύση που βρήκαμε είναι περιορισμένου χρονικού ορίζοντα. Στην πράξη δεν είναι δυνατό να πετύχει κανείς να στήσει το εκκρεμές στην ανισόρροπη θέση του ούτε για λίγο (βλ. Άσκηση 1).

Άσκηση 1

Δείξτε ότι αν επιχειρήσει κανείς να στήσει όρθιο ένα μολύβι μήκους 10 εκατοστών και μάζας 5 γραμμαρίων με τη μύτη προς τα κάτω, ακόμη και με τη βοήθεια του πιο προηγμένου τεχνολογικά πολιτισμού που θα του δίνει τη δυνατότητα να επιτύχει ακρίβεια στα όρια της ακρίβειας που θέτει η ίδια η κβαντομηχανική (η μηχανική που διέπει τον πραγματικό κόσμο) μέσω της αρχής της αβεβαιότητας ($\Delta\theta \Delta L_\theta \geq \hbar$ όπου $\Delta\theta$, και ΔL_θ η αβεβαιότητα στον προσδιορισμό της αρχικής θέσης και της αρχικής στροφορμής και $\hbar = 1.05 \times 10^{-34} \text{J} \cdot \text{s}$ η σταθερά του Planck), το μολύβι δεν θα παραμείνει στη θέση αυτή, ή κοντά σε αυτή, παραπάνω από μερικά μόνο δευτερόλεπτα.

Θα υπολογίσουμε τώρα την περίοδο της κίνησης συναρτήσει του μέγιστου πλάτους Θ_{\max} της ταλάντωσης του εκκρεμούς όταν $|\epsilon| < \omega^2$ (όχι μόνο για μικρό πλάτος αιώρησης). Για μικρές ταλαντώσεις περί το ευσταθές σημείο ισορροπίας $\Theta_{\max} \ll 1$ η ταλάντωση είναι αρμονική και η περίοδος είναι

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} , \quad (9.38)$$

ανεξαρτήτως του πλάτους της ταλάντωσης· η ταλάντωση, δηλαδή, είναι ισόχρονη.

Αυτή η ιδιότητα οδήγησε στη χρήση του εκκρεμούς για τη μέτρηση του χρόνου για αρκετούς αιώνες. Δυστυχώς όμως η περίοδος ταλάντωσης δεν παραμένει ισόχρονη όσο μεγαλώνει το πλάτος της ταλάντωσης και η κίνηση του εκκρεμούς επηρεάζεται από τους μη γραμμικούς όρους. Για να αποφευχθεί η ανακρίβεια μέτρησης του χρόνου που πηγάζει από τη μη ισοχρονικότητα της περιόδου του εκκρεμούς έχουν επινοηθεί και κατασκευαστεί καταπληκτικοί διορθωτικοί μηχανισμοί.

Η δύναμη επαναφοράς του εκκρεμούς έχει μέτρο που είναι πάντοτε μικρότερο από τη δύναμη επαναφοράς της αντίστοιχης αρμονικής ταλάντωσης, διότι είναι⁶ $|\sin \theta| < |\theta|$, συνεπώς αναμένουμε η περίοδος να μεγαλώνει με το πλάτος της αιώρησης του εκκρεμούς και το ρολοί-εκκρεμές να χάνει χρόνο. Ας υπολογίσουμε ακριβώς την εξάρτηση της περιόδου του εκκρεμούς από το πλάτος της ταλάντωσης. Από την (9.37) έχουμε ότι

$$\dot{\theta} = \pm \omega \sqrt{2(\cos \theta - \cos \Theta_{\max})}, \quad (9.39)$$

δεδομένου ότι $\epsilon = -\omega^2 \cos \Theta_{\max}$, και

$$\frac{dt}{d\theta} = \pm \frac{1}{\omega} \frac{1}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \Theta_{\max})}}. \quad (9.40)$$

Το θετικό πρόσημο στην (9.40) αναφέρεται στην κίνηση από το $-\Theta_{\max} \rightarrow \Theta_{\max}$ που διαρκεί τη μισή περίοδο, $T/2$. Τα δύο πρόσημα τοποθετούνται έτσι ώστε ο χρόνος να αυξάνεται πάντοτε, δηλαδή να είναι πάντα $dt > 0$, οπότε όταν $d\theta > 0$ η τετραγωνική ρίζα έχει το θετικό πρόσημο, και όταν $d\theta < 0$ το αρνητικό. Ολοκληρώνοντας την (9.40) υπολογίζουμε ότι η περίοδος είναι:

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{\omega} \int_{-\Theta_{\max}}^{\Theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{2(\cos \theta - \cos \Theta_{\max})}}. \quad (9.41)$$

Για να υπολογίσουμε την εξάρτηση της περιόδου από το πλάτος είναι χρήσιμο να μετατρέψουμε το ολοκλήρωμα έτσι ώστε η εξάρτηση του ολοκληρώματος από το Θ_{\max} να ενσωματωθεί στην ολοκληρωτέα ποσότητα. Ο κλασικός τρόπος χειρισμού αυτού το υπολογισμού ακολουθεί. Τα δύο συνημίτονα της υπόρριξης ποσότητας του ολοκληρώματος αντικαθίστανται χρησιμοποιώντας την τριγωνομετρική σχέση $\cos \alpha = 1 - 2 \sin^2(\alpha/2)$ και η (9.41) μετασχηματίζεται στην:

$$\omega T = \int_{-\Theta_{\max}}^{\Theta_{\max}} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2(\Theta_{\max}/2) - \sin^2(\theta/2)}}. \quad (9.42)$$

⁶Για να αποδείξετε αυτή την ανισότητα, ορίστε τη συνάρτηση $f(\theta) = \theta - \sin \theta$, η οποία λαμβάνει την τιμή $f(0) = 0$ και είναι αύξουσα διότι $f'(\theta) = 1 - \cos \theta \geq 0$, και η παράγωγος μηδενίζεται μόνο σε απομονωμένα σημεία, συνεπώς για όλα τα $\theta > 0$ είναι $f(\theta) > 0$.

Στη συνέχεια ορίζοντας μια νέα μεταβλητή ψ έτσι ώστε

$$\sin(\theta/2) = \sin(\Theta_{\max}/2) \sin \psi ,$$

και αλλάζοντας μεταβλητή ολοκλήρωσης από θ σε ψ , η (9.42) μετασχηματίζεται στην:

$$\begin{aligned} \omega T &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{2 \cos \psi \, d\psi}{\cos(\theta/2) \sqrt{1 - \sin^2(\Theta_{\max}/2) \sin^2 \psi}} \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - a^2 \sin^2 \psi}} , \end{aligned} \quad (9.43)$$

όπου θέσαμε:

$$a = \sin(\Theta_{\max}/2) .$$

Προσέξτε ότι με την αλλαγή μεταβλητής, όχι μόνο καταφέραμε να απαλλάξουμε τα όρια της ολοκλήρωσης από την εξάρτησή τους από την Θ_{\max} , αλλά να απαλλάξουμε και την ολοκληρωτέα συνάρτηση από την απροσδιοριστία στα όρια της ολοκλήρωσης. Η νέα ολοκληρωτέα συνάρτηση δεν παρουσιάζει καμία ανωμαλία στα άκρα της ολοκλήρωσης.

Η περίοδος προκύπτει από το ολοκλήρωμα (9.43), το οποίο όμως δεν μπορεί να υπολογισθεί σε κλειστή μορφή, να εκφρασθεί δηλαδή με τις συνηθισμένες συναρτήσεις: τριγωνομετρικές, εκθετικές και πολυωνυμικές. Το ολοκλήρωμα αυτό συναντάται όμως συχνά σε προβλήματα φυσικής και ονομάζεται πλήρες ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους⁷ και η τιμή του μπορεί να βρεθεί σε βιβλία με αριθμητικούς πίνακες μαθηματικών συναρτήσεων, ή να υπολογισθεί αριθμητικά, ή να προσεγγισθεί αναπτύσσοντας την ολοκληρωτέα ποσότητα σε σειρά Taylor για μικρά Θ_{\max} άρα και για μικρά a .

Οι πρώτοι όροι του αναπτύγματος Taylor της ολοκληρωτέας συνάρτησης ως προς a είναι:

$$(1 - a^2 \sin^2 \psi)^{-1/2} = 1 + \frac{a^2}{2} \sin^2 \psi + \frac{3a^4}{8} \sin^4 \psi + \frac{5a^6}{16} \sin^6 \psi + O(a^8) , \quad (9.44)$$

⁷Το ελλειπτικό ολοκλήρωμα πρώτου είδους ορίζεται ως

$$K(k) = \int_0^{\pi/2} dx / \sqrt{1 - k \sin^2 x} .$$

Τα ελλειπτικά ολοκλήρωματα προέκυψαν αρχικά από την προσπάθεια υπολογισμού του μήκους τόξου μιας έλλειψης.

και δεδομένου ότι είναι

$$\int_0^{\pi/2} \sin^2 x \, dx = \frac{\pi}{4}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^4 x \, dx = \frac{3\pi}{16}, \quad \int_0^{\pi/2} \sin^6 x \, dx = \frac{5\pi}{32},$$

η (9.43) προσδιορίζει την περίοδο του εκκρεμούς συναρτήσει του πλάτους της αιώρησης ως το ανάπτυγμα:

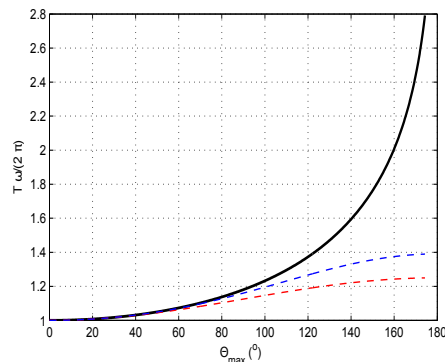
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \left(1 + \frac{1^2}{2^2} \sin^2(\Theta_{\max}/2) + \frac{1^2 \cdot 3^2}{2^2 \cdot 4^2} \sin^4(\Theta_{\max}/2) + \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{2^2 \cdot 4^2 \cdot 6^2} \sin^6(\Theta_{\max}/2) + \dots \right). \quad (9.45)$$

Συνεπώς, όπως επιχειρηματολογήσαμε και παραπάνω, η περίοδος αυξάνει με το πλάτος. Σε πρώτη προσέγγιση ως προς το πλάτος η περίοδος του εκκρεμούς είναι

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}, \quad (9.46)$$

ενώ σε δεύτερη:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}} \left(1 + \frac{1}{4} \sin^2(\Theta_{\max}/2) \right). \quad (9.47)$$



Σχήμα 9.6: Η περίοδος του εκκρεμούς συναρτήσει της γωνίας μέγιστης αιώρησης Θ_{\max} . Με διάσχιτες γραμμές σημειώνονται οι τιμές από τις προσεγγίσεις της περιόδου όταν κρατηθούν οι πρώτοι δύο όροι στο ανάπτυγμα Taylor (9.45) (κόκκινη γραμμή) και όταν κρατηθούν τρεις όροι στο ανάπτυγμα (μπλε γραμμή).

Το πλάτος της αιώρησης οδηγεί σε διόρθωση μόλις $1/1000$ στην περίοδο της αντίστοιχης αρμονικής ταλάντωσης (9.46) όταν

$$\sin^2(\Theta_{\max}/2) = 0.004, \quad \text{ή} \quad \sin(\Theta_{\max}/2) = 0.0632, \quad \text{ή} \quad \Theta_{\max} \approx 7^\circ 12',$$

ενώ ακόμη και αν $\Theta_{\max} = 90^\circ$, η διόρθωση της περιόδου είναι περίπου 12.5%. Η γραφική παράσταση της περιόδου του εκκρεμούς συναρτήσει του μέγιστου πλάτους Θ_{\max} παρατίθεται στο Σχ. 9.6 μαζί με της δεύτερης και τέταρτης τάξης προσεγγίσεις, οι οποίες δίνουν ικανοποιητικές προσεγγίσεις της περιόδου για $\Theta_{\max} < 60^\circ$.

Υπάρχει μία ειδική περίπτωση στην οποία η εξέλιξη του εκκρεμούς μπορεί να προσδιορισθεί σε αναλυτική μορφή. Αυτό συμβαίνει όταν $\epsilon = \omega^2$ ή $\Theta_{\max} = \pi$. Η τροχιά τότε αντιστοιχεί στη διαχωρίζουσα του σχήματος Σχ. 9.5. Σύμφωνα με την (9.39) η διαχωρίζουσα δίνεται από την εξίσωση:

$$\dot{\theta} = \pm 2\omega \cos(\theta/2), \quad (9.48)$$

η οποία μπορεί να ολοκληρωθεί σε κλειστή μορφή. Αν το εκκρεμές αρχικά ήταν στο $\theta_0 = 0$, ο χρόνος για να διαγράψει γωνία θ με αντιωρολογιακή φορά είναι:

$$\omega t = \log \left[\tan \left(\frac{\pi + \theta}{4} \right) \right], \quad (9.49)$$

ο οποίος, όπως αναμενόταν, απειρίζεται καθώς $\theta \rightarrow \Theta_{\max} = \pi$.

9.5 * Εξαναγκασμένη ταλάντωση του εκκρεμούς στο επίπεδο

Έχουμε ήδη εξετάσει την απόκριση ενός αρμονικού ταλαντωτή με απόσβεση σε αρμονική διέγερση και το φαινόμενο του συντονισμού που προκύπτει. Στην περίπτωση του εκκρεμούς, ο αντίστοιχος ταλαντωτής, με μεταβλητή τη γωνία θ , εφόσον αυτή είναι μικρή, ικανοποιεί τη γραμμική εξίσωση:

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2\theta = A \cos(\omega_f t), \quad (9.50)$$

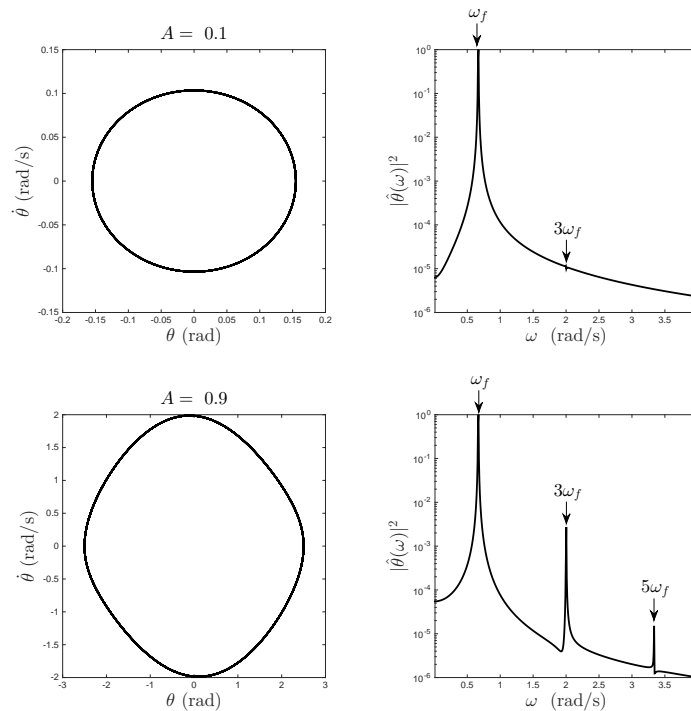
και η απόκριση του ταλαντωτή για ασθενή απόσβεση, με $\omega > \gamma$,

$$\theta = \frac{A}{\sqrt{(\omega_0^2 - \omega_f^2)^2 + 4\gamma^2\omega_f^2}} \cos(\omega_f t + \phi) + ae^{-\gamma t} \cos(\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2} t + \phi_0), \quad (9.51)$$

αποτελείται από μια εξαναγκασμένη ταλάντωση (ο πρώτος όρος της (9.51)) στην ίδια συχνότητα με αυτήν του εξωτερικού διεγέρτη, ω_f , αλλά με υστέρηση στην απόκριση:

$$\phi_0 = -\tan^{-1} \left(\frac{2\gamma\omega_f}{\omega_0^2 - \omega_f^2} \right), \quad (9.52)$$

και μία εκθετικά φθίνουσα ταλάντωση με συχνότητα $\sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$ και πλάτος a και φάση ϕ_0 που σχετίζονται με τις αρχικές συνθήκες. Σε μεγάλους χρόνους, βέβαια, απομένει μόνο η εξαναγκασμένη αρμονική ταλάντωση στην συχνότητα ω_f του διε-



Σχήμα 9.7: Τα δύο ανωτέρω γραφήματα αφορούν στην κίνηση του εξαναγκασμένου εκκρεμούς για διέγερση $A = 0.1$. Αριστερά: η περιοδική τροχιά στο χώρο των φάσεων. Η τροχιά αυτή είναι σχεδόν ίδια με αυτήν της γραμμικής απόκρισης. Δεξιά: η φασματική ισχύς της κίνησης εμφανίζει κορυφή στην συχνότητα του διεγέρτη, ω_f , ενώ διακρίνεται αμυδρά και η τρίτη αρμονική, $3\omega_f$. Κάτω γραφήματα: $A = 0.9$. Η κίνηση είναι μεν περιοδική αλλά εμφανίζει σημαντική απόκλιση από τη γραμμική κίνηση με φασματική ισχύ σε περιττά πολλαπλάσια της συχνότητας του διεγέρτη, ω_f . Παράμετροι: $\omega_f = 0.667$, $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.25$.

γέρτη και αν αναλύαμε την κίνηση σε ένα παλμογράφο θα βλέπαμε ότι όλη η ενέργεια⁸ του ταλαντωτή θα ήταν συγκεντρωμένη στη συχνότητα ω_f . Αυτό είναι χαρακτηριστικό της γραμμικότητας του συστήματος: επειδή η εξίσωση κίνησης έχει μόνο γραμμικούς όρους δεν μπορούν να παραχθούν άλλες συχνότητες από αυτές που επιβάλλονται (εδώ είχαμε μόνο την ω_f) ή από αυτές που το σύστημα έχει από τη φύση του. Αν δεν υπήρχε απόσβεση θα υπήρχε ισχυρή φασματική ισχύς και στη φυσική συχνότητα του ταλαντωτή, ω_0 . Αν η εξίσωση κίνησης έχει και μη γραμμικούς όρους, π.χ. όρους της μορφής x^3 , τότε αν η κίνηση ήταν αρχικά $\cos(\omega_f t)$, συγκεντρωμένη μόνο στη συχνότητα ω_f , θα παράγονταν αυτομάτως και όροι $\cos^3(\omega_f t)$ και η κίνηση θα εμφάνιζε και μια άλλη συχνότητα, την τρίτη αρμονική $3\omega_f$, διότι

$$\cos^3(\omega_f t) = \frac{1}{4} \cos(3\omega_f t) + \frac{3}{4} \cos(\omega_f t),$$

⁸Η ανάλυση του ενεργειακού φάσματος του ταλαντωτή, δηλαδή το ενεργειακό περιεχόμενο ανά συχνότητα ονομάζεται *φασματική ισχύς* του ταλαντωτή.

και, αν υπήρχαν και ανώτερης τάξης όροι, θα εμφανίζονταν και άλλοι συνδυασμοί συχνοτήτων από αυτούς τους μη γραμμικούς όρους. Η μη γραμμικότητα δηλαδή θα εμφανίζει απόκριση και σε άλλες συχνότητες εκτός από αυτές του διεγέρτη. Το παραπάνω επιχειρήμα μας οδηγεί στο να αναμένουμε φασματική ισχύ της κίνησης συγκεντρωμένη μόνο σε ένα αριθμήσιμο πλήθος συχνοτήτων της μορφής ακεραίων πολλαπλασίων της ω_f . Όταν η κίνηση προκύπτει από υπέρθεση αριθμήσιμου πλήθους ταλαντώσεων διαφορετικών συχνοτήτων η κίνηση ονομάζεται *οιωνεί-περιοδική* (quasi-periodic). Συμβαίνει όμως υπό προϋποθέσεις να έχουμε ισχύ όχι μόνο σε ακέραια πολλαπλάσια της συχνότητας του διεγέρτη αλλά και σε ρητά πολλαπλάσια της ω_f , ενώ άλλες φορές το σύστημα μεταβαίνει σε κατάσταση στην οποία έχουν αναπτυχθεί με συνεχή τρόπο όλες οι συχνότητες και το φάσμα της κίνησης παρουσιάζει φασματική ισχύ σε πυκνό και μη αριθμήσιμο πλήθος συχνοτήτων. Σσε αυτή την περίπτωση το σύστημα λέγεται *εργοδικό* ή *χαοτικό*⁹. Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε το φάσμα της απόκρισης ενός εκκρεμούς με απόσβεση σε αρμονική διέγερση, και με παραδείγματα θα δείξουμε ότι υπάρχουν ενδείξεις ότι μπορεί αυτό να μεταβεί υπό συνθήκες σε χαοτική συμπεριφορά.

Το εκκρεμές διέπεται από μια μη γραμμική εξίσωση, δεδομένου ότι η δύναμη επαναφοράς είναι η $-\sin \theta$, και η εξίσωση κίνησης στη περίπτωση αρμονικής διέγερσης είναι αντίστοιχα με την (9.50):

$$\ddot{\theta} + 2\gamma\dot{\theta} + \omega_0^2 \sin \theta = A \cos(\omega_f t), \quad (9.53)$$

Θα περιγράψουμε την κίνηση του εκκρεμούς συναρτήσει του πλάτους της διέγερσης A .

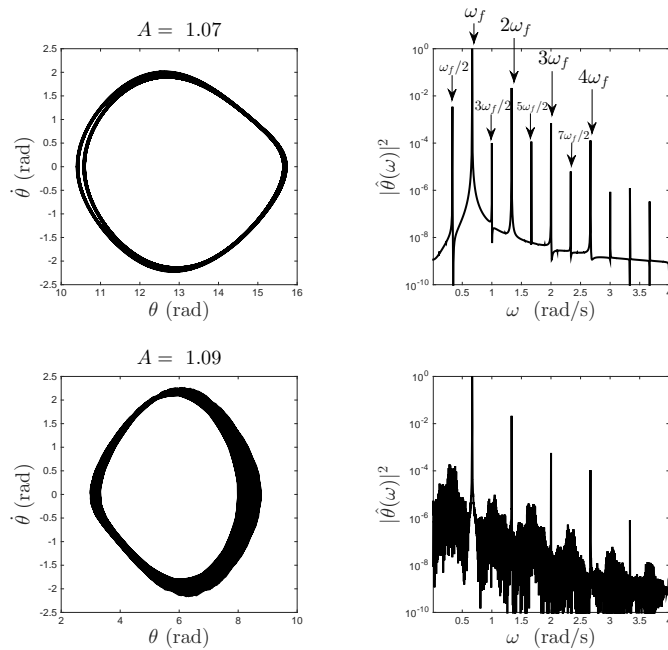
Αν το πλάτος της διέγερσης είναι $A = 0$, λόγω της τριβής, το εκκρεμές συν τω χρόνω θα καταλήξει στη περιοχή του ευσταθούς σημείου ισορροπίας $\theta = 0$ (εκτός αν ήταν ακριβώς στη μέτρου μηδέν κατάσταση $\theta = \pi$, $\dot{\theta} = 0$ που αντιστοιχεί στο ασταθές σημείο ισορροπίας).

Αν το A είναι μικρό αναμένεται ταλάντωση μικρού πλάτους και η κίνηση του εκκρεμούς διέπεται σε πολύ καλή προσέγγιση από τη γραμμική εξίσωση (9.50). Το εκκρεμές μετά από χρονικό διάστημα $t \gg 1/\gamma$ θα εκτελεί περιοδική κίνηση συχνότητας ω_f σύμφωνα με την (9.51). Η καταληκτική κίνηση για $A = 0.1$ φαίνεται στο σχήμα 9.7 (τα δύο πάνω γραφήματα). Παρατηρήστε ότι η κλειστή τροχιά που αντιστοιχεί στην περιοδική κίνηση, και ονομάζεται και οριακός κύκλος, είναι σχεδόν κυκλική σαν αυτή του αρμονικού ταλαντωτή και συνεπώς η φασματική ισχύς είναι

⁹Για να δειχθεί αυτή η πρόταση απαιτούνται αναλυτικά επιχειρήματα. Δεν μπορεί να δειχθεί η πρόταση αυτή με αριθμητικούς υπολογισμούς του φυσικού συστήματος, αφού κάθε αριθμητική ολοκλήρωση διαρκεί ένα πεπερασμένο διάστημα και η ανάλυση στις συχνότητες της απόκρισης θα είναι τότε μία σειρά Fourier που περιέχει διακριτές συχνότητες. Μάλιστα οι συχνότητες αυτές θα είναι και πεπερασμένες στον αριθμό, δεδομένου ότι ένας αριθμητικός υπολογισμός δεν μπορεί να δώσει τιμές σε συνεχή διαστήματα.

αποκλειστικά συγκεντρωμένη στη κύρια συχνότητα ω_f με μια ανεπαίσθητη συμβολή στην ισχύ από τη συχνότητα $3\omega_f$ (σχεδόν δεν φαίνεται είναι 5 τάξεις μεγέθους μικρότερη). Οπότε η κίνηση είναι σε μεγάλη προσέγγιση αρμονική. Η συχνότητα $\omega_0^2 - \gamma^2$ δεν εμφανίζεται διότι παρουσιάζουμε τη φασματική ισχύ της γωνιακής θέσης έχοντας εξαλείψει τη μεταβατική εξέλιξη. Η φασματική ισχύς δεν είναι μία συνάρτηση δέλτα στο ω_f , όπως θα περίμενε κανείς, διότι η φασματική ισχύς υπολογίστηκε σε ένα περιορισμένο χρονικά δείγμα γωνιακών θέσεων. Όσο επεκτείνουμε το χρόνο συλλογής του δείγματος τόσο περισσότερο η φασματική ισχύς θα προσεγγίζει μία συνάρτηση δέλτα.

Αυξάνουμε το πλάτος της διέγερσης στη τιμή $A = 0.9$. Τότε η καταληκτική κίνηση φαίνεται στο σχήμα 9.7 (δύο κάτω γραφήματα). (Και πάλι δεν δείχνουμε τη μεταβατική εξέλιξη.) Η κίνηση είναι και πάλι περιοδική, αλλά πλέον ο οριακός κύκλος έχει απομακρυνθεί από την μορφή του αρμονικού ταλαντωτή. Αυτό φαίνεται στο φάσμα της γωνιακής θέσης που δείχνει ότι η κίνηση έχει και ανώτερες αρμονικές, περιττά πολλαπλάσια της θεμελιώδους συχνότητας ω_f .



Σχήμα 9.8: Όπως και στο σχήμα 9.7. Πάνω γραφήματα: διέγερση $A = 1.07$. Αριστερά: η περιοδική τροχιά στο χώρο των φάσεων έχει γίνει διπλή, και η φασματική ισχύς της κίνησης (δεξιό γράφημα) εμφανίζει ξαφνικά κορυφές και στην υποδιπλάσια συχνότητα της συχνότητας του διεγέρτη, ω_f , καθώς επίσης και στα πολλαπλάσια αυτής. Η δομική αυτή μεταβολή της τροχιάς αναφέρεται στη διεθνή βιβλιογραφία ως *διακλάδωση διπλασιασμού της περιόδου* (period doubling bifurcation). Κάτω γραφήματα: $A = 1.09$. Η κίνηση έχει γίνει πλέον χαοτική (εργοδική), δεν ακολουθεί μία συγκεκριμένη καμπύλη αλλά σαρώνει πλέον ολόκληρο χωρίο του χώρου των φάσεων. Η κίνηση είναι απεριοδική και το φάσμα γίνεται πυκνό. Παράμετροι: $\omega_f = 0.667$, $\omega_0 = 1$, $\gamma = 0.25$.

Η φασματική ισχύς των περιττών συχνοτήτων αυξάνεται με συνεχή τρόπο καθώς

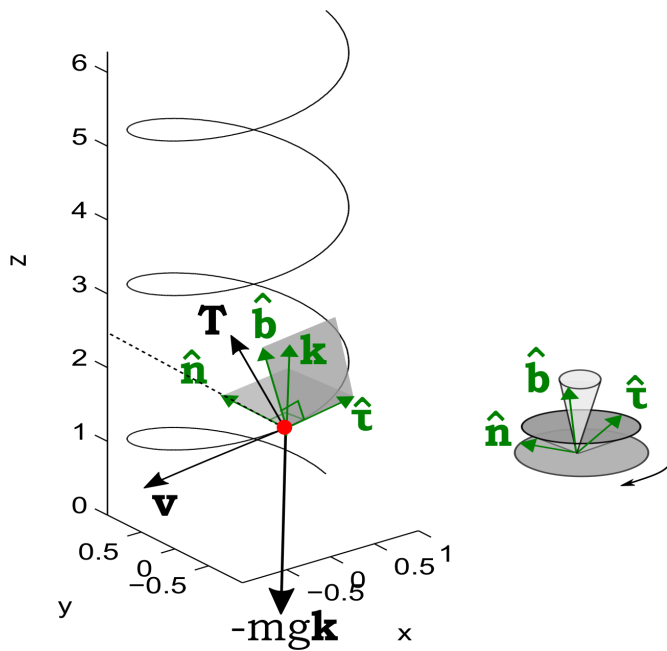
το A μεγαλώνει, αλλά όταν το πλάτος γίνει $A = 1.07$, έχουμε μια διακλάδωση στη συμπεριφορά του εκκρεμούς (bifurcation), που αντιστοιχεί σε δομική αλλαγή στο χαρακτήρα της κίνησης, και ο οριακός κύκλος γίνεται ξαφνικά διπλός και η περίοδος της κίνησης διπλασιάζεται. Αυτό φαίνεται στο γράφημα της φασματικής ισχύος στο σχήμα 9.8 (δύο πάνω γραφήματα), η οποία αποκτά ξαφνικά κορυφή στην υποδιπλασια συχνότητα $\omega_f/2$. Αν αυξήσουμε το πλάτος λίγο ακόμα έχουμε και νέο διπλασμό της περιόδου. Αν αυξήσουμε το πλάτος ακόμα περισσότερο εμφανίζονται όλο και περισσότερες υποδιπλασίες συχνότητες. Όταν όμως ξεπεράσουμε τη τιμή $A = 1.09$ ο χαρακτήρας της κίνησης αλλάζει, και η κίνηση φαίνεται να γίνεται απεριοδική. Παρατηρείτε στο σχήμα 9.8 (δύο κάτω γραφήματα) ότι το φάσμα έχει σχεδόν γεμίσει. Αυτό φαίνεται ακόμα καλύτερα αν το πλάτος αυξηθεί ακόμη περισσότερο.

9.6 * Κίνηση επί έλικας σε ομογενές πεδίο βαρύτητας - Τρίεδρο του Frenet

Στο εδάφιο αυτό θα μελετήσουμε την κίνηση άνευ τριβών μιας χάντρας επί ενός κυλινδρικού ελικοειδούς σύρματος στο ομογενές πεδίου βαρύτητας (βλ. σχήμα 9.9). Θα προσδιορίσουμε την κίνηση της χάντρας. Ο λόγος που ασχολούμαστε με αυτό το τεχνικό πρόβλημα είναι για να δείξουμε ακόμη μια φορά πως δουλεύει η νευτώνεια ανάλυση όταν υπάρχουν άγνωστες δυνάμεις και πως γίνεται η απαλοιφή τους προκειμένου να προσδιορισθεί η κίνηση. Την επίπονη αυτή διαδικασία συστηματοποίησε αργότερα ο Lagrange, διατυπώνοντας έτσι τις εξισώσεις ώστε η απαλοιφή των αγνώστων αυτών δυνάμεων να γίνεται αυτόματα. Η διατύπωση της νευτώνειας μηχανικής από το Lagrange, αν και ξεκίνησε από την πρακτική ανάγκη να μπορεί να καθίσταται η διαδικασία της απαλοιφής αυτόματη, κατέληξε σε ενός νέου τύπου πλαίσιο διατύπωσης των φυσικών νόμων.

Όπως συζητήσαμε και στην περίπτωση του εκκρεμούς, στη χάντρα, εκτός από τη γνωστή δύναμη της βαρύτητας, ασκείται μια άγνωστη δύναμη από το ελικοειδές σύρμα η οποία αναγκάζει τη χάντρα να κινηθεί σε αυτό το σύρμα. Η νευτώνεια θεώρηση δεν μπορεί να προσδιορίσει την κίνηση αν δεν εισαχθούν φαινομενολογικές παραδοχές για τη δύναμη. Αν υποθεθεί ότι η δύναμη κείται στο επίπεδο που είναι κάθετο στο εφαπτόμενο διάνυσμα της τροχιάς, ώστε να μην υπάρχει συνιστώσα αυτής της δύναμης κατά μήκος της τροχιάς, τότε η κίνηση προσδιορίζεται. Αφού προσδιορισθεί η κίνηση μπορεί να υπολογισθεί στη συνέχεια και η τιμή των αντιδράσεων που θα αναπτυχθούν κατά τη κίνηση.

Θα εκφράσουμε τις συντεταγμένες της χάντρας σε κυλινδρικές συντεταγμένες. Οι κυλινδρικές συντεταγμένες, όπως είδαμε και στη περιγραφή της κίνησης σωματιδίου σε μαγνητικό πεδίο, (ρ, θ, z) , είναι οι συντεταγμένες με τις οποίες τα σημεία του επιπέδου (x, y) προσδιορίζονται με πολικές συντεταγμένες (ρ, θ) ενώ η τρίτη συνιστώσα προσδιορίζεται με την καρτεσιανή συντεταγμένη, z , έτσι ώστε οι συντε-



Σχήμα 9.9: Η κίνηση της χάντρας σε μια κυλινδρική έλικα. Διακρίνονται οι δυνάμεις και τα μοναδιαία διανύσματα $\hat{\tau}$, \hat{n} , \hat{b} των ενδογενών συντεταγμένων που σχηματίζουν το τριέδρο του Frenet. Τα $\hat{\tau}$, \hat{b} σχηματίζουν ένα κατακόρυφο επίπεδο, ενώ το \hat{n} είναι οριζόντιο. Η εστιγμένη γραμμή που συνδέει την χάντρα με τον άξονα είναι οριζόντια και επομένως κάθετη στον άξονα. Η διεύθυνσή της είναι αυτή του \hat{n} . Στο ένθετο φαίνεται το τριέδρο του Frenet το οποίο περιστρέφεται καθώς η χάντρα ολισθαίνει πάνω στην έλικα. Το κάθε μοναδιαίο διαγράφει ένα κώνο καθώς περιστρέφεται γύρω από τον άξονα z . Ο κώνος του \hat{n} είναι εκφυλισμένος σε επίπεδο.

ταγμένες (x, y, z) να είναι:

$$x = \rho \cos \theta, \quad y = \rho \sin \theta, \quad z = z.$$

Το διάνυσμα θέσης στις κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\mathbf{r} = \rho \hat{\rho} + z \mathbf{k}.$$

όπου

$$\hat{\rho} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j},$$

το μοναδιαίο ακτινικό διάνυσμα στο επίπεδο (x, y) και σε πλήρη αντιστοιχία με τις πολικές συντεταγμένες έχουμε:

$$\frac{d\hat{\rho}}{d\theta} = \hat{\theta}, \quad \frac{d\hat{\theta}}{d\theta} = -\hat{\rho}.$$

Τα σημεία μίας κυλινδρικής έλικας η οποία περιελίσσεται γύρω ένα ορθό κύλινδρο ακτίνας a , βρίσκονται πάντα σε απόσταση a από τον άξονα z . Συνεπώς για τη

χάντρα έχουμε $\rho = a$ και η θέση της προσδιορίζεται από μία παράμετρο (αφού η κίνηση είναι μονοδιάστατη). Αν επιλέξουμε αυτήξ η παράμετρος να είναι η γωνία θ , τότε η z συντεταγμένη της χάντρας πάνω στην έλικα είναι:

$$z(\theta) = \frac{h}{2\pi}\theta,$$

όπου h είναι το βήμα της έλικας, δηλαδή η διαφορά της z συντεταγμένης δύο σημείων της έλικας όταν κάνουμε μία πλήρη περιστροφή κατά γωνία 2π επί της έλικας (είναι η απόσταση των σπειρωμάτων). Συνεπώς το σημεία της έλικας με παράμετρο την θ σε κυλινδρικές συντεταγμένες είναι:

$$\mathbf{r} = a \hat{\rho} + \frac{h}{2\pi}\theta \mathbf{k}.$$

Επειδή θα χρησιμοποιήσουμε ενδογενείς συντεταγμένες για να μελετήσουμε την κίνηση της χάντρας, υπολογίζουμε το διαφορικό μήκος τόξου:

$$\begin{aligned} (ds)^2 &= d\mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} \cdot \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} (d\theta)^2 \\ &= \left(a \frac{d\hat{\rho}}{d\theta} + \frac{h}{2\pi} \mathbf{k} \right) \cdot \left(a \frac{d\hat{\rho}}{d\theta} + \frac{h}{2\pi} \mathbf{k} \right) (d\theta)^2 \\ &= \left(a \hat{\theta} + \frac{h}{2\pi} \mathbf{k} \right) \cdot \left(a \hat{\theta} + \frac{h}{2\pi} \mathbf{k} \right) (d\theta)^2 \\ &= \left(a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2} \right) (d\theta)^2, \end{aligned}$$

ή

$$ds = b d\theta \quad \text{όπου} \quad b = \sqrt{a^2 + \frac{h^2}{4\pi^2}}. \quad (9.54)$$

Το μοναδιαίο εφαπτομενικό διάνυσμα επί της έλικας είναι

$$\hat{\tau} = \frac{d\mathbf{r}}{ds} = \frac{1}{b} \frac{d\mathbf{r}}{d\theta} = \frac{a}{b} \hat{\theta} + \frac{h}{2\pi b} \mathbf{k}, \quad (9.55)$$

και εξ' αυτού προκύπτει ότι:

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\tau}}{ds} &= \frac{1}{b} \frac{d\hat{\tau}}{d\theta} \\ &= -\frac{a}{b^2} \hat{\rho}, \end{aligned}$$

αφού το \mathbf{k} είναι σταθερό διάνυσμα. Επειδή δε κάθε καμπύλη στο χώρο μπορεί τοπικά να θεωρηθεί επίπεδη, το τοπικό αυτό επίπεδο καθορίζεται από το $\hat{\tau}$ και την

κατεύθυνση της στροφής αυτού που σχηματίζεται από το $d\hat{\tau}/ds$. Η κατεύθυνση του δεύτερου αυτού ανύσματος είναι η λεγόμενη *πρώτη κάθετος* της τροχιάς $\hat{\mathbf{n}}$. Πρόκειται για το μοναδιαίο $\hat{\mathbf{n}}$ που συναντήσαμε αρχικά όταν εισαγάγαμε τις ενδογενείς συντεταγμένες. Ο εγγύτερος κύκλος της τροχιάς βρίσκεται πάνω σε αυτό το τοπικό επίπεδο και το κέντρο του βρίσκεται πάνω στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$. Όπως είδαμε και στην περίπτωση της κυκλικής τροχιάς στο εκκρεμές είναι

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \frac{\hat{\mathbf{n}}}{\varrho},$$

όπου ϱ είναι η ακτίνα καμπυλότητας του εγγύτερου αυτού κύκλου. Έτσι βρίσκουμε ότι η κάθετος στην τροχιά στο τοπικό επίπεδο του εγγυτέρου κύκλου στην έλικα είναι

$$\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\rho}, \quad (9.56)$$

και αντίστοιχα η ακτίνα καμπυλότητας είναι:

$$\varrho = \frac{b^2}{a} = a + \frac{h^2}{4\pi^2 a}. \quad (9.57)$$

Καθώς, λοιπόν, η χάντρα ολισθαίνει στο σύρμα, το κέντρο καμπυλότητας περιστρέφεται και αυτό στο ίδιο z -ύψος, από την άλλη πλευρά του άξονα από αυτήν που βρίσκεται η χάντρα, διαγράφοντας τη δική της έλικα ακτίνας $h^2/(4\pi^2 a)$. Καθώς $h \rightarrow 0$ και η έλικα εκφυλίζεται σε κυκλική στεφάνη, είναι $\rho \rightarrow a$ (όπως θα ανέμενε κανείς), ενώ όταν $h \rightarrow \infty$ και η έλικα γίνεται ένα κατακόρυφο ευθύ σύρμα, $\rho \rightarrow \infty$.

Ο εγγύτερος κύκλος βρίσκεται στο κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζεται από την $\hat{\tau}$ και $\hat{\mathbf{n}}$ εξαιτίας της κλίσης του $\hat{\tau}$ (το $\hat{\mathbf{n}}$ είναι οριζόντιο). Μπορούμε τώρα να σχηματίσουμε ένα τρίτο μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στα δύο πρώτα:

$$\hat{\mathbf{b}} = \hat{\tau} \times \hat{\mathbf{n}}. \quad (9.58)$$

Το διάνυσμα αυτό λέγεται *δεύτερο κάθετο διάνυσμα* στην καμπύλη (binormal) και και με τα τρία αυτά διανύσματα μπορούμε να σχηματίσουμε ένα τοπικό ενδογενές καρτεσιανό σύστημα αξόνων, που συνδέεται αποκλειστικά με τη συγκεκριμένη τροχιά. Η τριάδα $(\hat{\tau}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}})$ που ορίζουν τα μοναδιαία διανύσματα βάσης του ενδογενούς καρτεσιανού συστήματος επί της τροχιάς του σωματιδίου ονομάζεται τριέδρο του Frenet. Στην περίπτωση της έλικας, το δεύτερο κάθετο διάνυσμα είναι:

$$\hat{\mathbf{b}} = -\left(\frac{a}{b}\hat{\theta} + \frac{h}{2\pi b}\mathbf{k}\right) \times \hat{\rho} = \frac{h}{2\pi b}\hat{\theta} + \frac{a}{b}\mathbf{k},$$

και κείται, όπως και το $\hat{\tau}$ στο επίπεδο το εφαπτόμενο στη κυλινδρική επιφάνεια στην

οποία περιελίσσεται η έλικα.

Με το τριέδρο του Frenet ορισμένο σε κάθε σημείο της καμπύλης μπορούν τώρα να υπολογισθούν όλες οι μεταβολές των ενδογενών διανυσμάτων βάσης και μάλιστα υπάρχει μία ενδιαφέρουσα σχέση των μεταβολών των διανυσμάτων βάσης που παρατήρησε ο Frenet¹⁰ στη διδακτορική του διατριβή το 1847.

Έχουμε ήδη υπολογίσει την μεταβολή του εφαπτομενικού διανύσματος, η οποία είναι και η πρώτη εξίσωση Frenet-Serret, την οποία γράφουμε στην κλασική μορφή:

$$\frac{d\hat{\tau}}{ds} = \kappa(s) \hat{\mathbf{n}}, \quad (9.59)$$

όπου,

$$\kappa(s) = \frac{1}{\rho}$$

είναι η *καμπυλότητα* της καμπύλης. Ονομάζεται καμπυλότητα διότι υποδεικνύει πόσο μη ευθεία είναι μία καμπύλη, π.χ. μία ευθεία έχει $\rho = \infty$ και συνεπώς $\kappa = 0$, και αυτός είναι ο λόγος που εισάγουμε το κ και το χρησιμοποιούμε αντί του ρ . Εκφράζοντας την καμπύλη συναρτήσει της ενδογενούς μεταβλητής, s , η καμπυλότητα γίνεται και αυτή συνάρτηση του s .

Ας υπολογίσουμε τώρα και την μεταβολή της πρώτης καθέτου $d\hat{\mathbf{n}}/ds$. Αυτή είναι ένα διάνυσμα κάθετο στο $\hat{\mathbf{n}}$ και συνεπώς κείται στο επίπεδο των $\hat{\tau}$ και $\hat{\mathbf{b}}$ και μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο αυτών διανυσμάτων:

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = \alpha \hat{\tau} + \beta \hat{\mathbf{b}},$$

όπου

$$\alpha = \hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds}, \quad \beta = \hat{\mathbf{b}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds}.$$

Το εσωτερικό γινόμενο

$$\hat{\mathbf{b}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = \tau(s),$$

είναι μία νέα συνάρτηση του s που λέγεται στρέψη και χαρακτηρίζει πόσο επίπεδη είναι μία καμπύλη. Αν η καμπύλη είναι επίπεδη, τα $\hat{\tau}$ και $\hat{\mathbf{n}}$ ορίζουν ένα σταθερό επίπεδο σε κάθε σημείο s της καμπύλης και συνεπώς το $d\hat{\mathbf{n}}/ds$ θα κείται και αυτό σε τούτο το σταθερό επίπεδο που παράγεται από τα $\hat{\tau}$ και $\hat{\mathbf{n}}$. Αφού, μάλιστα, το $\hat{\mathbf{b}}$ είναι εκ κατασκευής κάθετο σε αυτό το επίπεδο, η στρέψη θα είναι μηδενική, $\tau = 0$.

Όσο για την προβολή α στο εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{\tau}$, θα είναι ίση με $-\kappa$. Το γεγονός αυτό βασίζεται στην παρατήρηση-τέχνασμα ότι το εσωτερικό γινόμενο $\hat{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}}$ είναι σταθερά μηδέν σε όλα τα s . Άρα, επειδή

$$0 = \frac{d}{ds}(\hat{\tau} \cdot \hat{\mathbf{n}}) = \frac{d\hat{\tau}}{ds} \cdot \hat{\mathbf{n}} + \hat{\tau} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds}$$

¹⁰Τις ίδιες σχέσεις ανακοίνωσε και ο Serret το 1851.

είναι

$$\alpha = \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = -\frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} \cdot \hat{\mathbf{n}} = -\kappa .$$

Έτσι θα έχουμε τη δεύτερη εξίσωση Frenet-Serret

$$\frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = -\kappa(s) \hat{\boldsymbol{\tau}} + \tau(s) \hat{\mathbf{b}} . \quad (9.60)$$

Μένει τώρα να υπολογίσουμε το $d\hat{\mathbf{b}}/ds$ το οποίο είναι κάθετο στο $\hat{\mathbf{b}}$ και συνεπώς μπορεί να γραφεί ως ο γραμμικός συνδυασμός:

$$\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = \alpha' \hat{\boldsymbol{\tau}} + \beta' \hat{\mathbf{n}} .$$

Αλλά

$$\alpha' = \hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = 0$$

διότι $\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \hat{\mathbf{b}} = 0$ πάντοτε, και συνεπώς με τα ίδια βήματα που ακολουθήσαμε προηγούμενως, έχουμε ότι:

$$\hat{\boldsymbol{\tau}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\hat{\mathbf{b}} \cdot \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} = \kappa \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\mathbf{n}} = 0 .$$

Ενώ,

$$\beta' = \hat{\mathbf{n}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\hat{\mathbf{b}} \cdot \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} = -\tau ,$$

απ' όπου τελικά προκύπτει η τρίτη εξίσωση Frenet-Serret:

$$\frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} = -\tau(s) \hat{\mathbf{n}} . \quad (9.61)$$

Οι τρεις εξισώσεις Frenet-Serret (9.59), (9.60), (9.61) σχηματίζουν ένα κλειστό σύστημα εξισώσεων ως προς s που προσδιορίζει την εξέλιξη του προσανατολισμού ενός καρτεσιανού πλαισίου που είναι απόλυτα προσκολλημένο στην τροχιά. Αν ορίσουμε σε κάθε σημείο της καμπύλης s το τοπικό διάνυσμα (το διάνυσμα του Darboux):

$$\boldsymbol{\omega} = \tau \hat{\boldsymbol{\tau}} + \kappa \hat{\mathbf{b}} ,$$

τότε το σύστημα Frenet-Serret (9.59), (9.60), (9.61) γράφεται στην μορφή

$$\begin{aligned} \frac{d\hat{\boldsymbol{\tau}}}{ds} &= \boldsymbol{\omega} \times \hat{\boldsymbol{\tau}} , \\ \frac{d\hat{\mathbf{n}}}{ds} &= \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{n}} , \\ \frac{d\hat{\mathbf{b}}}{ds} &= \boldsymbol{\omega} \times \hat{\mathbf{b}} , \end{aligned} \quad (9.62)$$

που δείχνει ότι το καρτεσιανό πλαίσιο σε κάθε σημείο της καμπύλης περιστρέφεται με γωνιακή ταχύτητα ω και ότι η καμπυλότητα, κ , είναι το μέτρο της γωνιακής ταχύτητας περιστροφής του καρτεσιανού πλαισίου περί τον άξονα $\hat{\mathbf{b}}$, ενώ η στρέψη, τ , είναι το μέτρο περιστροφής του καρτεσιανού πλαισίου περί τον άξονα του εφαπτομενικού διανύσματος $\hat{\tau}$. Στην περίπτωση της έλικας η καμπυλότητα και η στρέψη είναι σταθερές και ίσες με

$$\kappa = \frac{a}{a^2 + h^2/(4\pi^2)} \quad , \quad \tau = \frac{h/(2\pi)}{a^2 + h^2/(4\pi^2)} .$$

Ας επανέλθουμε τώρα στην κίνηση της χάντρας επί της έλικας στο πεδίο βαρύτητας. Η εξίσωση της κίνησης θα είναι σε ενδογενείς συντεταγμένες:

$$m \frac{dv}{dt} \hat{\tau} + \frac{mv^2}{\rho} \hat{\mathbf{n}} = -mg \mathbf{k} + \mathbf{T} . \quad (9.63)$$

όπου \mathbf{T} είναι η άγνωστη αντίδραση, για την οποία έχουμε υποθέσει ότι κείται στο επίπεδο το κάθετο στο εφαπτομενικό διανυσμα, δηλαδή, $\mathbf{T} \cdot \hat{\tau} = 0$. Έτσι η \mathbf{T} όντας κάθετη στην τροχιά μπορεί να γραφεί ως:

$$\mathbf{T} = T_n \hat{\mathbf{n}} + T_b \hat{\mathbf{b}} .$$

Παίρνοντας το εσωτερικό γινόμενο της (9.63) με την $\hat{\tau}$ προκύπτει η εξίσωση για τη κίνηση της χάντρας:

$$m \frac{dv}{dt} = -mg \mathbf{k} \cdot \hat{\tau} = -mg \sin \phi , \quad (9.64)$$

με

$$\sin \phi = \frac{(h/2\pi)}{b} = \frac{(h/2\pi)}{\sqrt{a^2 + h^2/(4\pi^2)}} ,$$

δηλαδή η χάντρα εκτελεί την ίδια ομαλά επιταχυνόμενη κίνηση με τη κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα κεκλιμένο επίπεδο που σχηματίζει γωνία ϕ με την οριζόντια διεύθυνση υπό την επίδραση ομογενούς και κατακόρυφου πεδίου βαρύτητας. Το αποτέλεσμα είναι αναμενόμενο διότι η κυλινδρική επιφάνεια είναι ουσιαστικά επίπεδη και η έλικα γίνεται ευθεία αν αναπτυχθεί η κυλινδρική επιφάνεια, πάνω στην οποία γράφεται η έλικα, σε επίπεδη. Η ευθεία αυτή θα σχηματίζει γωνία ϕ με την οριζόντια διεύθυνση, διότι σε κάθε μήκος περιφέρειας του κυλίνδρου, $2\pi a$, η z συντεταγμένη μεταβάλλεται κατά το βήμα της έλικας, h ($\tan \phi = h/(2\pi a)$).

Αν αρχικά, $t = 0$, η χάντρα είχε μηδενική ταχύτητα, $v(0) = 0$, και βρισκόταν στην

αρχή των αξόνων, η ταχύτητα της χάντρας στο χρόνο t θα είναι:¹¹

$$v(t) = -g \sin \phi t ,$$

και συνεπώς:

$$\dot{\theta} = -\frac{g}{b} \sin \phi t .$$

Εφόσον, $\theta(0) = 0$, $z(0) = 0$, η γωνιακή και η κατακόρυφη θέση της χάντρας θα είναι:

$$\theta(t) = -\frac{h/(2\pi)}{a^2 + h^2/(4\pi^2)} \frac{g}{2} t^2 , \quad z(t) = -\frac{h^2/(4\pi^2)}{a^2 + h^2/(4\pi^2)} \frac{g}{2} t^2 . \quad (9.65)$$

Η δεύτερη εξίσωση είναι ακριβώς η $z(t)$ θέση ενός σωματιδίου πάνω σε κεκλιμένο επίπεδο γωνίας ϕ . Έχοντας προσδιορίσει την κίνηση, η άγνωστη αντίδραση μπορεί να εξαχθεί άμεσα από την εξίσωση κίνησης (9.63):

$$\mathbf{T} = -mg \sin \phi \hat{\tau} + \frac{ma \sin^2 \phi g^2 t^2}{a^2 + h^2/(4\pi)^2} \hat{\mathbf{n}} + mg \mathbf{k} . \quad (9.66)$$

Εύκολα μπορείτε να διαπιστώσετε ότι η \mathbf{T} είναι κάθετη στο εφαπτομενικό διάνυσμα $\hat{\tau}$.¹²

$$\mathbf{T} \cdot \hat{\tau} = 0 ,$$

και οι συνιστώσες της στην ακτινική κατεύθυνση, στην ϕ -κατεύθυνση και στην κατακόρυφη διεύθυνση:

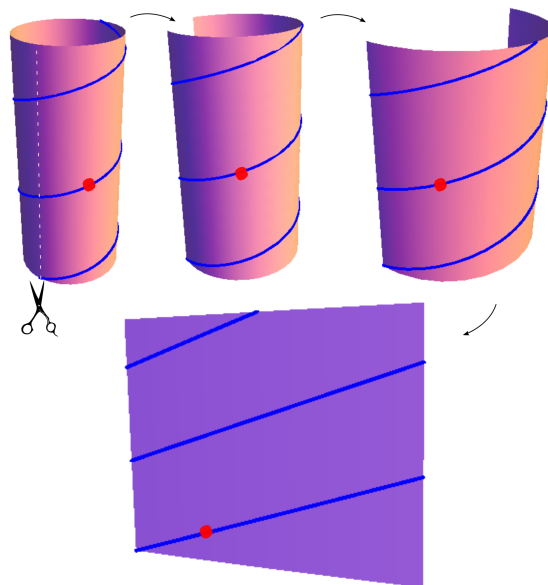
$$\begin{aligned} T_\rho &= T_n = \frac{ma \sin^2 \phi g^2 t^2}{a^2 + h^2/(4\pi)^2} , \\ T_z &= mg(1 - \sin \phi \mathbf{k} \cdot \hat{\tau}) = mg \cos^2 \phi , \\ T_\phi &= T_b \hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\phi} = (m g \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{b}})(\hat{\mathbf{b}} \cdot \hat{\phi}) = -m g \cos \phi \sin \phi . \end{aligned} \quad (9.67)$$

Η z συνιστώσα της αντίδρασης είναι ακριβώς αυτή που θα βρίσκαμε σε ένα κεκλιμένο επίπεδο με κλίση ϕ (βλ. σχήμα 9.10). Καθώς όμως η ταχύτητα της χάντρας μεγαλώνει πέφτοντας, και επειδή η χάντρα πρέπει να στρίψει ακολουθώντας την κυλινδρική επιφάνεια πάνω στην οποία βρίσκεται η έλικα, η T_n συνιστώσα μεγαλώνει και μάλιστα τετραγωνικά με το χρόνο t . Η αντίδραση λοιπόν στρέφεται ολοένα

¹¹Το αρνητικό πρόσημο οφείλεται στο ότι θεωρήσαμε ότι το s αυξάνεται καθώς προχωράμε προς τα επάνω στην έλικα, ενώ η κίνηση στο βαρυτικό πεδίο γίνεται προς τα κάτω.

¹²Η γραφή αυτή δεν είναι εξ ολοκλήρου στο ενδογενές σύστημα. Αν χρησιμοποιούσαμε αποκλειστικά τις ενδογενείς συντεταγμένες θα ήταν

$$\mathbf{T} = \frac{ma \sin^2 \phi g^2 t^2}{a^2 + h^2/(4\pi)^2} \hat{\mathbf{n}} + mg \cos \phi \hat{\mathbf{b}} .$$



Σχήμα 9.10: Αν κόψουμε κατά μήκος της εστιγμένης γραμμής την κυλινδρική επιφάνεια πάνω στην οποία περιελίσσεται η έλικα και ανοίξουμε την επιφάνεια αυτή, η έλικα θα μετατραπεί σε κεκλιμένο επίπεδο. Η κίνηση της χάντρας πάνω στην έλικα είναι ακριβώς αυτή που θα εκτελούσε πάνω στο ανοιγμένο κεκλιμένο επίπεδο. Η μόνη διαφορά είναι ότι στην έλικα θα εμφανίζεται και μια κεντρομόλος δύναμη προς τον άξονα της έλικας, λόγω της περιστροφής της χάντρας.

και περισσότερο προς τον άξονα με το πέρασμα του χρόνου (βλ. υποσημείωση 12 όπου η αντίδραση είναι εξ' ολοκλήρου γραμμένη στο ενδογενές σύστημα).

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 9

- Ο ρυθμός μεταβολής οποιουδήποτε μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{a}}$ είναι ορθογώνιος στο διάνυσμα αυτό:

$$\frac{d\hat{\mathbf{a}}}{dt} \cdot \hat{\mathbf{a}} = 0 .$$

- Ο 2ος νόμος του Νεύτωνα αλλάζει μορφή σε καμπυλόγραμμες συντεταγμένες λόγω της διαφορετικής μορφής που λαμβάνει η επιτάχυνση. Έτσι για παράδειγμα στις πολικές συντεταγμένες γίνεται

$$F_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2) \quad , \quad F_\theta = m(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}) .$$

- Ένα ιδιαίτερο σύστημα συντεταγμένων είναι αυτό των ενδογενών συντεταγμένων $\hat{\mathbf{t}}, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{b}} = \hat{\mathbf{t}} \times \hat{\mathbf{n}}$, οι οποίες παρακολουθούν την κίνηση ενός σωματιδίου. $\hat{\mathbf{t}}$ είναι το εφαπτομενικό στην τροχιά διάνυσμα, $\hat{\mathbf{n}}$ είναι το κά-

θετο στην τροχιά διάνυσμα που μαζί με το $\hat{\tau}$ ορίζουν το στιγμιαίο επίπεδο της τροχιάς, ενώ $\hat{\mathbf{b}}$ είναι το τρίτο διάνυσμα κάθετο στα δύο πρώτα. Εφόσον η κίνηση είναι επίπεδη το $\hat{\mathbf{b}}$ δεν αλλάζει. Τα τρία αυτά διανύσματα αποτελούν το τριεδρο του Frenet που παρασύρεται και περιστρέφεται ως στερεό σώμα μαζί με το εν κινήσει σωματίδιο.

- Η ακτίνα καμπυλότητας μιας καμπύλης δίνεται από τη σχέση

$$\rho = \frac{1}{|d\boldsymbol{\tau}/ds|}.$$

- Ένα σώμα το οποίο υπόκειται σε δεσμεύσεις στην κίνησή του δέχεται δυνάμεις οι οποίες δεν υπόκεινται σε κάποιους γνωστούς νόμους. Στις περιπτώσεις αυτές θα πρέπει να υποθέσουμε κάποια συγκεκριμένα χαρακτηριστικά γι' αυτές τις δυνάμεις (βάσει παρατηρήσεων) προκειμένου να μπορέσουμε να λύσουμε τις δυναμικές εξισώσεις. Στην περίπτωση ολισθηρών (δίχως τριβές) δεσμεύσεων συνήθως υποθέτουμε ότι οι δυνάμεις που αναπτύσσονται στο δεσμευμένο σωματίδιο είναι κάθετες στην κίνησή αυτού.
- Το εκκρεμές, όντας ένας μη ακριβώς αρμονικός ταλαντωτής, εμπεριέχει συχνότητες (αρμονικές) πολλαπλάσιες της θεμελιώδους. Όταν τίθεται σε εξαναγκασμένη ταλάντωση το εκκρεμές, οι αρμονικές αυτές μπορεί να διεγερθούν οδηγώντας σε ένα αρκετά πλούσιο φάσμα συχνοτήτων και εν τέλει σε μη περιοδική κίνηση.

10

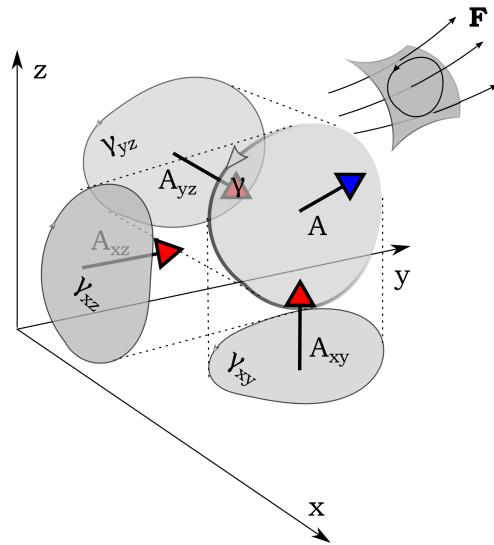
Στροβιλισμός & συντηρητικά πεδία

10.1 * Στροβιλισμός πεδίου δυνάμεων

Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε το φυσικό νόημα της δράσης του διαφορικού τελεστή ∇ πάνω σε ένα διανυσματικό πεδίο υπό τη μορφή εξωτερικού γινομένου. Θα δείξουμε ότι μια τέτοια δράση παράγει ένα νέο διανυσματικό μέγεθος, τον *στροβιλισμό* του διανυσματικού πεδίου, ο οποίος μας δίνει τη δυνατότητα σε τοπικό επίπεδο να γνωρίζουμε κατά πόσο ένα πεδίο δύναμης είναι συντηρητικό ή όχι. Μόνο αν το πεδίο είναι αστρόβιλο, δηλαδή έχει μηδενικό στροβιλισμό, τότε έχει νόημα η κατασκευή κάποιου βαθμωτού πεδίου το οποίο να παίζει το ρόλο δυναμικής ενέργειας για το πεδίο.

Ας θεωρήσουμε ένα απειροστό απλό χωρίο στο χώρο τόσο μικρό ώστε να μπορεί να θεωρηθεί ότι βρίσκεται σε ένα επίπεδο (βλ. ένθετο σχήματος 10.2). Έστω ότι το χωρίο αυτό έχει εμβαδόν μέτρου A . Το έργο που εκτελείται από το πεδίο δυνάμεων αν διατρέξουμε την κλειστή καμπύλη γ^1 που ορίζει το σύνορο του χωρίου με φορά αντίθετη αυτής των δεικτών του ρολογιού, καθώς βλέπουμε την επιφάνεια

¹Θα μπορούσε να φανταστεί κανείς την καμπύλη γ ως ένα σύρμα πάνω στο οποίο μπορεί να κινείται υπό την επίδραση της δύναμης \mathbf{F} μια χάντρα. Ακόμη και αν το πεδίο της δύναμης δεν καταφέρνει από μόνο του να κινήσει τη χάντρα κατά μήκος της κλειστής αυτής διαδρομής, θα μπορούσαμε να την σπρώξουμε με μια κατάλληλη δική μας δύναμη, έτσι ώστε αυτή να καταφέρει ολοκληρώσει τη διαδρομή της, αλλά στο τέλος θα μετρήσουμε το έργο μόνο της εξωτερικής \mathbf{F} .



Σχήμα 10.1: Καθώς το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} διατρέχει ένα επιφανειακό χωρίο A (βλ. ένθετο), μπορούμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $C = \oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ που αντιστοιχεί στο έργο της δύναμης κατά μήκος της διαδρομής που αποτελεί σύνορο αυτού του χωρίου. Με τον δεδομένο προσανατολισμό του χωρίου, μπορούμε να ορίσουμε το $\lim_{A \rightarrow 0} (C/A)$ καθώς και όλα τα αντίστοιχα όρια των προβολών του A σε όλα τα καρτεσιανά επίπεδα A_{xz}, A_{xy}, A_{yz} .

από επάνω² (η φορά αυτή λαμβάνεται ως η θετική φορά) είναι:

$$C = \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}. \quad (10.1)$$

Αν διατρέχαμε την καμπύλη με αρνητική φορά τότε το έργο θα ήταν $-C$. Το έργο γύρω από μία κλειστή καμπύλη ονομάζεται *κυκλοφορία* και μετράει πόσο στροβιλίζεται (με την καθημερινή έννοια του όρου) το πεδίο της δύναμης. Σχηματίζουμε τώρα το όριο (θα δούμε σε λίγο ότι υπάρχει αυτό το όριο) το οποίο θα ονομάσομε *στροβιλισμό*:

$$\lim_{A \rightarrow 0} \frac{C}{A}.$$

Το όριο αυτό θα εξαρτάται από το πεδίο της δύναμης αλλά και από το ίδιο το χωρίο και τα χαρακτηριστικά του. Καθώς το χωρίο τείνει σε ένα μηδενικό χωρίο, τα μοναδικά χαρακτηριστικά αυτού είναι ο ίδιος του ο προσανατολισμός στο χώρο³. Τον προσανατολισμό τον ορίζουμε με το κάθετο μοναδιαίο διάνυσμα στο χωρίο, $\hat{\mathbf{n}}$, ενώ τη φορά του καθέτου διανύσματος την επιλέγουμε με τον κανόνα του δεξιόστροφου κοχλίου: όταν το σύνορο διαγράφεται με τη θετική φορά τότε το κάθετο διάνυσμα

²Το επάνω αναφέρεται στο σχήμα 10.2, αλλά δεν έχει και τόσο νόημα στη γενική περίπτωση. Αυτό που εννοούμε στη γενική περίπτωση είναι ότι βλέπουμε το χωρίο από την εξωτερική πλευρά του τετραέδρου ογκιδίου που σχηματίζεται από το χωρίο και τα 3 επίπεδα $x-y, y-z, z-x$.

³Ακόμη και αν το χωρίο τείνει σε ένα σημείο, το σημείο αυτό διατηρεί την κάθετο στην επιφάνεια πάνω στην οποία λήφθηκε το αρχικό χωρίο.

έχει την διεύθυνση κίνησης ενός δεξιόστροφου κοχλίου που περιστρέφεται όπως διαγράφεται το σύνορο.

Αν επιλέξουμε ένα καρτεσιανό σύστημα μπορούμε σε κάθε σημείο του χώρου να ορίσουμε τρεις στροβιλισμούς. Τον Ω_x στροβιλισμό ως:

$$\Omega_x = \lim_{A_{yz} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma_{yz}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{A_{yz}}, \quad (10.2)$$

για μια διαφορική επιφάνεια η οποία είναι σε ένα επίπεδο παράλληλο στο επίπεδο $y - z$ με εμβαδόν μέτρου A_{yz} και κατεύθυνση τον άξονα x , και παρομοίως τον Ω_y και Ω_z στροβιλισμό:

$$\Omega_y = \lim_{A_{xz} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma_{xz}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{A_{xz}}, \quad \Omega_z = \lim_{A_{xy} \rightarrow 0} \frac{\oint_{\gamma_{xy}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{A_{xy}}.$$

Αν και το όριο που λαμβάνουμε φαίνεται ότι ορίζει τρεις ανεξάρτητους μεταξύ τους στροβιλισμούς, θα μπορούσαμε να δούμε τη σύνδεσή τους αν φανταζόμασταν τις προβολές της αρχικής επιφάνειας A (προ ορίου) στα τρία καρτεσιανά επίπεδα οι οποίες θα όριζαν τρεις κλειστές καμπύλες στα επίπεδα $y - z$, $x - z$, $x - y$ και στη συνέχεια να πηγαίναμε στο όριο $A \rightarrow 0$ παρασύροντας μαζί και τις προβολές της.

Θα αποδείξουμε στη συνέχεια ότι η τριάδα

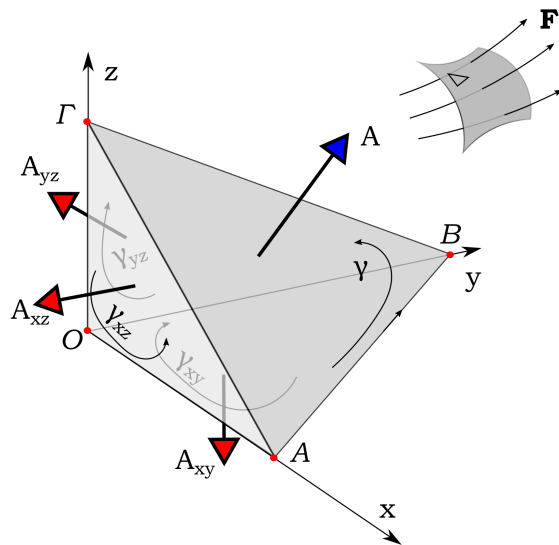
$$(\Omega_x, \Omega_y, \Omega_z),$$

σχηματίζει ένα διάνυσμα, το διάνυσμα του στροβιλισμού, $\boldsymbol{\Omega}$, του πεδίου \mathbf{F} .

Για να το δείξουμε αυτό πρέπει να αποδείξουμε ότι μετασχηματίζεται στις στροφές όπως και οι μετατοπίσεις. Ο διανυσματικός χαρακτήρας βασικών φυσικών αντικειμένων, όπως λ.χ. η δύναμη, αποδεικνύεται μόνο πειραματικά και λαμβάνεται ως νόμος της φύσης όπως συζητήσαμε στο Κεφάλαιο 7. Ο διανυσματικός χαρακτήρας παραγώγων φυσικών μεγεθών όπως λ.χ. η ταχύτητα, η επιτάχυνση, η στροφορμή, η βαθμίδα κ.λ.π. μπορεί να αποδειχθεί όμως από τον ορισμό τους. Δεδομένου ότι γνωρίζουμε ότι η δύναμη είναι διάνυσμα μπορούμε χωρίς πείραμα να ελέγξουμε το διανυσματικό χαρακτήρα του στροβιλισμού εξετάζοντας το μετασχηματισμό των συντεταγμένων του στις στροφές. Για να δείξουμε το διανυσματικό χαρακτήρα αρκεί, σύμφωνα με το Λήμμα 3 του Κεφαλαίου 7.6, να πάρουμε μια διαφορική επιφάνεια που είναι κάθετη σε μία τυχαία διεύθυνση $\hat{\mathbf{n}}$ και να δείξουμε ότι ο στροβιλισμός σε αυτή την επιφάνεια, Ω_n , είναι:

$$\Omega_n = \Omega_x n_x + \Omega_y n_y + \Omega_z n_z, \quad (10.3)$$

όπου (n_x, n_y, n_z) οι συνιστώσες του καθέτου μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{n}}$ στην εν



Σχήμα 10.2: Καθώς το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} διατρέχει ένα επιφανειακό χωρίο A (βλ. ένθετο), μπορούμε να υπολογίσουμε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα $\oint \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ που αντιστοιχεί στο έργο της δύναμης κατά μήκος της διαδρομής που αποτελεί σύνορο αυτού του χωρίου. Το έργο αυτό μπορεί να αναχθεί σε 3 άλλα έργα κλειστών διαδρομών, τις OAB , $OBΓ$, OAG .

λόγω επιφάνεια.

Προς τούτο κατασκευάζουμε ένα ορθό τετράεδρο $OABΓ$, με την ακμή OA κατά τον άξονα, x , την ακμή OB κατά τον y , και την ακμή OG κατά τον z (βλ. σχήμα 10.2). Υπολογίζουμε το έργο γύρω από τα σύνορα των τεσσάρων εδρών του τετραέδρου, διανύοντάς τα με τη φορά που φαίνεται στο σχήμα. Το συνολικό έργο γύρω από τα σύνορα των τεσσάρων εδρών είναι τότε μηδέν, διότι κάθε ακμή διανύεται δύο φορές με αντίθετη κατεύθυνση κάθε φορά, δηλαδή είναι:

$$\left(\oint_{OGB} + \oint_{OAG} + \oint_{OBA} + \oint_{ABΓ} \right) \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0. \quad (10.4)$$

Αν ληφθεί το τετράεδρο αρκούντως μικρό⁴ θα είναι:

$$\begin{aligned} \oint_{OGB} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -A_{yz}\Omega_x, & \oint_{OAG} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -A_{xz}\Omega_y, \\ \oint_{OBA} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= -A_{xy}\Omega_z, & \oint_{ABΓ} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} &= A\Omega_n, \end{aligned}$$

Τα πρόσημα στις 3 τρεις πρώτες κυκλοφορίες είναι αρνητικά αφού η διαγραφή των συνόρων είναι αντίθετη από αυτή που χρησιμοποιήθηκε στους ορισμούς των τριών στροβιλισμών (συγκρίνετε τα διανύσματα \mathbf{A}_{yz} , \mathbf{A}_{xz} , \mathbf{A}_{xy} και τις αντίστοιχες φορές

⁴Προς τούτο φαντασιείται ότι πλησιάζουμε στο αρχικό χωρίο την αρχή των καρτεσιανών αξόνων οσοδήποτε κοντά στο σημείο στο οποίο θέλουμε να συρρικνώσουμε το χωρίο. Τότε τα 3 καρτεσιανά επίπεδα μαζί με την αρχική επιφάνεια του χωρίου θα ορίσουν το τετράεδρό μας.

διαγραφής των συνόρων στα σχήματα 10.1 και 10.2).

Επομένως η (10.4) συνεπάγεται ότι:

$$\Omega_n = \frac{A_{yz}}{A} \Omega_x + \frac{A_{xz}}{A} \Omega_y + \frac{A_{xy}}{A} \Omega_z .$$

και επειδή για τις προβολές των επιφανειών σε επίπεδα ισχύει ότι

$$A_{yz} = (\hat{\mathbf{n}}A) \cdot \mathbf{i} = n_x A , \quad A_{xz} = (\hat{\mathbf{n}}A) \cdot \mathbf{j} = n_y A , \quad \text{και} \quad A_{xy} = (\hat{\mathbf{n}}A) \cdot \mathbf{k} = n_z , \quad (10.5)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}$ η κάθετος στην έδρα $AB\Gamma$, αποδείξαμε ότι για το δεδομένο $\hat{\mathbf{n}}$ ότι ισχύει η (10.3). Αλλά ο ίδιος συλλογισμός ισχύει για οποιοδήποτε ορθό τετράεδρο διότι πάντοτε ισχύει η (10.5). Άρα βάσει του Λήμματος 3 του Κεφαλαίου 7.6 ο στροβιλισμός είναι πράγματι διάνυσμα.

Με τον τρόπο αυτό δείξαμε επίσης ότι μία διαφορική επίπεδη επιφάνεια μπορεί να ορισθεί ως διάνυσμα. Το μέτρο του διανύσματος είναι το εμβαδόν της επιφάνειας και η διεύθυνση του διανύσματος είναι η κάθετος στην επιφάνεια με φορά αυτή της κίνησης δεξιόστροφου κοχλίου που περιστρέφεται όπως διαγράφεται το σύνορο της επιφάνειας. Π.χ. το διάνυσμα της επιφάνειας $AB\Gamma$ είναι $\mathbf{A} = A\hat{\mathbf{n}}$ το οποίο μπορεί να αναλυθεί ως:

$$\mathbf{A} = A_{yz}\mathbf{i} + A_{xz}\mathbf{j} + A_{xy}\mathbf{k} ,$$

και για κάθε $\hat{\mathbf{n}}$ ικανοποιεί την:

$$A = A_{yz}n_x + A_{xz}n_y + A_{xy}n_z .$$

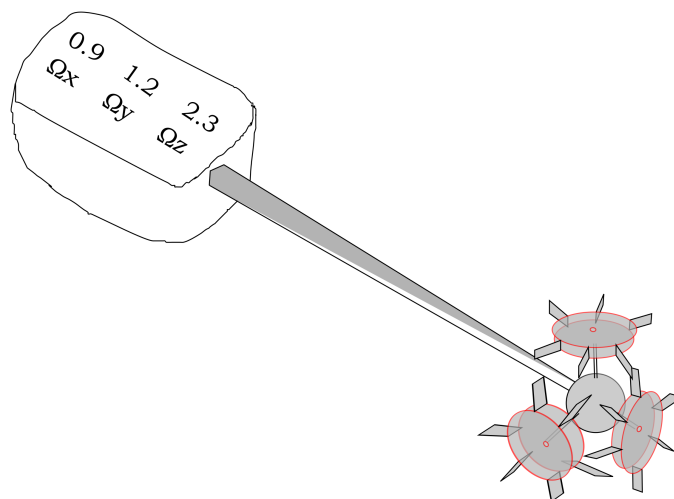
Μπορούμε κατευθείαν να δημιουργήσουμε το διανυσματικό χαρακτήρα του εμβαδού με το να ορίσουμε το εμβαδόν διαφορικού χωρίου που έχει πλευρές $d\mathbf{r}_1$ και $d\mathbf{r}_2$, ως το εξωτερικό γινόμενο:

$$d\mathbf{A} = d\mathbf{r}_1 \times d\mathbf{r}_2 .$$

(Βλέπε περισσότερα για τη σχέση της επιφάνειας με το εξωτερικό γινόμενο στο Κεφάλαιο 8 περί εξωτερικών γινομένων.)

Το φυσικό λοιπόν νόημα του στροβιλισμού είναι ότι περιγράφει ένα διάνυσμα, οι τρεις συνιστώσες του οποίου μετράνε την ανά μονάδα επιφάνειας κυκλοφορία στα τρία κάθετα επίπεδα του καρτεσιανού συστήματος. Αν θέλαμε να κατασκευάσουμε ένα στροβιλόμετρο θα έπρεπε αυτό να αποτελείται από μια ράβδο στο άκρο της οποίας να υπάρχουν τρεις φτερωτές σε τρία κάθετα επίπεδα. Ο ρυθμός που θα γύριζαν οι τρεις φτερωτές λόγω της δράσης του διανυσματικού πεδίου θα μας έδιναν τις τρεις συνιστώσες του στροβιλισμού. Υποτίθεται βέβαια ότι τα μεγέθη των τριών φτερωτών θα είχαν κατασκευαστεί με τέτοιο τρόπο και η κλίμακα της ταχύτητας περιστροφής αυτών θα είχε ρυθμιστεί καταλλήλως, ώστε το αποτέλεσμα να

μετρά ακριβώς το στροβιλισμό στο σημείο στο οποίο θα τοποθετούσαμε το άκρο της ράβδου (βλ. σχήμα 10.3).



Σχήμα 10.3: Ένα όργανο που θα μέτραγε το στροβιλισμό θα αποτελούνταν από τρεις φτερωτές σε τρία κάθετα επίπεδα. Οι συνιστώσες του στροβιλισμού θα μετρούνταν από τις ταχύτητες περιστροφής των τριών φτερωτών. Η απόληξη με τις φτερωτές θα έπρεπε να είναι εξαιρετικά μικρή ώστε να μετράει τοπικά το στροβιλισμό.

10.2 Το θεώρημα του Stokes

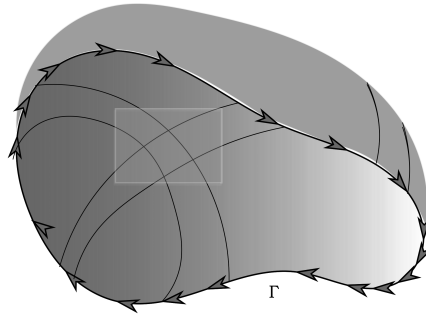
Θα δούμε τώρα πως συνδέεται ο στροβιλισμός ενός πεδίου σε κάθε σημείο με τον υπολογισμό του επικαμπύλιου ολοκλήρωματος

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} ,$$

γύρω από μία αυθαίρετη καμπύλη Γ . Θεωρούμε μία ομαλή επιφάνεια⁵ της οποίας το σύνορο είναι η Γ και καλύπτουμε την επιφάνεια με ένα πλέγμα κλειστών καμπυλών γ_i (βλ. σχήμα 10.3). Τότε η κυκλοφορία γύρω από το Γ ισούται με το άθροισμα των κυκλοφοριών σε όλα τα σύνορα, γ_i , των χωρίων του πλέγματος:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \sum_i \oint_{\gamma_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} , \quad (10.6)$$

⁵ Ακόμη και αν η κλειστή καμπύλη είναι ιδιόρρυθμη, π.χ. σχηματίζει ένα κόμπο, είναι πάντα δυνατό να κόψουμε την καμπύλη σε κομμάτια και να ενώσουμε τα άκρα τους έτσι ώστε η κάθε νέα κλειστή καμπύλη που θα δημιουργηθεί να μην έχει κόμπους.



Σχήμα 10.4: Προκειμένου να υπολογίσουμε την κυκλοφορία κατά μήκος της Γ κατασκευάζουμε επί της επιφάνειας που περικλείει η Γ ένα πυκνό πλέγμα καμπυλών και υπολογίζουμε την κυκλοφορία επί της συνοριακής γραμμής γ_i κάθε τετραπλεύρου που δημιουργείται από το πλέγμα.

διότι η συνεισφορά στην κυκλοφορία από τα σύνορα των χωρίων που βρίσκονται μέσα στη επιφάνεια μηδενίζεται αφού δύο συνορεύοντα χωρία διαγράφουν το κοινό σύνορο το καθένα με αντίθετη φορά (βλ. ένθετο σχήματος 10.4). Αυτό που μένει μόνο από την άθροιση των κυκλοφοριών είναι η κυκλοφορία των εξωτερικών συνόρων του πλέγματος, δηλαδή η ζητούμενη κυκλοφορία επί της Γ .

Εάν το πλέγμα γίνει εξαιρετικά πυκνό (με μικροσκοπικά μάτια)

$$\oint_{\gamma_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \rightarrow \Omega_i \cdot d\mathbf{A}_i ,$$

όπου $d\mathbf{A}_i$ είναι το διάνυσμα της i -οστής διαφορικής επιφάνειας μέλους του πλέγματος και Ω_i ο στροβιλισμός στο αντίστοιχο σημείο του πλέγματος. Στο όριο που το πλήθος των στοιχείων του πλέγματος τείνει στο άπειρο έχουμε από την (10.6) ότι:

$$\oint_{\Gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A \boldsymbol{\Omega} \cdot d\mathbf{A} , \quad (10.7)$$

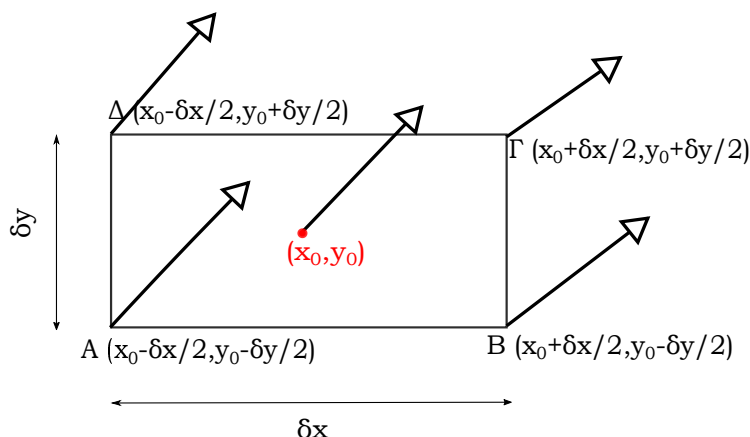
όπου A είναι οποιαδήποτε επιφάνεια με σύνορο τη Γ . Η φορά των επιφανειών $d\mathbf{A}$ σχετίζεται με τη φορά διαγραφής της Γ . Η φορά αυτή καθορίζει και τη φορά διαγραφής όλων των στοιχείων του πλέγματος και επομένως και τη φορά των $d\mathbf{A}$. Αυτό είναι το θεώρημα του Stokes.⁶

Μια ενδιαφέρουσα συνέπεια του θεωρήματος του Stokes είναι ότι αν συρρικνώσει κανείς την καμπύλη Γ σε ένα σημείο έτσι ώστε το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα στη

⁶Ο Stokes ήταν κατόχος της ίδιας έδρας Μαθηματικών που είχε ο Νεύτων. Το περιεχόμενο του θεωρήματος ήταν θέμα διαγωνισμού υποτροφίας που έδωσε ο Stokes το 1854. Ο Maxwell απάντησε στο θέμα του διαγωνίσματος και δεν είναι περίεργο ότι το θεώρημα αυτό έχει κεντρικό ρόλο στην θεωρία του ηλεκτρομαγνητισμού που ανέπτυξε αργότερα. Το θεώρημα αυτό είναι πολύ σημαντικό, αποτελεί γενίκευση του θεμελιώδους θεωρήματος του ολοκληρωτικού λογισμού, και φημολογείται ότι κάθε γενιά μαθηματικών δίνει από τότε και από μία νέα απόδειξη του θεωρήματος σε πιο γενικευμένους χώρους. Ο Stokes είναι γνωστός για τη συμβολή του στη ανάπτυξη της υδροδυναμικής όπου ο στροβιλισμός και η κυκλοφορία του πεδίου ταχυτήτων αποτελούν κεντρικές έννοιες.

σχέση (10.7) να μηδενιστεί, καταλήγουμε στο ότι το επιφανειακό ολοκλήρωμα (η ροή δηλαδή) του στροβιλισμού ενός οποιουδήποτε πεδίου σε μια οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια είναι μηδενική. Με άλλα λόγια ο στροβιλισμός δεν έχει πηγές ούτε καταβόθρες. Το αποτέλεσμα αυτό είναι καθαρά τοπολογικής φύσης.

10.3 Υπολογισμός των συνιστωσών του στροβιλισμού



Σχήμα 10.5: Υπολογισμός του έργου κατά μήκος ενός ορθογωνίου διαστάσεων δx επί δy στο επίπεδο $x - y$. Η δύναμη (εδώ σχεδιασμένη η προβολή της στο επίπεδο $x - y$) είναι ελαφρώς διαφορετική από σημείο σε σημείο.

Ας υπολογίσουμε την Ω_x συνιστώσα του στροβιλισμού του πεδίου της δύναμης \mathbf{F} . Σχηματίζουμε προς τούτο ένα παραλληλόγραμμο (βλ. σχήμα 10.5) στο επίπεδο $x - y$ με κέντρο O στο σημείο (x_0, y_0) (δεν αναφέρουμε την z συντεταγμένη διότι είναι σταθερή) και πλευρές παράλληλες στους άξονες x, y μήκους δx και δy αντίστοιχα. Αν διανύσουμε το σύνορο με τη φορά $AB\Gamma\Delta$ το εμβαδόν είναι κατά τη διεύθυνση του τρίτου άξονα z και συνεπώς:

$$\Omega_z = \lim_{\delta A_{xy} \rightarrow 0} \frac{\oint_{AB\Gamma\Delta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{\delta A_{xy}}, \quad (10.8)$$

όπου $\delta A_{xy} = \delta x \delta y$. Υπολογίζουμε πρώτα το έργο W_{AB} της δύναμης στη διαδρομή AB . Αυτό θα είναι κατά προσέγγιση:

$$W_{AB} = \int_{-\delta x/2}^{+\delta x/2} F_x \left(x_0 + s, y_0 - \frac{\delta y}{2} \right) ds,$$

ενώ το έργο στην απέναντι διαδρομή $\Gamma\Delta$ είναι:

$$W_{\Gamma\Delta} = \int_{+\delta x/2}^{-\delta x/2} F_x \left(x_0 + s, y_0 + \frac{\delta y}{2} \right) ds.$$

Αναπτύσσοντας κατά Taylor την συνάρτηση F_x

$$F_x(x_0 + s, y_0 \pm \delta y/2) = F_x(x_0, y_0) + s \frac{\partial F_x}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \pm \frac{\delta y}{2} \frac{\partial F_x}{\partial y} \Big|_{(x_0, y_0)} + \mathcal{O}(s^2, \delta y^2, s \delta),$$

βρίσκουμε ότι το συνολικό έργο στις δύο διαδρομές που είναι παράλληλες στον άξονα x είναι:

$$W_{AB} + W_{\Gamma\Delta} = - \frac{\partial F_y}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \delta x \delta y + \mathcal{O}(\delta x^2 \delta y).$$

Η μερική παράγωγος υπολογίζεται στο κέντρο O του χωρίου και δεν έχουμε κρατήσει στα αναπτύγματα όρους ανώτερης τάξεως διότι αυτοί θα μηδενισθούν όταν αργότερα διαιρέσουμε με το μέτρο του εμβαδού του χωρίου $\delta A_{xy} = \delta x \delta y$ για να προσδιορίσουμε τον στροβιλισμό στο όριο που το εμβαδόν αυτό τείνει στο μηδέν.

Ομοίως έχουμε ότι

$$W_{B\Gamma} = \int_{-\delta y/2}^{+\delta y/2} F_y \left(x_0 + \frac{\delta x}{2}, y_0 + s \right) ds, \quad W_{\Delta A} = \int_{+\delta y/2}^{-\delta y/2} F_y \left(x_0 - \frac{\delta x}{2}, y_0 + s \right) ds,$$

οπότε το συνολικό έργο στις δύο διαδρομές που είναι παράλληλες στον άξονα y είναι:

$$W_{B\Gamma} + W_{\Delta A} = \frac{\partial F_y}{\partial x} \Big|_{(x_0, y_0)} \delta x \delta y + \mathcal{O}(\delta x \delta y^2).$$

Συνεπώς το όριο (10.8) υπάρχει (κάτι που είχαμε θεωρήσει ως δεδομένο όταν ορίσαμε το στροβιλισμό) και είναι:

$$\Omega_z = \lim_{\delta A_{xy} \rightarrow 0} \frac{\oint_{AB\Gamma\Delta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}}{\delta x \delta y} = \left(\frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \Big|_{(x_0, y_0)}.$$

Με κυκλική μετάθεση των δεικτών του προηγούμενου αποτελέσματος βρίσκουμε ότι το διάνυσμα του στροβιλισμού σε κάποιο σημείο έχει τις εξής συνιστώσες σε ένα καρτεσιανό σύστημα αξόνων:

$$\boldsymbol{\Omega} = \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}, \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right), \quad (10.9)$$

με τις μερικές παραγωγούς υπολογισμένες στο εν λόγω σημείο. Το παραπάνω διάνυσμα μπορεί να γραφεί πιο κομψά υπό τη μορφή ορίζουσας:

$$\boldsymbol{\Omega} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}. \quad (10.10)$$

Αποδείξαμε τελικά ότι ο στροβιλισμός είναι το εξωτερικό γινόμενο του ∇ με το διανυσματικό πεδίο \mathbf{F} :

$$\boldsymbol{\Omega} = \nabla \times \mathbf{F} . \quad (10.11)$$

Θα μπορούσαμε να ορίσουμε εξ'αρχής τον στροβιλισμό μέσω της (10.11), όπως συνηθίζεται σε μαθηματικά κείμενα, οπότε ο διανυσματικός χαρακτήρας του στροβιλισμού θα ήταν δεδομένος εξ'αρχής, αλλά η φυσική σημασία του στροβιλισμού θα παρέμενε σκοτεινή.

Με την σύνδεση του στροβιλισμού με το πεδίο δυνάμεων μέσω της (10.11) το θεώρημα του Stokes παίρνει τη γνώριμη μορφή:

$$\oint_{\Gamma(A)} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_A (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} , \quad (10.12)$$

όπου A είναι οποιαδήποτε επιφάνεια με σύνορο τη κλειστή καμπύλη Γ .

10.4 Συντηρητικά πεδία σε τρεις διαστάσεις και στροβιλισμός

Συντηρητικά πεδία δυνάμεων είναι πεδία δυνάμεων, \mathbf{F} , που εξαρτώνται μόνο από τη θέση \mathbf{r} (δεν εξαρτώνται από τη ταχύτητα $\dot{\mathbf{r}}$ και το χρόνο t) και επιπλέον το έργο σε κάθε κλειστή διαδρομή, γ είναι πάντοτε μηδενικό:

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 . \quad (10.13)$$

Στο κεφάλαιο 7.9 δείξαμε ότι οι συντηρητικές δυνάμεις μπορούν να γραφούν ως τη βαθμίδα κάποιας δυναμικής ενέργειας⁷:

$$\mathbf{F} = -\nabla V , \quad (10.14)$$

με το δυναμικό να ορίζεται ως τη μονότιμη συνάρτηση του \mathbf{r} :

$$V(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \mathbf{F}(\mathbf{r}') \cdot d\mathbf{r}' , \quad (10.15)$$

ως προς κάποιο αυθαίρετο σημείο βαθμονόμησης του δυναμικού \mathbf{r}_0 (βλ. Κεφάλαιο 4 για τη μια διάσταση).

Επιλέγοντας ένα σύστημα αναφοράς οι συνιστώσες της δύναμης είναι:

$$F_x = -\frac{\partial V}{\partial x} , \quad F_y = -\frac{\partial V}{\partial y} , \quad F_z = -\frac{\partial V}{\partial z} ,$$

και εξ'αυτού προκύπτει ότι το πεδίο αυτό έχει μηδενικό στροβιλισμό, είναι δηλαδή

⁷ Αυτή η πρόταση ισχύει σε όλες τις διαστάσεις και όχι μόνο στις 3 διαστάσεις.

αστρόβιλο. Πράγματι:

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{F} &= \left(\frac{\partial F_y}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial y}, \frac{\partial F_z}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial z}, \frac{\partial F_x}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial x} \right) \\ &= - \left(\frac{\partial^2 V}{\partial z \partial y} - \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial z}, \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial z} - \frac{\partial^2 V}{\partial z \partial x}, \frac{\partial^2 V}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 V}{\partial x \partial y} \right) \\ &= (0, 0, 0),\end{aligned}$$

επειδή η μερική παραγωγή είναι αντιμεταθετική⁸, δηλαδή είναι:

$$\partial^2 V / \partial x \partial y = \partial^2 V / \partial y \partial x .$$

Το ότι ένα συντηρητικό πεδίο είναι αστρόβιλο μπορούμε να το δείξουμε αμέσως γράφοντας το στροβιλισμό διανυσματικά και χρησιμοποιώντας την ιδιότητα ότι το εξωτερικό γινόμενο δύο ιδίων διανυσματικών μεγεθών⁹ μηδενίζεται. Έτσι ο στροβιλισμός της βαθμίδας πεδίου είναι μηδενικός:

$$\nabla \times \mathbf{F} = -\nabla \times \nabla V = -(\nabla \times \nabla)V = \mathbf{0} .$$

Τώρα θα αποδείξουμε εκ νέου, χωρίς τη χρήση της δυναμικής ενέργειας ότι κάθε συντηρητικό πεδίο είναι αστρόβιλο αλλά και το αντίστροφο, δηλαδή ότι τα αστρόβιλα πεδία είναι συντηρητικά.

Απόδειξη:

- (i.) Εάν το πεδίο είναι συντηρητικό τότε το έργο δεν εξαρτάται από τη διαδρομή και συνεπώς

$$\oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0 .$$

Αυτό ισχύει για κάθε κλειστή διαδρομή. Επομένως όταν η διαδρομή συρρικνώνεται γύρω από κάποιο σημείο, ο μηδενισμός της κυκλοφορίας συνεπάγεται και μηδενισμό του στροβιλισμού στο εν λόγω σημείο.

- (ii.) Εάν το πεδίο είναι αστρόβιλο, $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$, τότε από το θεώρημα του Stokes (10.12) η κυκλοφορία γύρω από οποιαδήποτε κλειστή καμπύλη μηδενίζεται (υπό την προϋπόθεση ότι η \mathbf{F} είναι καλώς ορισμένη σε κάθε σημείο εσωτερικό του χώρου και το χωρίο δεν έχει τρύπες). Αυτό με τη σειρά του συνεπάγεται

⁸Ικανή συνθήκη για να είναι οι μικτές μερικές παράγωγοι ίδιες κατά την αντιμετάθεση είναι οι $\partial^2 V / \partial x \partial y$ και $\partial^2 V / \partial y \partial x$ να είναι συνεχείς συναρτήσεις, Αυτό π.χ. δεν συμβαίνει για την $V = xy(x^2 - y^2) / (x^2 + y^2)$ για $(x, y) \neq (0, 0)$ και $V = 0$ όταν $(x, y) = (0, 0)$.

⁹Το γεγονός ότι τα δύο διανυσματικά μεγέθη δεν είναι ακριβώς διανύσματα, αλλά διανυσματικοί τελεστές δεν αναιρεί το διανυσματικό τους χαρακτήρα και όλες τις σχέσεις που συνεπάγεται αυτός.

ότι το

$$\int_{\mathbf{r}_1, \gamma}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} ,$$

είναι ανεξάρτητο της διαδρομής γ που συνδέει δύο οποιαδήποτε σημεία \mathbf{r}_1 και \mathbf{r}_2 του χώρου. Αυτό φαίνεται καθαρά αν λάβουμε δύο διαδρομές γ_1 και γ_2 που συνδέουν τα \mathbf{r}_1 και \mathbf{r}_2 . Τότε στην κλειστή διαδρομή $\gamma = \gamma_1 \cup (-\gamma_2)$ (δηλαδή από το \mathbf{r}_1 στο \mathbf{r}_2 κατά μήκος της γ_1 και στη συνέχεια πίσω στο \mathbf{r}_1 ακολουθώντας την γ_2 με την ανάποδη φορά) θα είναι:

$$\begin{aligned} 0 &= \oint_{\gamma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathbf{r}_1, \gamma_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} + \int_{\mathbf{r}_2, -\gamma_2}^{\mathbf{r}_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} \\ &= \int_{\mathbf{r}_1, \gamma_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} - \int_{\mathbf{r}_1, \gamma_2}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} . \end{aligned}$$

Επομένως

$$\int_{\mathbf{r}_1, \gamma_1}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_{\mathbf{r}_1, \gamma_2}^{\mathbf{r}_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} ,$$

για κάθε \mathbf{r}_1 και \mathbf{r}_2 του χώρου και το πεδίο \mathbf{F} είναι συντηρητικό.

Θα δείξουμε τώρα, μέσω του στροβιλισμού, ότι κεντρικές δυνάμεις της μορφής

$$\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}} , \quad (10.16)$$

είναι εκ κατασκευής συντηρητικές. Αρκεί να δείξουμε ότι $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. Θα χρησιμοποιήσουμε την ταυτότητα

$$\nabla \times (\phi \Phi) = (\nabla \phi) \times \Phi + \phi \nabla \times \Phi .$$

όπου $\phi(\mathbf{r})$ κάποιο βαθμωτό και $\Phi(\mathbf{r})$ κάποιο διανυσματικό πεδίο. Στην περίπτωση της ιστροπικής κεντρικής δύναμης (10.16) θα έχουμε:

$$\begin{aligned} \nabla \times \left(\frac{f(r)}{r} \mathbf{r} \right) &= \nabla \left(\frac{f(r)}{r} \right) \times \mathbf{r} + \frac{f(r)}{r} \nabla \times \mathbf{r} \\ &= \frac{d}{dr} \left(\frac{f(r)}{r} \right) \hat{\mathbf{r}} \times \mathbf{r} + \frac{f(r)}{r} \nabla \times \mathbf{r} \\ &= \mathbf{0} , \end{aligned}$$

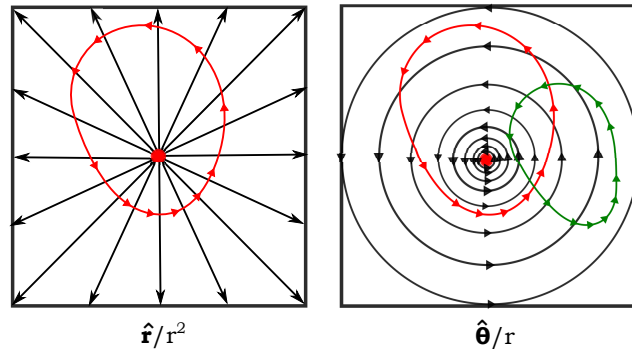
αφού εξαιτίας της (10.10) προκύπτει ότι $\nabla \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$.

10.5 * Σχόλιο περί των αστροβίλων πεδίων

Ας θεωρήσουμε τα πεδία

$$\mathbf{F}_1 = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \quad \text{και} \quad \mathbf{F}_2 = \frac{\hat{\boldsymbol{\theta}}}{r}, \quad (10.17)$$

σε έναν διδιάστατο χώρο (βλ. σχήμα 10.6).



Σχήμα 10.6: Τα δύο πεδία της (10.17). Το πρώτο, όντας ένα ιστροπικό κεντρικό πεδίο, είναι συντηρητικό, ενώ το δεύτερο όχι, αν και αστροβίλο παντού εκτός της αρχής όπου δεν ορίζεται. Το έργο κατά μήκος της κόκκινης καμπύλης είναι 2π , ενώ κατά μήκος της πράσινης καμπύλης είναι 0. Το γεγονός ότι η πράσινη καμπύλη δεν εμπεριέχει την αρχή των αξόνων ενεργοποιεί το αστροβίλο του πεδίου καθιστώντας μηδενικό το έργο κατά μήκος της κλειστής πράσινης καμπύλης.

Δεν είναι δύσκολο να κατασκευάσουμε τις μορφές αυτών των πεδίων σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\mathbf{F}_1 = \frac{(x, y)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \quad \text{και} \quad \mathbf{F}_2 = \frac{(-y, x)}{x^2 + y^2}. \quad (10.18)$$

Και τα δύο αυτά πεδία, παντού όπου αυτά ορίζονται, έχουν μηδενικό στροβιλισμό, όπως μπορεί να διαπιστώσει κανείς εύκολα εκτελώντας τις πράξεις (υπολογίζοντας την οριζουσα του στροβιλισμού). Παρόλ' αυτά είναι άμεσα αντιληπτό από τη μορφή τους (βλ. σχήμα 10.6) ότι το πρώτο από αυτά είναι ένα συντηρητικό πεδίο ενώ το δεύτερο όχι: Αν υπολογίσουμε το $\oint \mathbf{F}_2 \cdot d\mathbf{r}$ κατά μήκος κάποιας κλειστής διαδρομής που περιελίσσεται γύρω από την αρχή των αξόνων το αποτέλεσμα θα είναι μη μηδενικό· για την ακρίβεια θα είναι 2π φορές το πλήθος των περιελίξεων της κλειστής καμπύλης.

Συνήθως το δεύτερο πεδίο αναφέρεται ως χαρακτηριστικό παράδειγμα πεδίου το οποίο παρόλο που έχει στροβιλισμό 0 (εδώ, στις 2 διαστάσεις, όπου ο στροβιλισμός είναι αριθμός και όχι διάνυσμα), δεν είναι συντηρητικό με το επιχείρημα ότι το πεδίο δεν ορίζεται στο 0 και επομένως υπάρχει “τρύπα” στο χώρο ορισμού του. Δεν είναι λοιπόν ακριβές ότι ο στροβιλισμός είναι 0 παντού. Είναι 0 σε έναν μη συνεκτικό¹⁰

¹⁰Συνεκτικός χώρος είναι αυτός στον οποίο μια κλειστή καμπύλη είναι δυνατό να συρρικνωθεί σε

χώρο και επομένως αυτό δεν είναι αρκετό για να είναι το πεδίο συντηρητικό.

Θα μπορούσε όμως κάποιος να παρατηρήσει ότι και το πρώτο πεδίο δεν ορίζεται στο 0 (το πεδίο ορισμού του έχει πάλι τρύπα), αλλά το πεδίο αυτό αυτό είναι συντηρητικό. Όποια κλειστή διαδρομή και να θεωρήσουμε, είτε αυτή τυλίγεται γύρω από την αρχή είτε όχι το έργο είναι 0. Τι διαφορετικό έχουν αυτές οι 2 περιπτώσεις;

Ας δούμε αν αυτά τα δύο πεδία μπορούν να προκύψουν από κάποια δυναμική ενέργεια (μαντεύοντας τη λύση):

$$\mathbf{F}_1 = -\nabla V_1(r, \theta) = -\nabla \left(\frac{1}{r} \right) \quad \text{και} \quad \mathbf{F}_2 = -\nabla V_2(r, \theta) = -\nabla(-\theta). \quad (10.19)$$

Στην παραπάνω κατασκευή χρησιμοποιήσαμε το γεγονός ότι σε πολικές συντεταγμένες η βαθμίδα έχει τη μορφή¹¹

$$\nabla f(r, \theta) = \frac{\partial f}{\partial r} \hat{\mathbf{r}} + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\boldsymbol{\theta}}. \quad (10.20)$$

Και τα δύο μοιάζουν να απορρέουν από απλές συναρτήσεις δυναμικών ενεργειών. Μήπως τελικά πρόκειται για συντηρητικά πεδία; Το πρώτο σίγουρα ναι, γιατί καθώς τρέχουμε κατά μήκος μιας ακτίνας προχωράμε προς χαμηλότερα επίπεδα δυναμικής ενέργειας, χωρίς ποτέ να τμήσουμε κάποια άλλη ακτινική γραμμή πεδίου. Το δεύτερο όμως πεδίο ενώ κατηφορίζει προς χαμηλότερα δυναμικά κατά μήκος μιας δυναμικής γραμμής του πεδίου, μόλις η δυναμική γραμμή του διαγράψει έναν κύκλο, συναντά και πάλι τον εαυτό της και επομένως ξαναανυψώνεται το δυναμικό της σαν τα παραπλανητικά σχέδια-οφθαλμαπάτες του Escher. Από πλευράς δυναμικής ενέργειας $V = -\theta$, αφού η γωνία ταυτίζεται με τον εαυτό της όταν προστεθεί το 2π , η δυναμική αυτή ενέργεια θα παρουσιάζει ασυνέχειες.



Σχήμα 10.7: Waterfall, 1961, λιθογραφία του M. C. Escher.

σημείο. Αν ένας διδιάστατος χώρος έχει τρύπα, μια κλειστή καμπύλη που τυλίγεται γύρω από την τρύπα δεν μπορεί να συρρικνωθεί σε σημείο, αφού η μικρότερη διάστασή της είναι η περίμετρος της τρύπας.

¹¹ Η βαθμίδα σε πολικές συντεταγμένες υπολογίζεται ως εξής: έχουμε,

$$\frac{\partial f}{\partial r} dr + \frac{\partial f}{\partial \theta} d\theta = df = \nabla f \cdot d\mathbf{r} = (\nabla f)_r dr + (\nabla f)_\theta r d\theta,$$

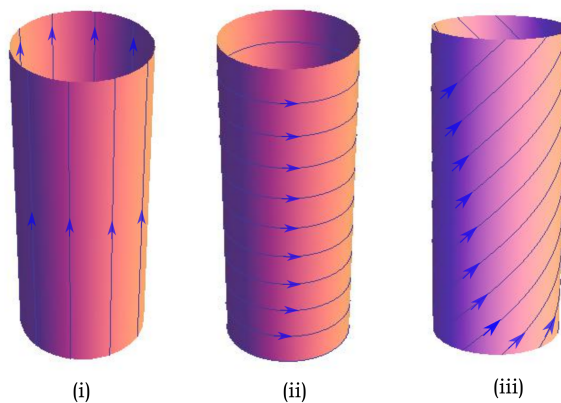
αφού $d\mathbf{r} = dr \hat{\mathbf{r}} + r d\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$ και $\nabla f = (\nabla f)_r \hat{\mathbf{r}} + (\nabla f)_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}}$. Συνεπώς, είναι:

$$(\nabla f)_r = \frac{\partial f}{\partial r}, \quad (\nabla f)_\theta = \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta},$$

όπως στην (10.20).

Ίσως πιο κατανοητό και ξεκάθαρο θα ήταν το εξής παράδειγμα: Φανταστείτε έναν άπειρο κύλινδρο (διδιάστατη επιφάνεια και πάλι). Ένα ομογενές πεδίο το οποίο κατευθύνεται σε όλη την επιφάνεια του κυλίνδρου και έχει διεύθυνση κατά μήκος του άξονα του κυλίνδρου θα ήταν και αστρόβιλο και συντηρητικό. Αν όμως είχε κατεύθυνση κατά μήκος ενός κύκλου κάθετου στον άξονα θα ήταν αστρόβιλο αλλά μη συντηρητικό. Μια κλειστή διαδρομή η οποία θα περιελισσόταν στον κύλινδρο θα οδηγούσε σε μη μηδενικό έργο. Μετά από μια πλήρη στροφή η γωνία θα μεγάλωνε, αλλά η διαφορετική αυτή γωνία θα περιέγραφε το ίδιο σημείο. Τέλος αν οι γραμμές του πεδίου ακολουθούσαν έλικες σταθερού βήματος επί του κυλίνδρου, πάλι το πεδίο θα ήταν αστρόβιλο αλλά μη συντηρητικό (σκεφθείτε το έργο κατά μήκος ενός κύκλου κάθετου στον άξονα του κυλίνδρου). Το δυναμικό θα μεγάλωνε σαν γραμμικός συνδυασμός της γωνίας περιστροφής και της μετατόπισης παράλληλα στον άξονα. Αφού όμως η γωνία δεν είναι μονοσήμαντα ορισμένη (το (z, θ) και το $(z, \theta + 2\pi)$ περιγράφουν την ίδια θέση), η δυναμική ενέργεια δεν θα ήταν καλά ορισμένη. Προσέξτε ότι στην περίπτωση αυτή οι γραμμές του πεδίου (οι έλικες) δεν τέμνονται μεταξύ τους. Καταλήγουμε λοιπόν στο συμπέρασμα ότι ούτε αυτό το στοιχείο (η μη τομή των δυναμικών γραμμών) δεν είναι αρκετό για να θεμελιωθεί η συντηρητικότητα.

Καταλήγοντας, θα μπορούσαμε να πούμε ότι όταν ο χώρος έχει τρύπα (ή τρύπες) η τοπολογία του πεδίου σχετικά με τις τρύπες καθορίζει την συντηρητικότητα: Αν οι γραμμές του πεδίου περιελίσσονται με οποιονδήποτε τρόπο γύρω από μια τρύπα τότε το πεδίο ακόμη και αν είναι αστρόβιλο είναι *μη συντηρητικό*.



Σχήμα 10.8: Τρία διανυσματικά πεδία πάνω σε μια κυλινδρική επιφάνεια. Και τα τρία είναι αστρόβιλα (ομογενή πεδία). Εκτός από το πρώτο (το (i)), όμως, τα άλλα δύο (τα (ii) και (iii)) που τυλίγονται γύρω από την τρύπα δεν είναι συντηρητικά.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 10

- Ο στροβιλισμός μετράει το επικαμπύλιο κλειστό ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου σε μια απειροστού εύρους καμπύλη, προς το εμβαδόν που περικλείει η καμπύλη αυτή. Ο προσανατολισμός της επιφάνειας θα καθορίσει την αντίστοιχη συνιστώσα του στροβιλισμού.
- Σύμφωνα με το θεώρημα του Stokes, το επικαμπύλιο ολοκλήρωμα ενός διανυσματικού πεδίου σε μια κλειστή καμπύλη, ισούται με το επιφανειακό ολοκλήρωμα του στροβιλισμού του πεδίου στην οποιαδήποτε επιφάνεια έχει ως σύνορο την καμπύλη αυτή.
- Ένα πεδίο δύναμης είναι συντηρητικό (και επομένως μπορεί να προέλθει από την κλίση κάποιου βαθμωτού δυναμικού) αν ο στροβιλισμός της δύναμης είναι παντού μηδέν.
- Αν το πεδίο της δύναμης είναι αστρόβιλο παντού εκτός από μια περιοχή ή σημείο ου χώρου, η τοπολογία του πεδίου (αν το πεδίο περιελίσσεται γύρω από την περιοχή αυτή) θα καθορίσει τη συντηρητικότητά του.

11

Κέντρο μάζας

11.1 Κέντρο μάζας – Κρούσεις

Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα – τον οποίο μέχρι στιγμής δεν έχουμε καθόλου χρησιμοποιήσει και ενδιαφερόμασταν για την κίνηση ενός σωματιδίου σε κάποιο πεδίο δυνάμεων το οποίο προερχόταν από το περιβάλλον του, και όχι για την κίνηση σωματιδίων εξαιτίας της μεταξύ τους αλληλεπίδρασης – μας επιτρέπει, όπως θα δούμε, να αντιμετωπίζουμε ένα σύνολο από σωματίδια ως ένα αντικείμενο, και πιο συγκεκριμένα, όταν πρόκειται για στερεά σώματα, μπορούμε να μελετάμε την κίνηση τους (όχι τις περιστροφές τους) ως αν ήταν σωματίδια και όχι σώματα με πεπερασμένες διαστάσεις. Μάλιστα ο ίδιος ο Νεύτωνας αναγκάστηκε να εισάγει το νόμο αυτό προκειμένου να εξετάσει την κίνηση σωμάτων με πεπερασμένες διαστάσεις όπως για παράδειγμα τις κινήσεις των πλανητών του ηλιακού μας συστήματος.

Αν και η ανάλυση που θα ακολουθήσει θα μπορούσε κάλλιστα να πραγματοποιηθεί σε ένα χώρο τριών διαστάσεων, θα προτιμήσουμε να εργαστούμε σε μία διάσταση έτσι ώστε (i) να είναι πιο απλή η γραφή, (ii) τα επιχειρήματα συμμετρίας που θα χρησιμοποιήσουμε παρακάτω να είναι πιο καθαρά και (iii) να γίνει κατανοητό ότι η έννοια της δατήρησης της ορμής και του κέντρο μάζας δεν είναι αποκλειστικά χαρακτηριστικά του τρισδιάστατου χώρου. Έτσι, θα ασχοληθούμε με ένα σύνολο σωματιδίων τα οποία κινούνται σε ένα μονοδιάστατο κόσμο και τα οποία αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους με δυνάμεις νευτώνειου τύπου,¹ δίχως να υπάρχει κάποιο

¹Είθισται ο όρος δυνάμεις νευτώνειου τύπου να χρησιμοποιείται με δύο εντελώς διαφορετικά νοήματα: Είτε σε δυνάμεις που υπακούουν στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα, δηλαδή ζεύγη δυνάμεων της

εξωτερικό πεδίο δυνάμεων το οποίο να επηρεάζει την κίνησή τους. Καταγράφοντας την εξίσωση κίνησης για κάθε ένα από τα N σωματίδια θα έχουμε:

$$\begin{aligned} m_1 \ddot{x}_1 &= F_{2 \rightarrow 1} + F_{3 \rightarrow 1} + F_{4 \rightarrow 1} + \dots F_{N \rightarrow 1}, \\ m_2 \ddot{x}_2 &= F_{1 \rightarrow 2} + F_{3 \rightarrow 2} + F_{4 \rightarrow 2} + \dots F_{N \rightarrow 2}, \\ m_3 \ddot{x}_3 &= F_{1 \rightarrow 3} + F_{2 \rightarrow 3} + F_{4 \rightarrow 3} + \dots F_{N \rightarrow 3}, \\ &\dots \\ m_N \ddot{x}_N &= F_{1 \rightarrow N} + F_{2 \rightarrow N} + F_{3 \rightarrow N} + \dots F_{N-1 \rightarrow N}, \end{aligned} \quad (11.1)$$

όπου m_i, \ddot{x}_i , η μάζα και η επιτάχυνση του i -στού σωματιδίου και $F_{i \rightarrow j}$ η δύναμη που ασκείται στο j -στό σωματίδιο από το i -στό σωματίδιο. Αν προσθέσουμε όλες αυτές τις N εξισώσεις καταλήγουμε στο εντυπωσιακό αποτέλεσμα:

$$\sum_{i=1}^N m_i \ddot{x}_i = 0, \quad (11.2)$$

αφού όλες οι δυνάμεις εμφανίζονται κατά ζεύγη με αντιμετατεθειμένους δείκτες και επομένως, με αντίστοιχο άθροισμα για κάθε ζεύγος μηδέν (εξαιτίας του 3ου νόμου του Νεύτωνα). Αν ορίσουμε λοιπόν τον ακόλουθο γραμμικό συνδυασμό των θέσεων όλων των σωματιδίων,

$$R_{KM} \equiv \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{\sum_{i=1}^N m_i} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i x_i}{M}, \quad (11.3)$$

και δεδομένου του αμετάβλητου της μάζας των σωματιδίων, συμπεραίνουμε ότι η επιτάχυνση αυτής της ποσότητας R_{KM} , που έχει διαστάσεις μήκους, είναι μηδενική. Με άλλα λόγια το R_{KM} , κινείται με σταθερή ταχύτητα! Είναι το R_{KM} , η θέση κάποιου από τα σωματίδια; Όχι κατ' ανάγκη, όπως μπορείτε εύκολα να διαπιστώσετε για δύο σωματίδια. Το R_{KM} αντιστοιχεί σε μια θέση, κάπου ανάμεσα στην περιοχή² που βρίσκονται διασκορπισμένα τα σωματίδια και μάλιστα βρίσκεται πλησιέστερα στις μεγαλύτερες μάζες του συστήματος (δοκιμάστε με ένα σύστημα αποτελούμενο από δύο πολύ ανόμοιες μάζες)· γι' αυτό το λόγο ονομάζεται κέντρο μάζας του συστήματος.

Από τις παραπάνω εξισώσεις βλέπουμε ότι $\dot{R}_{KM} =$ σταθερό· με άλλα λόγια το άυλο αυτό σημείο, κάπου ανάμεσα στα σωματίδια, κινείται με σταθερή ταχύτητα,

μορφής δράση-αντίδραση, είτε σε δυνάμεις παγκοσμίου έλξεως, τον σχετικό νόμο για τις οποίες διατύπωσε και πάλι ο Νεύτων. Στις διαλέξεις θα χρησιμοποιούμε τον όρο με το πρώτο του νόημα.

²Είναι εύκολο να δείχτει ότι $x_{\min} < R_{KM} < x_{\max}$.

με την ταχύτητα που είχε αρχικά και που μπορεί κανείς εύκολα να υπολογίσει αν γνωρίζει τις αρχικές ταχύτητες όλων των σωματιδίων. Μπορεί να μην γνωρίζουμε τη θέση του κάθε σωματιδίου, και ίσως η εύρεση αυτών να αποτελεί ένα πολύ δύσκολο μαθηματικό πρόβλημα, αλλά γνωρίζουμε κάτι πολύ σημαντικό και άσχετο με τις λεπτομέρειες των δυνάμεων που ασκούνται μεταξύ των σωματιδίων: τη θέση του κέντρου μάζας ανά πάσα χρονική στιγμή.

Το γεγονός ότι η ταχύτητα του κέντρου μάζας είναι σταθερή θυμίζει τη διατήρηση της ταχύτητας ενός ελεύθερου σωματιδίου. Στην πραγματικότητα η θεώρηση του κέντρου μάζας επιτυγχάνει ακριβώς αυτό: εξισώνει ένα σύστημα από σωματίδια, οσοδήποτε πολλά και αν είναι αυτά, με ένα σωματίδιο, με μάζα όσο η ολική μάζα των σωματιδίων, το οποίο βρίσκεται στο κέντρο μάζας αυτών. Ο τρίτος νόμος του Νεύτωνα μας επιτρέπει να αγνοούμε τι συμβαίνει «εσωτερικά» στο σύστημα και να προσδιορίζουμε πανεύκολα τη «θέση» του συστήματος, ωσάν να το βλέπαμε από πολύ μακριά και να το αντιμετωπίζαμε ως σημείο. Μάλιστα, όπως θα δούμε στη συνέχεια, η θεώρηση του κέντρου μάζας εξακολουθεί να είναι χρήσιμη και σε περιπτώσεις όπου το σύστημα δεν είναι απομονωμένο, αλλά ασκούνται επιπλέον των εσωτερικών δυνάμεων και εξωτερικές δυνάμεις στα σωματίδια, από το περιβάλλον του συστήματος.

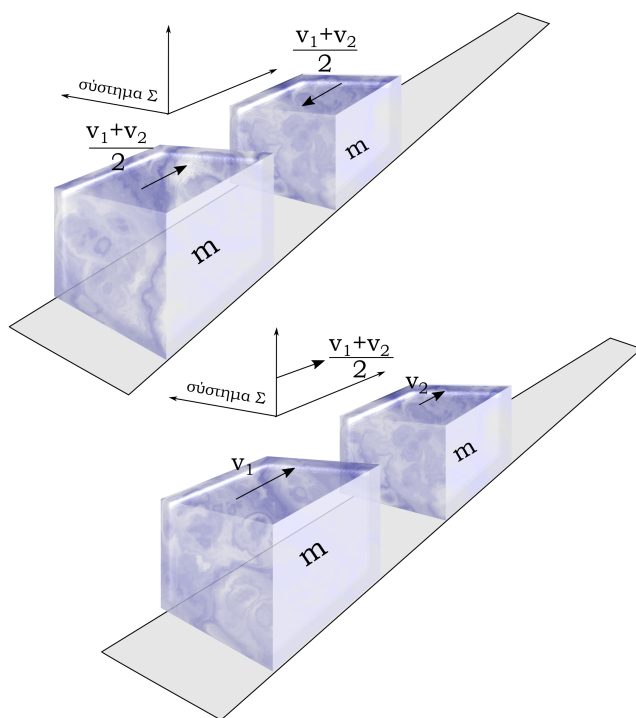
Ας ξαναγράψουμε τώρα τη διατήρηση της ταχύτητας του κέντρου μάζας, ελαφρώς παραλλαγμένη:

$$M\dot{R}_{\text{KM}} = \text{σταθ} = \sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i . \quad (11.4)$$

Η μορφή αυτή έχει το ακόλουθο πλεονέκτημα. Καθ' όλη τη χρονική διάρκεια που μελετάμε το σύστημα των σωματιδίων μπορεί η μάζα τμημάτων του συστήματος να μεταβάλλεται, όχι όμως και η συνολική του μάζα. Για παράδειγμα, μπορεί να αποκοπεί κάποιο θραύσμα από ένα σώμα, χωρίς να μεταβληθεί η συνολική μάζα του συστήματος στην οποία θα πρέπει να συνυπολογίσουμε και τη μάζα του θραύσματος. Το γεγονός ότι η περιέργη αυτή ποσότητα είναι σταθερή είναι εντυπωσιακό και θεμελιακό (θυμηθείτε τη διατήρηση της ενέργειας). Ο περιορισμός που θέσαμε, ότι δηλαδή το σύστημα πρέπει να είναι απομονωμένο, καθόλου δεν μειώνει τη σημασία της διατήρησης αυτής. Σχεδόν πάντα, μπορούμε να θεωρήσουμε ένα σύστημα απομονωμένο από το περιβάλλον του, όταν η επίδραση του περιβάλλοντος είναι μηδαμνή (π.χ. το ηλιακό μας σύστημα), ή ο χρόνος που απαιτείται ώστε το περιβάλλον να κάνει αισθητή την παρουσία του στο σύστημα είναι πολύ μεγάλος σε σχέση με τον χαρακτηριστικό χρόνο που συμβαίνουν οι αλλαγές εντός του συστήματος (ένα θερμικά μονωμένο δοχείο με αέριο). Η διατηρούμενη αυτή ποσότητα ονομάζεται ορμή του συστήματος. Όπως και η διατήρηση της ενέργειας, έτσι και η διατήρηση της ορμής είναι συνέπεια κάποιας βαθύτερης συμμετρίας του σύμπαντος, και συγκε-

κριμένα της ομογένειας του χώρου, δηλαδή της συμμετρίας σε χωρική μετάθεση.

Στη συνέχεια, θα συνάγουμε τη διατήρηση της ορμής βασισμένοι αποκλειστικά και μόνο στο γεγονός ότι οι φυσικοί νόμοι πρέπει να μένουν ίδιοι όταν τους εξετάζουμε σε διαφορετικό αδρανειακό σύστημα αναφοράς καθώς και σε απλά επιχειρήματα συμμετρίας. Ας θεωρήσουμε δύο σωματίδια ίδιας μάζας τα οποία κινούνται



Σχήμα 11.1: Μεταβαίνοντας σε σύστημα αναφορά Σ που κινείται με τη μέση ταχύτητα των δύο σωμάτων, $(v_1 + v_2)/2$, τα δύο σώματα φαίνονται να προσεγγίζουν το ένα το άλλο με την ίδια ταχύτητα. Επομένως, μετά την κρούση τους, δεν μπορεί παρά τα σώματα να έχουν πάλι ίδιες ταχύτητες απομακρυνόμενα το ένα από το άλλο. Η σχέση της κοινής τους ταχύτητας, v' , μετά την κρούση, με αυτήν προ της κρούσης, καθορίζεται από τις λεπτομέρειες της κρούσης.

σε λείο οριζόντιο δάπεδο (φανταστείτε δύο πανομοιότυπα βαγόνια κινούμενα πάνω σε αεροτροχιά) με ταχύτητες τέτοιες ώστε το σωματίδιο 1 να πλησιάζει το 2. Ας κινηθούμε πάνω στη διεύθυνση κίνησης των σωματιδίων με τη μέση ταχύτητα αυτών δηλαδή με $v = (v_1 + v_2)/2$. Στο αδρανειακό αυτό σύστημα παρατήρησης τα σωματίδια φαίνονται να κινούνται με ταχύτητες $v_1 - v = (v_1 - v_2)/2$, και $v_2 - v = -(v_1 - v_2)/2$ αντίστοιχα, δηλαδή με ίσες και αντίθετες ταχύτητες (βλ. σχήμα 11.1). Εφόσον η κατάσταση είναι απολύτως συμμετρική (αν αντικαταστήσει δηλαδή κάποιος το δεξιά με το αριστερά δεν πρόκειται να παρατηρήσει καμιά αλλαγή αφού τα δύο σωματίδια είναι πανομοιότυπα), αμέσως μετά τη σύγκρουση των δύο σωματιδίων δεν μπορεί παρά να διατηρηθεί αυτή η συμμετρία, δηλαδή τα δύο σωματίδια θα απομακρύνονται το ένα από το άλλο με ίδιες ταχύτητες. Αν στο σύστημα αυτό παρατήρησης οι

ταχύτητες μετά τη σύγκρουση είναι $-v'$ και v' αντίστοιχα, στο αρχικό σύστημα παρατήρησης οι ταχύτητες θα είναι $v-v' = -v'+(v_1+v_2)/2$ και $v+v' = -v'+(v_1+v_2)/2$ αντίστοιχα. Παρατηρεί λοιπόν κανείς ότι σε αυτή την περίπτωση η ολική ορμή του συστήματος διατηρείται:

$$mv_1 + mv_2 = m \left[-v' + \frac{v_1 + v_2}{2} \right] + m \left[v' + \frac{v_1 + v_2}{2} \right].$$

Βέβαια με τον παραπάνω συλλογισμό δεν μπορούσαμε να υπολογίσουμε μονοσήματα την κίνηση που θα εκτελέσουν τα δύο σωματίδια, αλλά αυτό είναι κάτι το οποίο είναι λογικό να μην μπορούμε να το υπολογίσουμε. Μεσολαβεί η διαδικασία της κρούσης για την οποία δεν διαθέτουμε και πολλές λεπτομέρειες. Για παράδειγμα, αν η κρούση είναι τέτοια ώστε τα σωματίδια να συνενώνονται κατά την κρούση³ δεν μπορεί παρά να είναι $v' = 0$, οπότε το συσσωμάτωμα θα κινείται με ταχύτητα $(v_1 + v_2)/2$ (ακριβώς η λύση στην οποία θα καταλήγαμε αν χρησιμοποιούσαμε τη διατήρηση της ορμής για το συσσωμάτωμα). Αν η κρούση είναι τέτοια ώστε να διατηρείται η ολική κινητική ενέργεια,⁴ το μέγεθος που παράγεται από τον ιδιόμορφο αυτό συνδυασμό μάζας και ταχύτητας, τότε εύκολα πάλι καταλήγει κανείς στο γνωστό αποτέλεσμα ανταλλαγής των ταχυτήτων. $v'_1 = v_2$ και $v'_2 = v_1$. Προφανώς κάθε άλλη ενδιάμεση περίπτωση ανάμεσα στις δύο προαναφερθείσες $0 < v' < (v_1 - v_2)/2$ (ημελαστική κρούση) ή $v' > (v_1 - v_2)/2$ (εκρηκτική ή εξώθερμη κρούση) είναι πλήρως αποδεκτή ως φυσική διαδικασία κρούσης. Η ενδιαφέρουσα παρατήρηση είναι ότι, για λόγους συμμετρίας του κόσμου μας και μόνο, ο συνδυασμός $mv_1 + mv_2$ (η συνολική ορμή) στο παράδειγμα αυτό των δύο σωματιδίων που αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους οφείλει να είναι σταθερός και ανεξάρτητος του είδους της αλληλεπίδρασης!

Προκειμένου να ελέγξουμε αν ισχύει γενικά η διατήρηση της ορμής σε οποιοδήποτε απομονωμένο σύστημα σωμάτων, θα θεωρήσουμε στη συνέχεια την κρούση δύο σωματιδίων με λόγο μαζών 1 προς 2. Όμως, και στην περίπτωση αυτή, το δεύτερο σώμα με τη διπλάσια μάζα μπορεί να θεωρηθεί ως δύο ξεχωριστά σωματίδια, τα οποία ύστερα από την αλληλουχία όλων των κρούσεων είναι αναγκασμένα να κινηθούν ως συσσωμάτωμα. Είδαμε, όμως, ότι σε κάθε κρούση δύο σωματιδίων ίδιας μάζας η συνολική ορμή τους διατηρείται, ανεξάρτητα από τις λεπτομέρειες της σύγκρουσης. Μπορεί λοιπόν κανείς να δείξει με τον ίδιο αναλυτικό τρόπο όπως και

³Μια τέτοιου είδους κρούση αποκαλείται *πλαστική*.

⁴Για να συμβεί κάτι τέτοιο θα πρέπει η αλληλεπίδραση των δύο σωματιδίων κατά τη διαδικασία της κρούσης να αφορά σε μια συντηρητική δύναμη και μάλιστα περιορισμένης εμβέλειας, οπώς ώστε όταν τα δύο σωματίδια απομακρυνθούν περισσότερο από το εύρος δράσης της δύναμης να μηδενίζεται η αλληλεπίδραση. Η κρούση σε αυτή την περίπτωση καλείται *ελαστική* και λόγω διατήρησης της ολικής ενέργειας κατά τη διαδικασία της κρούσης, η συνολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων προ και μετά την κρούση είναι ίδια αφού η δυναμική ενέργεια της αλληλεπίδρασης είναι ίδια ενόσω τα σωματίδια βρίσκονται σε απόσταση μηδενικής αλληλεπίδρασης.

προηγουμένως, μεταβαίνοντας δηλαδή στο σύστημα αυτό που βλέπει τα εκάστοτε δύο συγκρουόμενα σωματίδια να προσεγγίζουν το ένα το άλλο με την ίδια ταχύτητα, ότι η συνολική ορμή και αυτού του συστήματος διατηρείται. Όμοια δείχνεται ότι, κατά την κρούση δύο οποιωνδήποτε σωματιδίων με ρητό λόγο μαζών η συνολική ορμή τους διατηρείται. Προφανώς αυτό θα ισχύει και για σωματίδια με άρρητο λόγο μαζών αφού κάθε άρρητος μπορεί να προσεγγιστεί οσοδήποτε με κάποιο ρητό αριθμό. Όσο για τον μηχανισμό της κρούσης δεν χρειάστηκε να εξετάσουμε τις λεπτομέρειες αυτού. Θα μπορούσε να είναι μια στιγμιαία και βίαιη κρούση, ή μια αργή βαθμιαία κρούση μέσω ενός ελατηρίου, ή ακόμη και μια έκρηξη που συμβαίνει κατά τη διάρκεια της επαφής των δύο σωματιδίων· το σημαντικό είναι ότι πάντα πρόκειται για αμοιβαία αλληλεπίδραση μεταξύ δύο μόνο σωμάτων.

Αφού δείξαμε για άλλη μια φορά ότι η συνολική ορμή ενός απομονωμένου συστήματος διατηρείται, στηριζόμενοι σε απλά επιχειρήματα συμμετρίας και μόνο, ας εξετάσουμε στη συνέχεια μερικά παραδείγματα αυτής της διατήρησης. Κατ' αρχάς πόση είναι η συνολική ορμή ενός συστήματος σωματιδίων μετρούμενη από ένα σύστημα αναφοράς που κινείται με την σταθερή ταχύτητα του κέντρου μάζας του ίδιου του συστήματος;

$$P_{ολ}^{(KM)} = \sum_{i=1}^N m_i v_i^{(KM)} = \sum_{i=1}^N m_i (v_i - \dot{R}_{KM}) = \left(\sum_{i=1}^N m_i \dot{x}_i \right) - M \dot{R}_{KM} = 0. \quad (11.5)$$

Το σύστημα αυτό, γνωστό ως *σύστημα κέντρου μάζας*⁵, έχει αυτή την εξαιρετική ιδιότητα: η ολική ορμή του συστήματος είναι μηδέν σε αυτό το σύστημα αναφοράς, και προφανώς θα παραμείνει για πάντα μηδενική, εφόσον η ολική ορμή διατηρείται. Πόση είναι η κινητική ενέργεια του συστήματος σε αυτό το ιδιαίτερο σύστημα αναφοράς; Θα είναι

$$\begin{aligned} K_{ολ}^{(KM)} &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (v_i^{(KM)})^2 \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i (v_i - \dot{R}_{KM})^2 \\ &= \left(\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i v_i^2 \right) + \frac{1}{2} M \dot{R}_{KM}^2 - \dot{R}_{KM} \sum_{i=1}^N m_i v_i \\ &= K_{ολ} - \frac{1}{2} M \dot{R}_{KM}^2. \end{aligned} \quad (11.6)$$

Ο όρος που αντικαταστήσαμε με $M \dot{R}_{KM}$ είναι απλώς η ολική ορμή του συστήματος

⁵Εφόσον αναφερόμαστε στο αδρανειακό σύστημα του κέντρου μάζας θα χρησιμοποιούμε τον δείκτη $^{(KM)}$ στις διάφορες ποσότητες που μετρώνται σε αυτό το σύστημα.

των σωματιδίων στο αρχικό σύστημα. Επομένως η ολική κινητική ενέργεια των σωματιδίων στο σύστημα κέντρου μάζας (ΚΜ) ισούται με την ολική κινητική ενέργεια όπως μετράται στο αρχικό σύστημα αναφοράς μείον την ενέργεια ενός υποθετικού σωματιδίου με μάζα όσο όλα τα σωματίδια του συστήματος το οποίο κινείται με την ταχύτητα \dot{R}_{KM} του κέντρου μάζας. Μπορούμε λοιπόν να διαχωρίσουμε την ολική κινητική ενέργεια ενός συστήματος σε μια κινητική ενέργεια του κέντρου μάζας και μια εσωτερική κινητική ενέργεια, την κινητική, δηλαδή, ενέργεια του συστήματος των σωματιδίων στο ΚΜ:

$$K_{ολ} = \frac{1}{2}M\dot{R}_{KM}^2 + K_{ολ}^{(KM)} = \frac{1}{2}M\dot{R}_{KM}^2 + K_{εσωτ} . \quad (11.7)$$

Θα μπορούσε κανείς να προσθέσει στις δύο αυτές κινητικές ενέργειες (την ολική και την εσωτερική) τη δυναμική ενέργεια του συστήματος, αφού αλλάζοντας σύστημα αναφοράς οι αποστάσεις μεταξύ των σωματιδίων δεν αλλάζουν, και όπως έχουμε συζητήσει σε προηγούμενο κεφάλαιο οι θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις στη φύση εξαρτώνται μόνο από την απόσταση μεταξύ των σωματιδίων:

$$E_{ολ} = \frac{1}{2}M\dot{R}_{KM}^2 + E_{ολ}^{(KM)} . \quad (11.8)$$

Τώρα, ας επιτρέψουμε σε ένα σύστημα σωματιδίων να δέχεται και δυνάμεις από το περιβάλλον του (για παράδειγμα, ένα στερεό σώμα μέσα σε κάποιο πεδίο δυνάμεων) εκτός από τις δυνάμεις αλληλεπίδρασης μεταξύ των σωματιδίων που το αποτελούν. Τότε το άθροισμα όλων των εξισώσεων κίνησης (βλ. αρχή του παρόντος κεφαλαίου) θα δώσει:

$$\begin{aligned} m_1\ddot{x}_1 &= F_{2\rightarrow 1} + F_{3\rightarrow 1} + F_{4\rightarrow 1} + \dots F_{N\rightarrow 1} + F_1^{\epsilon\xi} , \\ m_2\ddot{x}_2 &= F_{1\rightarrow 2} + F_{3\rightarrow 2} + F_{4\rightarrow 2} + \dots F_{N\rightarrow 2} + F_2^{\epsilon\xi} , \\ m_3\ddot{x}_3 &= F_{1\rightarrow 3} + F_{2\rightarrow 3} + F_{4\rightarrow 3} + \dots F_{N\rightarrow 3} + F_3^{\epsilon\xi} , \\ &\dots \\ +m_N\ddot{x}_N &= F_{1\rightarrow N} + F_{2\rightarrow N} + F_{3\rightarrow N} + \dots F_{N-1\rightarrow N} + F_N^{\epsilon\xi} , \end{aligned} \quad (11.9)$$

$$M\ddot{R}_{KM} = \sum_{i=1}^N m_i\ddot{x}_i = \sum_{i=1}^N F_i^{\epsilon\xi} .$$

Δηλαδή, το κέντρο μάζας του συστήματος κινείται σαν να επρόκειτο για ένα σωματίδιο μάζας M πάνω στο οποίο ασκούνται όλες μαζί οι εξωτερικές δυνάμεις που δέχονται τα σωματίδια. Για παράδειγμα αν μια οβίδα κινούμενη μέσα στο βαρυτικό πεδίο της Γης εκραγεί⁶, σύμφωνα με τα παραπάνω, μολονότι τα θραύσματά της θα

⁶Πρόκειται για κίνηση σε τρεις διαστάσεις, αλλά όσα έχουμε μάθει για τη μια διάσταση εφαρμόζονται κάλλιστα και στις τρεις διαστάσεις όπως θα εξηγήσουμε παρακάτω.

εξακοντιστούν σε όλες τις διευθύνσεις, το κέντρο μάζας αυτών θα εξακολουθήσει ανενόχλητο την παραβολική του τροχιά. Μοναδική διαταραχή της παραβολικής κίνησης του ΚΜ θα προακλέσει η εμφάνιση των αντιδράσεων του εδάφους κάθε φορά που κάποιο θραύσμα προσκρούσει στο έδαφος. Έτσι κάθε φορά που κάποιο θραύσμα φτάνει στο έδαφος, το ΚΜ θα αλλάξει στιγμιαία διεύθυνση κίνησης.

11.2 Διατήρηση της ορμής σε περισσότερες της μιας διάστασης

Όσα γράψαμε στο προηγούμενο εδάφιο και αφορούσαν την κίνηση αλληλεπιδρώντων σωματιών σε μια διάσταση γενικεύονται χωρίς καμία ιδιαιτερότητα και σε περισσότερες διαστάσεις. Το μόνο που χρειάζεται είναι να αντικαταστήσουμε όλες τις θέσεις, τις ταχύτητες και τις επιταχύνσεις με τα αντίστοιχα διανύσματα.

Έτσι όταν έχουμε πολλά αλληλεπιδρώντα σωματίδια, στα οποία δεν δρα κανένα εξωτερικό πεδίο η συνολική τους ορμή διατηρείται

$$\mathbf{P}_{\text{ολ}}(t_1) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t_1) = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{v}_i(t_2) = \mathbf{P}_{\text{ολ}}(t_2) \quad (11.10)$$

Η σταθερή αυτή ορμή μπορεί να αντιστοιχισθεί με ένα σώμα μάζας όση η μάζα όλων των σωματιδίων το οποίο κινείται με την σταθερή ταχύτητα $\dot{\mathbf{R}}_{KM}$ του κέντρου μάζας:

$$\mathbf{P}_{\text{ολ}} = \mathbf{σταθ} = M \dot{\mathbf{R}}_{KM} \quad (11.11)$$

όπου το κέντρο μάζας του συστήματος είναι το σημείο μεταξύ των σωματιδίων

$$\mathbf{R}_{KM} = \frac{\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i}{M}$$

Άσκηση γεωμετρίας

Δείξτε ότι αν ένα πλήθος σωματιδίων καταλαμβάνει ένα χώρο ο οποίος βρίσκεται εξ ολοκλήρου στο εσωτερικό μιας σφαίρας, τότε θα ισχύει το ίδιο και για το κέντρο μάζας τους.

Στο σύστημα κέντρου μάζας, δηλαδή το αδρανειακό σύστημα που κινείται με την

ίδια ταχύτητα που κινείται το ΚΜ, η ολική ορμή είναι μηδενική⁷

$$\mathbf{P}_{ολ}^{(KM)} = \mathbf{0}.$$

Τέλος η σχέση μεταξύ της κινητικής ενέργειας των σωματιδίων σε ένα σύστημα και στο σύστημα ΚΜ είναι ακριβώς αυτή που βρήκαμε στο προηγούμενο εδάφιο (11.7) αφού οι κινητικές ενέργειες κατασκευάζονται από τα τετράγωνα των ταχυτήτων που είναι αδιάφορα για τον διανυσματικό χαρακτήρα αυτών. Η σχέση μάλιστα των κινητικών ενεργειών θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί ως ένας άλλος εναλλακτικός ορισμός του συστήματος ΚΜ: είναι εκείνο το σύστημα στο οποίο η ολική κινητική ενέργεια λαμβάνει την ελάχιστη τιμή της. Έτσι όταν στους επιταχυντές προετοιμάζονται δέσμες υποατομικών σωματιδίων για να συγκρουστούν και να μας δώσουν πληροφορίες για τα βθύτερα μυστικά της ύλης, είναι καλύτερα όλη η ενέργεια που ξοδεύεται για την επιτάχυνση των σωματιδίων να χρησιμοποιείται έτσι ώστε η σύγκρουσή τους να συμβαίνει στο σύστημα ΚΜ αυτών, ειδάλως μέρος της ενέργειας πηγαίνει χαμένη και δεν χρησιμοποιείται για την επιδιωκόμενη σύγκρουση.

Όπως και στη μία διάσταση, όταν ένα σύνολο σωματιδίων υπόκειται και σε εξωτερικό πεδίο δυνάμεων, εκτός από τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις, η συνολική εξωτερική δύναμη που ασκείται στο σύστημα των σωματιδίων υπαγορεύει και την κίνηση του κέντρου μάζας τους:

$$M\ddot{\mathbf{R}}_{KM} = \sum_{i=1}^N \mathbf{F}_i^{εξ}. \quad (11.12)$$

11.3 Αλληλεπίδραση δύο σωματιδίων

Το πρόβλημα της κίνησης στο χώρο δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων αποκτά ιδιαίτερη αξία κάτω από το πρίσμα της διατήρησης της ορμής. Συνοπτικά, η κίνηση δύο σωματιδίων μπορεί να διαχωριστεί στην κίνηση του κέντρου μάζας τους και στην κίνηση ενός μόνο σωματιδίου υπό την επίδραση κάποιου εξωτερικού πεδίου. Δεδομένου μάλιστα της γνώσης μας περί ομαλής κίνησης του κέντρου μάζας αλληλεπιδρώντων σωματιδίων η μελέτη της κίνησης δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων καθίσταται ισοδύναμη με την κίνηση ενός απλού σωματιδίου σε εξωτερικό πεδίο.

Έστω λοιπόν δύο σημειακά σωματίδια με μάζες m_1, m_2 τα οποία βρίσκονται στις θέσεις $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ τη χρονική στιγμή t και ασκούν δυνάμεις νευτώνειου τύπου το ένα στο άλλο. Οι εξισώσεις κίνησης για τα δύο αυτά σωματίδια θα είναι

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (11.13)$$

$$m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}. \quad (11.14)$$

⁷Μάλιστα η ιδιότητα αυτή μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να οριστεί το σύστημα ΚΜ.

Αν προσθέσουμε τις δύο αυτές εξισώσεις καταλήγουμε ότι

$$m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 + m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{0} ,$$

δηλαδή στο ότι ο ρυθμός μεταβολής της συνολικής ορμής του συστήματος $\mathbf{P}_{ολ} = m_1\dot{\mathbf{r}}_1 + m_2\dot{\mathbf{r}}_2$ είναι μηδενικός. Το αποτέλεσμα αυτό, το οποίο είναι απλή επανάληψη της (11.9) για δύο σωματίδια σε τρεις διαστάσεις και αποτελεί επαναδιατύπωση της διατήρησης της ορμής, βασίζεται στο ότι οι δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ των δύο σωματιδίων είναι δυνάμεις νευτώνειου τύπου. Μεταβαίνοντας στο σύστημα ΚΜ,⁸ η ολική ορμή του συστήματος είναι μηδενική, όπως είπαμε παραπάνω οπότε στο σύστημα αυτό ισχύει ότι

$$m_1\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 + m_2\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_2 = \mathbf{0}$$

όπου συμβολίσαμε με $\tilde{\mathbf{r}}_{1,2}$ τις θέσεις των δύο σωματιδίων στο σύστημα ΚΜ. Οι εξισώσεις κίνησης (11.14) πάντως δεν αλλάζουν στο νέο αυτό αδρανειακό σύστημα αφού οι δυνάμεις δεν είναι δυνατό να εξαρτώνται παρά μόνο από τις σχετικές θέσεις και τις σχετικές ταχύτητες των δύο σωματιδίων οι οποίες δεν επηρεάζονται από το σύστημα αναφοράς το οποίο θα χρησιμοποιήσουμε για να τις περιγράψουμε. Έτσι αφαιρώντας κατά μέλη τις εξισώσεις κίνησης στο ΚΜ αφού πρώτα τις διαρέσουμε με τις αντίστοιχες μάζες βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 &= \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}/m_1 \\ -\ddot{\tilde{\mathbf{r}}}_2 &= \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}/m_2 \end{aligned} \quad (11.15)$$

$$\ddot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 - \ddot{\tilde{\mathbf{r}}}_2 = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right) .$$

Η ποσότητα

$$\mathbf{r}_{12} = \tilde{\mathbf{r}}_1 - \tilde{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$$

είναι η σχετική θέση των δύο σωματιδίων δηλαδή η θέση του 1 ως προς το 2 και για την οποία μαθαίνουμε ότι

$$\mu\ddot{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \quad (11.16)$$

με

$$\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \leftrightarrow \mu = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} .$$

Η νέα αυτή ποσότητα μ με διαστάσεις μάζας (το ήμισυ του αρμονικού μέσου των δύο

⁸Το σύστημα ΚΜ είναι ένα αδρανειακό σύστημα, αφού κινείται με σταθερή ταχύτητα $\dot{\mathbf{R}}_{KM} = \mathbf{P}_{ολ}/M$ σε σχέση με το αρχικό μας σύστημα το οποίο εξ υποθέσεως είναι αδρανειακό προκειμένου να μπορούμε να γράψουμε το δυναμικό νόμο του Νεύτωνα για τα δύο σωματίδια.

μαζών) ονομάζεται *ανηγμένη*⁹ μάζα.

Η εξίσωση (11.16), τουλάχιστον σε φορμαλιστικό επίπεδο, περιγράφει ένα σωματίδιο μάζας μ το οποίο κινείται υπό την επίδραση της ίδιας δύναμης που ασκούνταν στο σωματίδιο 1 από το 2. Ποιο είναι αυτό το σωματίδιο; Δεν υπάρχει κανένα τέτοιο πραγματικό σωματίδιο. Η μελέτη της κίνησης του εικονικού αυτού σωματιδίου όμως μπορεί να αποκαλύψει την κίνηση των δύο επί μέρους σωματιδίων. Είναι εύκολο να δείξει κανείς ότι

$$\tilde{\mathbf{r}}_1 = \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12} \quad \text{και} \quad \tilde{\mathbf{r}}_2 = -\frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12} \quad (11.17)$$

λαμβάνοντας τη διαφορά $\tilde{\mathbf{r}}_1 - \tilde{\mathbf{r}}_2$ και το γραμμικό συνδυασμό $m_1 \tilde{\mathbf{r}}_1 + m_2 \tilde{\mathbf{r}}_2$. Η γνώση του $\mathbf{r}_{12}(t)$ λοιπόν είναι αρκετή για τον καθορισμό της κίνησης και των δύο σωματιδίων. Είναι, όμως, δυνατό να επιλύσουμε την (11.16); Μα φυσικά, αφού η $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ δεν μπορεί να εξαρτάται όπως είπαμε παρά από τα $\tilde{\mathbf{r}}_1 - \tilde{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{r}_{12}$, $\dot{\tilde{\mathbf{r}}}_1 - \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_2 = \dot{\mathbf{r}}_{12}$ και εν γένει του χρόνου t . Επομένως πρόκειται για τη δυναμική εξίσωση του Νεύτωνα υπό την επίδραση μιας δύναμης που εξαρτάται από τη θέση και την ταχύτητα ενός σωματιδίου και ίσως του χρόνου. Η γενική αυτή περίπτωση εξετάστηκε και σχολιάστηκε εκτενώς στα πρώτα κεφάλαια. Μάθαμε επίσης ότι ακόμη και αν δεν είναι δυνατό να παραχθεί μια αναλυτική λύση, λόγω πολυπλοκότητας της μορφής της διαφορικής εξίσωσης, υπάρχει κάποια λύση στο εν λόγω πρόβλημα, η οποία θα μπορούσε να κατασκευαστεί αν μη τι άλλο με αριθμητικές μεθόδους.

Συνεπώς το πρόβλημα της κίνησης δύο σωμάτων που ασκούν νευτώνειου τύπου δυνάμεις το ένα στο άλλο, ανάγεται σε ένα άλλο απλούστερο πρόβλημα: Αυτό της κίνησης ενός σώματος μάζας μ υπό την επίδραση μιας δύναμης $\mathbf{F} = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$. Η λύση του προβλήματος αυτού $\mathbf{r}_{12}(t)$ μπορεί στη συνέχεια να χρησιμοποιηθεί για να βρεθεί η θέση του κάθε σώματος χωριστά:

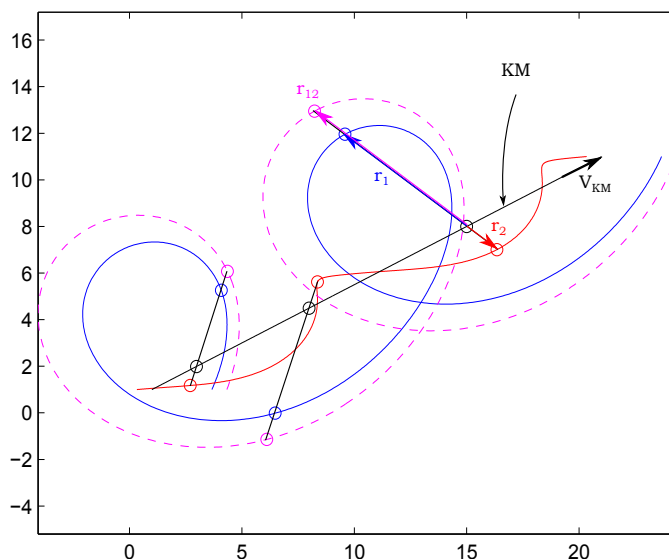
$$\mathbf{r}_1(t) = \mathbf{R}_{KM}(0) + \dot{\mathbf{R}}_{KM}t + \tilde{\mathbf{r}}_1(t) = \mathbf{R}_{KM}(0) + \dot{\mathbf{R}}_{KM}t + \frac{m_2}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12}(t) \quad (11.18)$$

$$\mathbf{r}_2(t) = \mathbf{R}_{KM}(0) + \dot{\mathbf{R}}_{KM}t + \tilde{\mathbf{r}}_2(t) = \mathbf{R}_{KM}(0) + \dot{\mathbf{R}}_{KM}t - \frac{m_1}{m_1 + m_2} \mathbf{r}_{12}(t) \quad (11.19)$$

όπου $\mathbf{R}_{KM}(0)$ και $\dot{\mathbf{R}}_{KM}(0)$ η αρχική θέση και η ταχύτητα, αντίστοιχα, του ΚΜ που δίνονται από τις αρχικές συνθήκες

⁹Μετοχή του ανάγω και όχι του ανοίγω.

$$\mathbf{R}_{KM}(0) = \frac{m_1 \mathbf{r}_1(0) + m_2 \mathbf{r}_2(0)}{m_1 + m_2} \quad \dot{\mathbf{R}}_{KM}(0) = \frac{m_1 \dot{\mathbf{r}}_1(0) + m_2 \dot{\mathbf{r}}_2(0)}{m_1 + m_2} .$$



Σχήμα 11.2: Οι τροχιές των δύο σωμάτων προκύπτουν από τη σύνθεση της ευθύγραμμης ομαλής κίνησης του κέντρου μάζας τους (μαύρη γραμμή) $\mathbf{R}_{KM}(0) + \dot{\mathbf{R}}_{KM}t$ και της θέσης του εκάστοτε σώματος \mathbf{r}_1 (μπλε τροχιά) και \mathbf{r}_2 (κόκκινη τροχιά). Τα $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ με τη σειρά τους υπολογίζονται ως τα ποσότητά m_2/M και $-m_1/M$ του $\mathbf{r}_{12}(t)$ το οποίο υπολογίζεται λύνοντας το δυναμικό νόμο του Νεύτωνα για ένα υποθετικό σωματίδιο με μάζα μ που κινείται ως προς το ΚΜ υπό το πεδίο της $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$. Το υποθετικό αυτό σωματίδιο θα διέγραφε τη μωβ διακεκομμένη τροχιά. Στο σχήμα φαίνονται τρεις τετράδες σημείων (με τα αντίστοιχα χρώματα) για τρεις διαδοχικούς χρόνους.

Τέλος η λύση της $m \ddot{\mathbf{r}}_{12} = \mathbf{F}_{2 \rightarrow 1}$ προκειμένου να βρούμε την $\mathbf{r}_{12}(t)$ γίνεται με αρχικές συνθήκες

$$\mathbf{r}_{12}(0) = \mathbf{r}_1(0) - \mathbf{r}_2(0) \quad \dot{\mathbf{r}}_{12}(0) = \dot{\mathbf{r}}_1(0) - \dot{\mathbf{r}}_2(0) .$$

Όπως θα δούμε στο κεφάλαιο των κεντρικών δυνάμεων, αν η δύναμη που ανταλλάσσεται μεταξύ των δύο σωματιδίων έχει τη διεύθυνση της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια, το επίπεδο της κίνησης των δύο σωματιδίων ως προς το ΚΜ διατηρείται σταθερό (αν σχεδιάσουμε δηλαδή την \mathbf{r}_{12} σε διάφορες χρονικές στιγμές αυτή θα διαγράφει ένα επίπεδο· το επίπεδο που όριζαν αρχικά τα $\mathbf{r}_{12}(0)$ και $\dot{\mathbf{r}}_{12}(0)$. Σε αυτή την περίπτωση αρκεί να λύσουμε το νόμο του Νεύτωνα στο επίπεδο και όχι στο χώρο. Αν οι δυνάμεις είναι επιπλέον και συντηρητικές, τελικά το πρόβλημα της κίνησης ανάγεται σε ένα μονοδιάστατο πρόβλημα που αφορά στο ακτινικό μέρος της λύσης, το $|\mathbf{r}_{12}(t)|$. Οι ειδικές αυτές περιπτώσεις δυνάμεων δεν είναι και τόσο ειδικές καθώς όλες οι θεμελιώδεις δυνάμεις εμπίπτουν σε αυτή την κατηγορία.

Κλείνοντας το εδάφιο αυτό αναλογιστείτε το τιτάριο έργο του Κέπλερ να ανακαλύψει την τροχιά των πλανητών παρατηρώντας μια τόσο σύνθετη κίνηση όσο η

μπλε τροχιά στο σχήμα 11.2, αφού το σημείο παρατήρησης δεν ήταν το ΚΜ αλλά η κινούμενη Γη, και μάλιστα παρατηρώντας απλώς την προβολή των τροχιών στον έναστρο ουρανό. Για καλή του τύχη βέβαια ο Ήλιος στο ηλιακό μας σύστημα έχει τόσο μεγάλη μάζα σε σχέση με τους πλανήτες, ώστε τα r_1 και r_{12} σχεδόν συμπίπτουν.

11.4 * Συστήματα μεταβλητής μάζας

Η γνώση των ιδιοτήτων του κέντρου μάζας είναι ιδιαίτερα χρήσιμη για έναν πολύ απλό λόγο: Προκειμένου να μάθουμε ποια είναι η κίνηση όλων των μερών του συστήματος, αυτό που χρειάζεται να υπολογίσουμε είναι η κίνηση όλων των υπολοίπων μερών εκτός από ένα, αφού η γνώση της θέσης των υπολοίπων καθώς επίσης και του κέντρου μάζας είναι αρκετά για να προσδιορισθεί η θέση του τελευταίου. Το γεγονός αυτό μας διευκολύνει στην διερεύνηση της κίνησης σωμάτων με μεταβλητή μάζα.

Ας θεωρήσουμε ένα κινητό του οποίου η μάζα μεταβάλλεται¹⁰. Αν συμπεριλάβουμε τη μάζα του κινητού και τη μάζα που είτε προστίθεται σε αυτό είτε αφαιρείται από αυτό σε ένα σύστημα, τότε μπορούμε να αγνοήσουμε τις δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ του κινητού και της μάζας που εισέρχεται ή εξέρχεται από αυτό αν εστιάσουμε την προσοχή μας στην ορμή όλου του συστήματος. Σύμφωνα με όσα είπαμε προηγουμένως η ορμή του συστήματος θα αλλάξει μόνο εξαιτίας των εξωτερικών δυνάμεων που ασκούνται στο σύστημα. Επομένως μπορούμε να γράψουμε το 2ο νόμο του Νεύτωνα για το σύστημα και στη συνέχεια λαμβάνοντας υπόψη τη σχετική κίνηση κινητού και εισερχόμενης/εξερχόμενης μάζας να υπολογίζουμε την κίνηση του κινητού μόνο.

$$F^{\text{εξ}}(t) = \frac{P(t + dt) - P(t)}{dt} . \quad (11.20)$$

Για να γίνει πιο κατανοητή η παραπάνω διαδικασία θα θεωρήσουμε αρχικά ως παράδειγμα ένα βαγόνι τρένου μάζας M το οποίο είναι φορτωμένο με N ανθρώπους, μάζας m ο καθένας, και οι οποίοι τρέχοντας μέσα στο βαγόνι, αντίθετα με την κίνηση αυτού, πηδούν ένας-ένας από το βαγόνι με μια συγκεκριμένη ταχύτητα ως προς αυτό V . Στο παράδειγμα αυτό, αγνοώντας την τριβή των τροχών του βαγονιού με τις ράγες, η συνολική δύναμη που ασκείται στο σύστημα (βαγόνι συν επιβάτες) είναι μηδενική (στη διεύθυνση κίνησης του βαγονιού), επομένως η ορμή του συστήματος (στην ίδια διεύθυνση) είναι ίδια πριν και μετά την εκτίναξη κάθε επιβάτη (όχι όμως και η ορμή του συστήματος στην αρχή και το τέλος συνολικά του φαινομένου, αφού η επαφή κάθε επιβάτη με το έδαφος θα επιφέρει μια εξωτερική δύναμη που

¹⁰Εδώ δεν υπονοούμε ότι υπάρχει κάποια πηγή ή καταβόθρα μάζας. Απλώς η μάζα του συστήματος που μας ενδιαφέρει αλλοιώνεται μεταφερόμενη είτε προς το υπόλοιπο περιβάλλον, είτε από το περιβάλλον προς το σύστημα.

θα αλλάξει την ορμή του συστήματος). Επομένως

$$(M + nm)u_n = (M + (n - 1)m)u_{n-1} + m(u_{n-1} + V). \quad (11.21)$$

Οι δύο όροι στο δεξιό σκέλος της εξίσωσης περιγράφουν (α) την ορμή του βαγονιού με το πλήρωμα του όταν θα έχουν απομείνει $n - 1$ επιβάτες, και (β) την ορμή του ανθρώπου που θα εγκαταλείψει το βαγόνι με σχετική ταχύτητα ως προς το βαγόνι $-V$. Στην πραγματικότητα η μετάβαση της ταχύτητας του βαγονιού από την τιμή u_n στην u_{n-1} γίνεται βαθμαία καθώς ο n -οστός άνθρωπος τρέχει εντός του. Λύνοντας καταλήγουμε στην αναδρομική σχέση

$$u_{n-1} = u_n + \frac{m}{M + nm}V. \quad (11.22)$$

Ο αναδρομικός αυτός τύπος μας δίνει την τελική ταχύτητα του βαγονιού όταν θα το έχουν εγκαταλείψει όλοι οι επιβάτες του. Συγκεκριμένα, υποθέτοντας πώς αρχικά το βαγόνι ήταν ακίνητο ($u_N = 0$), βρίσκουμε

$$u_{\text{τελ}} = u_0 + V \sum_{n=N}^1 \frac{m}{M + nm}. \quad (11.23)$$

Το παραπάνω άθροισμα δεν μπορεί να γραφεί σε πιο απλή μορφή, μπορεί όμως να δείξει κανείς, κατασκευάζοντας το διάγραμμα της συνάρτησης $f(x) = \frac{1}{(M/m) + x}$, ότι

$$\sum_1^{n=N} \frac{m}{M + nm} < \int_0^N f(x) dx < \sum_0^{n=N-1} \frac{m}{M + nm}. \quad (11.24)$$

Το μεσαίο ολοκλήρωμα ισούται με $\log(1 + Nm/M)$, ενώ η διαφορά το αριστερού και του δεξιού αθροίσματος είναι

$$\frac{m}{M} - \frac{m}{M + Nm} = \frac{Nm^2}{M(M + Nm)} < \frac{m}{M}.$$

Συμπεραίνουμε λοιπόν ότι η τελική ταχύτητα είναι

$$u \simeq V \log \left(1 + N \frac{m}{M} \right)$$

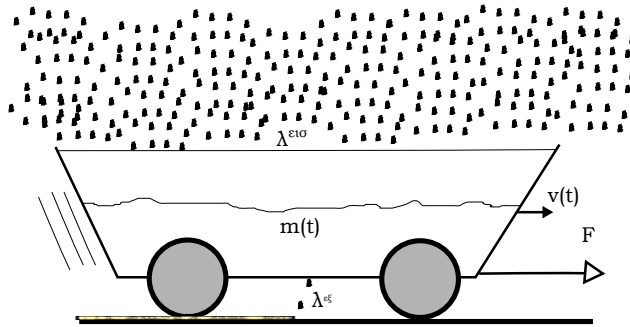
με σφάλμα μικρότερο του m/M . Στο όριο που η εκροή μάζας είναι συνεχής, δηλαδή αν $m/M \rightarrow 0$, το παραπάνω αποτέλεσμα για την τελική ταχύτητα είναι ακριβές. Η μορφή αυτού εξηγεί γιατί οι πύραυλοι έχουν αρχική μάζα πολύ μεγαλύτερη του ωφέλιμου φορτίου τους, προκειμένου να αποκτήσουν πολύ μεγάλη τελική ταχύτητα

και να καταφέρουν να διαφύγουν από το βαρυντικό πεδίο¹¹.

Ας δούμε και ένα δεύτερο παράδειγμα, με συνεχή τώρα μεταβολή μάζας και μάλιστα υπό την επίδραση εξωτερικής δύναμης. Ένα καρότσι μάζας M το οποίο σύρεται σε οριζόντιο δρόμο, άνευ τριβής, με σταθερή δύναμη F , αλλά το οποίο, εξαιτίας της βροχής που πέφτει κατακόρυφα, γεμίζει σιγά-σιγά με νερό, ενώ ταυτόχρονα αδειάζει από μια τρύπα στον πάτο του. Γράφοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για ένα απειροστό χρονικό διάστημα, θα έχουμε

$$F = \frac{[(m + dm^{\text{εισ}})(v + dv) + dm^{\text{εξ}}v] - [(m + dm^{\text{εξ}})v + dm^{\text{εισ}} \cdot 0]}{dt} \quad (11.25)$$

όπου το σύστημα που θεωρούμε είναι το καρότσι με το νερό που έχει μαζευτεί στο εσωτερικό του τη χρονική στιγμή t μάζας m συν την ποσότητα $dm^{\text{εξ}}$ του νερού που την αμέσως επόμενη στιγμή θα χυθεί από την τρύπα, καθώς επίσης και η ποσότητα $dm^{\text{εισ}}$ του νερού της βροχής που πρόκειται να προστεθεί στο καρότσι το αμέσως επόμενο χρονικό διάστημα dt . Όντας κατακόρυφη η πτώση των σταγόνων της βροχής, η οριζόντια ορμή που μεταφέρουν αυτές (τη χρονική στιγμή t) είναι μηδενική (τελευταίος όρος στον αριθμητή). Επίσης τη χρονική στιγμή $t + dt$ το βαγόνι έχει απωλέσει τη μάζα $dm^{\text{εξ}}$ η οποία εξέρχεται από το βαγόνι με την οριζόντια ταχύτητα



Σχήμα 11.3:

του βαγονιού¹². Εκτελώντας τις πράξεις και απορρίπτοντας όρους δεύτερης τάξης ως προς τα διαφορικά καταλήγουμε στη σχέση

$$F = \frac{dm^{\text{εισ}}}{dt}v + m \frac{dv}{dt} \quad (11.26)$$

Στο συγκεκριμένο παράδειγμα ο ρυθμός αύξησης της μάζας του καροτσιού $dm^{\text{εισ}}/dt$

¹¹ Ένας πραγματικός πύραυλος κατά την εκτόξευσή του προς το διάστημα βρίσκεται συνεχώς μέσα στο βαρυντικό πεδίο, επομένως η σχέση στην οποία καταλήξαμε δεν είναι απολύτως ακριβής για έναν πύραυλο. Παρόλ' αυτά εξακολουθεί να είναι ποιοτικά ορθή ως προς την εξέλιξη της ως λογαριθμική συνάρτηση της μάζας.

¹² Παρότι η σταγόνα που θα τρέξει από το βαγόνι θα πάψει να αισθάνεται τη δύναμη που σπρώχνει το βαγόνι καταγράφουμε την ορμή της αφού αποτελεί μέρος του συστήματος.

θα θεωρήσουμε ότι είναι δεδομένος

$$dm^{\epsilon\iota\sigma}/dt = \lambda^{\epsilon\iota\sigma} > 0$$

και εξαρτάται από το πόσο ραγδαία είναι η βροχόπτωση¹³. Επίσης θα θεωρήσουμε ότι

$$dm^{\epsilon\xi}/dt = \lambda^{\epsilon\xi} < 0,$$

οπότε $m(t) = m(0) + (\lambda^{\epsilon\iota\sigma} + \lambda^{\epsilon\xi})t$. Ολοκληρώνοντας τη διαφορική εξίσωση της κίνησης καταλήγουμε ότι

$$v = \frac{F}{\lambda^{\epsilon\iota\sigma}} \left[1 - \left(\frac{m(0)}{m(0) + (\lambda^{\epsilon\xi} + \lambda^{\epsilon\iota\sigma})t} \right)^{\frac{\lambda^{\epsilon\iota\sigma}}{\lambda^{\epsilon\xi} + \lambda^{\epsilon\iota\sigma}}} \right]. \quad (11.27)$$

Η έκφραση για την ταχύτητα είναι μονοτόνως αύξουσα σε κάθε περίπτωση (είτε $\lambda^{\epsilon\xi} + \lambda^{\epsilon\iota\sigma}$ είναι θετικό είτε είναι αρνητικό) και μετά από αρκούντως μεγάλο χρόνο t , η ταχύτητα καταλήγει στην οριακή της τιμή $F/\lambda^{\epsilon\iota\sigma}$. Βέβαια, αν $\lambda^{\epsilon\xi} + \lambda^{\epsilon\iota\sigma} > 0$ (στο βαγόνι προστίθεται περισσότερο νερό, απ' όσο χάνεται) κάποια στιγμή το βαγόνι θα γεμίσει και πλέον θα ξεχειλίζει και θα αρχίσει να χάνει επιπλέον νερό από τα πλευρικά του τοιχώματα. Η δεύτερη αυτή απώλεια συμβαίνει με τον ίδιο τρόπο (ως προς τη μεταφορά της ορμής στο περιβάλλον) που συνέβαινε και η απώλεια από την τρύπα του βαγονιού. Έκτοτε θα είναι $\lambda^{\epsilon\xi} + \lambda^{\epsilon\iota\sigma} = 0$. Η μόνη διαφορά πλέον στην εξίσωση (11.26) θα είναι ότι η μάζα m θα πάψει να μεταβάλλεται. Έτσι μετά από χρόνο

$$t_1 = \frac{M_{\pi\lambda\eta\rho} - m(0)}{\lambda^{\epsilon\xi} + \lambda^{\epsilon\iota\sigma}}$$

που θα χρειαστεί το βαγόνι για να γεμίσει με νερό και να αποκτήσει μάζα $M_{\pi\lambda\eta\rho}$ θα συνεχίσει να κινείται με ταχύτητα

$$v = \frac{F}{\lambda^{\epsilon\iota\sigma}} \left[1 - \left(1 - \frac{\lambda^{\epsilon\iota\sigma} v_1}{F} \right) e^{-\lambda^{\epsilon\iota\sigma}(t-t_1)/M_{\pi\lambda\eta\rho}} \right] \quad (11.28)$$

όπου $v_1 = v(t_1)$ η ταχύτητα που απέκτησε το βαγόνι στην πρώτη φάση πλήρωσής του με νερό. Η νέα αυτή έκφραση για την ταχύτητα έχει πάλι την ίδια οριακή τιμή $F/\lambda^{\epsilon\iota\sigma}$ όπως και η (11.27), αν και σε αυτή την περίπτωση η εξέλιξη είναι εκθετική και όχι απλώς ένας νόμος δύναμης όπως στην (11.27). Ο λόγος που οι δύο εκφράσεις έχουν την ίδια οριακή τιμή είναι διαφορετικός από δυναμικής άποψης. Στην πρώτη περίπτωση (11.27) η δύναμη χρησιμοποιείται για να επιταχύνει μάταια ένα υπέρβαρο βαγόνι. Στη δεύτερη περίπτωση (11.28) τελικά η δύναμη χρησιμοποιείται για να προσφέρει κατάλληλη ορμή στην ακίνητη (οριζοντίως) βροχή ώστε να κινεί-

¹³Γενικότερα θα μπορούσαμε να υποθέσουμε ότι ο όρος $dm^{\epsilon\iota\sigma}/dt$ είναι κάποια γνωστή συνάρτηση του χρόνου.

ται με την τελική αυτή ταχύτητα του βαγονιού.

Άσκηση ορίων

Προσπαθήστε να καταλήξετε στην έκφραση (11.28) με $v_1 = 0$, μέσω της (11.27) λαμβάνοντας το όριο $\lambda^{\text{εξ}} + \lambda^{\text{εισ}} \rightarrow 0$.

Ο τρόπος που μάθαμε να δουλεύουμε σε συστήματα μεταβλητής μάζας είναι γενικός. Αυτό που θα πρέπει κανείς να προσέξει για να μην μπροδεύεται είναι όταν γράφει τη δυναμική εξίσωση

$$F = \frac{p(t + dt) - p(t)}{dt}$$

να φροντίσει να καθορίσει τη μάζα του συστήματος, δηλαδή τη συνολική μάζα η οποία συμμετέχει στη διαδικασία σε όλο το χρονικό διάστημα $[t, t + dt]$. Για το λόγο αυτό θα πρέπει η συνολική μάζα που γράφει κανείς στην έκφραση για το $p(t)$ να υπάρχει και στην $p(t + dt)$, αν και με διαφορετική ίσως ταχύτητα το κάθε μέρος της μάζας, στην εκάστοτε ορμή (βλ. σχέση (11.25)).

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 11

- Ο 3ος νόμος του Νεύτωνα εξασφαλίζει ότι ένα σύστημα αλληλεπιδρώντων σωματιδίων, απομονωμένο από το υπόλοιπο περιβάλλον διατηρεί τη συνολική του ορμή. Αυτό εκφράζεται μέσω της ομαλής κίνησης του κέντρου μάζας του, ενός υποθετικού σημείου ανάμεσα στα σωματίδια.
- Η διατήρηση της ορμής είναι αποτέλεσμα φυσικής συμμετρίας.
- Στο αδρανειακό σύστημα ΚΜ (που κινείται όπως το ΚΜ) η κίνηση δύο σωματιδίων περιγράφεται με έναν δυναμικό νόμο, όπου τη θέση της μάζας καταλαμβάνει η ανηγμένη μάζα των δύο σωμάτων, το διάνυσμα θέσης είναι η σχετική θέση των δύο σωματιδίων και η δύναμη είναι η δύναμη αλληλεπίδρασης των δύο σωματιδίων. Η επίλυση της εξίσωσης αυτής μπορεί να καθορίσει τη σχετική θέση των δύο σωματιδίων, η οποία σε συνδυασμό με την κίνηση του ΚΜ μπορεί να καθορίσει την κίνηση του κάθε σωματιδίου χωριστά. Το πρόβλημα δύο σωμάτων ανάγεται σε πρόβλημα ενός σώματος.
- Στη μελέτη προβλημάτων μεταβλητής μάζας είναι χρήσιμο να χρησιμοποιούμε το δυναμικό νόμο του Νεύτωνα σε ένα απειροστό χρονικό διάστημα, φροντίζοντας η μάζα του συστήματος στην αρχή και στο τέλος του χρονικού αυτού διαστήματος να είναι η ίδια, παρόλο που τα διάφορα μέρη του συστήματος μπορεί να διαφοροποιούνται ως προς την ορμή τους στο

χρονικό αυτό διάστημα.

12

Κρούσεις

12.1 Κρούσεις σε μία ή περισσότερες διαστάσεις

Όταν τα υλικά σωματίδια και γενικότερα τα εκτεταμένα σώματα αλληλεπιδρούν μόνο μεταξύ τους δίχως να υπάρχουν άλλες εξωτερικές δυνάμεις, διατηρείται, όπως έχουμε μάθει, η ολική ορμή του συστήματος. Ενδιαφέρον παρουσιάζουν οι περιπτώσεις όπου οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης κάνουν ιδιαίτερα αισθητή την παρουσία τους για μικρά χρονικά διαστήματα σε σχέση με τους χαρακτηριστικούς χρόνους της κίνησης των σωμάτων όπου αυτές οι δυνάμεις δεν εμφανίζονται. Οι αλληλεπιδράσεις αυτού του είδους ονομάζονται *κρούσεις* και σε αυτές συμπεριλαμβάνονται φαινόμενα κατά τα οποία ούτε επαφή των σωμάτων συμβαίνει (ακόμη και όταν συγκρούονται δύο αυτοκίνητα, δεν μπορεί κανείς να υποστηρίξει ότι τα μόρια των δύο αυτοκινήτων έρχονται σε επαφή), ούτε η κρούση διαρκεί κλάσματα του δευτερολέπτου (όπως για παράδειγμα συμβαίνει σε ένα διαστημικό όχημα που υφίσταται εκτροπή από την τροχιά του όταν περάσει κοντά από ένα ουράνιο σώμα μεγάλης μάζας).

Ας ξεκινήσουμε τη μελέτη μας με μια κρούση υλικών σημείων σε ένα μονοδιάστατο κόσμο. Η διατήρηση της ορμής επιβάλλει:

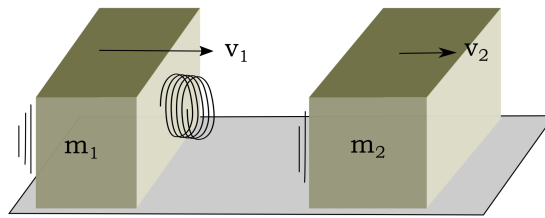
$$m_1 v_1 + m_2 v_2 = m_1 v'_1 + m_2 v'_2 = P. \quad (12.1)$$

Δίχως καμία άλλη γνώση του πώς γίνεται η αλληλεπίδραση των δυο σωματιδίων δεν είναι δυνατόν να προβλέψουμε πως ακριβώς θα μοιραστούν οι ταχύτητες v'_1, v'_2

αμέσως μετά την κρούση. Ας υποθέσουμε ότι οι δυνάμεις που αναπτύσσονται κατά την κρούση των δύο σωματιδίων έχουν συνολικό έργο μηδέν, όπως για παράδειγμα συμβαίνει σε ένα ελατήριο όταν αυτό συμπιέζεται και στη συνέχεια αποσυμπιέζεται. Τότε η συνολική κινητική ενέργεια του συστήματος παραμένει σταθερή. Στην περίπτωση αυτή μιλάμε για “ελαστικές” κρούσεις:

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = E. \quad (12.2)$$

Ένα πολύ καλό μηχανιστικό μοντέλο για τις ελαστικές κρούσεις μπορούμε να έχουμε



Σχήμα 12.1: Μηχανιστικό μοντέλο για την ελαστική κρούση δύο σωμάτων.

αν θεωρήσουμε ότι το ένα από τα δύο συγκρουόμενα σωματίδια φέρει στην πλευρά με την οποία προσεγγίζει το έτερο σωματίδιο ένα αβαρές ιδανικό γραμμικό ελατήριο. Κατά τη σύγκρουση το ελατήριο συμπιέζεται, ενόσω τα δύο σωματίδια προσεγγίζουν το ένα το άλλο, η συμπίεση σταματά όταν οι ταχύτητες τους γίνονται ίσες και στη συνέχεια αποσυμπιέζεται μέχρι να αποκτήσει και πάλι το αρχικό φυσικό του μήκος. Επιλύοντας το σύστημα των (12.1) και (12.5)¹ καταλήγουμε ότι:

$$\begin{pmatrix} v_1' \\ v_2' \end{pmatrix} = \mathbf{M} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}, \quad (12.3)$$

όπου

$$\mathbf{M} = \frac{1}{1 + \lambda} \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 \\ 2\lambda & 1 - \lambda \end{pmatrix}, \quad (12.4)$$

και $\lambda = m_1/m_2$. Διαπιστώνουμε ότι ο μετασχηματισμός των ταχυτήτων $(v_1, v_2) \rightarrow (v_1', v_2')$ είναι γραμμικός και προσδιορίζεται πλήρως από τον πίνακα \mathbf{M} που εξαρτάται μόνο από το λόγο των μαζών.

Για την ακρίβεια, τα δύο ζεύγη των ταχυτήτων που ικανοποιούν τη διατήρηση της ορμής και της ενέργειας κατά τη κρούση και συνδέονται μέσω του πίνακα \mathbf{M} ικανοποιούν και την αντίστροφη σχέση πάλι μέσω του πίνακα \mathbf{M} . Δηλαδή αν σύμ-

¹Είναι αρκετά εύκολο να λύσουμε το σύστημα αν τη διατήρηση της κινητικής ενέργειας τη γράψουμε ως διαφορές τετραγώνων $m_1(v_1^2 - v_1'^2) = m_2(v_2'^2 - v_2^2)$ και στη συνέχεια τη διαιρέσουμε με τις αντίστοιχες διαφορές από τη διατήρηση της ορμής $m_1(v_1 - v_1') = m_2(v_2' - v_2)$.

φωνα με την (12.3) είναι $(v_1, v_2) \xrightarrow{\mathbf{M}} (v'_1, v'_2)$, ισχύει επίσης ότι $(v'_1, v'_2) \xrightarrow{\mathbf{M}} (v_1, v_2)$. Με άλλα λόγια είναι $\mathbf{M}^{-1} = \mathbf{M}$ και συνεπώς

$$\mathbf{M}^2 = \mathbf{I}$$

όπου \mathbf{I} ο μοναδιαίος πίνακας. Η ιδιότητα αυτή είναι αναμενόμενη αφού αν αντιστρέψουμε τη φορά του χρόνου, περιμένουμε να μεταβούμε από τις τελικές στις αρχικές ταχύτητες (αντιστρεπτότητα των εξισώσεων του Νεύτωνα). Ως αποτέλεσμα, η ορίζουσα του πίνακα του μετασχηματισμού πρέπει να είναι

$$\det(\mathbf{M}) = \pm 1 ,$$

που σημαίνει ότι ο μετασχηματισμός διατηρεί τον όγκο (εδώ επιφάνεια) στο χώρο των ταχυτήτων,

$$|\Delta v_1| |\Delta v_2| = |\Delta v'_1| |\Delta v'_2| ,$$

αλλά όχι αναγκαστικά και τον προσανατολισμό² στο χώρο των ταχυτήτων (ο προσανατολισμένος όγκος είναι το φυσικό νόημα της ορίζουσας ενός μετασχηματισμού). Επειδή όμως ο μετασχηματισμός αυτός αντιστοιχεί σε κατοπτρισμό στον χώρο των ταχυτήτων (βλ. σχήμα 12.2· αν οι κλίμακες των δύο αξόνων ήταν τέτοιες ώστε η καμπύλη σταθερής ενέργειας να έπαιρνε τη μορφή κύκλου, η μετακίνηση από το ένα άκρο της χορδής στο άλλο θα ισοδυναμούσε με κατοπτρισμό ως προς τη μεσοκάθετο της χορδής), η ορίζουσα του μετασχηματισμού λαμβάνει μόνο την τιμή

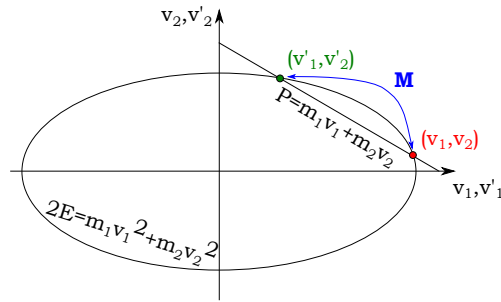
$$\det(\mathbf{M}) = -1 ,$$

αν υπάρξει αλληλεπίδραση.

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2 = \frac{1}{2}m_1v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2v_2'^2 = E . \quad (12.5)$$

Η διατηρούμενη ενέργεια E και η διατηρούμενη ορμή P , οδηγούν στην εξής γραφική λύση: την τομή της έλλειψης που περιγράφει τη διατήρηση της ενέργειας με την ευθεία που περιγράφει τη διατήρηση της ορμής. Οι αρχικές τιμές των ταχυτήτων προ της κρούσης αναπαρίστανται με το ένα σημείο τομής, ενώ οι τιμές μετά την κρούση με το άλλο. Οι λύσεις εμφανίζονται πάντοτε κατά ζεύγη, όπως και τα σημεία τομής ευθείας-έλλειψης. Η ειδική περίπτωση όπου το σημείο τομής είναι ένα (διπλή ρίζα) αντιστοιχεί στην περίπτωση της μη κρούσης αφού η λύση πριν και η λύση μετά

²Με τον όρο προσανατολισμό εννοούμε το εξής: Τα διανύσματα στο χώρο των ταχυτήτων $\mathbf{a} = (v_1, v_2)^T$ και $\mathbf{b} = (v_3, v_4)$ θα μετατραπούν στα $\mathbf{a}' = \mathbf{M} \mathbf{a}$ και $\mathbf{b}' = \mathbf{M} \mathbf{b}$. Η αλλαγή προσανατολισμού σημαίνει $\mathbf{a}' \times \mathbf{b}' = -\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{a}$.



Σχήμα 12.2: Η διατήρηση της ενέργειας ως έλλειψη και η διατήρηση της ορμής ως ευθεία στο χώρο των ταχυτήτων. Ο μετασχηματισμός \mathbf{M} των ταχυτήτων κατά την ελαστική κρούση ως αντιστοίχιση του ενός σημείου τομής των δύο γεωμετρικών σχημάτων στο άλλο.

την κρούση συμπίπτουν, δηλαδή $v_1 = v'_1$ και $v_2 = v'_2$: ακριβώς καμία αλληλεπίδραση των δύο σωματιδίων. Τέλος η περίπτωση της απουσίας τομής δεν είναι δυνατό να υφίσταται αφού αρχικά υπάρχει σημείο στο χώρο v_1, v_2 που λύνει και της εξίσωση διατήρησης της ενέργειας και την εξίσωση διατήρησης της ορμής. Αν αλλάξει κανείς την κλίμακα των αξόνων και θέσει τον ένα άξονα $x = \sqrt{m_1}v_1$ και τον άλλο $y = \sqrt{m_2}v_2$ η εξίσωση της έλλειψης μετατρέπεται σε εξίσωση κύκλου $x^2 + y^2 = 2E$, ενώ η εξίσωση της ευθείας παραμένει εξίσωση ευθείας: $\sqrt{m_1}x + \sqrt{m_2}y = P$. Η τομή τους ορίζει μια χορδή του κύκλου, οπότε η αντιστοίχιση των x, y προ της κρούσης με τα x', y' μετά την κρούση είναι από γεωμετρικής άποψης ένας κατοπτρισμός ως προς τη μεσοκάθετο της χορδής, η οποία ως μεσοκάθετος περνά από το κέντρο του κύκλου. Επειδή μάλιστα η κλίση της ευθείας είναι $-\sqrt{m_1/m_2} = \sqrt{\lambda}$ η διάμετρος του κύκλου ως προς την οποία γίνεται ο κατοπτρισμός του μετασχηματισμού είναι αυτή με κλίση $\sqrt{m_2/m_1} = 1/\sqrt{\lambda}$.

Στην περίπτωση που η κρούση δεν είναι ελαστική και ένα μέρος της αρχικής ενέργειας χάνεται κατά τη διαδικασία της κρούσης, η έλλειψη³ στον χώρο των ταχυτήτων που αντιπροσωπεύει την τελική τιμή της ενέργειας είναι συρρικνωμένη σε σχέση με την αρχική. Παρόλα αυτά η τελική ενέργεια δεν μπορεί να είναι οσοδήποτε μικρή αφού πρέπει να εξακολουθήσει να υπάρχει τομή της ευθείας των ορμών με την τελική έλλειψη. Η ελάχιστη τελική ενέργεια θα αντιπροσωπεύεται από εκείνη την έλλειψη που εφάπτεται στην ευθεία των ορμών⁴. Έτσι απαιτώντας η ευθεία να είναι εφαπτομένη στην έλλειψη, δηλαδή να είναι:

$$\left. \frac{dv'_2}{dv'_1} \right|_{P=\text{σταθ}} = \left. \frac{dv'_2}{dv'_1} \right|_{E=\text{σταθ}},$$

³Επανερχόμαστε στα αρχικά σχήματα έλλειψη και ευθεία. Όλη η ανάλυση θα μπορούσε φυσικά να γίνει στο χώρο των $x - y$ με τον κύκλο και την ευθεία.

⁴Όλες οι άλλες ομόλογες ελλείψεις (με ίδιο λόγο ημιαξόνων) μεταξύ της αρχικής και της μικρότερης δυνατής έχουμε μερική απώλεια ενέργειας και η κρούση είναι ημιαελαστική.

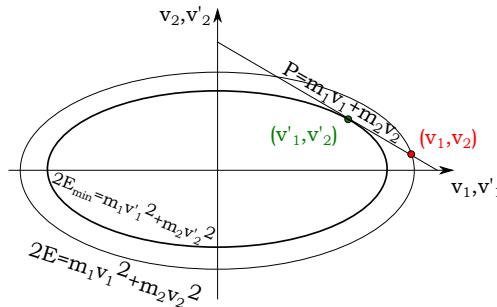
ή

$$-\frac{m_1}{m_2} = -\frac{m_1 v'_1}{m_2 v'_2},$$

καταλήγουμε ότι πρέπει:

$$v'_1 = v'_2. \quad (12.6)$$

Αν συμβεί αυτό (μέγιστη δυνατή απώλεια ενέργειας) και οι ταχύτητες εξισωθούν



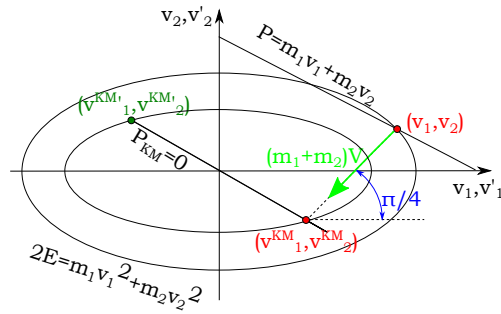
Σχήμα 12.3: Στις μη ελαστικές κρούσεις η ενέργεια παρουσιάζει απώλειες και η αντίστοιχη έλλειψη συρρικνώνεται. Η μικρότερη δυνατή έλλειψη αντιστοιχεί στην πλαστική κρούση δηλαδή σε συσσωμάτωμα (κοινή ταχύτητα) μετά την κρούση.

μετά την κρούση τότε η κρούση ονομάζεται *πλαστική* και τα δύο σώματα κινούνται μετά την κρούση μαζί ως ένα συσσωμάτωμα. Η πλαστική κρούση αποτελεί την πλέον ανελαστική κρούση και το ποσοστό της ενέργειας που χάνεται κατά την κρούση είναι, αν εκτελέσει κανείς τις πράξεις:

$$\frac{\Delta E}{E} = \frac{\mu(v_1 - v_2)^2}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}, \quad (12.7)$$

όπου $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ η ανηγμένη μάζα των δυο σωματιδίων. Η μεταβολή της ενέργειας ΔE που συμβαίνει κατά την πλαστική κρούση είναι και η μέγιστη παραδοτική μεταβολή της κινητικής ενέργειας κατά την ελαστική κρούση δύο σωματιδίων (θυμηθείτε το μηχανικό ανάλογο της ελαστικής κρούσης με το ελατήριο). Αν, όπως συμβαίνει με τις συγκρούσεις των στοιχειωδών σωματιδίων, θέλουμε να εκμεταλλευτούμε αυτή τη μεταβολή της ενέργειας προκειμένου να φτιάξουμε για παράδειγμα νέα σωματίδια από συγκρούσεις θα πρέπει να φροντίσουμε ώστε ο παραπάνω λόγος να είναι μονάδα (αν θέλουμε να έχουμε τη μέγιστη απόδοση της επένδυσής μας για την κατασκευή του επιταχυντή - συγκρουστήρα). Όπως θα δούμε αμέσως στη συνέχεια στο σύστημα κέντρου μάζας αυτό συμβαίνει αυτόματα.

Αν εξετάζαμε την κρούση σε ένα άλλο σύστημα που κινείται σε σχέση με το αρχικό σύστημα με ταχύτητα V , το αρχικό σημείο στο χώρο των ταχυτήτων θα μετατοπιζόταν πάνω σε μία ευθεία με κλίση 1 αφού η ταχύτητα V θα αφαιρούνταν από



Σχήμα 12.4: Η αλλαγή συστήματος αναφοράς μεταφράζεται σε μεταφορά του αρχικού σημείου πάνω σε μια ευθεία κλίσης 1 κατά $(-V, -V)$. Έτσι η αντίστοιχη ευθεία της ορμής μεταφέρεται παράλληλα και η έλλειψη συρρικνώνεται. Όταν η ταχύτητα γίνει ίση με V_{KM} η ευθεία της ορμής γίνεται διάμετρος της συρρικνωμένης έλλειψης και το αρχικό σημείο (στο νέο σύστημα) μεταφέρεται στο αντιδιαμετρικό του ($v_1 \rightarrow -v'_1$ και $v_2 \rightarrow -v'_2$).

κοινού και από την v_1 και από την v_2 κατά ένα διάστημα ανάλογο με την V . Η ευθεία που αντιστοιχεί στη συνολική ορμή του συστήματος θα μετακινούνται παράλληλα στον εαυτό της ανάλογα με την τιμή του V . Η αντίστοιχη έλλειψη θα άλλαζε σε μια ομόλογη έλλειψη που θα περνούσε από το νέο σημείο των ταχυτήτων. Όταν η ταχύτητα αυτή πάρει την κατάλληλη τιμή:

$$V_{KM} = \frac{P}{m_1 + m_2},$$

η ορμή του συστήματος μηδενίζεται. Η V_{KM} είναι η ταχύτητα του κέντρου μάζας. Στο σύστημα κέντρου μάζας η ολική ορμή είναι μηδέν, η ευθεία των ορμών περνά από την αρχή των αξόνων και εξαιτίας της συμμετρικότητας της έλλειψης οι ταχύτητες μετά από μια ελαστική κρούση στο σύστημα κέντρου μάζας δίνονται από το αντιδιαμετρικό σημείο του αρχικού επί της νέας συρρικνωμένης έλλειψης:

$$v'_2 = -v_2, \quad v'_1 = -v_1.$$

(Ο M έχει οριζουσα 1 τότε, γιατί ο κατοπτρισμός σε αυτή την περίπτωση είναι κατοπτρισμός ως προς το κέντρο που ισοδυναμεί με στροφή). Ο δε λόγος $\Delta E/E$ στην περίπτωση της πλαστικής κρούσης στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι ίσος με τη μονάδα.

Άσκηση

Χρησιμοποιήστε ως μηχανιστικό μοντέλο μίας ανελαστικής κρούσης το μοντέλο της ελαστικής κρούσης με το ελατήριο του σχήματος 12.1 με τη διαφορά ότι (α) το ελατήριο όταν φτάνει στη μέγιστη συσπίρωση παγώνει και δεν αποσυσπείρώνεται στη συνέχεια και (β)

το ελατήριο επανέρχεται σε μηδενική συσπίρωση (στο φυσικό του μήκος), αλλά η κίνηση του παρουσιάζει και τριβές με παράγοντα απόσβεσης, $\gamma < \omega_0$. Να υπολογιστεί το ποσοστό ενέργειας που χάνεται κατά την κρούση στην κάθε περίπτωση.

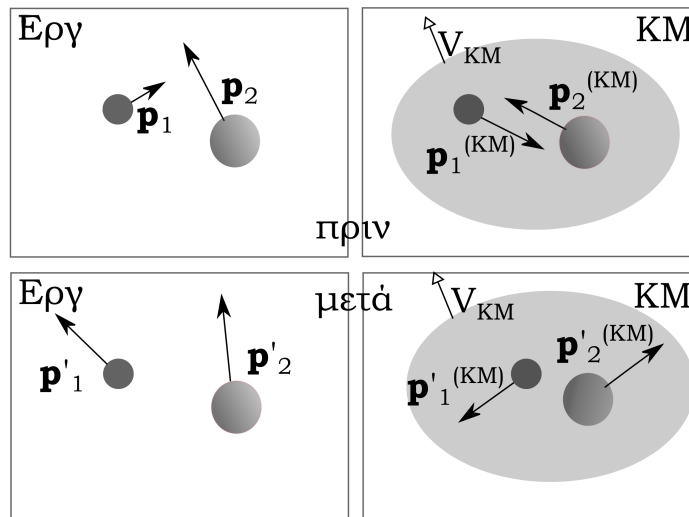
12.2 Κρούσεις σε τρεις διαστάσεις

Γνωρίζοντας τις ιδιαιτερότητες του συστήματος κέντρου μάζας ως μελετήσουμε την κρούση δύο σωματιδίων στις τρεις διαστάσεις, στο εργαστήριο και ταυτόχρονα στο σύστημα κέντρου μάζας (βλ. σχήμα 12.5). Η διατήρηση της ορμής παίρνει τη μορφή:

$$m_1 \mathbf{v}_1 + m_2 \mathbf{v}_2 = m_1 \mathbf{v}'_1 + m_1 \mathbf{v}'_2, \quad (12.8)$$

ενώ στο σύστημα κέντρου μάζας είναι:

$$m_1 \mathbf{v}_1^{(KM)} + m_2 \mathbf{v}_2^{(KM)} = m_1 \mathbf{v}'_1{}^{(KM)} + m_1 \mathbf{v}'_2{}^{(KM)}. \quad (12.9)$$



Σχήμα 12.5: Δύο σωματίδια όπως φαίνονται στο σύστημα του εργαστηρίου και στο σύστημα KM. Το σύστημα KM (γκρι οβάλ) ταξιδεύει με ταχύτητα V_{KM} σε σχέση με το σύστημα εργαστηρίου. Μετά την κρούση, τα σωματίδια αλλάζουν κατεύθυνση (κρατώντας όμως ίδιο το μέτρο της ορμής τους) στο σύστημα KM, το οποίο ερμηνεύεται σε αντίστοιχη αλλαγή ορμών στο σύστημα του εργαστηρίου.

Όπως φαίνεται και στο σχήμα, στο σύστημα του κέντρου μάζας οι ταχύτητες των δύο σωματιδίων είναι συγγραμμικές και αντίρροπες, και πριν και μετά την κρούση αφού η ολική ορμή στο KM είναι μηδενική. Οι δε ορμές είναι απλώς ίσες και αντίθετες η μία της άλλης:

$$\mathbf{p}_1^{(KM)} = -\mathbf{p}_2^{(KM)} = \mathbf{p}, \quad \mathbf{p}'_1{}^{(KM)} = -\mathbf{p}'_2{}^{(KM)} = \mathbf{p}'.$$

Εφόσον η κρούση είναι ελαστική, από τη διατήρηση της ενέργειας συμπεραίνουμε ότι:

$$|\mathbf{p}| = |\mathbf{p}'|. \quad (12.10)$$

Στο σύστημα κέντρου μάζας, λοιπόν, οι ορμές των δύο σωματιδίων θα είναι κατά μέτρο ίσες μεταξύ τους και ίσες πριν και μετά την κρούση. Αυτή η ξεχωριστή ιδιότητα του συστήματος του κέντρου μάζας μας επιτρέπει να γράψουμε τον γενικό μετασχηματισμό των ταχυτήτων στις τρεις διαστάσεις. Η παραπάνω ανάλυση μας δείχνει πως τα μέτρα των δύο ορμών (πριν και μετά) παραμένουν ίδια αλλά δεν μπορεί να μας παράσχει καμία πληροφορία για την αλλαγή κατεύθυνσης του άξονα των ορμών. Η στροφή του άξονα αυτού σχετίζεται, όπως έχουμε συζητήσει στο Κεφάλαιο 11, με τις λεπτομέρειες της αλληλεπίδρασης μεταξύ των δυο σωματιδίων κατά τη διάρκεια της κρούσης. Αυτή την έξτρα πληροφορία, θα την κωδικοποιήσουμε στο μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ της διεύθυνσης του διανύσματος \mathbf{p}' . Έτσι λοιπόν θα είναι:

$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_1{}^{(KM)} = -\mathbf{p}'_2{}^{(KM)} &= \mathbf{p}' = |\mathbf{p}'|\hat{\mathbf{n}} = |\mathbf{p}|\hat{\mathbf{n}} \\ &= |\mathbf{p}_1{}^{(KM)}|\hat{\mathbf{n}} = m_1|\mathbf{v}_1 - \mathbf{V}_{KM}|\hat{\mathbf{n}} \\ &= m_1 \left| \mathbf{v}_1 - \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{m_1 + m_2} \right| \hat{\mathbf{n}} \\ &= \mu|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\hat{\mathbf{n}}, \end{aligned} \quad (12.11)$$

όπου μ η ανηγμένη μάζα των δύο σωματιδίων. Γνωρίζοντας την ορμή στο σύστημα κέντρου μάζας μετά την κρούση, μπορούμε να γράψουμε και την ορμή κάθε σωματιδίου στο σύστημα του εργαστηρίου:

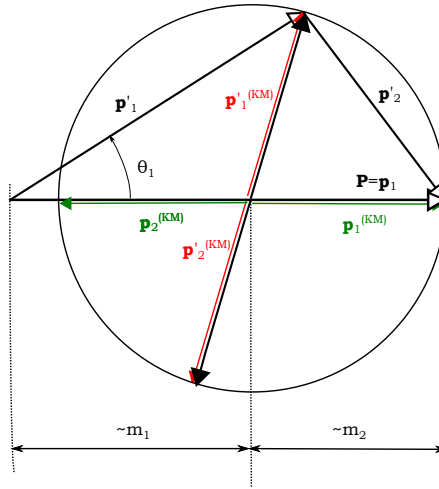
$$\begin{aligned} \mathbf{p}'_1 &= \mathbf{p}'_1{}^{(KM)} + m_1\mathbf{V}_{KM} = \mu|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\hat{\mathbf{n}} + m_1\mathbf{V}_{KM}, \\ \mathbf{p}'_2 &= \mathbf{p}'_2{}^{(KM)} + m_2\mathbf{V}_{KM} = -\mu|\mathbf{v}_1 - \mathbf{v}_2|\hat{\mathbf{n}} + m_2\mathbf{V}_{KM}, \end{aligned} \quad (12.12)$$

όπου

$$\mathbf{V}_{KM} = \frac{m_1\mathbf{v}_1 + m_2\mathbf{v}_2}{M}.$$

και $M = m_1 + m_2$.

Όπως είπαμε και παραπάνω, αν και φαινομενικά έχουμε πλήρεις εκφράσεις για τις ορμές των σωματιδίων μετά την κρούση, το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{n}}$ περιέχει όλες τις λεπτομέρειες της αλληλεπίδρασης των σωματιδίων. Ο πλήρης καθορισμός του $\hat{\mathbf{n}}$ απαιτεί δυο γωνίες την πολική και αζιμουθιακή γωνία θ και ϕ . Επιπλέον, εφόσον η αλληλεπίδραση υπακούει στον τρίτο νόμο του Νεύτωνα και η δύναμη αλληλεπίδρασης έχει τη διεύθυνση της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια, η συνολική ροπή των δυνάμεων αλληλεπίδρασης είναι μηδενική με αποτέλεσμα η στροφορμή του συστήματος να διατηρείται και επομένως το επίπεδο της κίνησης να είναι πλήρως καθορισμένο από την κίνηση των δύο σωματιδίων προ της κρούσης, και ανεξάρτητο των



Σχήμα 12.6: Ένα σωματίδιο-βλήμα ορμής $\mathbf{p}_1 = \mathbf{P}$ προσκρούει ελαστικά σε ακίνητο σωματίδιο-στόχο. Η ορμή του σωματιδίου 1 στο σύστημα ΚΜ είναι $\mathbf{p}_1^{(KM)} = \mathbf{p}_1 - m_1 \mathbf{V}_{KM} = \mathbf{p}_1(1 - m_1/M)$, δηλαδή είναι ίσο με το κλάσμα m_2/M της ολικής ορμής. Με βάση αυτή την ορμή κατασκευάζουμε έναν κύκλο με ακτίνα $|\mathbf{p}_1^{(KM)}|$ και κέντρο το $\mathbf{P} - \mathbf{p}_1^{(KM)}$. Στον κύκλο αυτόν βρίσκονται οι ορμές και των δύο σωματιδίων, πριν (κόκκινα βέλη) και μετά (πράσινα βέλη) την κρούση, στο σύστημα ΚΜ. Η γωνία στροφής των ορμών κατά την κρούση στο σύστημα ΚΜ είναι η μοναδική παράμετρος που σχετίζεται με τις λεπτομέρειες της κρούσης. Στη συνέχεια οι ορμές των σωματιδίων στο εργαστήριο μετά την κρούση μπορούν να επανακατασκευαστούν από τις ορμές στο σύστημα ΚΜ ως εξής: $\mathbf{p}'_1 = \mathbf{p}_1^{(KM)} + m_1 \mathbf{V}_{KM} = \mathbf{p}_1^{(KM)} + (m_1/M)\mathbf{P}$ και από τη διατήρηση της ορμής θα είναι $\mathbf{p}'_2 = \mathbf{P} - \mathbf{p}'_1$.

λεπτομερειών της αλληλεπίδρασης. Συγκεκριμένα θα πρέπει το διάνυσμα $\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}_{12}$ (που καθορίζει το επίπεδο της κίνησης στο ΚΜ) προ της κρούσης να παραμένει το ίδιο και μετά την κρούση (βλ. σχετικά στο Κεφάλαιο 12). Συνεπώς απομένει μόνο μία γωνία για τον πλήρη καθορισμό της κρούσης.

Στη συνέχεια θα κατασκευάσουμε ένα διαγραμματικό εργαλείο για να απεικονίσουμε την σκέδαση ενός σωματιδίου-βλήματος μάζας m_1 που προσπίπτει σε ακίνητο σωματίδιο-στόχο μάζας m_2 . Το διάγραμμα αυτό μπορεί να κατασκευαστεί και για τη γενικότερη περίπτωση κινούμενου στόχου. Έστω \mathbf{P} η συνολική ορμή του συστήματος. Θα είναι

$$\mathbf{P} = \mathbf{p}_1 = \mathbf{p}'_1 + \mathbf{p}'_2 . \quad (12.13)$$

Στο σύστημα κέντρου μάζας

$$\mathbf{p}_1^{(KM)} = \frac{m_2}{M} \mathbf{P} ,$$

δηλαδή θα είναι το m_2/M κλάσμα του \mathbf{P} . Αντίστοιχα

$$\mathbf{p}_2^{(KM)} = -\mathbf{p}_1^{(KM)} .$$

Μετά την κρούση οι δύο αυτές ορμές θα στραφούν σε σχέση με την αρχική τους κατεύθυνση, δίχως να αλλάξουν όμως μέτρο, παραμένοντας πάντα αντίθετες η μία

στην άλλη (βλ. σχήμα 12.6). Έτσι οι νέες ορμές μετά την κρούση στο σύστημα του εργαστηρίου θα είναι οι δυο πλευρές ενός τριγώνου με βάση την \mathbf{P} και τρίτη κορυφή επί του κύκλου που έχει ως κέντρο το σημείο $\mathbf{P} - \mathbf{p}_{1,KM}$ και περνά από το άκρο του \mathbf{P} . Ο κύκλος υποδηλώνει όλες τις δυνατές διευθύνσεις που μπορεί να έχουν οι ορμές των δυο σωματιδίων στο σύστημα του κέντρου μάζας.

Διακρίνουμε τρεις περιπτώσεις δυνατών καταστάσεων κρούσης ανάλογα με το λόγο των μαζών:

- (i.) Αν $m_1 = m_2$ ο κύκλος περνά και από τα δύο άκρα του \mathbf{P} , οπότε οι ορμές των δυο σωματιδίων μετά την κρούση είναι πάντα κάθετες η μία στην άλλη (το εγγεγραμμένο σε κύκλο τρίγωνο με μία εκ των πλευρών να είναι διάμετρος του κύκλου είναι ορθογώνιο).
- (ii.) Αν $m_1 > m_2$ η αρχή του \mathbf{P} θα βρίσκεται εκτός του κύκλου. Στην περίπτωση αυτή και τα δύο σωματίδια θα έχουν φορά κίνησης πάντα προς τα “εμπρός” (προς την ίδια πλευρά που κινούταν αρχικά το βλήμα). Επίσης τη μεγαλύτερη γωνία σκέδασης που θα μπορούσε να παρουσιάσει το σωματίδιο 1 θα έχουμε όταν η \mathbf{p}_1 είναι εφαπτόμενη του κύκλου δηλαδή θα είναι:

$$\sin \theta_1^{\max} = \frac{m_2}{m_1} \quad (12.14)$$

- (iii.) Αν $m_1 < m_2$ η αρχή του \mathbf{P} θα βρίσκεται εντός του κύκλου. Στην περίπτωση αυτή το σωματίδιο 1 μπορεί να σκεδαστεί είτε προς τα “εμπρός” είτε προς τα “πίσω” (αλλά το σωματίδιο 2 θα κατευθύνεται πάντα προς τα “εμπρός”). Αν όλες οι διευθύνσεις εκτροπής της ορμής στο σύστημα του κέντρου μάζας είναι ισοπίθανες η πιθανότητα οπισθοσκέδασης του σωματιδίου 1 είναι

$$\mathcal{P}_{1(\leftarrow)} = 1 - \frac{\cos^{-1}(m_1/m_2)}{\pi} . \quad (12.15)$$

Αν θέλουμε να μελετήσουμε τη σκέδαση δύο σωματιδίων που αρχικά κινούνται και τα δύο με κάποιο αντίστοιχο διάγραμμα, τότε ο κύκλος των δυνατών τελικών ορμών που θα σχεδιάσουμε δεν θα περνά κατά ανάγκη από κανένα άκρο του \mathbf{P} .

Άσκηση

Ο κύκλος των δυνατών ορμών έχει ακτίνα ανάλογη της τετραγωνικής ρίζας της διαθέσιμης ενέργειας κρούσης (βλ. σχέση (13.10)). Εφόσον η ενέργεια αυτή μειώνεται, ο κύκλος των τελικών ορμών είναι μικρότερος. Στην περίπτωση ακίνητου στόχου (α) δείξτε ότι όταν απορροφάται κατά την κρούση όλη η διαθέσιμη ενέργεια, τα σωματίδια κινούνται με τέτοιες ορμές που αντιστοιχούν σε ίσες ταχύτητες (πλαστική κρούση), (β) αν $m_1 > m_2$ πόσο

μικραίνει η γωνία μέγιστης σκέδασης του 1 αν η διαθέσιμη ενέργεια μειωθεί κατά ποσοστό q : (γ) αν $m_1 < m_2$ πόσο μπορεί να μειωθεί η διαθέσιμη ενέργεια ώστε τα δύο σωματίδια να κινούνται μετά την κρούση υπό γωνία $\pi/2$ το ένα σε σχέση με το άλλο;

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 12

- Κρούση έχουμε όταν δύο (ή περισσότερα σωματίδια) αλληλεπιδρούν έντονα για χρονικό διάστημα τόσο μικρό ώστε οι ωθήσεις των αλληλεπιδράσεων να είναι πολύ μεγαλύτερες από τις ωθήσεις των άλλων εξωτερικών δυνάμεων σε αυτά. Έτσι κατά τη διάρκεια μιας κρούσης μπορούμε να θεωρούμε το σύστημα των συγκρουόμενων σωματιδίων απομονωμένο.
- Ο μετασχηματισμός των ταχυτήτων σε μια κρούση έχει ορίζουσα -1 αν η κρούση είναι ελαστική και $0 > \det(\mathbf{M}) > -1$ αν η κρούση είναι ανελαστική.
- Στο σύστημα ΚΜ η κινητική ενέργεια του συστήματος διατίθεται εξ ολοκλήρου στη διαδικασία της κρούσης. Επομένως για δεδομένη συνολική ενέργεια σωματιδίων, στο σύστημα ΚΜ πετυχαίνουμε μέγιστη αξιοποίηση της ενέργειας στη σύγκρουση.
- Στην ελαστική κρούση η ορμή των σωματιδίων στο σύστημα ΚΜ είναι ίδια για τα δύο σωματίδια και ίδια κατά μέτρο πριν και μετά την κρούση.

13

Κεντρικές δυνάμεις – Θεμελιώδεις δυνάμεις

13.1 Κεντρικές δυνάμεις και ισοτροπία

Ιδιαίτερο ρόλο στη φύση παίζουν οι θεμελιώδεις δυνάμεις αλληλεπίδρασης, οι οποίες ασκούνται επί της ευθείας που συνδέει δύο αλληλεπιδρώντα σημειακά σωματίδια. Οι δυνάμεις με αυτή την ιδιότητα καλούνται *κεντρικές δυνάμεις*. Αν απαιτήσουμε ο κόσμος μας να έχει την πιο απλή δυνατή δομή και παρουσιάζεται σε κοσμικό επίπεδο ισοτροπικός, δηλαδή ίδιος σε κάθε δυνατή κατεύθυνση, τότε δύο σημειακά σωματίδια ορίζουν μια ευθεία και οι δυνάμεις δράσης-αντίδρασης μεταξύ των δύο αυτών σωματιδίων δεν θα μπορούσαν να έχουν άλλη διεύθυνση από αυτή την ευθεία. Μια άλλη διεύθυνση της δύναμης θα σηματοδοτούσε την ύπαρξη κάποιας άλλης κατεύθυνσης στο Σύμπαν που θα υπαγόρευε την αντίστοιχη απόκλιση των αμοιβαίων δυνάμεων προς αυτήν και η οποία είτε θα ήταν τυχαία (γεγονός το οποίο θα κατέστρεφε την απλότητα περιγραφής του κόσμου), είτε θα επιβαλλόταν εξαιτίας κάποια προεξάρχουσας κατεύθυνσης στο Σύμπαν (η οποία θα κατέστρεφε την ισοτροπία αυτού).

Ένας άλλος λόγος που θα μας ωθούσε να αποκλείσουμε την περίπτωση μιας μη «ευθυγραμμισμένης» αλληλεπίδρασης δύο σημειακών σωματιδίων, θα ήταν η ύπαρξη ροπής ζεύγους των αντίρροπων δυνάμεων αλληλεπίδρασης, η οποία θα έθετε το ζεύγος των σωματιδίων σε περιστροφή ακόμη και αν αυτό ήταν αρχικά ακίνητο. Αν μάλιστα τα σωματίδια ήταν μέλη ενός σώματος πεπερασμένης διάστασης,

μα αλληλεπίδραση τέτοιου είδους θα έθετε το σώμα συνολικά σε ιδιοπεριστροφή χωρίς να δρα καμία εξωτερική δύναμη πάνω του. Κάτι τέτοιο θα ήταν ομολογούμενως αρκετά προβληματικό αφού ένα ακίνητο σώμα θα αποκτούσε ενέργεια από μόνο του και θα ήταν από μόνο του ικανό να λύσει τα ενεργειακά μας προβλήματα.

Προτού κλείσουμε τη φιλολογία σχετικά με την αναγκαιότητα ύπαρξης κεντρικών δυνάμεων, θα επισημάνουμε ότι υπάρχουν εναλλακτικές λύσεις σε όλα τα παραπάνω προβλήματα που θα μπορούσαν να παρακάμψουν την κεντρικότητα των θεμελιωδών αλληλεπιδράσεων.

(1) Θα μπορούσαν τα σωματίδια να διαθέτουν κάποια εσωτερικά διανυσματικά χαρακτηριστικά που να καθιστούν τις μεταξύ τους αλληλεπιδράσεις μη κεντρικές. Για παράδειγμα δύο ηλεκτρικά δίπολα με μηδενικές διαστάσεις δεν αλληλεπιδρούν κεντρικά αλλά ο προσανατολισμός των επί μέρους διπόλων αλλοιώνει τις μεταξύ τους δυνάμεις. Μια άλλη τέτοια περίπτωση είναι η αλληλεπίδραση κατά τα άλλα στοιχειωδών σωματιδίων μηδενικών διαστάσεων, που έχουν μη μηδενικό σπιν.¹

(2) Θα μπορούσαν οι ανά δύο αλληλεπιδράσεις σωματιδίων να αλλοιώνονται από την παρουσία ενός τρίτου σωματιδίου, καθιστώντας τις μη κεντρικές. Μια τέτοια περίπτωση εμφανίζεται στις ισχυρές αλληλεπιδράσεις σε κάποιους ατομικούς πυρήνες. Στο παρόν κεφάλαιο θα αναφερθούμε μόνο σε κεντρικές δυνάμεις, όπως είναι η βαρύτητα και οι δυνάμεις Coulomb.

13.2 Κεντρικό πεδίο δυνάμεων, ισοτροπικών και μη

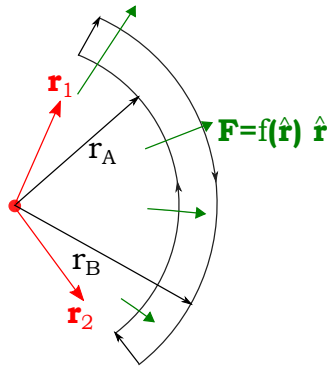
Στο εδάφιο αυτό θα μελετήσουμε την κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα κεντρικό πεδίο δύναμης, δηλαδή σε ένα πεδίο που δρα πάνω στο σωματίδιο έτσι ώστε η δύναμη που κινεί το σωματίδιο να κατευθύνεται προς (ή αντίθετα) ένα σταθερό σημείο. Για ευκολία θα θεωρήσουμε ότι το σταθερό αυτό σημείο είναι η αρχή των αξόνων ενός αδρανειακού συστήματος αναφοράς. Η περίπτωση που θα εξετάσουμε εδώ αποτελεί μια ειδική περίπτωση αμοιβαίας αλληλεπίδρασης μεταξύ ενός εξαιρετικά μαζικού σωματιδίου (που βρίσκεται στην αρχή των αξόνων) και του υπό εξέταση (πολύ μικρότερης μάζας) σωματιδίου. Λόγω της πολύ μεγάλης μάζας του το πρώτο σωματίδιο μπορεί να εκληφθεί ως ακίνητο, ή αλλιώς ως σταθερή πηγή της δύναμης που ασκείται στο «μικρό» σωματίδιο. Ακόμη όμως και αν τα σωματίδια έχουν συγκρίσιμες μάζες, όπως μάθαμε στην περίπτωση της αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων (Κεφάλαιο 11), αν θεωρήσει κανείς τη σχετική κίνηση των δύο σωμάτων στο σύστημα του κέντρου μάζας, το πρόβλημα ανάγεται στο πρόβλημα της κίνησης ενός εικονικού σώματος σε ένα κεντρικό πεδίο δύναμης.

¹Πρόκειται για μια καθαρά κβαντική ιδιότητα η οποία δεν έχει μηχανικό ανάλογο αφού δεν προέρχεται απ' ανάγκη από κάποια εσωτερική δομή των σωματιδίων.

Ένα κεντρικό πεδίο δύναμης μπορεί να γραφεί γενικά ως

$$\mathbf{F} = f(\mathbf{r}) \hat{\mathbf{r}}, \quad (13.1)$$

δηλαδή θα πρέπει να έχει τη διεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}$ του διανύσματος θέσης του σωματιδίου, με αρχή των αξόνων είτε το μεγάλης μάζας σωματίδιο-πηγή του πεδίου, είτε το ΚΜ των δύο αλληλεπιδρώντων σωματιδίων.² Η συνάρτηση $f(\mathbf{r})$ είναι μια βαθμωτή συνάρτηση που μας λέει πως μεταβάλλεται το μέτρο της δύναμης με τη θέση του σωματιδίου, είτε λόγω αλλαγής της απόστασης $|\mathbf{r}|$ του σωματιδίου από την αρχή των αξόνων, είτε λόγω αλλαγής της διεύθυνσης $\hat{\mathbf{r}}$ της ευθείας που συνδέει το σωματίδιο με την αρχή των αξόνων. Η δύναμη αυτή μπορεί να είναι αμγώς ελκτική ($f(\mathbf{r}) < 0$) ή αμγώς απωστική ($f(\mathbf{r}) > 0$), ή σε άλλα σημεία θετική και σε άλλα απωστική.

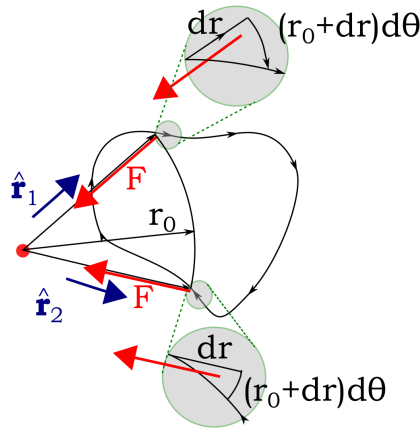


Σχήμα 13.1: Μια απωστική κεντρική δύναμη (πράσινα βέλη), το μέτρο της οποίας αλλάζει με την κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{r}}$, οδηγεί εν γένει σε μη μηδενικό έργο κατά μήκος μιας κλειστής διαδρομής, αφού η συμβολή της δύναμης στα δύο ευθύγραμμα κομμάτια της διαδρομής είναι διαφορετική. Το έργο κατά μήκος των τόξων είναι μηδενικό λόγω κεντρικότητας της δύναμης.

Μια κεντρική δύναμη δεν είναι κατ' ανάγκη συντηρητική. Ο ευκολότερος τρόπος να το δει κανείς αυτό είναι μέσω ενός συγκεκριμένου παραδείγματος (βλ. σχήμα 13.1). Ας υποθέσουμε ότι στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_1$ η συνάρτηση f είναι πάντα θετική, ενώ στην κατεύθυνση $\hat{\mathbf{r}}_2$ η συνάρτηση f είναι πάντα αρνητική. Θα επιλέξουμε μια κλειστή διαδρομή η οποία ξεκινά από το σημείο $\mathbf{r}_A = r_A \hat{\mathbf{r}}_1$ και φτάνει στο $\mathbf{r} = r \hat{\mathbf{r}}_1$ κατά μήκος της ακτινικής κατεύθυνσης $\hat{\mathbf{r}}_1$, στη συνέχεια κινείται πάνω στη σφαίρα ακτίνας r_B μέχρι του σημείου $\mathbf{r}_B = r_B \hat{\mathbf{r}}_2$, κατόπιν κινείται ακτινικά μέχρι του σημείου $\mathbf{r}_A = r_A \hat{\mathbf{r}}_2$, και τέλος επανέρχεται στο αρχικό σημείο κινούμενο πάνω στη σφαίρα ακτίνας r_A . Κατά την κίνηση πάνω στα ακτινικά κομμάτια το έργο της δύναμης είναι θετικό εφόσον $r_B > r_A$ (και αρνητικό αν $r_B < r_A$), ενώ το έργο πάνω στα κομμάτια

²Στη δεύτερη περίπτωση η μάζα του σωματιδίου θα είναι η ανηγμένη μάζα του ζεύγους των σωματιδίων και η θέση \mathbf{r} θα είναι η σχετική θέση των δύο σωματιδίων.

της διαδρομής που βρίσκονται πάνω σε κάποια σφαιρική επιφάνεια είναι μηδενικό, αφού η δύναμη και η εκάστοτε στοιχειώδης μετατόπιση είναι κάθετες η μια στην άλλη. Έτσι το συνολικό έργο σε μια τέτοια κλειστή διαδρομή είναι καθαρά θετικό (ή αρνητικό). Η κεντρική αυτή δύναμη λοιπόν δεν είναι συντηρητική και επομένως δεν μπορεί να προέρχεται από κάποια δυναμική ενέργεια.



Σχήμα 13.2: Μια ελκτική κεντρική δύναμη της μορφής $\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}}$ είναι συντηρητική και μπορεί να προκύψει από μια βαθμωτή δυναμική ενέργεια $V(r)$ μέσω της σχέσης $\mathbf{F} = -\nabla V$.

Από αυτό το παράδειγμα μη συντηρητικής δύναμης, μπορεί ίσως να φανταστεί κανείς ποια επιπλέον συνθήκη θα καθιστούσε μια κεντρική δύναμη συντηρητική. Αν η συνάρτηση $f(\mathbf{r})$ είναι συνάρτηση μόνο του μέτρου $|\mathbf{r}|$, $f(|\mathbf{r}|)$, στην παραπάνω κλειστή διαδρομή το έργο θα είναι μηδέν αφού το πέρασμα από το $r_0\hat{\mathbf{r}}_1$ στο $(r_0 + dr)\hat{\mathbf{r}}_1$ το έργο είναι $dW = f(r_0)dr$, το οποίο είναι ίσο και αντίθετο με το έργο κατά το πέρασμα από το $(r_0 + dr)\hat{\mathbf{r}}_2$ στο $(r_0 + dr - dr)\hat{\mathbf{r}}_2$. Όλα τα ζευγάρια στοιχειωδών έργων, κατά την ακτινική απομάκρυνση και την αντίστοιχη ακτινική προσέγγιση στην αρχή των αξόνων, αλληλοαναιρούνται, με αποτέλεσμα το συνολικό έργο να είναι μηδέν. Αυτό ισχύει όχι μόνο για τη διαδρομή που περιγράψαμε στην προηγούμενη παράγραφο, αλλά για κάθε κλειστή διαδρομή. Τα μεν ακτινικά κομμάτια θα εμφανίζονται πάντα σε ζευγάρια απομάκρυνσης-προσέγγισης (μηδενικού συνολικού έργου), ενώ στα κάθετα στις ακτινικές κατευθύνσεις κομμάτια της διαδρομής δεν παράγεται έργο λόγω ακτινικής κατεύθυνσης της δύναμης. Η περίπτωση μιας τέτοιας συντηρητικής κεντρικής δύναμης

$$\mathbf{F} = f(r)\hat{\mathbf{r}} \quad (13.2)$$

θα πρέπει να προκύπτει από κάποια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας ως ακολού-

θως:

$$f(r)\hat{\mathbf{r}} = -\nabla V(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{r}}\frac{\partial V}{\partial r} + \dots \quad (13.3)$$

όπου τα αποσιωπητικά αναφέρονται στις άλλες συνιστώσες του ∇ οι οποίες θα προκύπτουν από παραγωγίσεις της άγνωστης δυναμικής ενέργειας ως προς τις άλλες μη ακτινικές συντεταγμένες. Για να είναι ορθή η παραπάνω εξίσωση θα πρέπει οι άλλες συνιστώσες του ∇V να μηδενίζονται, Επομένως θα πρέπει η V να είναι συνάρτηση αποκλειστικά της ακτινικής συνιστώσας r του \mathbf{r} και επιπλέον να είναι

$$f(r) = -\frac{\partial V}{\partial r} = -\frac{dV(r)}{dr},$$

δηλαδή

$$V(r) = -\int_{r_0}^r f(r')dr',$$

με r_0 κάποια αυθαίρετη ακτίνα στην οποία προσδίδουμε μηδενική τιμή στη δυναμική ενέργεια. Για κεντρικές συντηρητικές δυνάμεις, σαν αυτή της βαρύτητας, που εξασθενίζουν με την απόσταση από το κέντρο, συνηθίζουμε να θέτουμε μηδενική τιμή στη δυναμική ενέργεια σε άπειρη απόσταση. Στην περίπτωση αυτή λοιπόν η δυναμική ενέργεια ορίζεται ως

$$V_{\text{εξασθ}}(r) = \int_r^\infty f(r') dr'.$$

Το αρνητικό πρόσημο διαγράφηκε με παράλληλη εναλλαγή των ορίων του ολοκληρώματος.

Ανεξαρτήτως της συντηρητικότητας, ή μη, μιας κεντρικής δύναμης υπάρχει μια φυσική ποσότητα που αφορά στην κίνηση ενός σωματιδίου σε ένα κεντρικό πεδίο η οποία διατηρείται. Η ποσότητα αυτή είναι η στροφορμή του σωματιδίου. Θυμηθείτε ότι η μεταβολή της στροφορμής συνδέεται με τη ροπή της δύναμης που ασκείται στο σωματίδιο:

$$\frac{d\mathbf{L}}{dt} = \boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}.$$

Η κεντρικότητα της δύναμης εξασφαλίζει ότι η ροπή είναι μηδενική ($\mathbf{r} \parallel \mathbf{F}$) και επομένως τη διατήρηση της στροφορμής. Θα πρέπει βέβαια να σημειώσουμε ότι η στροφορμή ως προς το κέντρο της δύναμης διατηρείται και όχι ως προς κάποιο άλλο σημείο, αφού ως προς ένα άλλο σημείο που βρίσκεται στη θέση \mathbf{R} , σε σχέση με το κέντρο, θα είναι

$$\frac{d\mathbf{L}^{(\mathbf{R})}}{dt} = \boldsymbol{\tau}^{(\mathbf{R})} = (\mathbf{r} - \mathbf{R}) \times \mathbf{F} = -\mathbf{R} \times \mathbf{F} = -\mathbf{R} \times \hat{\mathbf{r}}f(r) \neq 0$$

εν γένει, εφόσον το \mathbf{R} δεν είναι παράλληλο στο εκάστοτε $\hat{\mathbf{r}}$. Στη συνέχεια όταν θα γράφουμε τη στροφορμή ή θα αναφερόμαστε σε αυτή θα εννοούμε τη στροφορμή ως προς το κέντρο του πεδίου.

Με τη σειρά της η διατήρηση της στροφορμής οδηγεί σε δύο επί μέρους γεωμετρικές συνέπειες όσον αφορά στην κίνηση του σωματιδίου.

(1) Εξ' ορισμού η στροφορμή είναι

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} ,$$

δηλαδή πρόκειται για ένα διανυσματικό μέγεθος κάθετο στο επίπεδο που ορίζουν κάθε στιγμή τα διανύσματα \mathbf{r} και \mathbf{v} . Αν η στροφορμή είναι σταθερή, αυτό σημαίνει ότι είναι σταθερό και το επίπεδο των \mathbf{r} και \mathbf{v} . Αυτόματα το συμπέρασμα αυτό εγγυάται επιπεδότητα της κίνησης του σωματιδίου:

$$\mathbf{r}(t) = a\mathbf{r}(0) + b\mathbf{v}(0) \quad (13.4)$$

με a, b κατάλληλες σταθερές. Στην ειδική περίπτωση που αρχικά τα διανύσματα $\mathbf{r}(0)$, $\mathbf{v}(0)$ είναι παράλληλα το ένα στο άλλο, η στροφορμή είναι μηδέν και παραμένει για πάντα μηδέν. Επομένως τότε η θέση και η ταχύτητα είναι συνεχώς παράλληλες η μία στην άλλη. Αυτομάτως αυτό συνεπάγεται ευθύγραμμη κίνηση και μάλιστα κατά μήκος μιας ευθείας που διέρχεται από το κέντρο. Αν η κίνηση ήταν καμπυλόγραμμη τότε σε κάποια στιγμή θα υπήρχε συνιστώσα της ταχύτητας κάθετη στη θέση σε αντίθεση με τα προηγούμενα περί παραλληλίας. Το ίδιο θα ίσχυε και αν η κίνηση ήταν ευθύγραμμη αλλά όχι διερχόμενη από το κέντρο: η ακτινική θέση θα άλλαζε διεύθυνση αλλά η ταχύτητα θα ήταν πάνω στην ευθεία της κίνησης, οπότε θα υπήρχε συνεχώς μη μηδενική γωνία μεταξύ της θέσης και της ταχύτητας.

Ίσχυει όμως και η αντίστροφη πρόταση; Η επιπεδότητα της τροχιάς συνεπάγεται και κεντρικότητα της δύναμης; Προφανώς όχι. Για παράδειγμα η τροχιά ενός σώματος στο ομογενές πεδίο βαρύτητας της Γης (κοντά στην επιφάνεια αυτής) είναι μια παραβολή σε ένα κατακόρυφο πεδίο, δηλαδή διεξάγεται πάνω σε ένα επίπεδο. Η στροφορμή όμως δεν είναι σταθερή, αφού η δύναμη της βαρύτητας μετακινείται μαζί με το σώμα αλλάζοντας ταυτόχρονα και τη ροπή της. Στην περίπτωση αυτή η στροφορμή αλλάζει κατά μέτρο αλλά παραμένει πάντα κάθετη στο επίπεδο της τροχιάς (ως οφείλει, εκ του ορισμού της)³. Ένα δεύτερο παράδειγμα διατήρησης της διεύθυνσης της στροφορμής, αλλά όχι του μέτρου της, είναι η κίνηση σε ένα κεντρικό πεδίο με ταυτόχρονη δράση μιας δύναμης αντίστασης, παράλληλης στη

³ Ίσως ο αναγνώστης αμφισβητήσει τη μη διατήρηση της στροφορμής στις βολές, με το επιχείρημα ότι η στροφορμή του σώματος ως προς το κέντρο της Γης είναι σταθερό, αφού η βαρυτική δύναμη είναι μια κεντρική δύναμη. Το παράδειγμα όμως που αναφέραμε –της κίνησης σε ένα ομογενές πεδίο– εξακολουθεί να μη διατηρεί τη στροφορμή, παρόλο που αυτό αποτελεί προσέγγιση ενός πεδίου που διατηρεί τη στροφορμή.

στιγμιαία ταχύτητα του σωματιδίου:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\text{κεντρ}} + \mathbf{F}_{\text{αντ}} = \hat{\mathbf{r}}f(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{v}}g(\mathbf{r}, \mathbf{v}),$$

όπου $\hat{\mathbf{v}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα στην κατεύθυνση της ταχύτητας και g είναι μια τυχαία συνάρτηση της ταχύτητας και της θέσης. Η μεταβολή της στροφορμής από ένα τέτοιο πεδίο θα είναι

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}}{dt} &= \mathbf{r} \times (\hat{\mathbf{r}}f(\mathbf{r}) + \hat{\mathbf{v}}g(\mathbf{r}, \mathbf{v})) \\ &= (\mathbf{r} \times \hat{\mathbf{v}})g(\mathbf{r}, \mathbf{v}) \\ &= (m\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \frac{g(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{m|\mathbf{v}|} \\ &= \mathbf{L} \frac{g(\mathbf{r}, \mathbf{v})}{m|\mathbf{v}|}. \end{aligned} \quad (13.5)$$

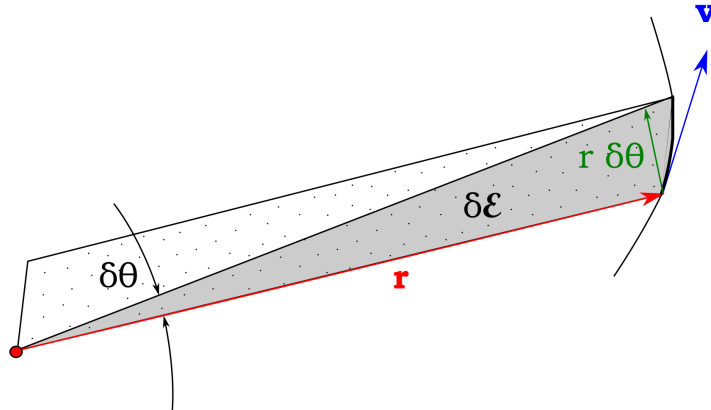
Μια τέτοια μεταβολή διατηρεί τη διεύθυνση της \mathbf{L} αλλά όχι το μέτρο αυτής. Λόγω της σταθερότητας της διεύθυνσης της \mathbf{L} η τροχιά παραμένει επίπεδη, μολονότι η στροφορμή μεταβάλλεται (κατά μέτρο).

(2) Δεδομένης της επιπεδότητας της τροχιάς όταν ένα σώμα κινείται σε ένα κεντρικό πεδίο, η διατήρηση του μέτρου της στροφορμής συνεπάγεται και διατήρηση του ρυθμού σάρωσης εμβαδών από την επιβατική ακτίνα που συνδέει το κέντρο με την εκάστοτε θέση του σωματιδίου. Πρόκειται για το νόμο που διατύπωσε ο Κέπλερ παρατηρώντας την κίνηση των πλανητών. Μόνο που η διατήρηση αυτή δεν είναι αποκλειστικό προνόμιο της βαρύτητας· η διατήρηση του ρυθμού σάρωσης των εμβαδών είναι συνέπεια της κεντρικότητας των δυνάμεων, ακόμη και αν αυτές είναι μη συντηρητικές. Ας δούμε όμως γιατί η διατήρηση της στροφορμής σημαίνει σταθερό ρυθμό σάρωσης.

Από τη στιγμή που η τροχιά είναι επίπεδη, μπορούμε να χρησιμοποιήσουμε πολικές συντεταγμένες για την περιγραφή της τροχιάς. Σύμφωνα με τα όσα μάθαμε στο κεφάλαιο των διανυσμάτων

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} = mr\hat{\mathbf{r}} \times (v_r\hat{\mathbf{r}} + v_\theta\hat{\boldsymbol{\theta}}) = mrv_\theta\hat{\mathbf{k}} = mr^2\dot{\theta}\hat{\mathbf{k}}$$

όπου $\hat{\mathbf{k}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα το κάθετο στο επίπεδο της κίνησης με κατεύθυνση αυτή του αντίχειρα ενός δεξιού χεριού όταν τα υπόλοιπα δάχτυλα είναι στραμμένα στην κατεύθυνση που ακολουθεί την κίνηση του σωματιδίου ($\hat{\mathbf{k}} = \hat{\mathbf{r}} \times \hat{\boldsymbol{\theta}}$). Η ποσότητα $r^2\dot{\theta}$ είναι κατ' ουσίαν ο ρυθμός σάρωσης του εμβαδού από την επιβατική ακτίνα \mathbf{r} (για την ακρίβεια είναι το διπλάσιο αυτού του ρυθμού), όπως θα δείξουμε. Στο χρονικό διάστημα δt η επιβατική ακτίνα μεταβαίνει από την τιμή $r(t)$ στην $r(t + \delta t)$ και ταυτόχρονα στρέφεται κατά γωνία $\delta\theta$. Αν η γωνία αυτή είναι πολύ μικρή το “καμπύλο τρίγωνο” που σχηματίζεται μεταξύ των δύο διαδοχικών ακτίνων



Σχήμα 13.3: Το εμβαδόν $\delta\mathcal{E}$ που διαγράφει η επιβατική ακτίνα σε πολύ μικρό χρονικό διάστημα δt (γκρι εστιγμένη περιοχή) είναι περίπου ίσο με $\frac{1}{2}r(r\delta\theta)$ ή το ήμισυ του παραλληλογράμμου (εστιγμένη περιοχή) που δίνεται από το $|\mathbf{r} \times \mathbf{v}|\delta t$. Το λάθος στον υπολογισμό του εμβαδού από τις δύο αυτές εκφράσεις είναι τάξης δt^2 .

και του τόξου της καμπύλης τροχιάς έχει εμβαδόν

$$\delta\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}r(t)[r(t)\delta\theta] + \mathcal{O}(\delta\theta \cdot \delta r).$$

Ο πρώτος όρος είναι το εμβαδόν ενός τριγώνου με ύψος $r(t)$ και βάση $r(t)\delta\theta$ ενώ ο επόμενος όρος εμπεριέχει όλες τις διορθώσεις που οφείλονται στο γεγονός ότι η $\delta\theta$ είναι πεπερασμένη και στο ότι το τρίγωνο του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το εμβαδόν δεν είναι ακριβώς τρίγωνο... Το κλάσμα $\delta\mathcal{E}(t)/\delta t$, στο όριο που το δt τείνει στο 0, δίνει $(1/2)r^2(d\theta/dt)$. Επομένως

$$\mathbf{L} = 2m \frac{d\mathcal{E}}{dt} \mathbf{k}. \quad (13.6)$$

Ένας εναλλακτικός τρόπος απόδειξης της παραπάνω σχέσης θα μπορούσε να προκύψει και δίχως αναφορά σε πολικές συντεταγμένες, ως ακολούθως.

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt} = m \lim_{\delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{r} \times \delta\mathbf{r}}{\delta t} = m \frac{2\delta\mathcal{E}}{\delta t} = 2m \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

Η ποσότητα $\delta\mathcal{E}$ είναι το εμβαδόν ενός παραλληλογράμμου με πλευρές \mathbf{r} και $\delta\mathbf{r}$ και μάλιστα υπό μορφή διανύσματος (θυμηθείτε τη σχέση των εξωτερικών γινομένων και των εμβαδών που είδαμε στο κεφάλαιο για τα διανύσματα). Προφανώς, αν η στροφορμή διατηρεί τη διεύθυνσή της, αλλά όχι το μέτρο της (όχι κεντρική δύναμη) ο ρυθμός σάρωσης εμβαδού δεν είναι σταθερός.

13.3 Στροφορμή συστήματος πολλών σωματιδίων

Σε προηγούμενο κεφάλαιο είδαμε ότι η ορμή ενός απομονωμένου συστήματος αλληλεπιδρώντων σωματιδίων διατηρείται εξαιτίας της απαίτησης οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης να σέβονται τον τρίτο νόμο του Νεύτωνα. Βασισμένοι στη διατήρηση της ορμής μάλιστα, κατασκευάσαμε ένα σύστημα, το σύστημα ΚΜ στο οποίο η ολική ορμή είναι μηδέν. Το ιδιαίτερο αυτό σύστημα μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να διαχωριστεί η ορμή και η ενέργεια ενός συστήματος σωματιδίων σε εσωτερική (ως προς το ΚΜ) και του ΚΜ⁴.

Θέλουμε τώρα να εξετάσουμε αν και η συνολική στροφορμή των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων είναι σταθερή και πων αυτή διαχωρίζεται αντιστοίχως στο σύστημα ΚΜ. Η στροφορμή του εκάστοτε σωματιδίου ως προς κάποιο σημείο που θεωρούμε ως αρχή των \mathbf{r}_i είναι

$$\mathbf{L}_i = m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i$$

Επομένως η συνολική στροφορμή του συστήματος είναι

$$\mathbf{L}_{ολ} = \sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i \quad (13.7)$$

και ο ρυθμός μεταβολής αυτής είναι

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{L}_{ολ}}{dt} &= \sum_{i=1}^N [m_i (\dot{\mathbf{r}}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) + (\mathbf{r}_i \times \ddot{\mathbf{r}}_i)] \\ &= \sum_{i=1}^N \mathbf{r}_i \times \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N \mathbf{F}_{j \rightarrow i} \\ &= \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1, \\ j \neq i}}^N \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j \rightarrow i}. \end{aligned}$$

Το άθροισμα αυτό δυστυχώς δεν μηδενίζεται αυτομάτως εξαιτίας του τρίτου νόμου του Νεύτωνα, όπως συνέβαινε με το αντίστοιχο άθροισμα όλων των δυνάμεων αλληλεπίδρασης όταν υπολογίζαμε το ρυθμός μεταβολής της ορμής ενός συστήματος. Ας

⁴Υπενθυμίζουμε εδώ ότι η εσωτερική ορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ είναι 0, ενώ η συνολική ενέργεια οφείλεται στις δυνάμεις αλληλεπίδρασης και στις ταχύτητες των σωματιδίων στο σύστημα ΚΜ. Αντίστοιχα η ολική ορμή είναι η ορμή που μετράται σε ένα οποιοδήποτε σύστημα, ενώ η ενέργεια του ΚΜ είναι απλώς η κινητική ενέργεια ενός υποθετικού σωματιδίου με μάζα ίση με τη μάζα όλων των σωματιδίων και ταχύτητα αυτήν του ΚΜ.

δούμε λίγο πιο αναλυτικά γιατί. Το ζευγάρι

$$\mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j \rightarrow i} + \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{i \rightarrow j} = \mathbf{r}_i \times \mathbf{F}_{j \rightarrow i} - \mathbf{r}_j \times \mathbf{F}_{j \rightarrow i} = (\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j) \times \mathbf{F}_{j \rightarrow i}$$

με $i \neq j$ δεν είναι οπωσδήποτε μηδέν αφού κανένας δεν μας διαβεβαίωσε ότι η δύναμη που ασκεί το j σωματίδιο στο i σωματίδιο θα είναι παράλληλη στο διάνυσμα $\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j$ που συνδέει το j με το i . Αν ίσχυε κάτι τέτοιο, τότε και πάλι όλα τα ζευγάρια αλληλεπιδράσεων μεταξύ σωματιδίων θα έδιναν μηδενική μεταβολή της συνολικής τους στροφορμής. Επομένως η συνθήκη για να διατηρείται η ολική στροφορμή ενός απομονωμένου συστήματος είναι η δύναμη αλληλεπίδρασης μεταξύ δύο οποιωνδήποτε σωματιδίων να έχει τη διεύθυνση της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια.

Θα μπορούσε να είναι διαφορετικά τα πράγματα για τις θεμελιώδεις αλληλεπιδράσεις; Αν οι δυνάμεις εξαρτώνται μόνο από τις σχετικές θέσεις των σωμάτων και ο κόσμος είναι ισοτροπικός, όχι. Η μοναδική διεύθυνση στο χώρο μεταξύ δύο σημειακών σωματιδίων είναι αυτή της ευθείας που τα ενώνει. Δεν υπάρχει καμία άλλη προτιμητέα διεύθυνση στο χώρο για να υπάρχει πάνω σε αυτήν συνιστώσα της δύναμης αλληλεπίδρασής τους. Αν όμως η αλληλεπίδρασή εξαρτάται και από τη σχετική τους ταχύτητα τότε η διεύθυνση του $\mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}_{12}$ δεν είναι παράλληλη στην ευθεία που ενώνει τα δύο σωματίδια και έχει τη διεύθυνση του \mathbf{r}_{12} . Σε αυτή λοιπόν την περίπτωση η ολική στροφορμή δεν θα διατηρούνταν. Οι δυνάμεις αυτού του τύπου θα μετέβαλαν συνεχώς τη στροφορμή. Για παράδειγμα αν είχαμε δύο σωματίδια και αυτά κινούντουσαν αρχικά παράλληλα το ένα στο άλλο, μια τέτοιου είδους δύναμη θα τα έθετε σε στροβιλισμό αφού μια δύναμη της μορφής $\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} \propto \mathbf{r}_{12} \times \mathbf{v}_{12}$ θα ασκούσε ροπή ζεύγους στα δύο σωματίδια. Το μαγνητικό κομμάτι της δύναμης Lorentz μεταξύ δύο φορτισμένων σωματιδίων έχει μια τέτοια μορφή, αλλά στο σύστημα που το σωματίδιο #1 είναι ακίνητο, δεν υπάρχει μαγνητικό πεδίο να επηρεάσει το #2, ενώ στο σύστημα του σωματιδίου #2 το μαγνητικό πεδίο που δημιουργεί το σωματίδιο #1 δεν ασκεί δύναμη στο #2 αφού αυτό είναι ακίνητο. Συνεπώς και στην περίπτωση των ηλεκτρομαγνητικών αλληλεπιδράσεων απομένει μόνο η δύναμη Coulomb, που εξαρτάται μόνο από τη σχετική θέση, να ελέγχει τις κινήσεις⁵. Το τελικό συμπέρασμα λοιπόν είναι ότι ο κόσμος μας, με τις θεμελιώδεις δυνάμεις που τον περιγράφουν, διατηρεί σταθερή τη στροφορμή ενός απομονωμένου συστήματος αλληλεπιδρώντων σωματιδίων. Θα μπορούσε όμως ο κόσμος να είναι πιο περίπλοκος και η στροφορμή να μην διατηρείται!

Η απαίτηση για διατήρηση της στροφορμής ενός συστήματος είναι ισοδύναμη με την απαίτηση οι δυνάμεις αλληλεπίδρασης να είναι κεντρικές, δηλαδή η δύναμη που

⁵ Ίσως αναρωτηθείτε αν τα επιχειρήματα περί μη ύπαρξης μαγνητικών δυνάμεων στα δύο ειδικά αυτά συστήματα είναι αρκετά για να πειστεί κανείς ότι σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα, που οι μαγνητικές δυνάμεις είναι παρούσες, η στροφορμή θα έχει την ίδια συμπεριφορά. Αυτό όμως είναι αναμενόμενο αφού όλα τα αδρανειακά συστήματα είναι ισοδύναμα ως προς την περιγραφή όλων των φυσικών συστημάτων.

ασκεί το σωματίδιο #2 στο σωματίδιο #1 να είναι της μορφής

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)f,$$

όπου f κάποια βαθμωτή συνάρτηση που μπορεί να εξαρτάται από τη σχετική θέση \mathbf{r}_{12} και τη σχετική ταχύτητα \mathbf{v}_{12} των δύο σωματιδίων ή ακόμη και του χρόνου. Έτσι οι κεντρικές δυνάμεις που μελετάμε στο παρόν κεφάλαιο οδηγούν αυτομάτως σε διατήρηση της στροφορμής.

Ας δούμε τώρα τι μορφή παίρνει η στροφορμή στο σύστημα ΚΜ.

$$\mathbf{L}^{(KM)} = \sum_{i=1}^N m_i \tilde{\mathbf{r}}_i \times \dot{\tilde{\mathbf{r}}}_i$$

όπου $\tilde{\mathbf{r}} = \mathbf{r} - \mathbf{R}_{KM}$ είναι η θέση του εκάστοτε σωματιδίου στο σύστημα ΚΜ, με αρχή το ΚΜ. Αν αναπτύξουμε τη συνολική στροφορμή σε διανύσματα θέσης \mathbf{r} , \mathbf{R} , όπως αυτά μετρώνται σε οποιοδήποτε άλλο σύστημα, θα έχουμε

$$\begin{aligned} \mathbf{L}^{(KM)} &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i - \mathbf{R}_{KM}) \times (\dot{\mathbf{r}}_i - \dot{\mathbf{R}}_{KM}) \\ &= \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i + \mathbf{R}_{KM} \times \dot{\mathbf{R}}_{KM} - \mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{R}}_{KM} - \mathbf{R}_{KM} \times \dot{\mathbf{r}}_i) \quad (13.8) \end{aligned}$$

Στο σημείο αυτό μπορούμε να κάνουμε τις ακόλουθες αντικαταστάσεις

$$\sum_{i=1}^N m_i \mathbf{r}_i = M \mathbf{R}_{KM} \quad \text{και} \quad \sum_{i=1}^N m_i \dot{\mathbf{r}}_i = M \dot{\mathbf{R}}_{KM}$$

οπότε η σχέση (13.8) λαμβάνει την ακόλουθη απλή μορφή

$$\mathbf{L}^{(KM)} = \sum_{i=1}^N m_i (\mathbf{r}_i \times \dot{\mathbf{r}}_i) - M \mathbf{R}_{KM} \times \dot{\mathbf{R}}_{KM} = \mathbf{L} - \mathbf{L}_{KM}. \quad (13.9)$$

Η στροφορμή του ΚΜ, \mathbf{L}_{KM} , θα είναι μηδέν αν το σημείο ως προς το οποίο μετρηθεί αυτή βρίσκεται πάνω στη διεύθυνση κίνησης του ΚΜ ($\mathbf{R}_{KM} \parallel \dot{\mathbf{R}}_{KM}$). Όπως ακριβώς είδαμε να συμβαίνει με την ολική ενέργεια, και η ολική στροφορμή ενός συστήματος σωματιδίων μπορεί να διαχωριστεί σε μια εσωτερική στροφορμή του συστήματος, όπως θα την κατέγραφε ένας παρατηρητής στο ΚΜ, και μια εξωτερική στροφορμή, ωσάν το σύστημα να ήταν ένα σωματίδιο μάζας M , όσο η συνολική μάζα των σωματιδίων, τοποθετημένο στο ΚΜ κινούμενο με την ταχύτητα του ΚΜ. Έτσι για παράδειγμα η στροφορμή του ηλιακού συστήματος στο Γαλαξία, μπορεί να χωρίσει στην ιδιοστροφορμή του ηλιακού συστήματος (εξαιτίας της περιστροφής

των πλανητών) με φορά κάθετη στην εκλειπτική, συν τη στροφορμή του συστήματος ως ενιαίο σώμα επειδή αυτό περιφέρεται γύρω από το κέντρο του Γαλαξία.⁶ Στα κβαντομηχανικά σωματίδια συνηθίζεται να περιγράφεται το σπιν τους ως κάποιου είδους ιδιοστροφορμή αυτών. Στην παραγματικότητα το σπιν των στοιχειωδών σωματιδίων αν και παρουσιάζει ομοιότητες με τη στροφορμή (και διαστατικά και από πλευράς αλληλεπιδράσεων) είναι καθαρά κβαντομηχανικό φαινόμενο δίχως μηχανικό ανάλογο, αφού εμφανίζεται ακόμη και σε σωματίδια με μηδενικές διαστάσεις (όπως το ηλεκτρόνιο).

13.4 Ενεργός Δυναμική ενέργεια

Αν μια κεντρική δύναμη είναι παράλληλα και συντηρητική, όπως συμβαίνει με τις θεμελιώδεις δυνάμεις, τότε η διατηρούμενη ενέργεια του σωματιδίου που κινείται στο πεδίο μιας τέτοιας δύναμης παίρνει την ακόλουθη μορφή:

$$\begin{aligned}
 E &= \frac{1}{2}mv^2 + V(r) \\
 &= \frac{1}{2}m(v_r^2 + v_\theta^2) + V(r) \\
 &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m(r\dot{\theta})^2 + V(r) \\
 &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{(mr^2\dot{\theta})^2}{2mr^2} + V(r) \\
 &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} + V(r). \tag{13.10}
 \end{aligned}$$

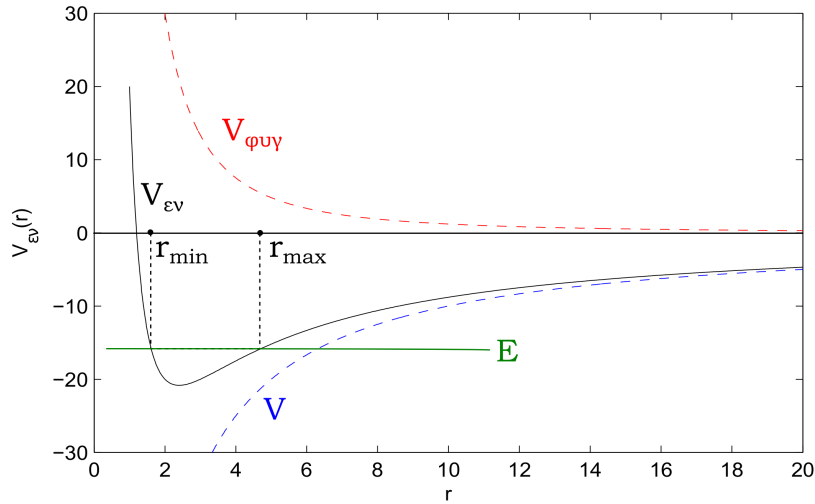
Στις παραπάνω εξισώσεις χρησιμοποιήσαμε (1) την επιπεδότητα της τροχιάς για να γράψουμε το τετράγωνο της ταχύτητας σε πολικές συντεταγμένες $v_r^2 + v_\theta^2$ και (2) τη γραφή της στροφορμής σε πολικές συντεταγμένες (βλ. προηγούμενο εδάφιο). Παρατηρήστε ότι οι τελευταίοι δύο όροι στην τελική έκφραση είναι συνάρτηση μόνο της απόστασης r . Θα μπορούσε λοιπόν κανείς να επινοήσει μια νέα δυναμική ενέργεια για να συμπεριλάβει τους δύο τελευταίους όρους

$$V_{\text{ενεργ}} = \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} + V(r).$$

Η νέα αυτή δυναμική ενέργεια, καλούμενη ενεργή δυναμική ενέργεια, ελέγχει τη μεταβολή της ακτινικής ταχύτητας \dot{r} με την απόσταση r .⁷ Αφορά στην πραγματικότητα ένα σωματίδιο που κινείται επί μιας ευθείας η οποία συμπεριστρέφεται μαζί με

⁶Στην παραγματικότητα ούτε ο Γαλαξίας είναι αδρανειακό σύστημα, ούτε το ΚΜ του ηλιακού συστήματος κινείται με σταθερή ταχύτητα μέσα στο Γαλαξία, αλλά για χρονικά διαστήματα πολύ μικρά σε σχέση με την περίοδο περιστροφής του ηλιακού συστήματος μέσα στο Γαλαξία (μερικές εκατοντάδες εκατομμύρια έτη) οι επιδράσεις του Γαλαξία μπορούν να θεωρηθούν αμελητέες.

⁷Γι' αυτό θα μπορούσαμε να την αποκαλούμε και ακτινική δυναμική ενέργεια.



Σχήμα 13.4: Η ενεργός δυναμική ενέργεια $V_{\epsilon v}(r)$ ως άθροισμα της φυγόκεντρης δυναμικής ενέργειας (κόκκινη εστιγμένη καμπύλη) και της δυναμικής ενέργειας του ίδιου του πεδίου (μπλε εστιγμένη καμπύλη). Η ολική ενέργεια (πράσινη ευθεία) καθορίζει τα ακρότατα σημεία της ακτινικής ταλάντωσης r_{\min}, r_{\max} .

το σωματίδιο. Η φύση αυτής της δυναμικής ενέργειας είναι ένας συνδυασμός της δυναμικής ενέργειας του πραγματικού πεδίου μέσα στο οποίο κινείται το σωματίδιο και της δυναμικής ενέργειας εξαιτίας της φυγόκεντρης δύναμης που αναπτύσσεται στο σωματίδιο που περιστρέφεται γύρω από το κέντρο (ένας συμπεριστρεφόμενος μαζί με το σωματίδιο παρατηρητής είναι ένας μη αδρανειακός παρατηρητής ο οποίος αισθάνεται την ψευδοδύναμη της φυγοκέντρου). Το ότι η φυγόκεντρος δύναμη είναι συντηρητική δύναμη και επομένως μπορεί να προέλθει από μια συνάρτηση δυναμικής ενέργειας οφείλεται στη μορφή αυτής της δύναμης:

$$\mathbf{F}_{\phi\upsilon\gamma} = m\omega^2 \mathbf{r}_{\perp}$$

όπου ω είναι η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής και \mathbf{r}_{\perp} είναι η απόσταση του σωματιδίου από τον άξονα περιστροφής. Στην περίπτωση μας, όπου το σωματίδιο κινείται σε ένα επίπεδο, $\mathbf{r}_{\perp} = \mathbf{r}$ και $\omega = \dot{\theta} = |\mathbf{L}|/(mr^2)$. Συνολικά λοιπόν

$$\mathbf{F}_{\phi\upsilon\gamma} = \frac{\mathbf{L}^2}{mr^3} \mathbf{r}$$

και

$$V_{\phi\upsilon\gamma} = - \int_0^r \frac{\mathbf{L}^2}{mr^4} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{r} = - \int_0^r \frac{\mathbf{L}^2}{mr^3} dr = \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2}.$$

Προσέξτε ότι θεωρήσαμε το κέντρο σαν σημείο με φυγοκεντρική δυναμική ενέργεια μηδέν. Όταν προσθέτουμε δύο δυναμικές ενέργειες από δύο διαφορετικά πεδία,

όπως εδώ προκειμένου να κατασκευάσουμε την ενεργό δυναμική ενέργεια, έχουμε την ελευθερία να θεωρούμε ότι η κάθε μία από αυτές μηδενίζεται σε διαφορετικό σημείο αφού η τιμή της δυναμικής ενέργειας σε ένα σημείο δεν επηρεάζει το φυσικό περιεχόμενο του αντίστοιχου πεδίου. Προφανώς η συνολική δυναμική ενέργεια δεν θα μηδενίζεται εν γένει σε κανένα από τα δύο αυθαίρετα αυτά σημεία.

Γνωρίζοντας τη μορφή της ενεργού δυναμικής ενέργειας είναι τώρα εξαιρετικά εύκολο να μελετήσει κανείς την κίνηση του σωματιδίου στο χώρο:

1. Οι αρχικές συνθήκες $\mathbf{r}(0)$ και $\mathbf{v}(0)$ καθορίζουν το επίπεδο της τροχιάς. Χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να κατασκευάσουμε το σύστημα των συντεταγμένων μας ώστε το επίπεδο αυτό να είναι το $x - y$.

2. Από τις αρχικές συνθήκες μπορούμε επίσης να υπολογίσουμε το μέτρο της στροφορμής

$$|\mathbf{L}| = |m\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0)|$$

καθώς και την τιμή της ενέργειας

$$E = \frac{1}{2}m[\mathbf{v}(0)]^2 + V(|\mathbf{r}(0)|).$$

3. Με βάση την έκφραση για τη διατήρηση της ενέργειας μπορούμε να μελετήσουμε την ακτινική κίνηση, όπως μάθαμε να μελετάμε τη μονοδιάστατη κίνηση μέσα σε κάποιο πεδίο που περιγράφεται από κάποια δυναμική ενέργεια: εδώ την ενεργό δυναμική ενέργεια. Πιο συγκεκριμένα το ακτινικό εύρος της κίνησης βρίσκεται εντός των περιοχών όπου $E \geq V_{\text{ενεργ}}(r)$ και μάλιστα όσο πιο μεγάλη είναι η διαφορά $E - V_{\text{ενεργ}}(r)$ τόσο πιο μεγάλη είναι η ακτινική ταχύτητα του σωματιδίου. Επιπλέον όταν το σωματίδιο διέρχεται από μια ακτίνα r , αυτό θα έχει την ίδια κατ' απόλυτη τιμή ακτινική ταχύτητα είτε απομακρυνόμενο από το κέντρο είτε προσεγγίζοντας το κέντρο. Αν η επιτρεπόμενη περιοχή της κίνησης είναι κάποιο συγκεκριμένο διάστημα $[r_{\min}, r_{\max}]$, αυτό σημαίνει ότι η τροχιά είναι περιορισμένη στο δίσκο με εσωτερική ακτίνα r_{\min} και εξωτερική r_{\max} . Μάλιστα το σωματίδιο εκτελεί μια ακτινική ταλάντωση, εν γένει όχι αρμονική, κατά την οποία ο χρόνος μετάβασης από την r_{\min} στην r_{\max} είναι ίσος με το χρόνο από την r_{\max} στην r_{\min} . Όπως θα δούμε στη συνέχεια το αποτέλεσμα αυτό συνεπάγεται κάποια συμμετρία στη μορφή των τροχιών, ότι μορφή και αν έχει το κεντρικό πεδίο.

4. Ενώ το σωματίδιο κινείται ακτινικά, αλλάζει και γωνιακή θέση σύμφωνα με τη σχέση

$$\dot{\theta} = \frac{|\mathbf{L}|}{mr^2}.$$

Έτσι καθώς το σωματίδιο πλησιάζει στην ελάχιστη ακτίνα r_{\min} , γνωστή και ως περίκεντρο⁸, η γωνιακή του ταχύτητα μεγαλώνει, ενώ όταν πλησιάζει τη μέγιστη ακτίνα r_{\max} , γνωστή ως απόκεντρο⁹, η γωνιακή του ταχύτητα μειώνεται ώστε να διατηρηθεί σταθερός ο ρυθμός σάρωσης εμβαδών. Πάνω απ' όλα όμως η γωνιακή ταχύτητα διατηρεί σταθερό πρόσημο. Αυτό σημαίνει ότι σε ένα κεντρικό δυναμικό δεν είναι δυνατή η αντιστροφή της φοράς περιστροφής ενός σώματος.

5. Όταν η ενεργός δυναμική ενέργεια παρουσιάζει κάποιο τοπικό ελάχιστο και η ολική ενέργεια του είναι τέτοια ώστε το σωματίδιο να εκτελεί ακτινική ταλάντωση, η κίνηση είναι ένας συνδυασμός περιστροφής και παράλληλα μια περιοδική μεταβολή της ακτίνας μεταξύ μιας ελάχιστης και μιας μέγιστης τιμής. Ποια είναι όμως η γωνία που διαγράφει η επιβατική ακτίνα μεταξύ δύο διαδοχικών ακροτάτων της ακτίνας; Τι μορφή έχει συνολικά η τροχιά; Υπάρχει πιθανότητα η τροχιά να είναι κλειστή, δηλαδή να επαναλαμβάνεται ακριβώς η ίδια μετά από μία περιστροφή; Αυτά είναι ερωτήματα που θα απαντήσουμε στη συνέχεια. Προς το παρόν θα αρκεστούμε να κάνουμε γενικές διαπιστώσεις που ισχύουν σε κάθε κεντρική, συντηρητική δύναμη.

Αφού η ακτινική ταλάντωση διεξάγεται με ακτινική ταχύτητα που εξαρτάται από την εκάστοτε τιμή της ακτίνας, ο χρόνος που χρειάζεται το σωματίδιο να μεταβεί από το ελάχιστο (ή μέγιστο) της ακτίνας σε μια μεγαλύτερη (ή μικρότερη) ακτίνα $t_{\min \rightarrow r}$ είναι ακριβώς ίσος με το χρόνο που χρειάζεται για να μεταβεί το σωματίδιο από την ακτίνα αυτή προς το ίδιο αυτό ακρότατο $t_{r \rightarrow \min}$. Ταυτόχρονα η γωνία που διαγράφει το σωματίδιο στα δύο αυτά χρονικά διαστήματα θα είναι

$$\Delta\theta_{r_{\min} \rightarrow r} = \int d\theta = \int_0^{t_{r_{\min} \rightarrow r}} \dot{\theta} dt = \int_{r_{\min}}^r \frac{|\mathbf{L}|}{mr^2} \frac{dr}{\dot{r}} \quad (13.11)$$

και

$$\Delta\theta_{r \rightarrow r_{\min}} = \int d\theta = \int_0^{t_{r \rightarrow r_{\min}}} \dot{\theta} dt = \int_r^{r_{\min}} \frac{|\mathbf{L}|}{mr^2} \frac{dr}{\dot{r}} \quad (13.12)$$

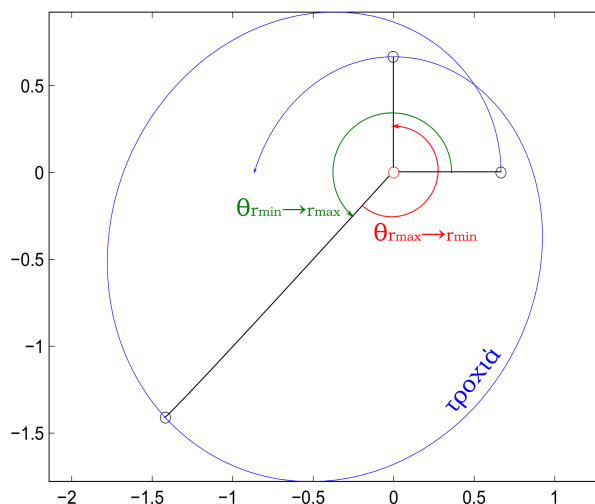
αντίστοιχα. Οι δύο αυτές γωνίες είναι ακριβώς ίδιες, αν αναλογιστούμε ότι το \dot{r} στην πρώτη και στη δεύτερη έκφραση είναι απλώς η ίδια κατ' απόλυτη τιμή συνάρτηση του r , την πρώτη φορά με + πρόσημο και τη δεύτερη με - πρόσημο. Με άλλα λόγια η αψίδα που διαγράφει η τροχιά γύρω από το περίκεντρο είναι

⁸Η περίγειο, αν αναφερόμαστε σε δορυφόρο της Γης, ή περιήλιο αν αναφερόμαστε σε πλανήτη ή άλλο σώμα του Ηλιακού συστήματος που κινείται στο βαρυτικό πεδίο του Ήλιου, ή γενικότερα περίαστρο αν αναφερόμαστε σε κινήσεις ουρανίων σωμάτων γύρω από κάποιο άστρο.

⁹Η απόγειο, ή αφήλιο, ή άπαστρο.

συμμετρική (και προφανώς το ίδιο ισχύει και για την αψίδα που διαγράφει γύρω από το απόκεντρο.

Η τιμή της γωνίας μεταξύ δύο διαδοχικών αψίδων $\Delta\theta_{r_{\min} \rightarrow r_{\max}}$ είναι σημαντική προκειμένου να γνωρίζουμε αν η τροχιά είναι κλειστή ή όχι. Για να είναι κλειστή πρέπει να είναι ίση με π/k , όπου k κάποιος φυσικός αριθμός. Μετά από k πλήρεις ακτινικές ταλαντώσεις το σωματίδιο θα έχει ολοκληρώσει μια πλήρη περιφορά 2π και η τροχιά θα επαναληφθεί απαράλλαχτη ξεκινώντας από το ίδιο σημείο. Αν θέλουμε να είμαστε πιο ακριβείς η τροχιά κλείνει αν η παραπάνω γωνία είναι κάποιο ρητό πολλαπλάσιο του π : $p\pi/q$, με φυσικοί αριθμοί. Σε αυτή την περίπτωση η τροχιά κλείνει μετά από q περιφορές. Σε αντίθετη περίπτωση το σωματίδιο, με την πάροδο του χρόνου, σαρώνει κάθε σημείο του δίσκου μεταξύ r_{\min} και r_{\max} .



Σχήμα 13.5: Η τροχιά διαγράφει ίδια γωνία, καθώς το σωματίδιο κινείται από το περίκεντρο r_{\min} προς το απόκεντρο r_{\max} και στη συνέχεια από το απόκεντρο προς το περίκεντρο. Όταν οι γωνίες αυτές είναι ρητό πολλαπλάσιο του π η τροχιά είναι κλειστή.

6. Αν η ενεργός δυναμική ενέργεια έχει τέτοια μορφή ώστε η επιτρεπόμενη περιοχή κίνησης να είναι είτε $r \in [0, r_{\max}]$, είτε $r \in [r_{\min}, +\infty)$, τότε το σωματίδιο με την πάροδο του χρόνου θα οδηγηθεί είτε στο κέντρο, είτε σε άπειρη απόσταση από το κέντρο. Μπορεί η τροχιά στην αρχή να απομακρυνθεί και μετά να καταλήξει στο κέντρο (1η περίπτωση), είτε αρχικά να πλησιάσει στο κέντρο και μετά να απομακρυνθεί για πάντα (2η περίπτωση). Η πρώτη περίπτωση, όντας καταδικασμένη να συγκρουστεί με το κέντρο (και ότι αυτό συνεπάγεται) δεν έχει ιδιαίτερη αξία αφού η κίνηση θα διαρκέσει κάποιο περιορισμένο χρόνο. Τουναντίον η δεύτερη περίπτωση, η σκέδαση, παρουσιάζει εξέχουσα

σημασία στη φυσική: διαρκεί άπειρο (συνήθως) χρόνο μέχρις ότου το σωματίδιο ξεφύγει από το πεδίο και οι λεπτομέρειες της τροχιάς, όπως για παράδειγμα η γωνία στροφής του σωματιδίου, μπορούν να χρησιμοποιηθούν ως παρατηρήσιμα μεγέθη προκειμένου να μάθουμε τις λεπτομέρειες του κεντρικού πεδίου. Η περίπτωση της σκέδασης θα μελετηθεί σε ξεχωριστό εδάφιο παρακάτω.

13.5 Υποψήφια πεδία για κλειστές τροχιές

Θα μελετήσουμε τώρα τη δυνατότητα να υπάρχουν κυκλικές τροχιές σε ένα κεντρικό συντηρητικό πεδίο. Για να συμβεί αυτό θα πρέπει η ακτίνα της κυκλικής τροχιάς να αποτελεί σταθερή λύση της εξίσωσης της ενέργειας (13.10), δηλαδή θα πρέπει η ακτίνα r_c να αποτελεί τουλάχιστον διπλή ρίζα της σχέσης $E = V_{\text{ενεργ}}(r)$. Γιατί διπλή ρίζα; Μα επειδή το εύρος ακτινικής κίνησης πρέπει να είναι μηδενικό. Αν η ρίζα είναι απλή, αυτό σημαίνει ότι η ακτίνα αυτή είτε είναι άνω άκρο της ακτινικής κίνησης, είτε κάτω άκρο, αλλά τότε δεν μπορεί η ακτίνα να είναι σταθερή. Με άλλα λόγια θα πρέπει η r_c να αποτελεί ακρότατο της ενεργού δυναμικής ενέργειας και η ακτινική ταχύτητα σε αυτή τη θέση να είναι μηδέν. Αν πρόκειται για ελάχιστο της ενεργού δυναμικής ενέργειας, η ακτίνα αυτή είναι όχι μόνο σταθερή, αλλά και ευσταθής και επομένως η κυκλική τροχιά είναι υλοποιήσιμη. Αν αντιθέτως αντιστοιχεί σε μέγιστο, ή σημείο καμπής της $V_{\text{ενεργ}}(r)$, η ακτίνα αυτή είναι μεν σταθερή, αλλά παρουσιάζει αστάθεια και επομένως δεν είναι υλοποιήσιμη η κυκλική αυτή τροχιά· η παραμικρή διαταραχή των αρχικών συνθηκών θα απομακρύνει την τροχιά από την κυκλική της μορφή. Συνεπώς μας ενδιαφέρουν οι τιμές του r στις οποίες

$$V'_{\text{ενεργ}}(r_c) = 0 \quad \text{και} \quad V''_{\text{ενεργ}}(r_c) > 0.$$

Η αντίστοιχη γωνιακή ταχύτητα είναι

$$\dot{\theta} = \frac{|\mathbf{L}|}{mr_c^2} = \frac{\sqrt{mr_c^3 V'(r_c)}}{mr_c^2} = \sqrt{\frac{V'(r_c)}{mr_c}}$$

όπου η αντικατάσταση της στροφορμής από την ποσότητα $\sqrt{mr_c^3 V'(r_c)}$ προέρχεται από την επίλυση της εξίσωσης $V'_{\text{ενεργ}}(r_c) = 0$ ως προς $|\mathbf{L}|$.

Τι συμβαίνει όμως αν η ενέργεια είναι ελαφρώς μεγαλύτερη από την ελάχιστη τιμή της ενεργού δυναμικής ενέργειας; Τότε η ακτινική κίνηση θα είναι μια ταλάντωση πολύ μικρού πλάτους και κατά προσέγγιση αρμονική, όπως μάθαμε στο κεφάλαιο 4 (η προσέγγιση αυτή θα είναι τόσο καλύτερη, όσο η διαφορά μεταξύ ολικής ενέργειας και ελαχίστου της ενεργού δυναμικής ενέργειας είναι μικρότερη. Ξαναγράφοντας τη διατήρηση της ενέργειας σε αυτή την περίπτωση με αντικατάσταση της ενεργού

δυναμικής ενέργειας από το Taylor ανάπτυγμα της μέχρι δεύτερη τάξη γύρω από την τιμή r_c

$$V_{\text{ενεργ}}(r_c) + \Delta E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\text{ενεργ}}(r_c) + V'_{\text{ενεργ}}(r_c)(r - r_c) + \frac{1}{2}V''_{\text{ενεργ}}(r_c)(r - r_c)^2 ,$$

παρατηρούμε μια έκφραση ακριβώς ίδια με εκείνη του αρμονικού ταλαντωτή με $V''_{\text{ενεργ}}(r_c)$ στη θέση του k του ταλαντωτή. Επομένως η αντίστοιχη συχνότητα των ακτινικών ταλαντώσεων είναι

$$\omega_r = \sqrt{\frac{V''_{\text{ενεργ}}(r_c)}{m}} = \sqrt{\frac{3|\mathbf{L}|^2/(mr_c^4) + V''(r_c)}{m}} . \quad (13.13)$$

Παράλληλα ενώ το σωματίδιο εκτελεί τις ακτινικές ταλαντώσεις περιστρέφεται γύρω από το κέντρο με συχνότητα

$$\omega_\theta = \frac{|\mathbf{L}|}{mr^2} . \quad (13.14)$$

Η σταθερή στροφορμή \mathbf{L} στις σχέσεις (13.13,13.14) είναι ακριβώς η στροφορμή της ακριβούς κυκλικής τροχιάς $\sqrt{mr_c^3 V'(r_c)}$ που γράψαμε παραπάνω. Για να καταλάβετε γιατί ισχύει αυτό φανταστείτε ότι αρχικά το σωματίδιο κινείται σε κυκλική τροχιά ακτίνας r_c και δίνετε στο σωματίδιο μια πολύ μικρή ακτινική στιγμιαία ώθηση. Με τον τρόπο αυτό η ενέργεια μεγαλώνει ακριβώς κατά την κινητική ενέργεια της ακτινικής ταχύτητας που αποκτά το σώμα μετά την ώθηση (πριν δεν είχε ακτινική ταχύτητα), ενώ η στροφορμή του δεν αλλάζει αφού η αζιμουθιακή ταχύτητα που είχε πριν παραμένει αμετάβλητη. Η ποσότητα ΔE που γράψαμε παραπάνω είναι ακριβώς η παραπανίσια ενέργεια που διαταράσσει το σωματίδιο από την κυκλική του τροχιά. Έτσι η μεν γωνιακή ταχύτητα του σωματιδίου αλλάζει με το χρόνο σύμφωνα με τη σχέση

$$\omega_\theta = \frac{\sqrt{mr_c^3 V'(r_c)}}{m(r_c + \delta r(t))^2} \simeq \sqrt{\frac{V'(r_c)}{mr_c}} \left(1 - 2\frac{\delta r(t)}{r_c}\right) . \quad (13.15)$$

Ο δεύτερος όρος στο ανάπτυγμα είναι ο αρμονικός ταλαντωτικός όρος που συζητήσαμε παραπάνω. Επομένως για πολύ μικρές τιμές του ΔE η ω_θ είναι κατά μέσο όρο σταθερή και ίση με

$$\bar{\omega}_\theta \simeq \sqrt{\frac{V'(r_c)}{mr_c}} . \quad (13.16)$$

Η δε γωνιακή ταχύτητα των ακτινικών ταλαντώσεων παίρνει τη μορφή

$$\omega_r = \sqrt{\frac{3V'(r_c)/r_c + V''(r_c)}{m}}. \quad (13.17)$$

Αν η συνάρτηση της ενεργού δυναμικής ενέργειας ήταν τέτοια, ώστε οι δύο αυτές συχνότητες να σχηματίζουν έναν ρητό λόγο, οι σχεδόν κυκλικές τροχιές μέσης ακτίνας r_c θα ήταν κλειστές. Συγκεκριμένα αν

$$\frac{\omega_r}{\bar{\omega}_\theta} = \frac{T_\theta}{T_r} = \frac{p}{q},$$

με p, q φυσικοί αριθμοί πρώτοι μεταξύ τους, τότε μετά από q περιστροφές το σωματίδιο θα είχε ολοκληρώσει p ακτινικές ταλαντώσεις και η τροχιά θα ξαναπαραλαμβάνονταν ακριβώς η ίδια με περίοδο $T = qT_\theta = pT_r$.

Αν λοιπόν υπάρχει κάποιο πεδίο το οποίο έχει την ιδιότητα να οδηγεί σε κλειστές τροχιές τα σωματίδια που εγκλωβίζονται στο πεδίο, θα πρέπει οι σχεδόν κυκλικές τροχιές να είναι και αυτές κλειστές, επομένως θα πρέπει να υπάρχει η ακόλουθη σχέση μεταξύ των παραγώγων της δυναμικής ενέργειας του πεδίου:

$$\frac{p}{q} = \frac{\sqrt{\frac{3V'(r_c) + r_c V''(r_c)}{mr_c}}}{\sqrt{\frac{V'(r_c)}{mr_c}}} = \sqrt{\frac{3V'(r_c) + r_c V''(r_c)}{V'(r_c)}} \quad (13.18)$$

για κάθε r_c . Λύνοντας αυτή τη σχέση καταλήγουμε στη διαφορική εξίσωση

$$\frac{V''(r_c)}{V'(r_c)} = \frac{C}{r_c}$$

όπου C είναι ο ρητός $(p/q)^2 - 3$. Αν θυμηθούμε ότι $V'(r) = -|\mathbf{F}(r)| = -F(r)$ η απαίτηση είναι

$$\log F(r_c) = \log r_c^C + A$$

όπου A η σταθερά ολοκλήρωσης.¹⁰ Δηλαδή η δύναμη του πεδίου θα πρέπει να είναι της μορφής

$$F(r_c) = Br_c^C$$

με B κάποια τυχαία αρνητική σταθερά, ώστε η δύναμη του πεδίου να είναι ελκτική (ειδάλως δεν θα είχε νόημα να αναζητούμε κλειστές τροχιές).

(1) Για παράδειγμα για $p/q = 1$, βρίσκουμε $C = -2$, δηλαδή αντιστρόφου τετραγώνου σαν τη βαρυτική, ή τη δύναμη Coulomb από ετερόσημα φορτία. (2) Για

¹⁰ Η μορφή του πεδίου που θα οδηγούσε σε κλειστές σχεδόν κυκλικές τροχιές με ακτίνα μια συγκεκριμένη r_c , αλλά όχι για κάθε τιμή της r_c θα είχε μια σταθερά ολοκλήρωσης A που θα εξαρτώνταν από το r_c . Κάτι τέτοιο θα οδηγούσε σε ένα τεράστιο πλούτο πιθανών πεδίων που θα χαρακτηριζόταν από κλειστές τροχιές σε κτίνα r_c .

$p/q = 2$, βρίσκουμε $C = +1$, δηλαδή μια δύναμη αρμονικού ταλαντωτή. Θα δείξουμε παρακάτω ότι μόνο αυτά τα δύο είδη κεντρικών πεδίων οδηγούν σε κλειστές τροχιές ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών και ανεξαρτήτως από το αν η τροχιά είναι σχεδόν κυκλική (αρκεί να είναι φραγμένη). Όλα τα άλλα κεντρικά πεδία, τα υποψήφια για κλειστές τροχιές (π.χ. αυτό με $p/q = 1/2$, και $C = -2.75$) δεν καταφέρνουν να οδηγήσουν σε κλειστές τροχιές όταν αυτές αρχίζουν να αποκλίνουν από την κυκλική τροχιά.

Το γεγονός ότι η χαρακτηριστική δύναμη C στη συνάρτηση της δύναμης θα πρέπει να είναι μεγαλύτερη του -3 οφείλεται στο ότι δυνάμεις αντιστρόφου κύβου και ακόμη πιο απότομες ($1/r^{3+}$) δεν θα μπορούσαν καν να έχουν κυκλικές τροχιές, αφού δεν θα μπορούσαν να ικανοποιούν τη βασική απαίτηση $V'_{\text{ενεργ}}(r_c) = 0$ και $V''_{\text{ενεργ}}(r_c) > 0$. Ας δούμε γιατί. Έστω ότι η δυναμική ενέργεια του πεδίου είναι της μορφής $V(r) = -Br^{C+1}$ με $C \leq -3$ και $B > 0$ ώστε το πεδίο να είναι ελκτικό. Η δύναμη από ένα τέτοιο πεδίο θα είναι της μορφής $F(r) = -V'(r) = B(C+1)/r^C$ δηλαδή ελκτική ($C+1 < 0$) και αντιστρόφου κύβου και πάνω $C \leq -3$. Η ενεργός δυναμική ενέργεια θα είναι

$$V_{\text{ενεργ}}(r) = \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} - \frac{B}{r^{-1-C}}.$$

Ο εκθέτης $-1 - C$ είναι μεγαλύτερος ή ίσος του 2, δηλαδή ξεπερνά τον εκθέτη της φυγοκεντρικής δυναμικής ενέργειας, ή στην ακραία περίπτωση είναι ίσος. Στην περίπτωση $C = -3$ η ενεργός δυναμική ενέργεια είναι μια γνησίως μονότονη συνάρτηση του r (έχει είτε τη μορφή $+1/r^2$, είτε την $-1/r^2$, ανάλογα με το ποιος από τους συντελεστές των δύο όρων της $V_{\text{ενεργ}}$ είναι μεγαλύτερος), οπότε δεν μπορεί να παρουσιάζει ακρότατο (στην πρώτη περίπτωση η δυναμική ενέργεια είναι απωστική και το σωματίδιο μπορεί να περάσει το πολύ μια φορά κοντά στο κέντρο και στη συνέχεια θα απομακρυνθεί για πάντα στο άπειρο· στη δεύτερη περίπτωση το σωματίδιο είναι καταδικασμένο να συντριβεί στο κέντρο). Αν $C > -3$ θα υπάρχει σημείο όπου η ενεργός δυναμική ενέργεια θα παρουσιάζει ακρότατο, μόνο που αυτό θα είναι μέγιστο. Η κυκλική τροχιά (στη θέση του μεγίστου) θα είναι τότε ασταθής και η παραμικρή διαταραχή αυτής θα την έστελνε ανεπιστρεπτί είτε στο άπειρο είτε στο κέντρο.

13.6 * Το θεώρημα του Bertrand

Το θεώρημα: Μεταξύ όλων των κεντρικών συντηρητικών πεδίων που διαθέτουν φραγμένες τροχιές, μόνο στα πεδία που χαρακτηρίζονται από δυναμική ενέργεια της μορφής $V(r) = -k/r$ και $V(r) = kr^2$ (με $k > 0$) όλες οι φραγμένες τροχιές είναι κλειστές.

Απόδειξη (στο πνεύμα της απόδειξης του ArnoI'd): Θα υπολογίσουμε τη γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών περιέκτρων της τροχιάς. Σύμφωνα με τις σχέσεις (13.11,13.12) η γωνία αυτή είναι

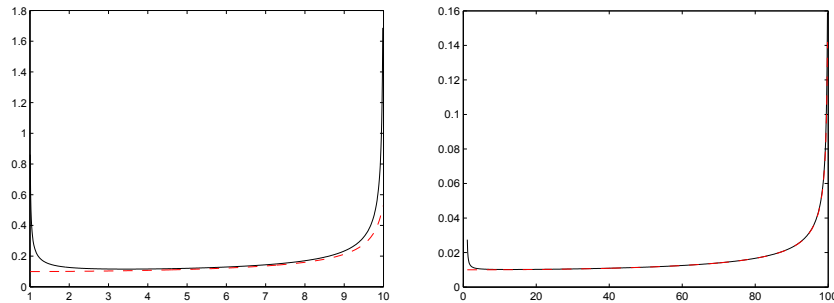
$$\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} = \frac{2|\mathbf{L}|}{m} \int_{r_{\min}}^{r_{\max}} \frac{dr/r^2}{\sqrt{\frac{2}{m} \left(E - V(r) - \frac{|\mathbf{L}|^2}{2mr^2} \right)}} \quad (13.19)$$

όπου r_{\min}, r_{\max} είναι οι ακτίνες του περιέκτρου και του απόκεντρου που μηδενίζεται η υπόρριξη ποσότητα στον παρονομαστή της ολοκληρωτέας συνάρτησης. Με την αντικατάσταση $\xi = |\mathbf{L}|/(mr)$

$$\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} = 2 \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 - \frac{2V[|\mathbf{L}|/(m\xi)]}{m} + \frac{2E}{m}}} . \quad (13.20)$$

Στη σχέση αυτή έχουν εναλλαχθεί οι ρόλοι των ξ_{\min}, ξ_{\max} σε σχέση με τα r_{\min}, r_{\max} : δηλαδή $\xi_{\min} = |\mathbf{L}|/(mr_{\max})$ και $\xi_{\max} = |\mathbf{L}|/(mr_{\min})$.

Θα διακρίνουμε δύο περιπτώσεις: (1) Όταν η δυναμική ενέργεια του πεδίου είναι της μορφής $V(x) = \Gamma x^k$ με $k > 0$ και $\Gamma > 0$ και (2) όταν η δυναμική ενέργεια είναι της μορφής $V(x) = \Gamma x^k$ με $k < 0$ και $\Gamma < 0$.¹¹



Σχήμα 13.6: Η μορφή της συνάρτησης $1/\sqrt{-\xi^2 - \frac{2V[|\mathbf{L}|/(m\xi)]}{m} + \frac{2E}{m}}$ (μαύρη καμπύλη) και $1/\sqrt{-\xi^2 + \frac{2E}{m}}$ (κόκκινη εστιγμένη καμπύλη) για δύο διαφορετικές τιμές του $2E/m$: (i) για $2E/m \simeq 10$ (αριστερό διάγραμμα) και (ii) για $2E/m \simeq 100$ (δεξιό διάγραμμα). Και στις δύο περιπτώσεις θεωρήσαμε ότι ο εκθέτης της δυναμικής ενέργειας είναι $k = 1.5$. Είναι φανερό ότι καθώς $E \rightarrow \infty$ το ζητούμενο ολοκλήρωμα (13.20) τείνει στο πολύ απλούστερο (13.21).

¹¹Η σχέση μεταξύ του συντελεστή k της δυναμικής ενέργειας και του συντελεστή C της δύναμης που συναντήσαμε στο προηγούμενο εδάφιο είναι $C = k - 1$ λόγω της σχέσης δύναμης - δυναμικής ενέργειας: συνεπώς στην πρώτη περίπτωση αναφερόμαστε σε δυνάμεις της μορφής $F = Br^C$ με $C > -1$ και στη δεύτερη σε ίδιας μορφής δυνάμεις με $-3 < C < -1$. Θυμηθείτε ότι δυνάμεις με $C \leq -3$ δεν μπορούν καν να έχουν ευσταθή κυκλική τροχιά: πόσω μάλλον κλειστές τροχιές.

- Στην περίπτωση (1) η υπόρριζη ποσότητα μηδενίζεται για $E \rightarrow \infty$ στα σημεία

$$\xi_{\max} \simeq 2E/m$$

και

$$\xi_{\min} \simeq (|\mathbf{L}|/m)^k \sqrt[k]{\Gamma/E},$$

αφού καθώς το $E \rightarrow \infty$ (βλ. σχήμα 13.6) ο δεύτερος όρος γίνεται ασήμαντος για μεγάλα ξ , ενώ συγκριτικά με τον δεύτερο όρο, ο πρώτος όρος γίνεται ασήμαντος για πολύ μικρά ξ .¹² Παράλληλα στο σημείο

$$\xi_0 = \sqrt[k+2]{\Gamma k |\mathbf{L}|^k / m^{1+k}},$$

ανεξαρτήτως από την E , η υπόρριζη ποσότητα εμφανίζει μέγιστο. Το ολοκλήρωμα λοιπόν της σχέσης (13.20) τείνει προσεγγιστικά στο

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \int_0^a \frac{d\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2}} = \lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (13.21)$$

Το υπόλοιπο μέρος του ολοκληρώματος, στο όριο που $E \rightarrow \infty$ είναι αμελητέο συγκριτικά με το προσεγγιστικό που βρήκαμε παραπάνω. Επομένως μονάχα εκείνη η δυναμική ενέργεια που δίνει γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών περικέντρων $2 \times (\pi/2)$ στην περίπτωση των σχεδόν κυκλικών τροχιών έχει κάποια πιθανότητα να δίνει αυτή την τιμή για οποιαδήποτε τιμή της ενέργειας και επομένως να οδηγεί σε κλειστές τροχιές ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών. Πιο συγκεκριμένα $\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} = \pi$ αντιστοιχεί σε $p/q = 2$ δηλαδή σε $C = 1$ στη συζήτηση που αναπτύξαμε για τις σχεδόν κυκλικές τροχιές, αφού μια τέτοια στροφή για μια πλήρη ακτινική ταλάντωση σημαίνει ότι η συχνότητα των ακτινικών ταλαντώσεων είναι διπλάσια από τη συχνότητα περιστροφής. Βρίσκουμε λοιπόν ότι μοναδικό υποψήφιο για κλειστές τροχιές πεδίο της μορφής $V(r) = \Gamma r^k$ με $k > 0$ είναι το Γr^2 το οποίο οδηγεί σε δύναμη γραμμική με την απόσταση (ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής).

Αν επανέλθουμε τώρα στο ολοκλήρωμα (13.20) και ας αντικαταστήσουμε την συ-

¹²Έτσι για να βρούμε το ξ_{\max} λύνουμε την $(2E/m) - \xi^2 = 0$, ενώ για να βρούμε το ξ_{\min} λύνουμε την $(2E/m) - (2\Gamma/m)[|\mathbf{L}|/(m\xi)]^k = 0$.

γκεκριμένη μορφή της δυναμικής ενέργειας· θα καταλήξουμε στο ολοκλήρωμα

$$\begin{aligned}
 \Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi}^{C=1} &= 2 \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 - \frac{2\Gamma|\mathbf{L}|^2}{m^3\xi^2} + \frac{2E}{m}}} \\
 &= 2 \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{\xi d\xi}{\sqrt{-\xi^4 + \frac{2E}{m}\xi^2 - \frac{2\Gamma|\mathbf{L}|^2}{m^3}}} \\
 &= \int_{\xi_{\min}^2}^{\xi_{\max}^2} \frac{du}{\sqrt{-u^2 + \frac{2E}{m}u - \frac{2\Gamma|\mathbf{L}|^2}{m^3}}}, \tag{13.22}
 \end{aligned}$$

όπου $\xi_{\min}^2, \xi_{\max}^2$ είναι οι ρίζες της υπόρριζης ποσότητας του παρονομαστή. Όμως το ολοκλήρωμα

$$\int_{x_-}^{x_+} \frac{dx}{\sqrt{(x_+ - x)(x - x_-)}} \tag{13.23}$$

για $x_+ > x_-$ είναι ίσο με π , ανεξαρτήτως των x_-, x_+ .¹³ Επομένως η γωνία από περιήλιο σε περιήλιο στην περίπτωση του αρμονικού ταλαντωτή ($C = 1$) είναι ακριβώς π για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες (θα το εξηγήσουμε καλύτερα αυτό στο επόμενο εδάφιο).

• Στην περίπτωση (2) ($k < 0, \Gamma < 0$) η υπόρριξη ποσότητα του ολοκληρώματος (13.20) λαμβάνει τη μορφή

$$-\xi^2 - \frac{2\Gamma}{m} \left(\frac{m\xi}{|\mathbf{L}|} \right)^{|k|} + \frac{2E}{m}$$

με $\Gamma < 0$ και $0 < |k| < 2$ (αφού αναγκαστικά $C > -3$ · βλ. υποσημείωση 7). Στο όριο που $E \rightarrow 0$ οι ρίζες της υπόρριζης ποσότητας είναι

$$\xi_{\min} = 0$$

και

$$\xi_{\max} = \sqrt[2-|k|]{\frac{2|\Gamma|}{m} \left(\frac{m}{|\mathbf{L}|} \right)^{|k|}}.$$

Μέσω των παραπάνω ορίων η γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών περικέντρων στην πε-

¹³Είναι εύκολο να δείτε γιατί ισχύει αυτό μέσω της αντικατάστασης

$$x = \frac{x_+ + x_-}{2} + \frac{x_+ - x_-}{2} \sin \phi.$$

ρίπτωση αυτή είναι

$$\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} = 2 \int_0^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 + \xi_{\max}^{2-|k|} \xi^{|k|}}} . \quad (13.24)$$

Με την αντικατάσταση $\chi = \xi/\xi_{\max}$ το προηγούμενο ολοκλήρωμα μετατρέπεται στο

$$\int_0^1 \frac{d\chi}{\sqrt{\chi^{|k|} - \chi^2}}$$

και με μια δεύτερη αντικατάσταση $\chi = (\sin \phi)^{\frac{2}{2-|k|}}$ βρίσκουμε εύκολα ότι $\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi} = 2\pi/(2 - |k|)$.

Ένα πεδίο αυτής της μορφής για να παρουσιάζει ίδια στροφή του περικέντρου και σε τροχιές σχεδόν κυκλικές και σε τροχιές με $E \rightarrow 0$ (δηλαδή τροχιές που είναι οριακά φραγμένες) θα πρέπει να είναι

$$\frac{2\pi}{2 - |k|} = \frac{2\pi}{p/q} = \frac{2\pi}{\sqrt{C+3}} = \frac{2\pi}{\sqrt{k+2}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2-|k|}} .$$

Η παραπάνω εξίσωση έχει μοναδική λύση την $|k| = 1$, δηλαδή την $k = -1$. Αυτό είναι ένα πεδίο αντιστρόφου τετραγώνου ($C = k - 1$), σαν το βαρυτικό πεδίο ή το πεδίο Coulomb από ετερόσημο φορτίο (προκειμένου να είναι ελκτική η δύναμη).

Ας ελέγξουμε αν πράγματι ένα τέτοιο πεδίο οδηγεί σε κλειστές τροχιές για κάθε αρχική συνθήκη και όχι μόνο για σχεδόν κυκλικές, ή οριακά φραγμένες τροχιές (τα δύο όρια που εξασφάλισαν την κλειστότητα των τροχιών και μάλιστα με ίδιο ρητό λόγ p/q). Για $k = -1$

$$\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi}^{k=-1} = 2 \int_{\xi_{\min}}^{\xi_{\max}} \frac{d\xi}{\sqrt{-\xi^2 - 2\Gamma \frac{\xi}{|\mathbf{L}|} + \frac{2E}{m}}} . \quad (13.25)$$

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ακριβώς το (13.23), επομένως $\Delta\theta_{\Pi \rightarrow \Pi}^{k=-1} = 2\pi$.

Με το αποτέλεσμα αυτό ολοκληρώθηκε η διερεύνηση των πεδίων με κλειστές τροχιές. Τέτοια πεδία είναι μονάχα αυτό με δύναμη $\mathbf{F} \propto -\mathbf{r}$ (ή $V(r) \propto r^2$), όπου η τροχιά επαναλαμβάνεται μετά από περιστροφή π ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών και αυτό με δυναμική ενέργεια $V(r) \propto -1/r$ (δηλαδή δύναμη $\mathbf{F} \propto -\hat{\mathbf{r}}/r^2$), όπου η τροχιά επαναλαμβάνεται μετά από μια πλήρη περιστροφή 2π (για οποιεσδήποτε αρχικές συνθήκες που οδηγούν σε αρνητικές μόνο ενέργειες, ώστε η τροχιά να είναι φραγμένη).

13.7 Ο ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής

Στο εδάφιο αυτό θα εξετάσουμε ειδικά την περίπτωση του ισότροπου αρμονικού ταλανωτή όπου η ελκτική δύναμη είναι ανάλογη της απομάκρυνσης και μάλιστα με ίδιο συντελεστή αναλογίας σε κάθε κατεύθυνση:

$$\mathbf{F} = -k\mathbf{r} .$$

Αν ο συντελεστής αναλογίας k άλλαζε με την κατεύθυνση (ανισότροπος αρμονικός ταλανωτής) δεν θα είχαμε συντηρητική δύναμη όπως εξηγήσαμε στο εδάφιο 2 του παρόντος κεφαλαίου. Παρά το γεγονός ότι η δύναμη αυτή είναι κεντρική και επομένως η ανάλυση της κίνησης σε γωνία περιστροφής και ακτινική θέση μοιάζει πιο ταιριαστή, η κίνηση αποκαλύπτει όλη της την απλότητα σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= -kx , \\ m\ddot{y} &= -ky , \\ m\ddot{z} &= -kz . \end{aligned} \tag{13.26}$$

Η λύση και των τριών είναι αρμονικές ταλαντώσεις με την ίδια συχνότητα $\omega = \sqrt{k/m}$. Αν οι σταθερές αναλογίας δεν είναι όλες ίδιες τότε η δύναμη δεν είναι καν κεντρική, οπότε δεν διατηρείται η στροφορμή. Στην περίπτωση αυτή η γενική κίνηση δεν είναι επίπεδη¹⁴ αλλά μπορεί να γεμίζει πυκνά¹⁵ ένα ολόκληρο ορθογώνιο παραλληλεπίπεδο με διαστάσεις διπλάσιες των πλατών των τριών ταλαντωτών στους 3 άξονες.

Στον ισότροπο αρμονικό ταλανωτή που το πεδίο είναι κεντρικό και συντηρητικό με δυναμική ενέργεια¹⁶

$$V(r) = - \int_0^r (-k\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{r} = \frac{1}{2}kr^2$$

η διατήρηση της στροφορμής οδηγεί σε επίπεδες τροχιές. Έτσι αν ορίσει κανείς τους καρτεσιανούς άξονες έτσι ώστε $\mathbf{r}(0) = (x_0, 0, 0)$, $\mathbf{v}(0) = (v_{x0}, v_{y0}, 0)$ η τροχιά θα εξελίσσεται στο επίπεδο $x - y$ (ο αρμονικός ταλαντωτής στον άξονα z θα μένει αδιέγερο-

¹⁴Θα μπορούσε να είναι επίπεδη διαλέγοντας κατάλληλες αρχικές συνθήκες. Για παράδειγμα αν $z(0) = \dot{z}(0) = 0$ η κίνηση θα διεξάγεται στο επίπεδο $x - y$. Παρόλ' αυτά η βασική ιδιότητα των κεντρικών δυνάμεων να μην αντιστρέφουν τη φορά της κίνησης δεν ισχύει σε ένα τέτοιο πεδίο. Φανταστείτε μια γρήγορη ταλάντωση στο x και μια αργή στο y . Μέχρι το y να φτάσει στην τιμή $y = 0$ μειούμενο, το x μπορεί να κινείται προς τα θετικά (αριστερόστροφη κίνηση) και αργότερα να κινείται προς τα αρνητικά (δεξιόστροφη κίνηση).

¹⁵Για να ισχύει αυτό θα πρέπει οι 3 συχνότητες να βρίσκονται σε άρρητη σχέση μεταξύ τους.

¹⁶Στο πεδίο αυτό που η δύναμη είναι άπειρης εμβέλειας προτιμάμε να θέσουμε το 0 της δυναμικής ενέργειας στο κέντρο.

τος με μηδενικό πλάτος). Η κίνηση λοιπόν θα είναι

$$\begin{aligned}x(t) &= x_0 \cos(\omega t) + \frac{v_{x0}}{\omega} \sin(\omega t), \\y(t) &= \frac{v_{y0}}{\omega} \sin(\omega t), \\z(t) &= 0.\end{aligned}\tag{13.27}$$

Αναδιατάσσοντας αυτές τις σχέσεις μέχρι να καταλήξουμε στην τριγωνομετρική ταυτότητα $\cos^2 \phi + \sin^2 \phi = 1$ παίρνουμε την τροχιά

$$\left(\frac{x}{x_0} - \frac{y v_{x0}}{x_0 v_{y0}}\right)^2 + \left(y \frac{\omega}{v_{y0}}\right)^2 = 1 \text{ και } z = 0.$$

Η σχέση αυτή είναι μια δευτεροβάθμια έκφραση ως προς x και y , και δεδομένου ότι περιγράφει μια κλειστή καμπύλη (η κίνηση επαναλαμβάνεται μετά από $T = 2\pi/\omega$) η τροχιά δεν μπορεί να είναι τίποτε άλλο από μια έλλειψη. Επειδή μάλιστα οι αντικαταστάσεις $x \rightarrow -x$ και ταυτόχρονα $y \rightarrow -y$ αποτελούν συμμετρία της παραπάνω εξίσωσης η έλλειψη έχει ως κέντρο το κέντρο της δύναμης (το σημείο $(0, 0, 0)$).

Ας βρούμε τώρα τους άξονες συμμετρίας αυτής της έλλειψης. Για το λόγο αυτό θα επιστρατεύσουμε το τέχνασμα των Kibble και Berkshire (από το βιβλίο *Classical Mechanics* των T.W.B. Kibble και F.H. Berkshire - *Imperial College Press*): Θα γράψουμε την κίνηση ως

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{r}_0 \cos(\omega t) + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \sin(\omega t)\tag{13.28}$$

αλλά επειδή τα $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0/\omega$ (και τα δύο με διαστάσεις μήκους) είναι εν γένει λοξά το ένα σε σχέση με το άλλο, θα προσπαθήσουμε να χρησιμοποιήσουμε ως βάση αντί των $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0/\omega$ δύο καινούργια διανύσματα-μήκη: \mathbf{C}, \mathbf{S} , τα οποία θα απαιτήσουμε να είναι ορθογώνια το ένα στο άλλο ($\mathbf{C} \perp \mathbf{S}$):

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{C} \cos(\omega t + \phi) + \mathbf{S} \sin(\omega t + \phi).\tag{13.29}$$

Ο λόγος που η θέση του σωματιδίου μπορεί να λάβει αυτή τη μορφή είναι ότι κάθε διάνυσμα του επιπέδου που μπορεί να γραφεί ως γραμμικός συνδυασμός των δύο διανυσμάτων $\mathbf{r}_0, \mathbf{v}_0/\omega$ μπορεί να γραφεί και ως γραμμικός συνδυασμός δύο άλλων διανυσμάτων του επιπέδου τα οποία μπορούμε εμείς να τα διαλέξουμε να είναι ορθογώνια το ένα στο άλλο. Οι συντελεστές των \mathbf{C}, \mathbf{S} θα είναι και αυτά αρμονικές συναρτήσεις του χρόνου με συχνότητα ω και θα έχουν ακριβώς τη μορφή της (13.29) αν

$$\mathbf{C} \cos \phi + \mathbf{S} \sin \phi = \mathbf{r}_0 \quad \text{και} \quad -\mathbf{C} \sin \phi + \mathbf{S} \cos \phi = \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}.$$

Λύνοντας αντίστροφα αυτές τις σχέσεις θα έχουμε

$$\mathbf{C} = \mathbf{r}_0 \cos \phi - \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \sin \phi \quad \text{και} \quad \mathbf{S} = \mathbf{r}_0 \sin \phi + \frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \cos \phi . \quad (13.30)$$

Η επιπλέον απαίτηση ορθογωνιότητας των \mathbf{C}, \mathbf{S} οδηγεί στη σχέση

$$0 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{S} = \left[(\mathbf{r}_0)^2 - \left(\frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \right)^2 \right] \frac{\sin 2\phi}{2} + \mathbf{r}_0 \cdot \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}$$

δηλαδή

$$\sin 2\phi = \frac{2\mathbf{r}_0 \cdot \frac{\mathbf{v}_0}{\omega}}{\left(\frac{\mathbf{v}_0}{\omega} \right)^2 - (\mathbf{r}_0)^2} . \quad (13.31)$$

Επομένως με βάση τις (13.30,13.31) μπορούμε να κατασκευάσουμε τα $\mathbf{C}, \mathbf{S}, \phi$ και να γράψουμε τη θέση του ταλαντωτή στη μορφή (13.28). Η μορφή αυτή δείχνει πολύ πιο καθαρά την ελλειπτική κίνηση του σωματιδίου αφού τα διανύσματα \mathbf{C}, \mathbf{S} δεν είναι άλλα από τους ημιάξονες της έλλειψης (ορθογώνιοι μεταξύ τους), ενώ η γωνία ϕ είναι η γωνία που σχηματίζει ο άξονας \mathbf{C} με τον άξονα x (του διανύσματος \mathbf{r}_0), επομένως είναι η γωνία κατά την οποία είναι στραμμένη η έλλειψη.

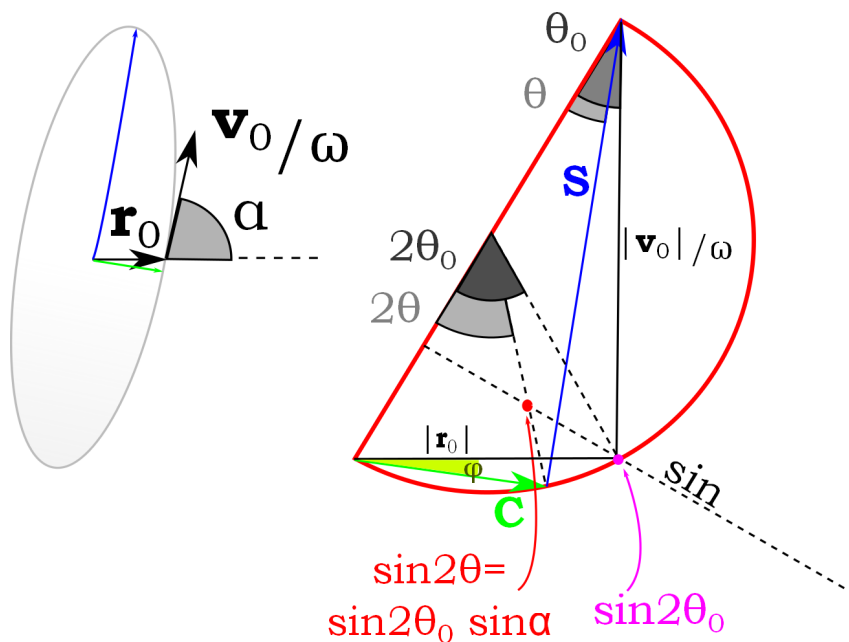
Μια κατασκευαστική τεχνική παραγωγής των \mathbf{C}, \mathbf{S} είναι η ακόλουθη. Η ενέργεια του ταλαντωτή είναι

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2} k \mathbf{r}_0^2 \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}_0^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 \mathbf{r}_0^2 \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 \left[(\mathbf{v}_0/\omega)^2 + \mathbf{r}_0^2 \right] \\ &= \frac{1}{2} m \mathbf{v}^2 + \frac{1}{2} k \mathbf{r}^2 \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 [-\mathbf{C} \sin(\omega t + \phi) + \mathbf{S} \cos(\omega t + \phi)]^2 + \frac{1}{2} m \omega^2 [\mathbf{C} \cos(\omega t + \phi) + \mathbf{S} \sin(\omega t + \phi)]^2 \\ &= \frac{1}{2} m \omega^2 (\mathbf{C}^2 + \mathbf{S}^2) . \end{aligned} \quad (13.32)$$

Από τη διατήρηση της ενέργειας λοιπόν είναι

$$(\mathbf{v}_0/\omega)^2 + (\mathbf{r}_0)^2 = \mathbf{C}^2 + \mathbf{S}^2 = \frac{2E}{m\omega^2}$$

Αν σχηματίσουμε ένα ορθογώνιο τρίγωνο με πλευρές $|\mathbf{r}_0|$ και $|\mathbf{v}_0|/\omega$, η αντίστοιχη υποτείνουσα είναι και υποτείνουσα του ορθογωνίου τριγώνου που σχηματίζουν τα \mathbf{C}, \mathbf{S} (βλ. σχήμα 13.7). Ποια όμως είναι η σωστή επιλογή των \mathbf{C}, \mathbf{S} αφού όλα τα σημεία του κόκκινου ημικυκλίου έχουν την ιδιότητα να βλέπουν την υποτείνουσα των $|\mathbf{r}_0|$ και $|\mathbf{v}_0|/\omega$ υπό ορθή γωνία; Ο αρμονικός ταλαντωτής, όντας κεντρική δύναμη,



Σχήμα 13.7: Γεωμετρική κατασκευή των ορθογωνίων διανυσμάτων \mathbf{C} , \mathbf{S} με βάση τα \mathbf{r}_0 , \mathbf{v}_0/ω και $\sin \alpha = v_{y0}/|\mathbf{v}_0|$. Καταρχάς κατασκευάζουμε το **ημικύκλιο** που δημιουργούν τα $|\mathbf{r}_0|$ και $|\mathbf{v}_0|/\omega$ τοποθετημένα ορθογώνια το ένα στο άλλο, αλλά με το \mathbf{r}_0 στην πραγματική του κατεύθυνση. Η διάμετρος αυτού του κύκλου είναι σύμφωνα με την (13.31), $2E/(m\omega^2)$. Το ορθογώνιο αυτό τρίγωνο ορίζει τη γωνία θ_0 . Στη συνέχεια, στον άξονα των ημιτόνων (εστιασμένη γραμμή κάθετα στη διάμετρο που διέρχεται από το **μωβ σημείο** συνάντησης των $|\mathbf{r}_0|$, $|\mathbf{v}_0|/\omega$) βρίσκουμε το **κόκκινο σημείο** που αντιστοιχεί σε ημίτονο ίσο με το $\sin \alpha$ φορές το ημίτονο του **μωβ σημείου**. Το σημείο αυτό ορίζει την επίκεντρη γωνία 2θ που υπακούει στη σχέση (13.35) και μέσω αυτής το σημείο του κύκλου απ' όπου διέρχονται τα διανύσματα \mathbf{C} , \mathbf{S} . Τα διανύσματα αυτά ορίζουν (βλ. αριστερή εικόνα) τους ημάξονες της ελλειπτικής τροχιάς του σωματιδίου. Η στροφή της έλλειψης δίνεται από τη γωνία ϕ που σχηματίζει το \mathbf{C} με το \mathbf{r}_0 που φαίνεται στο σχήμα.

διατηρεί και τη στροφορμή του:

$$\begin{aligned}
 \mathbf{L} &= m\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0 \\
 &= m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \\
 &= m\omega[\mathbf{C} \cos(\omega t + \phi) + \mathbf{S} \sin(\omega t + \phi)] \times [-\mathbf{C} \sin(\omega t + \phi) + \mathbf{S} \cos(\omega t + \phi)] \\
 &= m\omega \mathbf{C} \times \mathbf{S}.
 \end{aligned} \tag{13.33}$$

Δεδομένου μάλιστα ότι τα \mathbf{C} , \mathbf{S} είναι ορθογώνια θα πρέπει να είναι

$$|\mathbf{C}| |\mathbf{S}| = |\mathbf{r}_0 \times \mathbf{v}_0/\omega| = |\mathbf{r}_0| |\mathbf{v}_0/\omega| \sin \alpha = \frac{|\mathbf{L}|}{m\omega}, \tag{13.34}$$

όπου α είναι η γωνία που σχηματίζει η αρχική ταχύτητα \mathbf{v}_0 με τη θέση \mathbf{r}_0 . Η δε κατεύθυνση των \mathbf{C} , \mathbf{S} πρέπει να επιλεγεί έτσι ώστε το εξωτερικό γινόμενο $\mathbf{C} \times \mathbf{S}$ να έχει την ίδια φορά με το \mathbf{L} (αν το \mathbf{r}_0 πρέπει να στραφεί ωρολογιακά –ή αντιωρολογιακά– για να συμπέσει με το \mathbf{v}_0 , το ίδιο πρέπει να ισχύει και για το \mathbf{C} προκειμένου να συμπέσει

με το \mathbf{S}).

Αν ονομάσουμε θ_0 τη γωνία του ορθογώνιου τριγώνου των $|\mathbf{r}_0|$, $|\mathbf{v}_0|/\omega$ που σχηματίζεται μεταξύ της υποτείνουσας και του $|\mathbf{v}_0|/\omega$ και θ τη γωνία του ορθογώνιου τριγώνου των \mathbf{C} , \mathbf{S} που σχηματίζεται μεταξύ της υποτείνουσας και του \mathbf{S} θα έχουμε

$$\tan \theta_0 = \frac{|\mathbf{r}_0|}{|\mathbf{v}_0|/\omega}$$

και

$$\tan \theta = \frac{|\mathbf{C}|}{|\mathbf{S}|}$$

όποτε οι σχέσεις (13.31,13.33) μπορούν να ξαναγραφούν ως ακολούθως

$$|\mathbf{C}|^2(1 + \tan^2 \theta) = |\mathbf{r}_0|^2(1 + \tan^2 \theta_0)$$

και

$$|\mathbf{C}|^2 \tan \theta = |\mathbf{r}_0|^2 \tan \theta_0 \sin \alpha .$$

Διαιρώντας κατά μέλη τις δύο εξισώσεις βρίσκουμε

$$\frac{\tan \theta}{1 + \tan^2 \theta} = \frac{\tan \theta_0}{1 + \tan^2 \theta_0} \sin \alpha \Rightarrow \sin 2\theta = \sin 2\theta_0 \sin \alpha . \quad (13.35)$$

Στο σχήμα 13.7 χρησιμοποιούμε αυτή τη σχέση για να κατασκευάσουμε το $\sin 2\theta$ στον άξονα των ημιτόνων των διπλασίων γωνιών (δηλαδή των επίκεντρων γωνιών). Με βάση αυτή τη γωνία βρίσκουμε τη θέση των \mathbf{C} και \mathbf{S} και η ελλειπτική τροχιά θα έχει τους άξονες συμμετρίας της κατά μήκος των \mathbf{C} και \mathbf{S} . Το $\max\{|\mathbf{C}|, |\mathbf{S}|\}$ θα είναι ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης και το $\min\{|\mathbf{C}|, |\mathbf{S}|\}$ θα είναι ο μικρός ημιάξονας της έλλειψης. Αν η στροφορμή έχει αντίθετη κατεύθυνση θα πρέπει να αντιστρέψουμε τη φορά του (μπλε) διανύσματος \mathbf{S} .

Από τη γεωμετρική αυτή κατασκευή μπορούμε εύκολα να διαπιστώσουμε ότι:

1. Για να είναι κυκλική η τροχιά θα πρέπει $|\mathbf{C}| = |\mathbf{S}|$, δηλαδή $\theta = \pi/4$. Αυτόματα λοιπόν σύμφωνα με τη σχέση(13.35) θα πρέπει και $\theta_0 = \pi/4$ και $\alpha = \pi/2$, δηλαδή τα \mathbf{r}_0 και \mathbf{v}_0/ω θα πρέπει να έχουν ίδια μέτρα και να είναι και ορθογώνια.
2. Για να είναι η τροχιά ευθύγραμμη θα πρέπει είτε $\theta = 0$ είτε $\theta = \pi/2$, οπότε είτε $\sin \alpha = 0$ ή π , είτε $\theta_0 = 0$ ή $\theta_0 = \pi/2$. Η πρώτη περίπτωση αντιστοιχεί σε \mathbf{r}_0 και \mathbf{v}_0 συγγραμμικά, ενώ η δεύτερη περίπτωση σε $\mathbf{r}_0 = 0$ ή $\mathbf{v}_0 = 0$. Και στις δύο περιπτώσεις η στροφορμή είναι μηδενική και όπως έχουμε επισημάνει αυτό σημαίνει ότι η κίνηση διενεργείται πάνω σε μια ευθεία που περνά από το κέντρο της δύναμης και καθορίζεται από τις αρχικές συνθήκες (το \mathbf{r}_0 , το \mathbf{v}_0 , ή και τα δύο εφόσον είναι συγγραμμικά).

Ο ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής, όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο, είναι

ένα από τα δύο μοναδικά πεδία που οδηγούν σε κλειστές τροχιές, με γωνία μεταξύ δύο διαδοχικών περικεντρών ίση με π . Πράγματι οι δύο μικροί ημιάξονες της έλλειψης βρίσκονται ο ένας απέναντι από τον άλλο σχηματίζοντας γωνία π . Το $2\pi/\omega$ του ταλαντωτή είναι η περίοδος διαγραφής της έλλειψης, αλλά η περίοδος των ακτινικών ταλαντώσεων (από το απώτερο στο απώτερο σημείο, ή από το εγγύτερο στο εγγύτερο σημείο) είναι το ήμισυ αυτής (π/ω).

13.8 Η βαρυτική δύναμη

Το δεύτερο παράδειγμα κεντρικής δύναμης με κλειστές τροχιές είναι αυτό της βαρυτικής δύναμης, δηλαδή μιας ελκτικής δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου. Όχι μόνο παρουσιάζει αυτή τη γεωμετρική ιδιαιτερότητα η δύναμη αυτή, αλλά έχει και κεντρικό ρόλο στη λειτουργία του κόσμου, εφόσον οι βαρυτικές δυνάμεις αποτελούν την κυρίαρχη αλληλεπίδραση σε κοσμικό επίπεδο.

Από την εποχή του Νεύτωνα, που πρώτος μελέτησε την κίνηση σωμάτων στο πεδίο κεντρικών δυνάμεων αντιστρόφου τετραγώνου και έδειξε ότι οι ελλειπτικές κινήσεις των πλανητών που ανακάλυψε ο Κέπλερ είναι απόρροια μιας τέτοιας δύναμης, έχουν κατασκευαστεί πολλοί τρόποι λύσης του προβλήματος αυτού. Η λύση που θα γράψουμε ακολουθεί το πνεύμα της γεωμετρικής απόδειξης του Νεύτωνα, αλλά σε μια πιο μοντέρνα γλώσσα με αναλυτική αντί γεωμετρική έκφραση.

Η εξίσωση κίνησης ενός σωματιδίου σε ελκτική δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου παίρνει την εξής μορφή:

$$m \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (13.36)$$

Παρακινημένοι από την ανάλυση του δεξιού μέλους σε ακτινικό και (μηδενικό) αζιμουθιακό μέρος και δεδομένου ότι λόγω της κεντρικότητας της δύναμης η τροχιά θα είναι επίπεδη, θα φροντίσουμε να αναλύσουμε και το αριστερό μέλος σε πολικές συντεταγμένες (επί του επιπέδου της κίνησης).

$$m \frac{d(v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}})}{dt} = -\frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (13.37)$$

Η παραγωγή ως προς t έχει δυσκολίες να ολοκληρωθεί¹⁷, οπότε θα ξαναγράψουμε το πρόβλημα χρησιμοποιώντας μια ενδιάμεση παραγωγή ως προς τη γωνία θ :

$$\begin{aligned} m \frac{d(v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}})}{d\theta} \dot{\theta} &= -\frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \quad \text{συνεπώς...} \\ m \frac{d(v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}})}{d\theta} \frac{|\mathbf{L}|}{mr^2} &= -\frac{K}{r^2} \hat{\mathbf{r}}, \end{aligned} \quad (13.38)$$

¹⁷Το πρόβλημα αυτό το συναντήσαμε στις μονοδιάστατες δυνάμεις (Κεφάλαιο 3) που εξαρτώνται από τη θέση και το ξεπεράσαμε χρησιμοποιώντας μια ενδιάμεση παραγωγή ως προς τη θέση.

όπου χρησιμοποιήσαμε τη μορφή της στροφορμής σε πολικές συντεταγμένες που είδαμε στο εδάφιο 2 του παρόντος κεφαλαίου. Η κοινή εξάρτηση από το $1/r^2$ και στα δύο μέλη καθιστά την εξίσωση πολύ πιο απλή (γεγονός που καθιστά την περίπτωση δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου εξαιρετική).

Αν τώρα χρησιμοποιήσουμε και τις σχέσεις που ικανοποιούν τα μοναδιαία διανύσματα

$d\hat{\mathbf{r}}/d\theta = \hat{\boldsymbol{\theta}}$ και $d\hat{\boldsymbol{\theta}}/d\theta = -\hat{\mathbf{r}}$ (βλ. Κεφάλαιο 7) η εξίσωση κίνησης θα λάβει τη μορφή

$$\begin{aligned} \frac{dv_r}{d\theta} \hat{\mathbf{r}} + v_r \hat{\boldsymbol{\theta}} + \frac{dv_\theta}{d\theta} \hat{\boldsymbol{\theta}} - v_\theta \hat{\mathbf{r}} &= -\frac{K}{|\mathbf{L}|} \hat{\mathbf{r}} \Rightarrow \\ \frac{dv_r}{d\theta} - v_\theta &= -\frac{K}{|\mathbf{L}|} \quad \text{και} \quad \frac{dv_\theta}{d\theta} + v_r = 0. \end{aligned} \quad (13.39)$$

Οι εξισώσεις αυτές είναι δύο πεπλεγμένες γραμμικές εξισώσεις με 2 άγνωστες συναρτήσεις και έχουν μια πολύ απλή λύση. Όπως μάθαμε στην ανάλυση των ταλαντωτών η λύση του ομογενούς μέρους (αφού πρόκειται για ένα γραμμικό σύστημα εξισώσεων) πρέπει να είναι μια εκθετική λύση της μορφής $e^{\lambda\theta}$ κοινή και για τις δύο άγνωστες συναρτήσεις. Όσο για το μη ομογενές μέρος της πρώτης, αυτό καλύπτεται από την προφανή ειδική λύση $v_\theta^{(S)} = K/|\mathbf{L}|$. Έτσι δοκιμάζοντας λύσεις της μορφής

$$v_r = Re^{\lambda\theta} \quad \text{και} \quad v_\theta = \frac{K}{|\mathbf{L}|} + \Theta e^{\lambda\theta}$$

καταλήγουμε στο ακόλουθο αλγεβρικό γραμμικό σύστημα:

$$R\lambda - \Theta = 0 \quad \text{και} \quad \Theta\lambda + R = 0$$

με λύση

$$\lambda = \pm i \quad \text{και} \quad R = \mp i\Theta,$$

δηλαδή

$$v_\theta(\theta) = \frac{K}{|\mathbf{L}|} + \Theta_+ e^{i\theta} + \Theta_- e^{-i\theta}, \quad (13.40)$$

$$v_r(\theta) = -i\Theta_+ e^{i\theta} + i\Theta_- e^{-i\theta}. \quad (13.41)$$

Οι λύσεις αυτές για να είναι πραγματικές πρέπει $\Theta_+ = \Theta_-^* = (V_0/2)e^{i\theta_0}$ (μγαδικά συζυγείς), οπότε

$$v_\theta(\theta) = \frac{K}{|\mathbf{L}|} + V_0 \cos(\theta + \theta_0) \quad (13.42)$$

$$v_r(\theta) = V_0 \sin(\theta + \theta_0). \quad (13.43)$$

Αν ξανασυνθέσουμε την ταχύτητα από τις πολικές της συνιστώσες βρίσκουμε

$$\mathbf{v}(\theta) = v_r \hat{\mathbf{r}} + v_\theta \hat{\boldsymbol{\theta}} = \frac{K}{|\mathbf{L}|} \hat{\boldsymbol{\theta}} + V_0 \hat{\mathbf{n}}(\theta_0) = \frac{K}{|\mathbf{L}|} \hat{\boldsymbol{\theta}} + \mathbf{V}_0, \quad (13.44)$$

όπου $\hat{\mathbf{n}}(\theta_0) = \sin \theta_0 \hat{\boldsymbol{x}} + \cos \theta_0 \hat{\boldsymbol{y}}$ είναι το μοναδιαίο διάνυσμα που σχηματίζει γωνία θ_0 με τον y -άξονα και $\pi/2 - \theta_0$ με τον x -άξονα (\mathbf{V}_0 είναι το διάνυσμα $V_0 \hat{\mathbf{n}}(\theta_0)$). Με άλλα λόγια το διάνυσμα της ταχύτητας διαγράφει έναν κύκλο ακτίνας $K/|\mathbf{L}|$ γύρω από το σταθερό διάνυσμα \mathbf{V}_0 , δηλαδή η τροχιά της ταχύτητας (η επονομαζόμενη οδογράφος) είναι ένας κύκλος. Αυτό είναι το ενδιαμέσο βήμα του Νεύτωνα προκειμένου να καταλήξει στην ελλειπτική τροχιά των πλανητών.

Προφανώς οι παραπάνω λύσεις πρέπει να προσαρμοστούν ως προς τις παραμέτρους τους V_0 και θ_0 , στις εκάστοτε αρχικές συνθήκες.

Στο σημείο αυτό θα έλεγε κανείς ότι αν και μέχρις εδώ τα πράγματα υπήρξαν εύκολα, η μετάβαση από τις συνιστώσες της ταχύτητας στις πολικές συντεταγμένες που θα καθορίσουν την τροχιά, με ολοκλήρωση των παραπάνω εξισώσεων, ίσως να μην είναι τόσο απλή. Ευτυχώς όμως και το επόμενο βήμα είναι απλό, εξαιτίας της σχέσης που έχει η v_θ μέσω της διατήρησης της στροφορμής με την στιγμιαία ακτίνα:

$$v_\theta = r\dot{\theta} = \frac{|\mathbf{L}|}{mr}.$$

Έτσι η σχέση (13.42) δίνει αυτόματα την τροχιά σε πολική μορφή:

$$r(\theta) = \frac{|\mathbf{L}|/m}{\frac{K}{|\mathbf{L}|} + V_0 \cos(\theta + \theta_0)} = \frac{\mathbf{L}^2/(mK)}{1 + \frac{V_0 |\mathbf{L}|}{K} \cos(\theta + \theta_0)}. \quad (13.45)$$

Το ότι υπήρξε διέξοδος στο να καταλήξουμε γρήγορα στη μορφή της τροχιάς, σημαίνει ότι και οι εξισώσεις θα μπορούσαν να ολοκληρωθούν με επιτυχία ακόμη και αν δεν καταφεύγαμε στη σχέση $v_\theta = r\dot{\theta}$. Δοκιμάστε μόνοι σας να σχηματίσετε το λόγο των εξισώσεων, γράφοντας $v_r/v_\theta = dr/(rd\theta)$ και να ολοκληρώσετε άμεσα τη σχέση που προκύπτει.

Προτού προχωρήσουμε στη μελέτη της πολικής εξίσωσης που προέκυψε, ας δούμε τι θα συνέβαινε αν η δύναμή μας δεν ήταν της μορφής $1/r^2$ και ακολουθούσαμε αυτή τη συλλογιστική. Θα υποθέσουμε λοιπόν ότι το κεντρικό πεδίο περιγράφεται από την ακόλουθη γενική συντηρητική δύναμη:

$$\mathbf{F} = -f(r)\hat{\mathbf{r}}.$$

Το αντίστοιχο ζευγάρι εξισώσεων που θα λαμβάναμε στη θέση των (13.39) θα ήταν

$$\frac{dv_r}{d\theta} - v_\theta = -\frac{f(r)r^2}{|\mathbf{L}|} \text{ και } \frac{dv_\theta}{d\theta} + v_r = 0. \quad (13.46)$$

Ο μη σταθερός όρος $f(r)r^2$ θα δημιουργούσε σίγουρα προβλήματα, αλλά αν χρησιμοποιούσε κανείς τη δεύτερη διαφορική εξίσωση για να ξαναγράψει την πρώτη ως μια διαφορική εξίσωση 2ης τάξης ως προς v_θ θα κλούνταν να λύσει την

$$\frac{d^2 v_\theta}{d\theta^2} + v_\theta = \frac{f\left(\frac{L}{mv_\theta}\right)|L|}{m^2 v_\theta^2}. \quad (13.47)$$

Αυτή είναι μια εν γένει μη γραμμική διαφορική εξίσωση, εκτός αν $f(x) = a/x^2$ ή $f(x) = a/x^3$, και επομένως πρέπει να αναζητήσει κανείς λύση σε στριφνές μη γραμμικές διαφορικές εξισώσεις 2ης τάξης, για πολύ λίγες από τις οποίες υπάρχει γνωστή λύση (που μάλιστα φέρουν και το όνομα αυτού που τη σκαρφίστηκε). Αν πάντως βρει κανείς την $v_\theta(\theta)$ είναι εύκολο να λάβει και την άλλη συνιστώσα $v_r(\theta)$ με μια απλή παραγωγή (από την άλλη εξίσωση κίνησης).

Η εξίσωση (13.47) προβάλλεται συνήθως στα βιβλία με τη μορφή μιας αγνώστου προέλευσης και αιτιολογίας νέας μεταβλητής $u = 1/r$, που οδηγεί στην τροχιά των πλανητών αλλά αφήνεται να εννοηθεί ότι οδηγεί αβίαστα και στην τροχιά κάθε άλλης κεντρικής συντηρητικής δύναμης. Η αλήθεια είναι ότι η εξίσωση αυτή είναι περιορισμένη ισχύος και η αξία της περιορίζεται δυστυχώς μόνο στη βαρυτική δύναμη (ή τη δύναμη Coulomb), η δράση της οποίας όμως στον πραγματικό κόσμο τυχαίνει να είναι σημαντική.

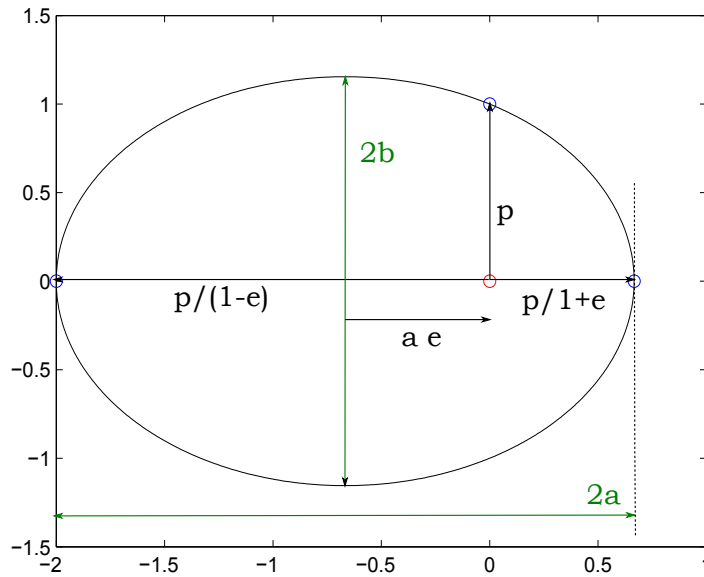
13.9 Τροχιές πλανητών - Νόμοι Κέπλερ

Εφοδιασμένοι με την πολική εξίσωση (13.45) στην περίπτωση δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου είμαστε έτοιμοι να μελετήσουμε τα γεωμετρικά της χαρακτηριστικά. Καταρχάς πρόκειται για την εξίσωση μιας έλλειψης¹⁸ με τη μία της εστία της στην αρχή των αξόνων. Η ποσότητα $p = L^2/(mK)$ καλείται *semi-latus rectum* (ορθό ημιπλάτος) της έλλειψης το οποίο δίνει μια κλίμακα μεγέθους της έλλειψης. Η ποσότητα $e = V_0|L|/K$ καλείται εκκεντρότητα της έλλειψης και μετράει το πόσο στενόμακρη είναι η έλλειψη. Η εκκεντρότητα οφείλει να είναι $0 \leq e < 1$ προκειμένου να περιγράφει η (13.45) μια έλλειψη. Ειδικά η τροχιά είναι ανοικτή (παραβολή: $e = 1$ ή υπερβολή: $e > 1$). Η περίπτωση $e = 0$ περιγράφει έναν κύκλο ($r = p = \text{σταθ}$). Τέλος η γωνία θ_0 είναι η γωνία κατά την οποία είναι στραμμένη η έλλειψη. Έτσι για $\theta = -\theta_0$ το σωματίδιο βρίσκεται στο εγγύτερο στο κέντρο σημείο.¹⁹

Εναλλακτικά μια έλλειψη χαρακτηρίζεται από τους δύο της ημιάξονες. Ο μεγάλος ημιάξονας a είναι το μισό της μέγιστης διαμέτρου της, ενώ ο μικρός ημιάξονας

¹⁸Στην πραγματικότητα αυτή είναι η πολική εξίσωση μιας κωνικής τομής (έλλειψης, παραβολής, ή υπερβολής). Στο σημείο αυτό όμως επειδή το ενδιαφέρον μας εστιάζεται σε κλειστές τροχιές θα ασχοληθούμε μόνο με τις ελλείψεις.

¹⁹Αν $V_0 < 0$ μπορούμε να απορροφήσουμε το προσημό του στο $\cos(\theta + \theta_0)$ προσθέτοντας μια επιπλέον γωνία π στο \cos .



Σχήμα 13.8: Μια ελλειπτική τροχιά με όλα της τα γεωμετρικά στοιχεία. Το κέντρο της δύναμης είναι η κόκκινη βούλα στην εστία της έλλειψης. Οι άλλοι τρεις μπλε κύκλοι είναι το περίκεντρο, η απόσταση p που αντιστοιχεί στο ορθό ημιπλάτος και το απόκεντρο.

της b , σχετίζεται με το a και την e ως $b = a\sqrt{1 - e^2}$. Η απόσταση των δύο εστιών της είναι ae , ενώ το ορθο ημιπλάτος της είναι $p = a(1 - e^2)$. Όλες αυτές οι σχέσεις προκύπτουν από τη βασική κατασκευαστική ιδιότητα της έλλειψης: Το άθροισμα των αποστάσεων όλων των σημείων της από τις δύο εστίες είναι σταθερό και ίσο με $2a$. Τέλος από την πολική εξίσωση της έλλειψης έχουμε για το περίκεντρο και το απόκεντρο

$$r_{\Pi} = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e) \quad \text{και} \quad r_A = \frac{p}{1 - e} = a(1 + e). \quad (13.48)$$

Προκειμένου να συνδέσουμε τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της έλλειψης (a, b, p, e) με τα φυσικά χαρακτηριστικά του προβλήματος της κίνησης ενός σωματιδίου στο βαρυτικό πεδίο μιας σταθερής σημειακής μάζας (π.χ. τον Ήλιο²⁰) θα υποθέσουμε ότι έχουμε στήσει τους άξονές μας βολικά, δηλαδή θα υποθέσουμε ότι ο άξονας x από τον οποίο μετράμε τις γωνίες κατευθύνεται προς το περίκεντρο της τροχιάς (έτσι ώστε $\theta_0 = 0$). Θα έχουμε λοιπόν

$$r(\theta = 0) = r(0) = \frac{p}{1 + e} = a(1 - e). \quad (13.49)$$

²⁰ Αν και δεν είναι σημείο ο Ήλιος, αλλά σφαίρα, συμπεριφέρεται όπως θα δούμε στο κεφάλαιο 13 ως σημείο.

Η δε αρχική ταχύτητα του σωματιδίου θα είναι $\mathbf{v}(0) = v(0)\hat{\boldsymbol{\theta}}$, οπότε

$$v(0) = r(0)\dot{\theta}(0) = r(0)\frac{|\mathbf{L}|}{mr(0)^2} = \frac{|\mathbf{L}|/m}{a(1-e)}, \quad (13.50)$$

οπότε $r(0)v(0) = |\mathbf{L}|/m$ όπως είναι προφανές από την ορθογωνιότητα των $\mathbf{r}(0)$ και $\mathbf{v}(0)$ αρχικά. Διαιρώντας τη σχέση $a(1-e^2) = p = \mathbf{L}^2/(mK) = m[v(0)r(0)]^2/K$ με την (13.49) βρίσκουμε

$$e = \frac{mr(0)v(0)^2}{K} - 1 \quad (13.51)$$

και λύνοντας ως προς a

$$a = \frac{mv(0)^2r(0)^2/K}{1-e^2} = \frac{mv(0)^2r(0)^2/K}{1 - \left(\frac{mr(0)v(0)^2}{K} - 1\right)^2} = \dots = \frac{r(0)}{2 - \frac{mr(0)v(0)^2}{K}}. \quad (13.52)$$

Οι τελευταίες δύο σχέσεις συνδέουν τα κινηματικά στοιχεία της τροχιάς στο περίκεντρο με τα γεωμετρικά στοιχεία της έλλειψης. Ένας εναλλακτικός τρόπος γραφής των a, e βασιζόμενος στις διατηρούμενες ποσότητες της στροφορμής και της ενέργειας (οι οποίες θα μπορούσαν να υπολογιστούν σε κάθε σημείο της τροχιάς):

$$|\mathbf{L}| = mr(0)v(0) \quad \text{και} \quad E = \frac{1}{2}mv(0)^2 - \frac{K}{r(0)}$$

δίνει μετά από κάποιες πράξεις

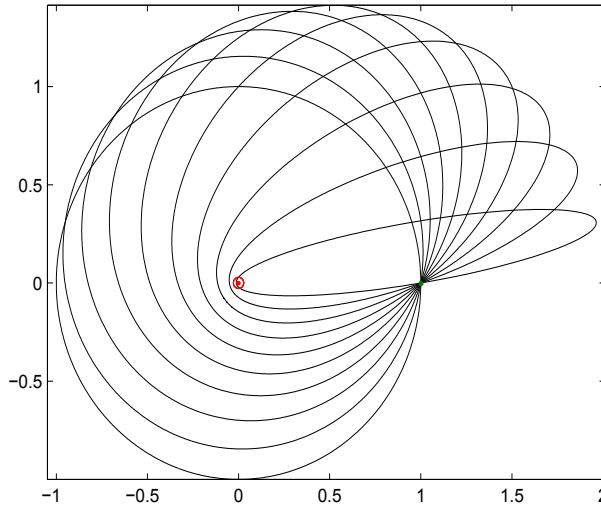
$$e = \sqrt{1 + \frac{2E\mathbf{L}^2}{mK^2}} \quad (13.53)$$

και

$$a = \frac{K}{-2E}. \quad (13.54)$$

Παρατηρούμε ότι ενώ η εκκεντρότητα εξαρτάται και από τις δύο σταθερές $E, |\mathbf{L}|$ ο μεγάλος ημιάξονας της έλλειψης εξαρτάται αποκλειστικά από την ενέργεια. Προσέξτε ότι η 2η σχέση έχει νόημα μόνο για αρνητικές ενέργειες οι οποίες εξασφαλίζουν φραγμένες τροχιές. Εξάλλου μόνο για τέτοιες ενέργειες, η έκφραση για την εκκεντρότητα λαμβάνει τιμές μικρότερες της μονάδας. Έτσι αν βληθεί ένα σωματίδιο από μια θέση $\mathbf{r}(0)$ μακριά από το βαρυτικό κέντρο με ταχύτητα $\mathbf{v}(0)$ που σχηματίζει γωνία ϕ με το διάνυσμα $\mathbf{r}(0)$, η μεν ενέργεια E δεν θα εξαρτάται από τη γωνία ϕ , αφού η ενέργεια συνδέεται μόνο με την τιμή $|\mathbf{v}_0|$ και $|\mathbf{r}(0)|$ και όχι με τη μεταξύ τους διάταξη, ενώ η στροφορμή $|\mathbf{L}|$ θα εξαρτάται άμεσα από τη γωνία ϕ . Το σύνολο λοιπόν των σωματιδίων που βάλονται με ίδια $r(0), v(0)$ αλλά διαφορετικές

ϕ θα εκτελέσουν διαφορετικές ελλείψεις γύρω από το κέντρο. Όλες οι ελλείψεις θα έχουν ίδιο μεγάλο ημιάξονα, αλλά διαφορετική εκκεντρότητα και προσανατολισμό (βλ. σχήμα 13.9).



Σχήμα 13.9: Ελλειπτικές τροχιές με κέντρο το κόκκινο σημείο. Όλες διαγράφονται από σωματίδια που βάλονται από το πράσινο σημείο με ίδια ταχύτητα αλλά διαφορετική γωνία βολής. Το αποτέλεσμα είναι ελλείψεις διαφορετικής εκκεντρότητας αλλά ίδιου μεγάλου ημιάξονα.

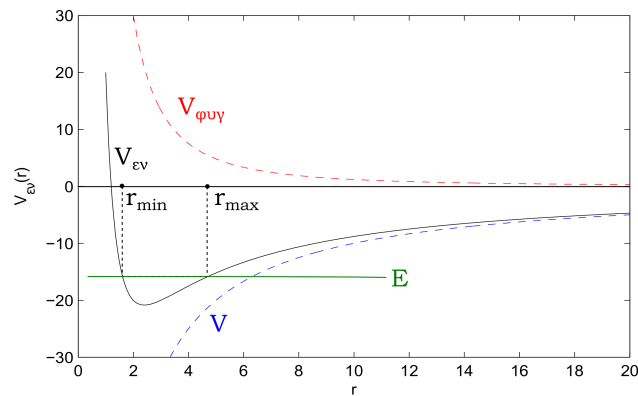
Η μονοπαραμετρικότητα αυτή του a σχετίζεται με μια ιδιαίτερη συμμετρία που κρύβει το εν λόγω κεντρικό δυναμικό και οφείλεται ακριβώς στο νόμο αντιστρόφου τετραγώνου. Πρόκειται ακριβώς για το ίδιο αίτιο που καθιστά το άτομο του υδρογόνου, που βασίζεται στη δύναμη Coulomb η οποία είναι και αυτή αντιστρόφου τετραγώνου, να έχει ενεργειακό φάσμα ανεξάρτητο της στροφορμής του ηλεκτρονίου. Η ενεργειακή στάθμη του καθορίζεται από ένα μόνο κβαντικό αριθμό.²¹

Ας ξαναδούμε τώρα την ελλειπτική λύση που βρήκαμε παραπάνω, υπό το πρίσμα της γενικής αντιμετώπισης των κεντρικών συντηρητικών δυνάμεων που εξετάσαμε στο εδάφιο 3 του παρόντος κεφαλαίου. Η ενεργός δυναμική ενέργεια για μια ελκτική, κεντρική δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου έχει τη μορφή

$$V_{\text{ενε}\rho} = \frac{\mathbf{L}^2}{2mr^2} - \frac{K}{r}. \quad (13.55)$$

Η δυναμική αυτή ενέργεια στις μεν πολύ μικρές ακτίνες r συμπεριφέρεται όπως η φυγοκεντρική δυναμική ενέργεια αφού $1/r^2 \gg 1/r$ για r πολύ μικρό (μικρό σε σύγκριση με τ), ενώ για r πολύ μεγάλο συμπεριφέρεται όπως η δυναμική ενέργεια του

²¹Στην κβαντομηχανική που διέπει τη “μηχανική λειτουργία” των ατόμων η μονοπαραμετρικότητα αυτή ονομάζεται *εκφυλισμός*, αφού δύο διαφορετικές καταστάσεις καθοριζόμενες από διαφορετικά σύνολα κβαντικών αριθμών, έχουν ίδια τιμή σε κάποιο από τα μετρούμενα μεγέθη τους.



Σχήμα 13.10: Το διάγραμμα της ενεργού δυναμικής ενέργειας για τη βαρυτική δύναμη, πάνω στο οποίο είναι σημειωμένη η ολική ενέργεια και οι ακραίες ακτίνες της κίνησης r_{\min} (περίκεντρο) και r_{\max} (απόκεντρο).

πεδίου ($1/r \gg 1/r^2$). Έτσι ο φυγοκεντρικός όρος δεν επιτρέπει στο σωματίδιο να προσκρούσει στο κέντρο (το κρατάει πάντα σε ασφαλή απόσταση²²). Παράλληλα η ελκτική δύναμη δεν επιτρέπει στο σωματίδιο να φτάσει σε άπειρη απόσταση και το επαναφέρει και πάλι κοντά στην περιοχή του κέντρου (περίπτωση κομητών), αρκεί η ολική ενέργεια να είναι χαμηλότερη από το 0 ώστε το σωματίδιο να μένει εγκλωβισμένο στο πηγάδι της ενεργού δυναμικής ενέργειας που σχηματίζεται (βλ. σχήμα 13.10). Η μηδενική αυτή ενέργεια αντιστοιχεί στην ταχύτητα διαφυγής που θα πρέπει να έχει το σωματίδιο ώστε να καταφέρει να διαφύγει από το βαρυτικό πεδίο, ανεξαρτήτως της κατεύθυνσης της ταχύτητας αυτής:

$$\frac{1}{2} m v_{0(\text{διαφ})}^2 - \frac{K}{r_0} = 0. \quad (13.56)$$

Ανάλογα με το ποια είναι η κατεύθυνση της ταχύτητας διαφυγής $v_{0(\text{διαφ})}$ σε σχέση με το \mathbf{r}_0 το σωματίδιο θα ακολουθήσει μια διαφορετική (οριακή) έλλειψη που δεν θα κλείσει ποτέ²³ και θα φτάσει σε άπειρη απόσταση σε άπειρο χρόνο. Η μοναδική, κάπως ανώμαλη, περίπτωση είναι αυτή που το σωματίδιο βάλλεται με την ταχύτητα διαφυγής προς το κέντρο. Η στροφορμή τότε θα είναι μηδενική, όπως και η φυγοκεντρική δυναμική ενέργεια, οπότε επιτρέπεται στο σωματίδιο να φυάσει στο κέντρο με άπειρη μάλιστα ταχύτητα. Κανονικά όμως αν αναλύσουμε αυτή την περίπτωση ως το όριο των περιπτώσεων με $|\mathbf{L}| \neq 0$ καθώς το $|\mathbf{L}| \rightarrow 0$ το σωματίδιο φτάνοντας στη σχεδόν μηδενική απόστασή του από το κέντρο “ανακρούει πρύμναν” και επιστρέφει στο ταξίδι της διαφυγής περνώντας από το σημείο εκκίνησης. Προφανώς

²²Στην κβαντομηχανική συμπεριφορά των σωματιδίων υπάρχει άλλος ένας επιπλέον φυσικός νόμος –η αρχή της αβεβαιότητας– που αποτρέπει να “φτάσει” το σωματίδιο στο κέντρο ακόμη και όταν η στροφορμή είναι 0 οπότε λείπει η φυγοκεντρική απόθηση.

²³Η καμπύλη αυτή ονομάζεται παραβολή.

όλη αυτή ανάλυση αναφέρεται σε ένα κέντρο με μάζα αλλά χωρίς διαστάσεις! Κάτι τέτοιο είναι μη υλοποιήσιμο πρακτικά, οπότε ένα σύνολο τροχιών που ξεκινούν με ταχύτητα διαφυγής θα καταλήξουν να προσκρούσουν στο κεντρικό βαρυτικό σώμα και δεν θα καταφέρουν να ξεφύγουν από τα βαρυτικά δεσμά παρόλο που ξεκίνησαν με τις κατάλληλες κινηματικές προϋποθέσεις.

Η τιμή $E = 0$, που συνδέεται με την ταχύτητα διαφυγής, διαχωρίζει τις τροχιές σε ανοικτές ($E > 0$) και κλειστές ($E < 0$) αφού για $r \rightarrow \infty$ η ενεργός δυναμική ενέργεια τείνει στο 0. Αν η ολική ενέργεια ξεπεράσει αυτή την τιμή το σωματίδιο θα φύγει για πάντα στο άπειρο.²⁴ Αν η ολική ενέργεια πέσει κάτω από την τιμή αυτή κατωφλίου, το σωματίδιο θα κινείται σε μια έλλειψη μεταξύ δύο ακραίων ακτινικών θέσεων

$$r_{\Pi} \leq r \leq r_A.$$

Είδαμε στο εδάφιο σχετικά με το θεώρημα του Bertrand ότι η συχνότητα της ακτινικής ταλάντωσης σε ένα τέτοιο πεδίο συμπίπτει με τη συχνότητα περιστροφής με αποτέλεσμα η τροχιά να είναι πάντα²⁵ κλειστή ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών. Η μορφή της τροχιάς καθιστά το γεγονός αυτό προφανές. Αν το σωματίδιο βρίσκεται σε γωνία $\theta = 0$ στο περίκεντρο δηλαδή σε $r_{\min} = p/(1+e) = a(1-e)$, όταν στραφεί κατά γωνία $\theta = \pi$ θα βρεθεί στο απόκεντρο $r_{\max} = p/(1-e) = a(1+e)$, δηλαδή θα ολοκληρώσει μισή ακτινική ταλάντωση²⁶ έχοντας στραφεί κατά π . Επομένως σε μια πλήρη στροφή θα έχει ολοκληρώσει μια πλήρη ακτινική ταλάντωση και η τροχιά θα κλείσει. Οι αρχικές συνθήκες επηρεάζουν τα γεωμετρικά χαρακτηριστικά της έλλειψης, όπως είδαμε παραπάνω, αλλά η έλλειψη θα είναι πάντα έλλειψη.

Το μόνο στοιχείο που μέχρι τώρα έχουμε παραλείψει να αναφέρουμε είναι πως συνδέονται όλα τα παραπάνω με την παράμετρο χρόνος. Το πέρασμα από την εξίσωση κίνησης ως διαφορική εξίσωση ως προς το χρόνο, σε διαφορική εξίσωση ως προς το θ μας οδήγησε στο σχήμα της τροχιάς αλλά όχι και στην εξέλιξη αυτής. Θα επαναφέρουμε τώρα αυτή την παράμετρο η οποία αποκτά και ιδιαίτερη σημασία όταν θα πρέπει να σχεδιάσουμε διαστημικά ταξίδια στο βαρυτικό πεδίο του Ήλιου, ή της Γης, ή κάποιου άλλου πλανήτη. Θα έχουμε λοιπόν ότι ο χρόνος μετάβασης από το περίκεντρο ($\theta = 0$) σε μια οποιαδήποτε θέση στην τροχιά που αντιστοιχεί σε γωνία περιστροφής θ είναι

$$\begin{aligned} t &= \int_0^t dt' = \int_0^\theta \frac{d\theta'}{\dot{\theta}} = \frac{m}{|\mathbf{L}|} \int_0^\theta r(\theta')^2 d\theta' = \frac{mp^2}{|\mathbf{L}|} \int_0^\theta \frac{d\theta'}{(1+e \cos \theta')^2} \\ &= \frac{|\mathbf{L}|^3}{mK^2} \int_0^\theta \frac{d\theta'}{(1+e \cos \theta')^2} \end{aligned} \quad (13.57)$$

²⁴Όπως είπαμε παραπάνω η περίπτωση $E = 0$ είναι η οριακή περίπτωση που διαχωρίζει τα δύο είδη τροχιών, η οποία και αυτή οδηγεί το σωματίδιο σε άπειρη απόσταση.

²⁵Για $E < 0$ ώστε να είναι σίγουρα φραγμένη.

²⁶Η συνάρτηση $r(\theta)$ με $\theta_0 = 0$ στην (13.45) είναι μονοτόνως αύξουσα στο διάστημα $\theta \in [0, \pi]$.

Το ολοκλήρωμα αυτό είναι ένα από τα δύσκολα ολοκληρώματα για τα οποία δεν υπάρχει μια απλή αναλυτική έκφραση. Αυτό εξηγεί την αποφυγή της απευθείας ολοκλήρωσης της διαφορικής εξίσωσης κίνησης ως προς το χρόνο. Οι αστρονόμοι (με πρώτο τον ίδιο τον Κέπλερ που προσπάθησε να υπολογίσει προσεγγιστικά αυτό το ολοκλήρωμα με επαναληπτικές μεθόδους) για να αποφύγουν αυτή τη δυσκολία επινόησαν μια αλλαγή μεταβλητής της μορφής

$$\frac{1 - e^2}{1 + e \cos \theta} = 1 - e \cos \xi . \quad (13.58)$$

Η νέα αυτή μεταβλητή ξ έχει παρόμοια μονότονη εξέλιξη με τη θ και μάλιστα για $\theta = 0$ δίνει $\xi = 0$, για $\theta = \pi$ δίνει $\xi = \pi$, για $\theta = 2\pi$ δίνει $\xi = 2\pi$. Στις ενδιάμεσες γωνίες όμως δεν είναι $\theta = \xi$, αλλά είναι $\theta > \xi$ για $0 < \theta < \pi$ (η $\xi(\theta)$ έχει θετική 2η παράγωγο) και $\theta < \xi$ για $\pi < \theta < 2\pi$ (η $\xi(\theta)$ έχει αρνητική 2η παράγωγο). Με αυτή την αλλαγή το ολοκλήρωμα της (13.57) μετασχηματίζεται (μετά από αρκετές πράξεις) στο

$$\int_0^\theta \frac{d\theta'}{(1 + e \cos \theta')^2} = \frac{1}{(1 - e^2)^{3/2}} \int_0^{\xi(\theta)} d\xi' (1 - e \cos \xi')$$

το οποίο υπολογίζεται πολύ εύκολα. Μέσω αυτού λοιπόν βρίσκουμε

$$t = \frac{|\mathbf{L}|^3}{mK^2(1 - e^2)^{3/2}} [\xi(\theta) - e \sin \xi(\theta)] , \quad (13.59)$$

ενώ η ακτινική θέση του σωματιδίου είναι

$$r(\theta(\xi)) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta} = a [1 - e \cos \xi(\theta)] . \quad (13.60)$$

Η νέα αυτή μεταβλητή $\xi(\theta)$, μέσω της οποίας μπορεί να γράψει κανείς σε παραμετρική μορφή τη σχέση θέσης (r, θ) και χρόνου t , είναι γνωστή ως *mean anomaly* (μέση ανωμαλία).²⁷

Τώρα πλέον έχουμε όλες τις εκφράσεις προκειμένου να συσχετίσουμε την περίοδο της τροχιάς με τα φυσικά της χαρακτηριστικά. Συγκεκριμένα αν θέσουμε $\xi = 2\pi$, τότε $\theta = 2\pi$ (η τροχιά έχει ολοκληρώσει μια πλήρη έλλειψη) και

$$T = \frac{|\mathbf{L}|^3}{mK^2(1 - e^2)^{3/2}} [2\pi - e \sin(2\pi)] = 2\pi \frac{|\mathbf{L}|^3}{mK^2(1 - e^2)^{3/2}} .$$

Αν αντικαταστήσουμε την τιμή της εκκεντρότητας που βρήκαμε προηγουμένως, (13.53), και στη συνέχεια την έκφραση για τον μεγάλο ημιάξονα, (13.54), καταλή-

²⁷Είναι μια ψεύτικη γωνία που εξελίσσεται κατά μέσο όρο όπως και η ίδια η γωνία θ .

γουμε στη σχέση

$$T = 2\pi a^{3/2} \sqrt{\frac{m}{K}}. \quad (13.61)$$

Αυτή η σχέση είναι ακριβώς η έκφραση του 3ου νόμου του Κέπλερ, στην οποία κατέληξε ο Κέπλερ κατόπιν επισταμένων αστρονομικών παρατηρήσεων των γνωστών τότε πλανητών. Ο Κέπλερ βέβαια κατέληξε σε αυτή τη σχέση περιόδου-μεγάλου ημιάξονα εμπειρικά μετά από προσπάθειες δέκα ετών να βρει την «αρμονική» σχέση που συνδέει όλους τους πλανήτες, παρακινημένος μάλλον από την ιδεοληψία-διαίσθηση ότι υπάρχει κάποιος αριθμητικός νόμος που διέπει τα ουράνια σώματα.

Η αναλυτική εξαγωγή του 3ου νόμου του Κέπλερ που παρουσιάσαμε είναι αρκετά τεχνική. Γι' αυτό το λόγο θα παρουσιάσουμε και έναν άλλο τρόπο που είναι πιο φυσικός (και ακολουθεί και το γεωμετρικό πνεύμα των Νευτώνειων επιχειρημάτων): Σύμφωνα με τη σχέση που χρησιμοποιήσαμε για να εξηγήσουμε το 2ο νόμο του Κέπλερ είναι

$$|\mathbf{L}| = 2m \frac{d\mathcal{E}}{dt} = 2m \frac{\mathcal{E}_{\text{έλλειψης}}}{T} = 2m \frac{\pi ab}{T}. \quad (13.62)$$

Παράλληλα

$$|\mathbf{L}| = mr(0)v(0) = ma(1-e) \left[V_0 + \frac{K}{|\mathbf{L}|} \right].$$

Η αντικατάσταση της αρχικής ταχύτητας με $V_0 + \frac{K}{|\mathbf{L}|}$ στηρίζεται στη σχέση (13.44) αν αναζητήσουμε τη μέγιστη τιμή της ταχύτητας (αυτής που αντιστοιχεί στο περίκεντρο). Τέλος αν συνδέσουμε την παράμετρο V_0 (την ακτίνα της οδογράφου) με την εκκεντρότητα (βλ. σχέση (13.45)) θα έχουμε

$$|\mathbf{L}| = mr(0)v(0) = ma(1-e) \left[e \frac{K}{|\mathbf{L}|} + \frac{K}{|\mathbf{L}|} \right] = ma(1-e^2) \frac{K}{|\mathbf{L}|}$$

δηλαδή

$$|\mathbf{L}| = \sqrt{maK(1-e^2)}.$$

Εισάγοντας την έκφραση αυτή στην (13.62) λαμβάνουμε την

$$\sqrt{maK(1-e^2)} = 2\pi ma^2 \sqrt{1-e^2} / T \quad (13.63)$$

η οποία καταλήγει και πάλι στον 3ο νόμο του Κέπλερ που εξαγάγαμε προηγουμένως αναλυτικά. Ο συντελεστής K στις παραπάνω σχέσεις είναι για τη βαρυτική δύναμη (βλ. Κεφάλαιο Βαρύτητα) GMm , όπου G η σταθερά της παγκόσμιας έλξης, M η μάζα του βαρυτικού κέντρου (του Ήλιου αν μελετάμε τις κινήσεις των πλανητών γύρω του, ή του εκάστοτε πλανήτη αν ενδιαφερόμαστε για τις τροχιές των δορυφό-

ρων του πλανήτη αυτού), και m η μάζα του σωματιδίου που κινείται σε ελλειπτική τροχιά γύρω από το βαρυτικό κέντρο.

13.10 Σκέδαση

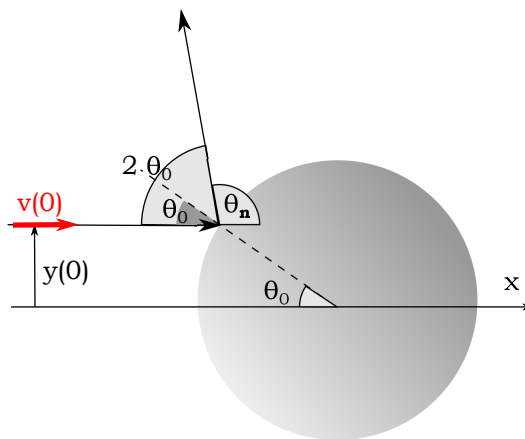
Σκέδαση συμβαίνει όταν σωματίδια προσπίπτουν σε εμπόδια και αλλάζουν πορεία. Ο τρόπος που αλλάζουν πορεία μπορεί να μας δώσει πολύτιμες πληροφορίες για το είδος και τη μορφή της αλληλεπίδρασης που λαμβάνει χώρα μεταξύ των σωματιδίων και των εμποδίων.

Το παράδειγμα σκέδασης που θα αναλύσουμε θα είναι εξαιρετικά απλό και θα μας δώσει τη δυνατότητα να καταλάβουμε διαισθητικά τις νέες φυσικές ποσότητες μέτρησης που θα εισαγάγουμε.

Θα υποθέσουμε ότι σημειακά σωματίδια κινούμενα στον άξονα x με ταχύτητα v_0 προσπίπτουν πάνω σε μια σκληρή αδιαπέραστη και ακλόνητη σφαίρα ακτίνας R με το κέντρο της στην αρχή των αξόνων. Η δυναμική ενέργεια του “πεδίου” της σφαίρας έχει τη μορφή

$$V(r) = \begin{cases} 0, & \text{για } r > R \\ +\infty, & \text{για } r \leq R. \end{cases}$$

Η φορμαλιστική αυτή έκφραση του πεδίου μας περιγράφει έναν χώρο (εκτός της σφαίρας) που το σωματίδιο είναι ελεύθερο, και έναν απαγορευμένο χώρο (εντός της σφαίρας). Το πεδίο αυτό είναι κεντρικό παρόλο που δεν υπάρχει άμεση εξάρτηση από το r και το πεδίο είναι ουσιαστικά απών. Αν το κεντρικό σώμα δεν ήταν μια σκληρή σφαίρα, αλλά ένα σκληρό ελλειψοειδές, το αντίστοιχο πεδίο δεν θα ήταν κεντρικό, αφού το σύνορο που θα άλλαζε τιμή θα ήταν μια συνάρτηση $r(\theta)$.



Σχήμα 13.11: Σκέδαση σωματίου σε σκληρή σφαίρα.

Τα κεντρικά πεδία όπως μάθαμε διατηρούν τη στροφορμή. Αυτό σημαίνει ότι η στροφορμή του προσπίπτοντος σωματιδίου θα διατηρείται όχι μόνο προ της κρού-

σης στη σφαίρα, αλλά και κατά τη διάρκεια αυτής. Λόγω αξονικής συμμετρίας του προβλήματος γύρω από τον άξονα x , θα υποθέσουμε ότι το σωματίδιο του οποίου θα μελετήσουμε την κίνηση, κινείται επί του επιπέδου $x - y$ και εξαιτίας της διατήρησης της στροφορμής θα παραμείνει σε αυτό το επίπεδο για πάντα. Το σωματίδιο θα συγκρουστεί με τη σκληρή σφαίρα αν $|y(0)| < R$, το δε σημείο πρόσκρουσής του στη σφαίρα θα χαρακτηρίζεται από τη γωνία $\theta_0 = \pi - \sin^{-1}(y(0)/R)$. Η δε στροφορμή του θα είναι

$$\mathbf{L} = m\mathbf{r}(0) \times \mathbf{v}(0) = m(x(0), y(0), 0) \times (v(0), 0, 0) = my(0)v(0) = mR \sin \theta_0 v(0) .$$

Μετά την κρούση, το σωματίδιο θα κινείται κατά μήκος κάποιας ευθείας που διέρχεται από το σημείο της κρούσης και έχει κατεύθυνση $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\chi} \cos \theta_n + \hat{y} \sin \theta_n$. Δεδομένου μάλιστα της περιγραφής του πεδίου μέσω μιας δυναμικής ενέργειας υπονοείται ότι το πεδίο είναι συντηρητικό, δηλαδή η κρούση είναι ελαστική. Αυτό σημαίνει ότι η ταχύτητα του σωματιδίου μετά την κρούση θα είναι ίδιου μέτρου με την ταχύτητα πριν. Η στροφορμή λοιπόν του σωματιδίου αμέσως μετά την κρούση (και έκτοτε) θα είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{L} &= m(R \cos \theta_0, R \sin \theta_0, 0) \times \hat{\mathbf{n}} v(0) \\ &= mRv(0)(\cos \theta_0, \sin \theta_0, 0) \times (\cos \theta_n, \sin \theta_n, 0) \\ &= mRv(0)(\cos \theta_0 \sin \theta_n - \sin \theta_0 \cos \theta_n) \\ &= mRv(0) \sin(\theta_n - \theta_0) . \end{aligned} \tag{13.64}$$

Θα πρέπει λοιπόν να είναι $\sin \theta_0 = \sin(\theta_n - \theta_0)$, δηλαδή $\theta_n = 2\theta_0$ ή $\theta_n = \pi - 2\theta_0$. Αφού για θ_0 το σωματίδιο αναστρέφει την κίνησή του $\theta_n = \pi$ (οπισθοσκέδαση) και για $\theta_0 = \pi/2$, το σωματίδιο μόλις που ακουμπά τη σφαίρα οπότε δεν αισθάνεται καμία ώθηση εκτροπής οπότε $\theta_n = 0$, θα πρέπει να επιλέξουμε τη δεύτερη λύση $\theta_n = \pi - 2\theta_0$. Το αποτέλεσμα αυτό είναι προφανές γεωμετρικά αφού η ακτίνα που βλέπει το σημείο κρούσης θα πρέπει να παίζει το ρόλο διχοτόμου στη γωνία που σχηματίζουν οι διευθύνσεις κίνησης πριν και μετά την κρούση (βλ. σχήμα).

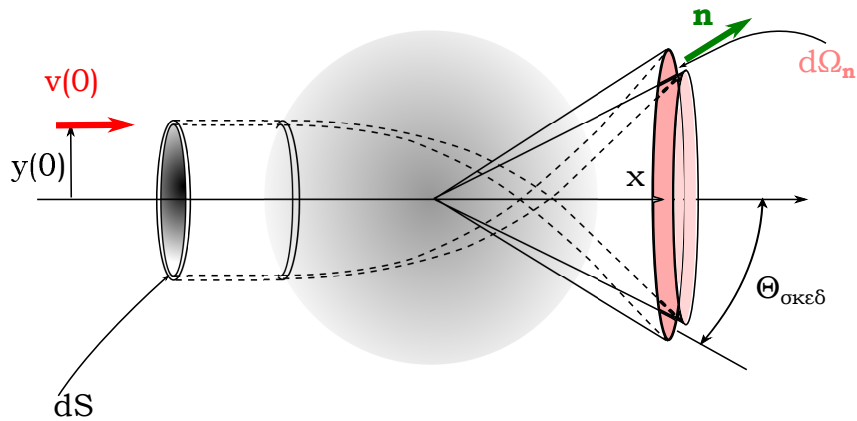
Ας υποθέσουμε τώρα ότι πολλοί παρατηρητές βρίσκονται μακριά από το κέντρο, τόσο ώστε να μην βλέπουν τη σφαίρα, και παρατηρούν τα εκτρεπόμενα από αυτήν σωματίδια. Σκοπός τους είναι από τις παρατηρήσεις των εκτρεπομένων σωματιδίων να συνάγουν χρήσιμες πληροφορίες για τη σφαίρα-σκεδαστή. Οι παρατηρητές διαθέτουν ανιχνευτικές συσκευές που συλλέγουν τα σωματίδια με κάποιο συγκεκριμένο άνοιγμα επιφάνειας S και καταμετρούν το ρυθμό τους. Ανάλογα με τη γωνιακή θέση του εκάστοτε ανιχνευτή (σε σχέση με τον άξονα x) θα μετρούνται περισσότερα ή λιγότερα σωματίδια. Τα σωματίδια προσκρούουν στο πίσω μέρος της σφαίρας (δεν μπορούν να δουν καν τη μπροστινή της πλευρά) και εκτρέπονται σε

κάποια διεύθυνση που σχετίζεται με το σημείο πρόσκρουσης.

Ας υποθέσουμε ότι η ροή των σωματιδίων αρχικά είναι I_0 πλήθος σωματιδίων ανά μονάδα επιφάνειας (κάθετης στη διεύθυνση κίνησης) και ανά μονάδα χρόνου. Μετά την κρούση με το σκεδαστή, τα σωματίδια που θα προσκρούσουν σε μια στοιχειώδη επιφάνεια dS του σκεδαστή με ρυθμό $I_0 dS$ σωματίδια ανά μονάδα χρόνου, θα σκεδαστούν σε μια συγκεκριμένη στοιχειώδη στερεά γωνία $d\Omega_{\hat{n}}$ που δείχνει στην κατεύθυνση \hat{n} η οποία σχετίζεται με τη συγκεκριμένη στοιχειώδη επιφάνεια που προσέκρουσαν. Έτσι ο ίδιος ρυθμός σωματιδίων στη μονάδα του χρόνου, $I_0 dS$, θα διαπερνά και τον ανιχνευτή που βρίσκεται στην κατεύθυνση \hat{n} και φαίνεται από το κέντρο να αποκόπτει στερεά γωνία $d\Omega_{\hat{n}}$. Το πλήθος σωματιδίων που θα καταμετρά ο συγκεκριμένος ανιχνευτής στη μονάδα του χρόνου θα είναι ανάλογος με την επιφάνειά του, η οποία είναι με τη σειρά της ανάλογη με την $d\Omega_{\hat{n}}$. Εξισώνοντας τους δύο ρυθμούς (πρόσπτωσης και ανίχνευσης) βρίσκουμε

$$I_0 dS = K_{\hat{n}} d\Omega_{\hat{n}}.$$

Η ποσότητα $K_{\hat{n}} = I_0 dS / d\Omega_{\hat{n}}$ δίνει μια εκτίμηση του ρυθμού μετρούμενων σκεδασμένων σωματιδίων στην κατεύθυνση \hat{n} ανά στερεά γωνία σκεδαζόμενης δέσμης που αποκόπτει ο ανιχνευτής. Αν διαθέτουμε μετρήσεις γι' αυτή την ποσότητα $K_{\hat{n}}$ σε διάφορες κατευθύνσεις \hat{n} μπορούμε να τη συσχετίσουμε με το πεδίο που προκαλεί τη σκέδαση.



Σχήμα 13.12: Σκέδαση από κάποιο ελκτικό πεδίο. Διακρίνονται οι στοιχειώδης επιφάνεια dS και η αντίστοιχη στοιχειώδης στερεά γωνία όπου σκεδαζονται τα σωματίδια τα οποία προσπίπτουν στην dS .

Για παράδειγμα στην περίπτωση της σκληρής σφαίρας

$$\frac{dS}{d\Omega_{\hat{n}}} = \frac{2\pi y(0)dy(0)}{2\pi \sin \theta_{\hat{n}} d\theta_{\hat{n}}} = \frac{R \sin \theta_0 d(R \sin \theta_0)}{\sin(\pi - 2\theta_0) d(\pi - 2\theta_0)} = -\frac{R^2}{4}. \quad (13.65)$$

Το αποτέλεσμα είναι εντυπωσιακό· δεν παρουσιάζει καμία εξάρτηση από την κατεύ-

θυνση της σκέδασης. Οι ανιχνευτές μας θα μετρήσουν ίδιο ρυθμό είτε τοποθετηθούν σχεδόν μπροστά από το σκεδαστή, είτε στην πίσω πλευρά αυτού! Μια τέτοια ισοτροπική παρατήρηση θα μπορούσε να μας υποδείξει²⁸ ένα μοντέλο σκληρής σφαίρας για το πεδίο που οδήγησε στην εν λόγω καταμέτρηση.

Το αρνητικό πρόσημο στην έκφραση αυτή δεν έχει ιδιαίτερη σημασία και απλώς δηλώνει ότι όσο μεγαλώνει η παράμετρος κρούσης γύρω από την ευθεία μετωπικής κρούσης με τη σκληρή σφαίρα, τόσο μικρότερο είναι το άνοιγμα του κώνου που αντιστοιχεί σε αυτή τη σκέδαση²⁹.

Η ποσότητα $dS/d\Omega_{\hat{n}}$ ονομάζεται *διαφορική ενεργός διατομή* (differential cross section) και αποτελεί κεντρικό ζητούμενο στα πειράματα συγκρούσεων υποατομικών και στοιχειωδών σωματιδίων³⁰.

Ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση σε όλες τις δυνατές στερεές γωνίες εκτροπής βρίσκουμε την ολική ενεργό διατομή:

$$\int \left| \frac{dS}{d\Omega_{\hat{n}}} \right| d\Omega_{\hat{n}} = \frac{R^2}{4} \int d\Omega_{\hat{n}} = \pi R^2 .$$

Το αποτέλεσμα που βρήκαμε σημαίνει την επιφάνεια που αναγκάζει τα σωματίδια να σκεδαστούν και δεν είναι άλλη από την προβολή της σκληρής σφαίρας στο επίπεδο το οποίο τα σωματίδια διαπερνούν κάθετα προτού σκεδαστούν.

13.10.1 Βαρυτική σκέδαση

Μια παραλλαγή του προηγούμενου παραδείγματος είναι η πρόσπτωση σωματιδίων (μετεώρων) στο βαρυτικό πεδίο μιας ακλόνητης σφαίρας μάζας M . Για να κάνουμε λίγο πιο απλή την ανάλυσή μας θα αγνοήσουμε τις διαστάσεις της σφαίρας και θα υποθέσουμε ότι αυτή είναι σημειακή, ώστε να μελετήσουμε τη σκέδαση που προκαλεί αμγώς το βαρυτικό πεδίο και όχι η ίδια η επιφάνεια της σφαίρας.

Η κίνηση μέσα στο βαρυτικό πεδίο μελετήθηκε διεξοδικά στα εδάφια 7 και 8 του παρόντος κεφαλαίου, παρότι η έμφαση δόθηκε στις κλειστές ελλειπτικές τροχιές. Η μαθηματική ανάλυση και τα αποτελέσματα που βγάλαμε θα ισχύουν και στην περιπτώσή μας, αλλά θα πρέπει να προσέξουμε ότι οι τροχιές που αναζητούμε θα είναι ανοικτές: αφού ξεκινούν σε άπειρη απόσταση από το κέντρο θα ξαναπειστρέψουν σε άπειρη απόσταση. Η ενέργεια των τροχιών αυτών θα είναι θετική (μη δέσμες κινήσεις), θα πλησιάσουν το βαρυτικό κέντρο μέχρι μια ελάχιστη απόσταση η οποία

²⁸Το αντίστροφο πρόβλημα δεν είναι τόσο απλό. Από τη μορφή του $dS/d\Omega_{\hat{n}}$ δεν συνεπάγεται μονοσήμαντα ένα συγκεκριμένο κεντρικό πεδίο.

²⁹Το αρνητικό αυτό πρόσημο θα ξαναεμφανιστεί και στη βαρυτική σκέδαση παρακάτω. Συνήθως στις σκεδάσεις, οι μεγάλες παράμετροι κρούσης οδηγούν σε μικρές εκτροπές οπότε η ποσότητα $dS/\Omega_{\hat{n}}$ είναι αρνητική. Στην πειραματική φυσική στοιχειωδών σωματιδίων μετράμε την απόλυτη τιμή αυτού του μεγέθους και αμελούμε το πρόσημο.

³⁰Η ενεργός διατομή συμβολίζεται συνήθως με το ελληνικό γράμμα σ .

θα καθοριστεί από τη φυγοκεντρική δυναμική ενέργεια (δηλαδή από τη στροφορμή) και στη συνέχεια θα ξαναεπιστρέψουν στο άπειρο.³¹

Ακολουθώντας το γεωμετρικό μοντέλο που χρησιμοποιήσαμε και στη σκληρή σφαίρα, θα θεωρήσουμε ότι τα σωματίδια έρχονται από την κατεύθυνση του $-x$ άξονα κινούμενα με ταχύτητα $v_0\hat{\chi}$. Αν βασιστούμε στη γενική εξίσωση³² της κίνησης μέσα σε βαρυτικό πεδίο, την

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta + \theta_0)},$$

παρατηρούμε ότι οι γωνιακές θέσεις στις οποίες το σωματίδιο βρίσκεται σε άπειρη απόσταση (είτε προσεγγίζοντας το βαρυτικό κέντρο, είτε απομακρυνόμενο από αυτό) είναι εκείνες οι γωνίες στις οποίες ο παρονομαστής μηδενίζεται:

$$\cos(\theta_{\text{εισ/εξ}} + \theta_0) = -\frac{1}{e} \stackrel{\text{εξ. (13.53)}}{=} -\frac{1}{\sqrt{1 + \frac{2E\mathbf{L}^2}{mK^2}}}. \quad (13.66)$$

Η ενέργεια E στην παραπάνω σχέση υπολογίζεται εύκολα όταν τα σωματίδια βρίσκονται ακόμη πολύ μακριά από το κέντρο οπότε η δυναμική τους ενέργεια είναι μηδενική:

$$E = \frac{1}{2}mv(0)^2.$$

Η δε στροφορμή τους είναι

$$\mathbf{L} = m(x(0), y(0), 0) \times \hat{\chi}v(0) = -\hat{\zeta} m y(0) v(0),$$

όπου $y(0)$ —όπως και στην περίπτωση της σκληρής σφαίρας—είναι η y —συντεταγμένη των σωματιδίων όταν αυτά βρίσκονται ακόμη σε άπειρη απόσταση και κινούνται παράλληλα με τον x άξονα. Η ποσότητα αυτή ονομάζεται *παράμετρος κρούσης* (impact parameter) και σχετίζεται άμεσα με τη γωνία σκέδασης. Με αυτά τα κινηματικά δεδομένα οι γωνίες εισόδου/εξόδου των σωματιδίων από το βαρυτικό πεδίο είναι

$$\cos(\theta_{\text{εισ/εξ}} + \theta_0) = -\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}}. \quad (13.67)$$

Η γωνία των εισερχομένων σωματιδίων είναι $\theta_{\text{εισ}} = \pi$, οπότε ως λύση της (13.67)

³¹Η περίπτωση των δέσμων και μη δέσμων τροχιών που εμφανίζεται στη βαρύτητα, ανάλογα με το πρόσημο της ενέργειας, δεν έχει το ανάλογό της στον αρμονικό ταλαντωτή. Στην περίπτωση του ταλαντωτή όλες οι τροχιές είναι δέσμες. Το γεγονός αυτό αποκλείει τον αρμονικό ταλαντωτή από τα σκεδαστικά πεδία.

³²Αφού δεν γνωρίζουμε εκ των προτέρων τη γωνιακή θέση του εγγύτερου σημείου της τροχιάς θα θεωρήσουμε ότι $\theta_0 \neq 0$.

είναι

$$\begin{aligned}
\theta_0 &= \cos^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}} \right) - \pi \\
&= \pi - \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}} \right) - \pi \\
&= -\cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}} \right). \tag{13.68}
\end{aligned}$$

Από το σχήμα φαίνεται ότι το εγγύτερο σημείο της τροχιάς, καθώς το σωματίδιο έλκεται από το βαρυντικό κέντρο, θα βρίσκεται (για $y(0) > 0$) σε κάποια γωνία στο διάστημα $(0, \pi/2)$, ενώ από την πολική εξίσωση της τροχιάς (13.45) η γωνία του εγγύτερου σημείου είναι η $\theta = -\theta_0$ (μέγιστη τιμή του παρονομαστή). Συνεπώς το τόξο του συνημιτόνου στην παραπάνω σχέση θα είναι μια γωνία στο ίδιο διάστημα.

Ας προσδιορίσουμε τώρα και τη γωνία εξόδου που θα σχετίζεται με την εκτροπή-σκέδαση του σωματιδίου:

$$\theta_{\varepsilon\xi} = \cos^{-1} \left(-\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}} \right) - \theta_0 = -\pi + 2 \cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}} \right). \tag{13.69}$$

Για να καταλήξουμε στην παραπάνω σχέση επιλέξαμε ως λύση του $\cos^{-1}(-\Theta)$, με $\Theta > 0$, την $-\pi + \cos^{-1} \Theta$ (με $0 < \cos^{-1} \Theta < \pi/2$), αφού η άλλη λύση $\pi - \cos^{-1} \Theta$ θα μας έδινε την ήδη μελετηθείσα γωνία εισόδου $\theta_{\varepsilon\sigma} = \pi$.

Η γωνία $|\theta_{\varepsilon\xi}|$ είναι η γωνία εκτροπής του σωματιδίου $\Theta_{\sigma\kappa\epsilon\delta}$ εξαιτίας του βαρυντικού πεδίου και δεν έχει σημασία το πρόσημό της $\theta_{\varepsilon\xi}$, αφού θα πρέπει κανείς να θεωρήσει όλες τις δυνατές διευθύνσεις κίνησης των εισερχομένων σωματιδίων σε απόσταση $|y(0)|$ γύρω από τον άξονα x που θα οδηγήσουν σε μια στοιχειώδη στερεά γωνία που περιέχεται μεταξύ δύο κώνων με κορυφή το βαρυντικό κέντρο και με άνοιγμα μεταξύ $\Theta_{\sigma\kappa\epsilon\delta}$ και $\Theta_{\sigma\kappa\epsilon\delta} + d\Theta_{\sigma\kappa\epsilon\delta}$.

Για να διευκολύνουμε τις πράξεις ας ονομάσουμε την ποσότητα

$$\cos^{-1} \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{v(0)^2 y(0)}{GM}\right)^2}} \right) = \beta.$$

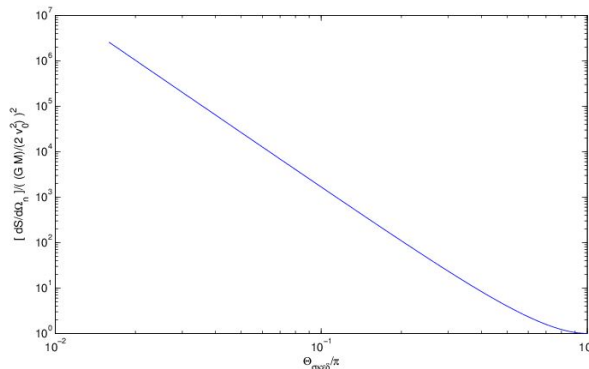
Θα έχουμε τότε τις εξής σχέσεις

$$y(0)^2 = \left(\frac{GM}{v(0)^2} \right)^2 \left(\frac{1}{\cos^2 \beta} - 1 \right) \quad \text{και} \quad \cos \Theta_{\sigma\kappa\epsilon\delta} = \cos(\pi - 2\beta) = -\cos(2\beta).$$

Από αυτά τα στοιχεία που συνδέουν τη γωνία σκέδασης με την παράμετρο κρούσης $y(0)$ υπολογίζουμε τη διαφορική ενεργό διατομή για το βαρυτικό πεδίο

$$\begin{aligned} \frac{dS}{d\Omega_{\hat{\mathbf{n}}}} &= \frac{2\pi y(0) dy(0)}{2\pi \sin \Theta_{\sigma\kappa\epsilon\delta} d\Theta_{\sigma\kappa\epsilon\delta}} \\ &= \frac{d[y(0)^2]}{-2d[\cos \Theta_{\sigma\kappa\epsilon\delta}]} \\ \dots &= - \left(\frac{GM}{2v(0)^2} \right)^2 \frac{1}{\sin^4 \beta}. \end{aligned} \quad (13.70)$$

Οι μεγαλύτερες τιμές της διαφορικής ενεργού διατομής αντιστοιχούν σε πολύ μικρές γωνίες εκτροπής (πολύ μεγάλες παραμέτρους κρούσης). Αυτό σημαίνει ότι τα περισσότερα σωματίδια καταγράφονται στους ανιχνευτές που βρίσκονται μπροστά από το σκεδαστή και πολύ λίγα πίσω από αυτόν. Η σχέση για παράδειγμα του πλήθους των καταγραφόμενων σωματιδίων σε γωνίες σκέδασης 1° και 179° είναι περίπου 170 εκατομμύρια προς 1! (βλ. διάγραμμα 13.13).



Σχήμα 13.13: Η διαφορική ενεργός διατομή ως συνάρτηση της γωνίας σκέδασης σε λογαριθμική κλίμακα.

Αν παρατηρηθεί λοιπόν μια τέτοια εξάρτηση, $1/\sin^4(\Theta_{\sigma\kappa\epsilon\delta}/2)$, από τη γωνία σκέδασης στο ρυθμό ανίχνευσης σωματιδίων, μπορούμε με αρκετή ασφάλεια να καταλήξουμε στο συμπέρασμα ότι το βαρυτικό πεδίο είναι αντιστρόφου τετραγώνου. Παράλληλα η εξάρτηση αυτή της ενεργού διαφορικής διατομής από τη γωνία σκέδασης σημαίνει πως η ολοκλήρωσή της σε όλες τις σκεδαζόμενες στερεές γωνίες οδηγεί σε άπειρη ολική ενεργό διατομή

$$S_{ολ} = \int_{\epsilon}^{\pi} \frac{1}{\sin^4(\Theta_{\sigma\kappa\epsilon\delta}/2)} \sin(\Theta_{\sigma\kappa\epsilon\delta}) d\Theta_{\sigma\kappa\epsilon\delta} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\epsilon^2} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} \infty.$$

Το αποτέλεσμα αυτό μεταφράζεται συνήθως (κατ' αντιπαράβολή με αυτό της σκληρής σφαίρας) ως ένδειξη άπειρης εμβέλειας της βαρυτικής δύναμης. Αυτή η συσχέτιση όμως είναι λανθασμένη. Αν το πεδίο έφθινε πολύ πιο γρήγορα (π.χ. εκθετικά) από αυτό της βαρυτικής δύναμης, παρόλο που μαθηματικά η εμβέλεια του θα παρέμενε άπειρη η ενεργός του διατομή θα μπορούσε να είναι πεπερασμένη.

Αν μάλιστα κανείς αναζητήσει και τη μέγιστη δυνατή γωνία εκτροπής κάποιου σωματιδίου, μπορεί να συναγάγει και τις διαστάσεις του βαρυτικού κέντρου, αφού οι πεπερασμένες διαστάσεις του βαρυτικού κέντρου θα έχουν ως συνέπεια ένα σωματίδιο που κινείται με τόσο μικρή παράμετρο κρούσης, ώστε να προσκρούσει στο βαρυτικό σώμα, να εξαφανιστεί από το σύνολο των σκεδαζόμενων σωματιδίων. Για να βρούμε τη γωνία αυτή αποκοπής, θα διερευνήσουμε τη σχέση μεταξύ της παραμέτρου κρούσης και της εγγύτερης απόστασης του σωματιδίου στο βαρυτικό κέντρο: Από διατήρηση του μέτρου της στροφορμής έχουμε

$$m|y(0)|v(0) = mr_{\min}V_{\max} \Rightarrow V_{\max} = v(0)\frac{|y(0)|}{r_{\min}} \quad (13.71)$$

όπου r_{\min} είναι η ελάχιστη απόσταση στην οποία προσεγγίζει το σωματίδιο το βαρυτικό κέντρο και V_{\max} η ταχύτητα που έχει το σωματίδιο τότε³³. Παράλληλα η διατήρηση της ενέργειας δίνει άλλη μια σχέση μεταξύ των αρχικών συνθηκών και των κινηματικών στοιχείων στο εγγύτερο σημείο:

$$\frac{1}{2}mv(0)^2 = \frac{1}{2}mV_{\max}^2 - \frac{GMm}{r_{\min}} \Rightarrow V_{\max}^2 - v(0)^2 = \frac{2GM}{r_{\min}} \quad (13.72)$$

Λύνοντας το σύστημα των δύο τελευταίων εξισώσεων ως προς r_{\min} βρίσκουμε

$$r_{\min} = -\left(\frac{GM}{v(0)^2}\right) + \sqrt{\left(\frac{GM}{v(0)^2}\right)^2 + y(0)^2}. \quad (13.73)$$

Η άλλη λύση του τριωνύμου που προκύπτει είναι αρνητική και απορρίπτεται. Η γεωμετρική σημασία αυτής είναι η εγγύτερη απόσταση από την 2η εστία της υπερβολικής τροχιάς.

Αν θέσουμε $r_{\min} = R$, όπου R η ακτίνα του βαρυτικού σκεδαστή, και λύσουμε ως προς $y(0)$ βρίσκουμε

$$y(0)\Big|_{\min} = \sqrt{R\left(R + \frac{2GM}{v(0)^2}\right)}$$

³³Στο εγγύτερο σημείο η ταχύτητα είναι κάθετη στην ακτινική θέση οπότε η στροφορμή είναι απλά το γινόμενο της ακτίνας επί την ορμή. Λόγω του ότι η απόσταση από το κέντρο είναι η ελάχιστη δυνατή, η βαρυτική δυναμική ενέργεια λαμβάνει τη μέγιστη αρνητική τιμή, οπότε η κινητική ενέργεια μεγιστοποιείται: αυτός είναι ο λόγος που ονομάσαμε την ταχύτητα στο σημείο αυτό V_{\max} .

καταλήγουμε μετά από πράξεις ότι

$$\cos^2 \beta = \frac{1}{1 + \frac{Rv(0)^2}{GM}}$$

οπότε

$$\cos \Theta_{\sigma\kappa\epsilon\delta}^{\max} = 1 - 2 \cos^2 \beta = 1 - \frac{2}{1 + \frac{Rv(0)^2}{GM}}.$$

Παρατηρώντας λοιπόν τη μορφή του $dS/d\Omega_{\hat{n}}$ και καταγράφοντας την ελάχιστη τιμή αυτού (ή τη γωνία στην οποία καταγράφεται το τελευταίο σκεδαζόμενο σωματίδιο) μπορούμε να συναγάγουμε και το είδος του σκεδαστη (βαρυτικός) και τις διαστάσεις αυτού.

Ο Rutherford ακολουθώντας αυτή τη συλλογιστική³⁴ προσδιόρισε με πειράματα βομβαρδισμού πολύ λεπτών φύλλων χρυσού με σωματίδια άλφα (πυρήνες ηλίου) τις διαστάσεις του πυρήνα του ατόμου και έδειξε ότι ο πυρήνας καταλαμβάνει ένα εκπληκτικά μικροσκοπικό χώρο εντός του ατόμου, καταρρίπτοντας το πρότυπο του σταφιδόψωμου της εποχής του που ήθελε το άτομο να είναι γεμάτο από τα θετικά φορτία του πυρήνα με τα ηλεκτρόνια σφηνωμένα σαν σταφίδες μέσα σε αυτό.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 13

- Η ισοτροπία του Σύμπαντος συνεπάγεται την κεντρικότητα των θεμελιωδών δυνάμεων αλληλεπίδρασης δύο σωματιδίων.
- Μια κεντρική δύναμη είναι συντηρητική μόνο αν είναι ισοτροπική (με μέτρο ανεξάρτητο του προσανατολισμού της ευθείας που συνδέει τα δύο σωματίδια). Στην περίπτωση ισοτροπικής κεντρικής δύναμης η δύναμη μπορεί να προκύψει ως

$$\mathbf{F} = -\nabla V(r)$$

με

$$V(r) = - \int_{r_0}^r |\mathbf{F}(\mathbf{r})| dr .$$

- Μια κεντρική δύναμη οδηγεί πάντα σε διατήρηση της στροφορμής

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$$

³⁴Τα πειράματα σκέδασης του Rutherford βασίζονται στο πεδίο Coulomb αμοιβαία απωθούμενων θετικών φορτίων. Σε όλα τα προηγούμενα λοιπόν αποτελέσματα που αναφέρονται στα βαρυτικά πεδία θα πρέπει να αντικατασταθεί ο όρος $-GM$, από τον

$$\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Q_1 Q_2}{\mu} ,$$

όπου Q_1, Q_2 τα εμπλεκόμενα φορτία και μ η ανηγμένη μάζα των αλληλεπιδρώντων σωματιδίων.

του σωματιδίου που κινείται στο κεντρικό αυτό πεδίο. Η διατήρηση αυτή συνεπάγεται την επιπεδότητα της κίνησης. Δεν ισχύει όμως και η αντίθετη πρόταση. Η επιπεδότητα της κίνησης δεν συνεπάγεται και κεντρικότητα της δύναμης.

- Ο 2ος νόμος του Κέπλερ, είναι η γεωμετρική ερμηνεία διατήρησης της στροφορμής:

$$|\mathbf{L}| = mr^2\dot{\theta} = 2m\frac{d\mathcal{E}}{dt}.$$

- Η στροφορμή πλήθους σωματιδίων που αλληλεπιδρούν με ιστροπικές κεντρικές δυνάμεις διατηρείται και μπορεί να γραφεί ως η στροφορμή ενός σώματος στη θέση του ΚΜ με μάζα όση όλα τα σωματίδια και τη στροφορμή του συστήματος ως προς το ΚΜ. Και τα δύο αυτά κομμάτια της συνολικής στροφορμής διατηρούνται ανεξάρτητα το ένα από το άλλο.
- Η διατήρηση της στροφορμής ενός σωματιδίου σε ένα κεντρικό πεδίο, εκτός της επιπεδότητας της κίνησης μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να αναλυθεί η κίνηση σε ακτινική και περιστροφική. Το ακτινικό κομμάτι της κίνησης μπορεί τότε να περιγραφεί ως ένα μονοδιάστατο πρόβλημα με μια τροποποιημένη δυναμική ενέργεια (την ενεργό δυναμική ενέργεια) που περιλαμβάνει εκτός της πραγματικής δυναμικής ενέργειας και έναν φυγοκεντρικό όρο ο οποίος εμποδίζει το σωματίδιο να πλησιάσει το ελκτικό κέντρο. Αφού λυθεί το μονοδιάστατο αυτό πρόβλημα και βρεθεί $r(t)$, στη συνέχεια μπορεί να υπολογίσει κανείς την $\theta(t)$ μέσω της διατηρούμενης στροφορμής. Έτσι ένα πρόβλημα αλληλεπίδρασης δύο σωμάτων στις 3 διαστάσεις υποβιβάζεται σε ένα πρόβλημα μιας διάστασης (διαφορική 2ας τάξης) και μέσω της διατήρησης της ενέργειας σε ένα πρωτοτάξιο εντέλει πρόβλημα!
- Η διατήρηση της στροφορμής συνεπάγεται σταθερή φορά περιστροφής του σωματιδίου σε κεντρικό πεδίο.
- Αν η ολική ενέργεια ενός σωματιδίου είναι λίγο μεγαλύτερη από το ελάχιστο της ενεργού δυναμικής ενέργειας η τροχιά είναι σχεδόν κυκλική.
- Οι τροχιές είναι πάντα συμμετρικές ως προς την ευθεία που διέρχεται από το εγγύτερο (περίκεντρο) ή το απώτερο (απόκεντρο) σημείο της τροχιάς.
- Τα μοναδικά κεντρικά πεδία που οδηγούν σε κλειστές τροχιές ανεξαρτήτως αρχικών συνθηκών είναι αυτό του ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή και αυτό μιας ελκτικής δύναμης αντιστρόφου τετραγώνου. (Στη δεύτερη περίπτωση οι αρχικές συνθήκες θα πρέπει να οδηγούν σε αρνητική ενέργεια ώστε η τροχιά να είναι φραγμένη). Τυχαίνει και στις δύο περιπτώσεις η τροχιά να είναι ελλειπτική (η πρώτη με κέντρο της έλλειψης το ελκτικό

κέντρο και η δεύτερη με το ελκτικό κέντρο να καταλαμβάνει τη μία εστία της έλλειψης).

- Μελετώντας τις λεπτομέρειες μιας σκέδασης μπορούμε να συμπεράνουμε τη φύση των κεντρικών δυνάμεων που οδηγούν στην παρατηρούμενη εικόνα της σκέδασης.
- Η σκέδαση από μια βαρυτική δύναμη ή μια δύναμη Coulomb (αντιστρόφου τετραγώνου) οδηγεί σε υπερβολικές τροχιές.

14

Βαρύτητα

14.1 Βαρυτική Έλξη

Στο αρχικό κεφάλαιο όπου διερευνήσαμε αριθμητικά τους νόμους του Κέπλερ, αλλά και αργότερα κατά τη μέλετη των κεντρικών δυναμικών, θεωρήσαμε αυθαίρετα ότι η βαρυτική δύναμη είναι μια κεντρική δύναμη, το μέτρο της οποίας είναι ανάλογο του αντιστρόφου τετραγώνου της απόστασης των δύο αμοιβαία ελκόμενων σημειακών μαζών. Για την ακρίβεια ο Νεύτωνας θεώρησε στο μνημειώδες έργο του Principia, ότι τέτοια είναι η βαρυτική δύναμη, ώστε να μπορεί να εξηγηθεί η ελλειπτική τροχιά των πλανητών του Ηλιακού μας συστήματος.

Ακόμη όμως και αν ήταν έτσι, είναι λογικό να θεωρούμε τα ουράνια σώματα που εν πολλοίς είναι τεράστιες σφαίρες με όχι ομογενή κατανομή στο εσωτερικό τους ως σημειακές μάζες; Επιπλέον οι πλανήτες, οι δορυφόροι τους, οι αστεροειδείς και ο Ήλιος είναι πολλά σώματα που αλληλεπιδρούν βαρυτικά μεταξύ τους. Θα μπορούσε κανείς να αποδώσει την ελλειπτική τροχιά των πλανητών στη βαρυτική δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου από όλα αυτά τα σώματα;

Θα ξεκινήσουμε τη διερεύνησή μας με δεδομένο ότι η δύναμη που ασκείται σε μια σημειακή μάζα m_2 που βρίσκεται στη θέση \mathbf{r}_2 εξαιτίας μιας σημειακής μάζας m_1 που βρίσκεται στη θέση \mathbf{r}_1 περιγράφεται από τη σχέση

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \frac{m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2}. \quad (14.1)$$

Η διανυσματική αυτή σχέση δηλώνει ότι η κατεύθυνση της δύναμης είναι πάνω στον

φορέα της ευθείας που διέρχεται από τις δύο σημειακές μάζες (γι' αυτό εμφανίζεται στη σχέση το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2}$ που κατευθύνεται από την 1 προς την 2) και λόγω της ελκτικότητας της βαρυτικής δύναμης έχει τη διεύθυνση από τη 2 προς την 1 (γι' αυτό υπάρχει το - πρόσημο). Παράλληλα η δύναμη αυτή είναι ανάλογη με την κάθε μία μάζα χωριστά και αντιστρόφως ανάλογη του τετραγώνου της απόστασης $|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|$ μεταξύ των δύο μαζών. Η σταθερά G είναι ένας συντελεστής αναλογίας, γνωστός ως σταθερά της Παγκόσμιας έλξης, ή σταθερά του Νεύτωνα, και η τιμή της σχετίζεται με το πόσο δυνατή είναι η βαρύτητα ως θεμελιώδης δύναμη. Η τιμή αυτής είναι

$$G = 6.67408(31) \times 10^{-11} \text{N m}^2/\text{kg}^2. \quad ^1 \quad (14.2)$$

Αν και είναι δύσκολο να συγκρίνει κανείς τις εντάσεις μεταξύ των διαφόρων θεμελιωδών δυνάμεων αφού περιγράφονται με διαφορετικές μονάδες, αρκεί κανείς να συγκρίνει για παράδειγμα τη βαρυτική με την ηλεκτρική δύναμη μεταξύ δύο στοιχειωδών φορτισμένων σωματιδίων (π.χ. δύο πρωτονίων) ή να σκεφθεί απλώς ότι χρειάζεται τουλάχιστον μια ολάκερη Γ για να αποσπάσει ένα φορτισμένο χαρτάκι που κρατάει "κολλημένο" πάνω της μια πλαστική χτένα που έχει φορτιστεί με τριβή. Δυστυχώς δεν είναι δυνατό στο επίπεδο της μελέτης μας να εξηγήσουμε γιατί η βαρυτική δύναμη έχει αυτή τη μορφή, παρά μόνο να τη δεχθούμε ως σωστή αφού περιγράφει με μεγάλη ακρίβεια τις αστρονομικές παρατηρήσεις των πλανητών.

Θα θέλαμε τώρα με βάση αυτή τη δύναμη μεταξύ σημειακών μαζών να βρούμε μια σχέση για τη δύναμη μεταξύ δύο πεπερασμένης διάστασης μαζών. Όπως καταλαβαίνετε το τελικό αποτέλεσμα θα περιγραφόταν από μια αρκετά πολύπλοκη από υπολογιστική άποψη διανυσματική έκφραση της μορφής

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -G \int_{V_1} \int_{V_2} \frac{dm_1 dm_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2}. \quad (14.3)$$

όπου οι ολοκληρώσεις θα έπρεπε να ληφθούν και στους δύο όγκους που περιέχονται τα δύο σώματα και για κάθε ζεύγος στοιχειωδών μαζών dm_1, dm_2 θα είναι και διαφορετικό το διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2}/|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2$ που θα σχετίζεται με τη μεταξύ τους σχετική θέση.

Εμείς θα προσπαθήσουμε να εκτελέσουμε τον υπολογισμό αρχικά για μια σημειακή μάζα m_2 και για έναν σφαιρικό φλοιό απειροστού πάχους που έχει συνολική μάζα m_1 και ακτίνα R . Στην ειδική αυτή περίπτωση το παραπάνω διπλό ολοκλήρωμα θα μετατραπεί σε ένα απλό (αφού η μάζα m_2 είναι σημειακή) το οποίο δεν θα είναι ένα χωρικό ολοκλήρωμα αλλά ένα επιφανειακό (αφού η μάζα m_1 εξαπλώνεται πάνω σε μια επιφάνεια). Και πάλι όμως ο υπολογισμός –αν και εφικτός– θα

¹Ο διψήφιος αριθμός 31 μέσα στην παρένθεση σημαίνει ότι η πειραματική αβεβαιότητα μέτρησης στα τελευταία δύο ψηφία προ της παρένθεσης, 08, είναι ± 31 .

παρουσιάζει δυσκολίες καθώς η ολοκλήρωση θα αφορά διανυσματικές ποσότητες και θα πρέπει να εκμεταλλευτεί κανείς καταλλήλως την αξονική συμμετρία που παρουσιάζει μια σφαίρα γύρω από την ευθεία που συνδέει τα κέντρα των δύο μαζών, προκειμένου να μετατρέψει το διανυσματικό ολοκλήρωμα σε απλό.

Εδώ θα καταφύγουμε σε κάτι πιο απλό. Θα χρησιμοποιήσουμε την έννοια του βαρυτικού δυναμικού αφού μια δύναμη σαν τη βαρυτική είναι συντηρητική και επομένως μπορεί να προκύψει από κάποιο δυναμικό. Θα ορίσουμε λοιπόν το δυναμικό στη θέση \mathbf{r} μακριά από κάποια σημειακή μάζα M ως την ποσότητα $\Phi(\mathbf{r})$ έτσι ώστε η βαρυτική έλξη που θα προκαλέσει η M σε μια τυχαία άλλη σημειακή μάζα μ να περιγράφεται από τη σχέση

$$\mathbf{F} = -\mu \nabla \Phi(\mathbf{r}). \quad (14.4)$$

Αφού η σχέση δύναμης-δυναμικού είναι τέτοια το δυναμικό θα πρέπει να δίνεται (βλ. κεφάλαιο για το δυναμικό) από την έκφραση

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0}^{\mathbf{r}} \frac{\mathbf{F}}{\mu} \cdot d\mathbf{r}, \quad (14.5)$$

όπου το \mathbf{r}_0 είναι ένα αυθαίρετο σημείο στο οποίο έχουμε προαποφασίσει να δώσουμε στο δυναμικό την τιμή 0. Στην περίπτωση μας όπου έχουμε να κάνουμε με μια δύναμη η οποία εξασθενεί με την απόσταση δεν θα ήταν κακή ιδέα (και αυτό συνηθίζεται άλλωστε) να θέτουμε το \mathbf{r}_0 ως μια θέση σε άπειρη απόσταση από τη μάζα M . Το παραπάνω ολοκλήρωμα –αν χρησιμοποιήσουμε σφαιρικές συντεταγμένες και τοποθετήσουμε την M στην αρχή των αξόνων– παίρνει τη μορφή

$$\Phi(\mathbf{r}) = - \int_{\mathbf{r}_0 \rightarrow \infty}^{\mathbf{r}} -G \frac{M}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}} dr = GM \int_{\infty}^{|\mathbf{r}|} \frac{dr}{r^2} = -\frac{GM}{|\mathbf{r}|}. \quad (14.6)$$

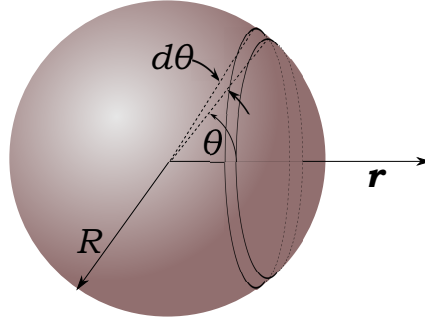
Το μεγάλο πλεονέκτημα της χρήσης του δυναμικού έναντι της δύναμης είναι ότι το δυναμικό είναι μια βαθμωτή ποσότητα και έτσι αντί να προσθέτουμε τις διανυσματικές δυνάμεις από πολλές μάζες μπορούμε να προσθέτουμε τα βαθμωτά δυναμικά από πολλές μάζες.²

Θα υπολογίσουμε τώρα το δυναμικό σε απόσταση r από το κέντρο ενός σφαιρικού κελύφους μάζας M ομογενώς κατανεμημένου επί μιας σφαιρικής επιφάνειας S ακτίνας R . Αυτό θα δίνεται από το ολοκλήρωμα

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \int_{S(R)} \frac{dM'}{|\mathbf{r}' - \mathbf{r}|}. \quad (14.7)$$

² Η σχέση μεταξύ δύναμης και δυναμικού είναι γραμμική, οπότε η επαλληλία πολλών διανυσμάτων δυνάμεων είναι ισοδύναμη με την πρόσθεση των αντίστοιχων δυναμικών.

Ούτε αυτό το ολοκλήρωμα μοιάζει να υπολογίζεται πολύ εύκολα, διότι μολονότι βαθμωτό, εμπεριέχει διανύσματα τα οποία αλλάζουν διεύθυνση από τη μία στοιχειώδη μάζα στην επόμενη. Ένα τρικ για να υπολογιστεί το ολοκλήρωμα αυτό εύκολα και γρήγορα είναι να διαμερίσουμε το σφαιρικό φλοιό σε στοιχειώδη τμήματα τέτοια ώστε ολόκληρη η μάζα του εκάστοτε τμήματος να βρίσκεται σε συγκεκριμένη απόσταση από το σημείο στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό. Για έναν σφαιρικό φλοιό τέτοια κατάλληλα τμήματα είναι δακτύλιοι ομοαξονικοί με την ευθεία που συνδέει το κέντρο του σφαιρικού φλοιού με το σημείο υπολογισμού του δυναμικού. Το μόνο τώρα που χρειάζεται είναι ο υπολογισμός της μάζας του κάθε τέτοιου δακτυλίου. Αν επιλέξουμε ως μεταβλητή που καθορίζει τη θέση του κάθε τέτοιου δακτυλίου τη γωνία θ που φαίνεται στο σχήμα θα είναι



Σχήμα 14.1: Ο σφαιρικός φλοιός και ένας από τους δακτύλιους σε συγκεκριμένη απόσταση από το σημείο υπολογισμού του Φ . Η διεύθυνση του διανύσματος \mathbf{r} ορίζει τον άξονα όλων αυτών των δακτυλίων.

$$dM' = \frac{M}{4\pi R^2} (2\pi R \sin \theta) (R d\theta), \quad (14.8)$$

ενώ η απόσταση του δακτυλίου αυτού από το σημείο \mathbf{r} είναι

$$|\mathbf{r}' - \mathbf{r}| = (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta)^{1/2}. \quad (14.9)$$

Ο υπολογισμός τώρα του δυναμικού είναι άμεσος:

$$\begin{aligned} \Phi(\mathbf{r}) &= -G \int_0^\pi \frac{M}{4\pi R^2} \frac{2\pi R^2 \sin \theta}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} d\theta \\ &= -GM \frac{1}{4Rr} \int_0^\pi \frac{d(R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta)}{\sqrt{R^2 + r^2 - 2Rr \cos \theta}} \\ &= -G \frac{M}{4Rr} \int_{(R-r)^2}^{(R+r)^2} \frac{du}{u^{1/2}} \\ &= -G \frac{M}{4Rr} 2 \left[u^{1/2} \right]_{(R-r)^2}^{(R+r)^2} \\ &= -G \frac{M}{2Rr} [|R+r| - |R-r|]. \end{aligned} \quad (14.10)$$

Προσέξτε ότι κατά τον αποτετραγωνισμό του u πρέπει να γράψουμε τις απόλυτες τιμές και αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε το δυναμικό και έξω

από τον φλοιό ($r > R$) αλλά και μέσα σε αυτόν ($r < R$). Το δυναμικό λοιπόν σε οποιοδήποτε σημείο (μέσα ή έξω) από έναν σφαιρικό φλοιό είναι

$$\Phi(\mathbf{r}) = \begin{cases} -GM/R, & \text{για } |\mathbf{r}| < R \\ -GM/r, & \text{για } |\mathbf{r}| \geq R. \end{cases}$$

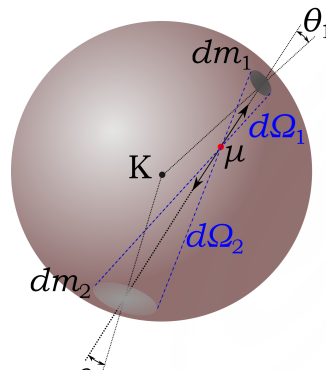
Το αποτέλεσμα αυτό είναι πολύ ενδιαφέρον και άκρως εντυπωσιακό. Αφενός το δυναμικό είναι σταθερό παντού εντός του σφαιρικού φλοιού και αφετέρου στο εξωτερικό το δυναμικό είναι αυτό ακριβώς που θα είχαμε αν όλη η μάζα του σφαιρικού φλοιού ήταν συγκεντρωμένη στο κέντρο της σφαίρας! Με άλλα λόγια αν το μόνο που διαθέταμε ήταν ένα “δυναμικό-μετρο” δεν θα μπορούσαμε να καταλάβουμε ότι το βαρυτικό πεδίο το δημιουργεί μια ολόκληρη σφαίρα ή μια σημειακή μάζα παρά μόνο αν ταξιδεύοντας περνούσαμε κάποιο σημείο (διασχίζοντας δηλαδή τη σφαίρα) και διαπιστώναμε ότι το δυναμικό σταθεροποιείται σε μια ολόκληρη περιοχή. Το εντυπωσιακό αυτό αποτέλεσμα οφείλεται αποκλειστικά στη συμμετρία του σφαιρικού σχήματος. Οποιοδήποτε άλλο σχήματος κελύφος δεν θα οδηγούσε στο αποτέλεσμα αυτό.

Με βάση το δυναμικό μπορούμε τώρα να υπολογίσουμε και τη βαρυτική δύναμη που ασκείται σε μια σημειακή μάζα μ από το σφαιρικό κελύφος. Χρησιμοποιώντας τη σχέση (14.4) βρίσκουμε

$$\mathbf{F} = \begin{cases} 0, & \text{για } |\mathbf{r}| < R \\ -\frac{GM\mu}{r^2}\hat{\mathbf{r}}, & \text{για } |\mathbf{r}| \geq R. \end{cases}$$

Όπως είναι φυσικό, αν το δυναμικό του σφαιρικού φλοιού είναι ίδιο με αυτό μιας σημειακής μάζας (στο εξωτερικό του φλοιού), το ίδιο ισχύει και για την ίδια τη δύναμη. Στο εσωτερικό όμως η δύναμη είναι 0! Πως είναι δυνατό κάτι τέτοιο; Αν βρισκόμαστε κοντά στο φλοιό από την εσωτερική πλευρά δεν θα έπρεπε η δύναμη από τα κοντινά τμήματα του φλοιού να υπερισχύει αυτής από τα πιο απομακρυσμένα και έτσι να υπάρχει μια μη μηδενική δύναμη στην μ ; Ας εξετάσουμε γιατί εμφανίζεται αυτό το απρόσμενο αποτέλεσμα.

Θα διαμερίσουμε τη σφαιρική επιφάνεια του κελύφους σε μικρές μάζες, εκατέρωθεν της σημειακής μάζας μ (κόκκινο



Σχήμα 14.2: Διαμέριση του σφαιρικού φλοιού σε μικρές αντιδιαμετρικές μάζες.

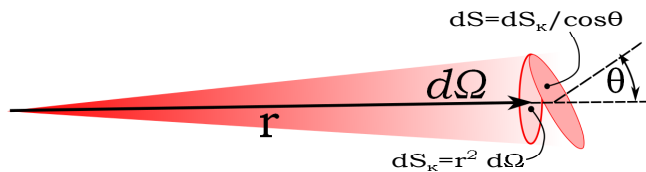
σημείο) στην οποία θέλουμε να υπολογίσουμε τη συνολική βαρυτική δύναμη του κελύφους. Οι δύο αυτές “αντιδιαμετρικές” μάζες προκειμένου να μπορούν να καλύψουν ολόκληρο το σφαιρικό κέλυφος επιλέγονται ως εξής. Κατασκευάζουμε δύο κατακορυφήν κώνους απειροστού ανοίγματος που αντιστοιχούν σε σφαιρικές γωνίες $d\Omega_1 = d\Omega_2$ με κέντρο την μ και άξονα οποιαδήποτε τυχαία κατεύθυνση. Τα δύο ανοίγματα του κώνου αποκόπτουν από το σφαιρικό κέλυφος δύο μάζες dm_1, dm_2 (προφανώς άνισες αν η μια βρίσκεται κοντύτερα στην μ από την άλλη). Ο λόγος αυτών των μαζών είναι ανάλογος με το λόγο των αντίστοιχων αποκοπόμενων επιφανειών (αφού η επιφανειακή πυκνότητα είναι σταθερή):

$$\frac{dm_1}{dm_2} = \frac{dS_1}{dS_2} \quad (14.11)$$

Οι επιφάνειες αυτές όμως είναι μεν αυτές που αποκόπτει η κοινή στερεά γωνία από μια σφαιρική επιφάνεια αλλά εν γένει όχι κάθετα στον άξονα των κατακορυφήν κώνων. Επομένως

$$dS_i = r_i^2 d\Omega_i / \cos \theta_i, \quad (14.12)$$

(βλ. σχήμα 14.3) όπου r_i η απόσταση της μ από την i -οστή επιφάνεια, ενώ τα συ-



Σχήμα 14.3: Διαγραμματική επεξήγηση της σχέσης (14.12).

νημίτονα εμφανίζονται για να διορθώσουν τα προβολικά φαινόμενα ($r_i^2 d\Omega_i$ είναι η επιφάνεια που θα απέκοπτε η στοιχειώδης γωνία $d\Omega_i$ από μια σφαιρική επιφάνεια αν ο άξονας της στερεάς γωνίας ήταν κάθετος στην επιφάνεια αυτή). Επειδή όμως οι στερεές γωνίες λήφθηκαν εκ προοιμίου ίσες και το γεγονός ότι το τρίγωνο που σχηματίζουν οι στοιχειώδεις μάζες (λαμβάνόμενες ως σημεία) και το κέντρο της σφαίρας K είναι ισοσκελές, οπότε $\theta_1 = \theta_2$, θα είναι

$$\frac{dm_1}{dm_2} = \frac{r_1^2}{r_2^2}. \quad (14.13)$$

Με άλλα λόγια οι εκατέρωθεν δυνάμεις από τις δύο στοιχειώδεις μάζες που είναι ανάλογες της ποσότητας dm_i/r_i^2 θα είναι ίσες και θα αλληλοαναιρούνται. Αυτό θα ισχύει για κάθε ζεύγος τέτοιων στοιχειωδών μαζών και το συνολικό αποτέλεσμα θα είναι μηδενική δύναμη εντός του κελύφους!

Το αποτέλεσμα που βγάλαμε μπορεί να οδηγήσει σε ακόμη πιο γενικά αποτελέ-

σφαίρα. Για παράδειγμα αν μια σφαίρα είναι γεμάτη με υλικό σταθερής πυκνότητας, στο μεν εξωτερικό της το βαρυτικό πεδίο είναι αυτό μιας σημειακής μάζας συγκεντρωμένης στο κέντρο της σφαίρας, στο δε εσωτερικό της όλα τα κελύφη που βρίσκονται πιο έξω από το εν λόγω σημείο δεν ασκούν καμία βαρυτική έλξη, οπότε η βαρυτική έλξη είναι αυτή μιας σημειακής μάζας στο κέντρο της σφαίρας με συνολική μάζα όση έχουν οι ενδότεροι φλοιοί. Μάλιστα το παραπάνω συμπέρασμα ισχύει όχι μόνο για μια ομογενή σφαίρα (σταθερής πυκνότητας) αλλά για οποιαδήποτε σφαίρα με σφαιρική συμμετρία στην κατανομή μάζας, δηλαδή μπορεί ακόμη και η πυκνότητα να αλλάζει αρκεί η μεταβολή να είναι μόνο ακτινική.

14.2 Νόμος του Gauss

Ένας εναλλακτικός τρόπος προσδιορισμού του βαρυτικού πεδίου, ειδικά σε πολύ συμμετρικές κατανομές μαζών (όπως η σφαιρική που εξετάσαμε παραπάνω) είναι μέσω της χρήσης του νόμου του Gauss. Σύμφωνα με το νόμο αυτό μπορεί να υπολογίσει κανείς ένα χωρικό ολοκλήρωμα μέσω ενός επιφανειακού ολοκληρώματος επί της εξωτερικής επιφάνειας του συνόρου του προηγούμενου ολοκληρώματος. Συγκεκριμένα ισχύει ότι

$$\int_V \nabla \cdot \psi(\mathbf{r}) dV = \int_{S(V)} \psi(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}, \quad (14.14)$$

όπου $\psi(\mathbf{r})$ είναι οποιοδήποτε διανυσματικό πεδίο του χώρου. Αν στο τελευταίο ολοκλήρωμα θέσουμε όπου $\psi = \mathbf{g}$ δηλαδή το πεδίο της βαρυτικής έντασης εξαιτίας κάποιας κατανομής ύλης θα έχουμε

$$\nabla \cdot \mathbf{g} = \nabla \cdot \nabla \Phi. \quad (14.15)$$

Ας υπολογίσουμε τώρα η Λαπλασιανή του βαρυτικού πεδίου από μια σημειακή μάζα m η οποία βρίσκεται στη θέση \mathbf{r}_0 . Το δυναμικό είναι

$$\Phi(\mathbf{r}) = -G \frac{m}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|} \quad (14.16)$$

επομένως

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \nabla \Phi &= \nabla^2 \left(-G \frac{m}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \right) \\ &= +Gm \nabla \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \\ &= Gm \left(\frac{3}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} - 3(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0) \cdot \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^5} \right). \end{aligned} \quad (14.17)$$

Η Λαπλασιανή λοιπόν αυτή είναι ίση με 0 εκτός από το σημείο $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ για το οποίο το ίδιο το δυναμικό δεν υπολογίζεται, οπότε θα ήταμν μάλλον επικίνδυνο να λάβουμε το μηδενικό αυτό αποτέλεσμα ως προφανές. Αυτό είναι ένα σημείο που τα μαθηματικά αποτελέσματα θα πρέπει να γίνονται δεκτά με επιφύλαξη. Το γεγονός ότι το σημείο $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$ δεν ανήκει στο πεδίο ορισμού της συνάρτησης του δυναμικού δεν είναι απλώς μια τεχνική λεπτομέρεια. Όπως θα δείτε μπορεί να αλλάξει τελείως τα συμπεράσματά μας. Τώρα θα υπολογίσουμε το δεξί μέλος της (14.14) για το εν λόγω πεδίο. Γνωρίζουμε ότι το βαρυτικό πεδίο από τη σημειακή αυτή μάζα είναι

$$\mathbf{g} = -Gm \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \quad (14.18)$$

αποτέλεσμα που πήραμε κατά τον υπολογισμό του $\nabla\Phi$. Ας φανταστούμε τώρα μια σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το σημείο \mathbf{r}_0 και ακτίνας R . Το επιφανειακό ολοκλήρωμα της μαθηματικής ταυτότητας του Gauss θα είναι

$$\begin{aligned} \int_{S_R} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} &= -Gm \int_{S_R} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_0}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_0|^3} \cdot d\mathbf{S} \\ &= -Gm \int_{S_R} \frac{R\hat{\mathbf{R}}}{R^3} \cdot \hat{\mathbf{R}}R^2 d\Omega \\ &= -Gm \int_{S_R} d\Omega \\ &= -4\pi Gm! \end{aligned} \quad (14.19)$$

Το αποτέλεσμα δεν είναι μηδέν, όπως πιθανώς θα νόμιζε κανείς από το προηγούμενο αποτέλεσμα της (14.17), του νόμου του Gauss (14.14) και της σχέσης που συνδέει το δυναμικό με την ένταση της βαρύτητας (14.15). Μα πως είναι δυνατό να μην είναι μηδέν αφού ολοκληρώνεται σε ένα χωρίο μια συνάρτηση η οποία είναι μηδέν παντού εντός του χωρίου εκτός από ένα μόνο σημείο στο οποίο ούτε καν ορίζεται! Κάτι θυμίζει η παραπάνω περιγραφή της συνάρτησης: τη συνάρτηση δέλτα φυσικά. Πρόκειται για μια ιδιότυπη συνάρτηση (για να είμαστε πιο ακριβείς ένα συναρτησοειδές) η οποία αν και παντού μηδενική, εκτός ενός σημείου, έχει ολοκλήρωμα 1.³ Έτσι επιστρέφοντας στη μαθηματική ταυτότητα (14.15) που ισχύει παντού εκτός από ένα σημείο, το $\mathbf{r} = \mathbf{r}_0$, θα γράψουμε την ακριβή σχέση που ισχύει παντού:

$$\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = -4\pi Gm\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0), \quad (14.20)$$

³Στο κεφάλαιο 2 είδαμε τη συνάρτηση δέλτα στη μονοδιάστατη έκδοσή της, όπου ο χώρος ολοκλήρωσής της ήταν η ευθεία των πραγματικών. Τώρα συναντάμε την 3-D έκδοση της δέλτα, $\delta^{(3)}$ με χώρο ολοκλήρωσης τον \mathbb{R}^3 .

όπου m είναι η μάζα στη θέση \mathbf{r}_0 και στην οποία οφείλεται το δυναμικό Φ .^{4 5} Αυτό είναι ένα χρήσιμο αποτέλεσμα το οποίο όπως θα δούμε διευκολύνει εξαιρετικά τον υπολογισμό του βαρυτικού πεδίου σε ιδιαίτερα συμμετρικές κατανομές μάζας.

Στο σημείο αυτό ας επιστρέψουμε στη σχέση (14.19). Το αποτέλεσμα ισχύει μόνο για σφαιρική επιφάνεια; Όχι. Ακόμη και αν η επιφάνεια δεν είναι σφαιρική, δηλαδή η ακτίνα $\mathbf{r} - \mathbf{r}_0$ είναι συνάρτηση της κατεύθυνσης (δηλαδή των σφαιρικών γωνιών θ, ϕ) και η εκάστοτε στοιχειώδης επιφάνεια $d\mathbf{S}$ μπορεί να γραφεί ως $\hat{s}|d\mathbf{S}| = \hat{s}R^2 d\Omega / \cos \theta_{dS}$, όπου \hat{s} είναι το μοναδιαίο διάνυσμα κάθετο στην επιφάνεια $d\mathbf{S}$ [βλ. σχέση (14.12)], το αποτέλεσμα του ολοκληρώματος της (14.19) καταλήγει να είναι πάλι το ολοκλήρωμα της στερεάς γωνίας σε ολόκληρο το χώρο αφού $\hat{s} \cdot \hat{\mathbf{R}} = \cos \theta_{dS}$.⁶

Η σχέση (14.20) αν εισαχθεί στο νόμο του Gauss οδηγεί στο πολύ όμορφο και απλό αποτέλεσμα

$$\int_S \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S} = -4\pi GM_{\text{ολ.περ.}} \quad (14.21)$$

για οποιαδήποτε κλειστή επιφάνεια S που περικλείει συνολική μάζα $M_{\text{ολ.περ.}}$. Το αποτέλεσμα αυτό οφείλεται στο ότι το δυναμικό εξαιτίας πολλών πηγών ισούται με το άθροισμα των δυναμικών από κάθε πηγή χωριστά (γρταμμικότητα του δυναμικού).

Κλείνοντας το εδάφιο αυτό θα θέλαμε να τονίσουμε την ιδιαιτερότητα του βαρυτικού πεδίου που οδήγησε στον πολύ απλό αυτό ολοκληρωτικό νόμο. Πρόκειται για το ότι η βαρυτική αλληλεπίδραση περιγράφεται από μια δύναμη αντιστρόφου τετραγώνου. Επιπλέον αυτή ακριβώς η ιδιαιτερότητα του βαρυτικού πεδίου μας προσφέρει τη δυνατότητα να αναπαριστούμε το πεδίο με τη βοήθεια συνεχών δυναμικών γραμμών η πυκνότητα των οποίων αναλογεί ποσοτικά στην ένταση του πεδίου.⁷ Έτσι το επιφανειακό ολοκλήρωμα της έντασης που υπεισέρχεται στο νόμο του Gauss περιγράφει τη ροή των δυναμικών γραμμών μέσα από μια επιφάνεια. Μια κλειστή επιφάνεια η οποία δεν περικλείει καμία μάζα αν τοποθετηθεί εντός κάποιου βαρυτικού πεδίου θα έχει μηδενική ολική ροή (όσες γραμμές εισέρχονται στο εσωτερικό της επιφάνειας κάποια στιγμή εξέρχονται). Σε επίπεδο υπολογισμού του αντίστοιχου ολοκληρώματος (14.17) το ολοκλήρωμα της στερεάς γωνίας είναι μη-

⁴ Από εδώ προκύπτει και η χρήσιμη μαθηματική ταυτότητα $\nabla^2(1/|\mathbf{r}|) = -4\pi\delta^{(3)}(\mathbf{r})$.

⁵ Η εξίσωση αυτή είναι η επονομαζόμενη εξίσωση Poisson για τη βαρύτητα, με τον όρο $m\delta^{(3)}(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0)$ να αντιπροσωπεύει την πυκνότητα μιας σημειακής μάζας. Στον ηλεκτρομαγνητισμό η αντίστοιχη εξίσωση $\nabla^2\Phi(\mathbf{r}) = \rho(\mathbf{r})/\epsilon_0$, (με $1/(4\pi\epsilon_0)$ στη θέση του G , δίνει το ηλεκτρικό δυναμικό από μια κατανομή φορτίου με πυκνότητα $\rho(\mathbf{r})$. Προσέξτε την αλλαγή προσήμου σε αυτή την περίπτωση που σχετίζεται με το ότι η δύναμη μεταξύ δύο ομόσημων φορτίων είναι απωθητική σε σχέση με τις δύο μάζες που είναι πάντα ελκτική.

⁶ Η περίπτωση μιας μη κυρτής επιφάνειας οδηγεί και πάλι στο ίδιο αποτέλεσμα αφού μια στοιχειώδης στερεά γωνία πάντα αποκόπτει περιττό πλήθος στοιχειωδών επιφανειών από μια τέτοια επιφάνεια οπότε στο ολοκλήρωμα έχουμε την ακόλουθη σειρά συμβολών $d\Omega - d\Omega + d\Omega - d\Omega + \dots + d\Omega = d\Omega$. Τα υπόλοιπα γεωμετρικά στοιχεία όπως είπαμε αλληλοαναιρούνται για κάθε $\pm d\Omega$.

⁷ Αν το πεδίο δεν ήταν αντιστρόφου τετραγώνου, τότε οι δυναμικές γραμμές του πεδίου δεν θα ήταν συνεχείς· άλλοτε θα διακόπτονταν απότομα και άλλοτε θα εμφανίζονταν από το πουθενά.

δέν γιατί η στερεά γωνία που αντιστοιχεί στο κομμάτι της ροής που εξέρχεται από την επιφάνεια (θετική ροή) ισούται με τη στερεά γωνία που αντιστοιχεί στο κομμάτι της ροής που εισέρχεται στην επιφάνεια (αρνητική ροή). Η συνολική αυτή –θετική ή αρνητική– στερεά γωνία είναι η στερεά γωνία υπό την οποία φαίνεται ολόκληρο το χωρίο της κελιστής επιφάνειας από το σημείο \mathbf{r}_0 (που βρίσκεται εκτός του χωρίου αφού εκεί εξ υποθέσεως υπάρχει μια κάποια μάζα).

14.3 Υπολογισμός πεδίων μέσω του νόμου του Gauss

Ας δούμε τώρα πως μπορούμε να εκμεταλλευτούμε τα παραπάνω αποτελέσματα για να υπολογίσουμε το βαρυτικό πεδίο γύρω από διάφορες κατανομές μάζας. Θα υποθέσουμε ότι υπάρχει στο χώρο μια ισοτροπική κατανομή μάζας με πυκνότητα η οποία μεταβάλλεται με την απόσταση $r = |\mathbf{r}|$ από κάποιο κέντρο σύμφωνα με τη σχέση $\rho(r)$. Ακριβώς εξαιτίας αυτής σφαιρικής συμμετρίας αναμένεται και το βαρυτικό πεδίο να παρουσιάζει αυτή τη σφαιρική συμμετρία. Συγκεκριμένα δεν θα μπορούσε παρά η ένταση του πεδίου να έχει τη μορφή

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = g(r)\hat{\mathbf{r}}. \quad (14.22)$$

Αν δεν είχε την κατεύθυνση αυτή το πεδίο, αλλά ήταν κάπως “λοξή” σε σχέση με την ακτινική, θα έπρεπε κάποιος να εξηγήσει γιατί το πεδίο προτιμά να “λοξέψει” προς τη μια ή την άλλη κατεύθυνση. Αφού η μοναδική πηγή πεδίου είναι η εν λόγω σφαιρικά συμμετρική κατανομή μάζας δεν υπάρχει κάποια άλλη προτιμητέα κατεύθυνση. Το ίδιο ισχύει και για το μέτρο της έντασης $g(r)$: δεν θα μπορούσε και αυτό για τον ίδιο λόγο να εξαρτάται από την κατεύθυνση, δηλαδή τις σφαιρικές γωνίες.

Η συμμετρική αυτή μορφή πεδίου μας δίνει τη δυνατότητα να υπολογίσουμε άμεσα τη ροή του πεδίου σε μια σφαιρική επιφάνεια με κέντρο το κέντρο της κατανομής της μάζας και ακτίνα R :

$$\int_{S_R} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{dS} = \int_{S_R} g(r)\hat{\mathbf{r}} \cdot \hat{\mathbf{r}}R^2 d\Omega = g(R)R^2 \int_{S_R} d\Omega = 4\pi R^2 g(R), \quad (14.23)$$

και με δεδομένο το νόμο του Gauss (14.21) καταλήγουμε στο εξαιρετικά απλό αποτέλεσμα

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G \frac{M_{\text{ολ.περ.}}}{r^2} \hat{\mathbf{r}}. \quad (14.24)$$

Στην περίπτωση αυτή $M_{\text{ολ.περ.}}$ είναι η μάζα που περιέχεται στη σφαίρα ακτίνας r η οποία ισούται με

$$M_{\text{ολ.περ.}} = \int_0^r \rho(r')4\pi r'^2 dr'. \quad (14.25)$$

Ας εξετάσουμε μια χαρακτηριστική περίπτωση κατανομής μάζας. Η πυκνότητα θα υποθέσουμε ότι είναι σταθερή και ίση με ρ_0 στο διάστημα $R_1 < r < R_2$. Πρόκειται δηλαδή για μια κούφια ομογενή σφαίρα με εσωτερική ακτίνα R_1 και εξωτερική R_2 . σύμφωνα με τα προηγούμενα θα είναι

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -G\hat{\mathbf{r}} \begin{cases} 0, & \text{αν } r < R_1 \\ \frac{M}{r^2} \frac{r^3 - R_1^3}{R_2^3 - R_1^3}, & \text{αν } R_1 \leq r < R_2 \\ \frac{M}{r^2}, & \text{αν } R_2 \leq r. \end{cases}$$

Το κλάσμα $(r^3 - R_1^3)/(R_2^3 - R_1^3)$ είναι ο λόγος των όγκων –και άρα των μαζών– του σφαιρικού φλοιού εσωτερικά του r σε σχέση με τον όγκο ολόκληρου του σφαιρικού φλοιού. Στην ειδική περίπτωση που δεν υπάρχει εσωτερική κοιλότητα ($R_1 = 0$), η μορφή του πεδίου στο εσωτερικό είναι ιδιαίτερα ενδιαφέρουσα: το πεδίο είναι γραμμικό με την απόσταση από το κέντρο $|\mathbf{g}| = (GM/R_2^3)r$. Έτσι ένα σωματίδιο κινούμενο μόνο εξαιτίας της βαρύτητάς του στο εσωτερικό μιας ομογενούς σφαίρας θα συμπεριφέρεται ως ισότροπος αρμονικός ταλαντωτής. Επομένως θα διαγράφει ελλειπτικές τροχιές με κέντρο το κέντρο της σφαίρας.

Τώρα θα υποθέσουμε ότι $R_2 \simeq R_1$, δηλαδή θα έχουμε έναν πολύ λεπτό σφαιρικό φλοιό. Το εσωτερικό του φλοιού θα έχει μηδενικό πεδίο, ενώ το εξωτερικό θα είναι αυτό μιας σημειακής μάζας M στο κέντρο. Τα αποτελέσματα αυτά τα είδαμε να προκύπτουν στην ανάλυσή μας σε προηγούμενο εδάφιο, αλλά λόγω της τότε θεωρησης όπου η κατανομής μάζας ήταν επιφανειακή δεν μπορούσαμε να δώσουμε παραπάνω λεπτομέρειες για το τι συμβαίνει στην ασυνέχεια του βαρυτικού πεδίου καθώς διασχίζουμε τον απειροστού πάχους φλοιό. Τώρα όμως που η μάζα δεν κατανέμεται σε μια επιφάνεια (κάτι τέτοιο έχει μόνο μαθηματικό ενδιαφέρον αλλά δεν είναι πρακτικά υλοποιήσιμο) αλλά στο χώρο μας δίνεται η δυνατότητα να γεφυρώσουμε ομαλά το άλμα του πεδίου από την εσωτερική στην εξωτερική περιοχή καθώς διασχίζουμε τον λεπτό φλοιό. Έστω $R_2 = R_1 + \epsilon$ ($\epsilon \ll R_1$) και $r = R_1 + x$ με το x να “κινείται” στο διάστημα $x \in [0, \epsilon]$. Εντός του φλοιού η ένταση του πεδίου θα είναι

$$\begin{aligned} g &= -GM \frac{[R_1 + x]^3 - R_1^3}{[R_1 + x]^2 [(R_1 + \epsilon)^3 - R_1^3]} \\ &= -GM \frac{R_1^3 + 3R_1^2 x + \dots - R_1^3}{[R_1^2 + \dots][R_1^3 + 3R_1^2 \epsilon + \dots - R_1^3]} \end{aligned} \quad (14.26)$$

όπου τα αποσιωπητικά ... αναπαριστούν όλους τους άλλους όρους ανώτερης τάξης ως προς x ή ϵ στα αναπτύγματα. Αν αγνοήσουμε αυτούς τους όρους καταλήγουμε στην προσεγγιστική σχέση

$$g \simeq -GM \frac{3R_1^2 x}{3R_1^4 \epsilon} = -G \frac{M}{R_1^2} \frac{x}{\epsilon}. \quad (14.27)$$

Με άλλα λόγια το μη μηδενικό βαρυτικό πεδίο αμέσως έξω από τον φλοιό συνδέεται με το μηδενικό πεδίο εντός της κοιλότητας με περίπου γραμμικό τρόπο στο εσωτερικό του λεπτού φλοιού. Αυτήν τη γραμμική μετάβαση θα τη συναντήσουμε και σε επόμενο παράδειγμα όπου δεν θα υπάρχει η σφαιρική συμμετρία.

Στη συνέχεια θα χρησιμοποιήσουμε το νόμο του Gauss σε μι κατανομή μάζας που παρουσιάζει εντελώς διαφορετική συμμετρία από τη σφαιρική. Θα υποθέσουμε ότι η μάζα κατανέμεται σε ένα άπειρο επίπεδο στρώμα πάχους d , έτσι ώστε να μην μπορεί να διακρίνει κάποιος διαφορά στο πεδίο αν μετατοπιστεί παράλληλα στο επίπεδο αυτό. Συγκεκριμένα θα υποθέσουμε ότι η πυκνότητα του υλικού έχει τη μορφή $\rho(z)$ εντός του διαστήματος $z \in [-d/2, +d/2]$ και είναι μηδέν εκτός αυτού του στρώματος, χωρίς καμία εξάρτηση από τις άλλες συντεταγμένες x, y . Η συμμετρία που υπάρχει εδώ είναι ότι η ένταση του πεδίου βαρύτητας δεν μπορεί ούτε να εξαρτάται από τις συντεταγμένες x, y , ούτε και να έχει συνιστώσες στις κατευθύνσεις αυτές. Η επιχειρηματολογία είναι η ακόλουθη: Αν ίσχυε κάτι τέτοιο σε κάποιο σημείο θα υπήρχε ιδιαιτερότητα πάνω από το αντίστοιχο σημείο του στρώματος, ενώ εμείς υποθέσαμε ότι η πυκνότητα του στρώματος δεν εξαρτάται από τις x, y συντεταγμένες. Επομένως δεν μένει άλλη δυνατότητα από την

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = \hat{\mathbf{z}}g(z). \quad (14.28)$$

Προφανώς εξαιτίας του ότι η βαρύτητα είναι ελκτική αναμένουμε η συνάρτηση $g(z)$ να είναι αρνητική για $z > d/2$ και θετική για $z < -d/2$, ενώ ο προσδιορισμός του προσήμου της στο εσωτερικό του στρώματος δεν είναι προφανής. Ίσως θα είναι τέτοιος ώστε να επιφέρει την κατάλληλη γεφύρωση μεταξύ των τιμών της $g(z)$ μόλις έξω από το στρώμα. Τώρα που γνωρίζουμε κάτι για ο πεδίο ας εφαρμόσουμε το νόμο του Gauss σε κατάλληλη κλειστή επιφάνεια ώστε να είναι εύκολος ο υπολογισμός της ροής. Θα επιλέξουμε ως τέτοια επιφάνεια μια κυλινδρική επιφάνεια⁸ η οποία έχει γεννήτορα της παράπλευρης επιφάνειάς της μια ευθεία παράλληλη στον άξονα z , διατομή S , και έχοντας ύψος $H > d$ είναι συμμετρικά τοποθετημένη γύρω από το επίπεδο $z = 0$, έτσι ώστε να αποκόπτει ένα ολόκληρο κομμάτι του στρώματος εκτεινόμενο από το $-d/2$ έως το $+d/2$. Η επιλογή της κυλινδρικής επιφάνειας εξασφαλίζει ότι η ροή στην παράπλευρη επιφάνεια θα είναι μηδενική αφού οποιαδήποτε στοιχειώδης επιφάνεια επί της παράπλευρης επιφάνειας θα παριστάνεται με ένα διάνυσμα επί του επιπέδου $x - y$ ενώ η ένταση του πεδίου έχει την κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{z}}$. Συνεπώς στη ροή συνεισφέρουν μόνο οι βάσεις της επιφάνειας στις θέσεις

⁸Η κυλινδρική επιφάνεια δεν είναι ανάγκη να έχει κυκλική διατομή· θα μπορούσε να έχει οποιαδήποτε διατομή.

$z = H/2$ και $z = -H/2$. Θα έχουμε λοιπόν

$$g(H/2)S - g(-H/2)S = -4\pi G \int_V \rho(z)dV = -4\pi GS \int_{-d/2}^{+d/2} \rho(z)dz. \quad (14.29)$$

Το $-$ πρόσημο στο δεύτερο ολοκλήρωμα οφείλεται στο ότι η κάτω βάση έχει διανυσματική κατεύθυνση προς τα κάτω (προς την $-\hat{z}$ κατεύθυνση). Καταλήξαμε στην ακόλουθη πληροφορία όσον αφορά στο πεδίο:

$$g(H/2) - g(-H/2) = -4\pi G \int_{-d/2}^{+d/2} \rho(z)dz. \quad (14.30)$$

Αν υψώσουμε την άνω επιφάνεια κατά Δz χωρίς να μετακινήσουμε την κάτω επιφάνεια η αντίστοιχη εφαρμογή του νόμου του Gauss θα γίνει

$$g(H/2 + \Delta z) - g(-H/2) = -4\pi G \int_{-d/2}^{+d/2} \rho(z)dz, \quad (14.31)$$

Δηλαδή η τιμή του g είναι ίδια σε οποιοδήποτε ύψος πάνω από το ανώτερο άκρο του στρώματος. Προφανώς το ίδιο ισχύει και για το εξωτερικό του στρώματος στο κάτω μέρος αυτού (αφού δεν υπάρχει κάποια ιδιαιτερότητα του πάνω σε σχέση με το κάτω). Επομένως εκτός του στρώματος η τιμή της είναι

$$\begin{aligned} \mathbf{g}(z > d/2) &= -\hat{z} 2\pi G \int_{-d/2}^{+d/2} \rho(z)dz, \\ \mathbf{g}(z < -d/2) &= +\hat{z} 2\pi G \int_{-d/2}^{+d/2} \rho(z)dz \end{aligned} \quad (14.32)$$

Το αποτέλεσμα είναι άκρως ενδιαφέρον και ως ένα βαθμό απρόσμενο. Το πεδίο έχει σταθερή τιμή εκτός του στρώματος. Είτε βρισκόμαστε 1 χιλιόστο εκτός του στρώματος, είτε ένα χιλιόμετρο μακριά η ένταση είναι ίδια! Με άλλα λόγια δεν υπάρχει κλίμακα μήκους στη συγκεκριμένη αυτή κατανομή μάζας. Πράγματι οι φυσικές ποσότητες πυκνότητα (που έχει διαστάσεις $[M \cdot L^{-3}]$) και η παγκόσμια σταθερά της βαρύτητας (που έχει διαστάσεις $[M^{-1} \cdot L^3 \cdot T^{-2}]$) δεν μπορούν να συνδεθούν με ένα κατάλληλο συνδυασμό για να φτιάξουν ένα μέγεθος με διαστάσεις μήκους.⁹

Παράλληλα η μη εξάρτηση της έντασης από την απόσταση μπορεί να δικαιολογηθεί ως εξής: Μια στοιχειώδης μάζα του στρώματος, όπως αυτή φαίνεται από ένα συγκεκριμένο σημείο A εκτός του στρώματος που βρίσκεται πάνω στην κάθετη στο

⁹Το επιχείρημα αυτό είναι καθαρό αν το στρώμα είναι απειροστού πάχους όπου δεν εμφανίζεται κάποιο μήκος, σε αντίθεση με έναν σφαιρικό φλοιό όπου κυριαρχεί η ακτίνα της σφαίρας ως κλίμακα μήκους. Στην περίπτωση, βέβαια, του στρώματος με πάχος όπου παρουσιάζεται μεταβολή της πυκνότητας εντός του, το επιχείρημα αυτό δεν είναι τόσο ξεκάθαρο, αφού θα μπορούσε κάποιος να επικαλεστεί ότι υπάρχουν κλίμακες μήκους σχετιζόμενες με τις μεταβολές της πυκνότητας κατά μήκος του z .

στρώμα ευθεία AB η οποία διέρχεται από ένα δοσμένο σημείο B εντός του στρώματος είναι ανάλογη με το τετράγωνο της απόστασης που τη χωρίζει από το εν λόγω σημείο A ($dm \propto dS = r^2 d\Omega$). Επομένως η συνεισφορά στη βαρυτική ένταση από αυτή τη μάζα, λόγω του νόμου αντιστρόφου τετραγώνου, καθίσταται ανεξάρτητη της απόστασης αυτής και άρα και της απόστασης του σημείου A από το στρώμα.

Ας δούμε τώρα πως μεταβάλλεται η ένταση εντός του στρώματος. Αν κατεβάσουμε κι άλλο την ανώτερη βάση του κυλίνδρου, έτσι ώστε αυτή να βυθιστεί κάτω από το άνω πέρασ του στρώματος σε ύψος $z = z_0$ θα έχουμε

$$g(-d/2 < z_0 < d/2) - g(-H/2) = -4\pi G \int_{-d/2}^{z_0} \rho(z) dz. \quad (14.33)$$

Γνωρίζοντας τώρα την τιμή του g στο $-H/2$, μπορούμε να υπολογίσουμε την τιμή στο z_0 :

$$\begin{aligned} g(z_0) &= -4\pi G \int_{-d/2}^{z_0} \rho(z) dz + 2\pi G \int_{-d/2}^{d/2} \rho(z) dz \\ &= 2\pi G \left(\int_{-d/2}^{d/2} \rho(z) dz - 2 \int_{-d/2}^{z_0} \rho(z) dz \right) \\ &= 2\pi G \left(- \int_{-d/2}^{z_0} \rho(z) dz + \int_{z_0}^{d/2} \rho(z) dz \right). \end{aligned} \quad (14.34)$$

όπου $-d/2 < z_0 < d/2$.

Τέλος ας εξετάσουμε τι συμβαίνει όταν το στρώμα ύλης είναι εξαιρετικά λεπτό (πάχους ϵ) και με σταθερή πυκνότητα. Η ένταση έχει την εξής μορφή τότε

$$\mathbf{g}(z) = \hat{\mathbf{z}} 2\pi G \rho \epsilon \begin{cases} -1, & \text{αν } z > \epsilon/2 \\ 2z/\epsilon, & \text{αν } -\epsilon/2 \leq z < \epsilon/2 \\ +1, & \text{αν } z \leq -\epsilon/2. \end{cases}$$

Αν συγκρίνετε το αποτέλεσμα αυτό με εκείνο της σχέσης (14.27) θα επιβεβαιώσετε ότι όταν κανείς διασχίσει ένα πολύ λεπτό φύλλο ύλης εμφανίζεται μια ασυνέχεια (στο όριο που το φύλλο έχει απειροστό πάχος) της έντασης μεγέθους

$$\Delta g = 4\pi G \sigma, \quad (14.35)$$

όπου σ είναι η επιφανειακή πυκνότητα μάζας στο φύλλο. Το σ είναι το $\rho \epsilon$ για την (14.35) και $M/(4\pi R^2)$ για την (14.27). Σκεφθείτε γιατί στη σφαίρα πολύ κοντά στην επιφάνειά της η συμπεριφορά του πεδίου είναι σαν αυτή του άπειρου επιπέδου. Αυτό εξηγεί γιατί το αποτέλεσμα αυτό είναι γενικό και ισχύει για κάθε επιφανειακή κατανομή ύλης.

Προσπαθήστε μόνοι σας να υπολογίσετε το βαρυτικό πεδίο από μια κυλινδρική κατανομή ύλης η πυκνότητα της οποίας μεταβάλλεται με την απόσταση ρ από κάποιο άξονα και εκτείνεται μέχρι μια ακτίνα R . Με κατάλληλη χρήση κυλινδρικών επιφανειών Gauss, ομοαξονικών της κατανομής ύλης, και με επιχειρήματα κυλινδρικής συμμετρίας σχετικά με το πεδίο μπορείτε να βρείτε τι μορφή έχει το πεδίο σε ολόκληρο το χώρο.

14.4 Δυναμικό εντός και εκτός μιας ομογενούς σφαίρας

Στο κεφάλαιο αυτό ξεκινήσαμε να εκτελούμε υπολογισμούς σχετικά με το βαρυτικό πεδίο μιας κατανομής μάζας καταφεύγοντας στην έννοια του δυναμικού, η οποία –σε αντίθεση με την ένταση– είναι βαθμωτό μέγεθος και επομένως ο χειρισμός της είναι ευκολότερος. Τώρα που καταλήξαμε στο νόμο του Gauss, που μας επιτρέπει να υπολογίσουμε άμεσα την ένταση σε πολύ συμμετρικές κατανομές όπως στην περίπτωση μιας ομογενούς σφαίρας, θα επιστρέψουμε στον υπολογισμό του δυναμικού που θα μας χρειαστεί στο επόμενο εδάφιο.

Καταλήξαμε στο ότι η ένταση της βαρύτητας σε μια ομογενή σφαίρα (βλ. σχέση (14.26) αν θέσουμε $R_1 = 0$ και $R_2 = R$.) έχει τη μορφή

$$\mathbf{g}(\mathbf{r}) = -\hat{\mathbf{r}} G \begin{cases} \frac{Mr}{R^3}, & \text{αν } r < R \\ \frac{M}{r^2}, & \text{αν } r \geq R. \end{cases}$$

Το πεδίο αυτό θα πρέπει να προκύπτει από ένα δυναμικό τέτοιο ώστε

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi. \quad (14.36)$$

Προφανώς το δυναμικό θα πρέπει να είναι συνάρτηση αποκλειστικά του r έτσι ώστε το πεδίο να προκύψει ακτινικό. Επομένως

$$\mathbf{g} = -\nabla\Phi(r) = -\hat{\mathbf{r}} \frac{d\Phi(r)}{dr}. \quad (14.37)$$

Ξεκινώντας από το κέντρο της σφαίρας και ολοκληρώνοντας την παραπάνω σχέση προς τα έξω βρισκουμε

$$\Phi(r) = \Phi(0) - \int_0^r dr' \hat{\mathbf{r}} \cdot \mathbf{g}(r') = \Phi(0) + \frac{GM}{R} \times \begin{cases} \frac{r^2}{2R^2}, & \text{αν } r < R \\ \frac{3}{2} - \frac{R}{r}, & \text{αν } r \geq R. \end{cases} \quad (14.38)$$

Προσέξτε ότι χρειάστηκε να προσθέσουμε τη σταθερά $\Phi(0)$ ως σταθερά ολοκλήρωσης προκειμένου να δώσουμε μια ορισμένη τιμή σε κάποιο καθορισμένο σημείο

της επιλογής μας. Η τιμή του $\Phi(0)$ δεν έχει φυσικό ενδιαφέρον, αφού δεν επηρεάζει την ένταση του πεδίου όπως συζητήσαμε στο κεφάλαιο 4· απλώς καθορίζει το σημείο στο οποίο μηδενίζεται το δυναμικό. Αν επιμένουμε να μηδενίζεται το δυναμικό σε άπειρη απόσταση (όπως κάναμε στα προηγούμενα εδάφια) θα πρέπει να είναι $\Phi(0) = -(3GM)/(2R)$. Στην περίπτωση αυτή το δυναμικό θα είναι

$$\Phi(r) = \begin{cases} \frac{GM}{2R} \left(-3 + \frac{r^2}{R^2} \right), & \text{αν } r < R \\ -\frac{GM}{r}, & \text{αν } r \geq R. \end{cases} \quad (14.39)$$

Όπως είναι φυσικό η μορφή του δυναμικού στο εξωτερικό της σφαίρας είναι το ίδιο με εκείνο μιας σημειακής μάζας, αφού τα πεδία είναι ταυτόσημα σε αυτή την περιοχή του χώρου. Στο δε εσωτερικό της σφαίρας αξίζει να προσέξει κανείς την τετραγωνική εξάρτηση του δυναμικού από την ακτίνα r . Η εξάρτηση αυτή είναι χαρακτηριστική ενός γραμμικού ταλαντωτή (βλ. δυναμική ενέργεια ελατηρίου) και είναι αυτή που οδηγεί στο ιδιόμορφο αποτέλεσμα της γραμμικής εξάρτησης της έντασης (και άρα της βαρυτικής δύναμης) από την ακτίνα: ένα σωματίδιο κινούμενο στο εσωτερικό μιας ομογενούς σφαίρας αποκλειστικά εξαιτίας της βαρυτικής έλξης θα εκτελούσε την κίνηση ενός ισότροπου αρμονικού ταλαντωτή, δηλαδή μια έλλειψη κεντραρισμένη στο κέντρο της σφαίρας.¹⁰

Στη συνέχεια θα ξαναυπολογίσουμε το δυναμικό στο εσωτερικό μιας ομογενούς σφαίρας αθροίζοντας τα δυναμικά εξαιτίας κάθε σφαιρικού φλοιού (όπως κάναμε στην αρχή αυτού του κεφαλαίου) αντί να χρησιμοποιήσουμε τη συσχέτιση έντασης-δυναμικού. Γνωρίζουμε ότι το δυναμικό ενός σφαιρικού φλοιού μάζας dM είναι $-G dM/r$ εκτός του φλοιού και $-G dM/R$ σταθ εντός του φλοιού (R είναι η ακτίνα του φλοιού). Έτσι στο μεν εξωτερικό ολόκληρης της σφαίρας θα είναι το άθροισμα των δυναμικών στο εξωτερικό όλων των φλοιών δηλαδή $-GM/r$ (για $r > R$, όπου R η ακτίνα της σφαίρας). Στο εσωτερικό όμως θα είναι άθροισμα των δυναμικών εξαιτίας των φλοιών που βρίσκονται πιο μέσα από το σημείο που μας ενδιαφέρει και αυτό των φλοιών που βρίσκονται πιο έξω από το εν λόγω σημείο. Για τους μεν πρώτους μας ενδιαφέρει η έκφραση για το δυναμικό στο εξωτερικό των φλοιών, ενώ για τους δεύτερους η έκφραση για το εσωτερικό. Επομένως θα

¹⁰ Προφανώς με την προϋπόθεση ότι οι αρχικές συνθήκες κίνησης θα είναι τέτοιες ώστε το σωματίδιο να μην εξέρχεται καθόλου από τη σφαιρική μάζα. Σε αντίθετη περίπτωση, η τροχιά ενόσω το σωματίδιο κινείται εντός της σφαίρας θα διαγραφεί τόξο μιας τέτοιας ελλειπτικής τροχιάς.

έχουμε

$$\begin{aligned}
 \Phi(r) &= -\frac{GM_{\text{εσ}}}{r} - \int_0^r \frac{GdM(r')}{r'} \\
 &= -\frac{GM(r^3/R^3)}{r} - \int_r^R \frac{GM}{\frac{4}{3}\pi R^3} \frac{4\pi r'^2 dr'}{r'} \\
 &= -\frac{GMr^2}{R^3} - \frac{3GM}{R^3} \frac{R^2 - r^2}{2} \\
 &= -\frac{GM}{R} \left(\frac{3}{2} - \frac{r^2}{2R^2} \right). \tag{14.40}
 \end{aligned}$$

14.5 Δυναμική ενέργεια βαρυτικού πεδίου

Μια κατανομή ύλης στο χώρο περικλείει σίγουρα ενέργεια, αφού προκειμένου να σχηματιστεί αυτή η κατανομή –αν έδρασε μονάχα η βαρυτική αλληλεπίδραση– οι αρχικά απομονωμένες στο άπειρο μάζες απέκτησαν κινητική ενέργεια. Αν θεωρήσουμε λοιπόν την ενέργεια των αρχικά μη αλληλεπιδρώντων (λόγω άπειρης απόστασης) μαζών ως μηδενική, όταν πλησιάσουν στη συνέχεια οι μάζες σε πεπερασμένη απόσταση, η δυναμική τους ενέργεια θα είναι αρνητική, **προκειμένου η συνολική ενέργεια να μείνει σταθερή**.

Η έννοια του δυναμικού που στα προηγούμενα εδάφια χρησιμοποιήθηκε περισσότερο ως ένα βοηθητικό μαθηματικό εργαλείο για τον υπολογισμό της έντασης του πεδίου, θα αποκτήσει τώρα περισσότερο φυσικό περιεχόμενο. Η σχέση (14.5) εμφανίζει στο δεξί μέλος το έργο της βαρυτικής δύναμης (ανά μονάδα μάζας και με αρνητικό πρόσημο) καθώς η μάζα μ μετακινείται από τη θέση \mathbf{r}_0 στη θέση \mathbf{r} . Θα μπορούσαμε λοιπόν να πούμε ότι το βαρυτικό δυναμικό είναι μια βαθμωτή συνάρτηση η διαφορά του οποίου μεταξύ δύο σημείων του χώρου μετρά το έργο ανά μονάδα μάζας που καταναλώνει η βαρυτική δύναμη που ασκείται σε μια μάζα καθώς η μάζα μετακινείται μεταξύ των δύο αυτών σημείων. Προσέξτε όμως το αρνητικό πρόσημο:

$$\Phi(\mathbf{r}_1) - \Phi(\mathbf{r}_2) = -\frac{W_{1 \rightarrow 2}^{\text{βαρ}}}{\mu} \tag{14.41}$$

Επομένως όταν υπάρχουν δύο μάζες¹¹ και αλλάζουμε τη μεταξύ τους απόσταση μπορούμε να θεωρήσουμε ότι η μια κινείται στο βαρυτικό πεδίο της άλλης και η μεταξύ τους δυναμική ενέργεια μεταβάλλεται κατά το έργο που χρειάζεται να ασκήσουμε εμείς για να τις μετακινήσουμε από μια αρχική θέση σε μια τελική θέση. Ας υποθέσουμε λοιπόν ότι αρχικά η m_1 βρίσκεται στη θέση \mathbf{r}_{10} ενώ η m_2 στη θέση \mathbf{r}_{20} . Προκειμένου να τις μετακινήσουμε στις νέες θέσεις $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2$ ακολουθούμε την εξής τα-

¹¹Θα υποθέσουμε ότι οι μάζες στις οποίες αναφερόμαστε είναι σημειακές. Όταν αργότερα θα αναφερθούμε σε μάζες με πεπερασμένες διαστάσεις θα το επισημάνουμε.

κτική. Σε πρώτη φάση μετακινούμε και τις δύο μαζί χωρίς να αλλάξουμε τη σχετική τους θέση μέχρις ότου η πρώτη καταλήξει στη νέα της θέση. Προκειμένου να το πετύχουμε αυτό πρέπει προφανώς να ασκούμε πάνω τους κατάλληλες δυνάμεις ώστε να αντισταθμίσουμε τη μεταξύ τους βαρυτική έλξη, δηλαδή θα πρέπει στην κάθε μάζα να ασκούμε δύναμη ίση και αντίθετη με τη βαρυτική έλξη. Το συνολικό έργο λοιπόν των δυνάμεων αυτών θα ισούται με μηδέν αφού οι δύο δυνάμεις είναι αντίθετες και μετακινούν και τις δύο κατά την ίδια διαδρομή· από το \mathbf{r}_{10} στο \mathbf{r}_1 την #1 και από το \mathbf{r}_{20} στο $\mathbf{r}_{20} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{10}$ την #2. Στη συνέχεια θα ακινητοποιήσουμε την #1 και θα αρχίσουμε να μετακινούμε την #2 μέχρι να φτάσει στη θέση \mathbf{r}_2 . Αφού κρατάμε την #1 ακίνητη ασκώντας κατάλληλη δύναμη κάθε φορά (για να υπερνικήσουμε τη βαρυτική έλξη της #2 πάνω της) δεν ασκούμε κάποιο έργο σε αυτή. Όμως καθώς αλλάζουμε τη θέση της #2 ως προς την #1 καταναλώνουμε εν γένει κάποιο έργο. Το έργο αυτό είναι το αντίθετο του έργου¹² που ασκεί η βαρυτική δύναμη μεταξύ των δύο μαζών όταν η δεύτερη μεταβαίνει από τη θέση $\mathbf{r}_{20} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{10}$ στην \mathbf{r}_2 . Με άλλα λόγια η δυναμική ενέργεια των δύο μαζών στην τελική θέση (σε σχέση με την αρχική) είναι

$$\Delta U = U_{\text{τελ}} - U_{\text{αρχ}} = W_F = -W_{\text{βαρ}} = m_2 [\Phi_1(\mathbf{r}_2) - \Phi_1(\mathbf{r}_{20} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{10})], \quad (14.42)$$

όπου Φ_1 είναι το δυναμικό που οφείλεται στην πηγή m_1 η οποία βρίσκεται στη θέση \mathbf{r}_1 . Με άλλα λόγια

$$\begin{aligned} \Delta U &= m_2 \left[-\frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + \frac{Gm_1}{|\mathbf{r}_{20} + \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_{10} - \mathbf{r}_1|} \right] \\ &= -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + \frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{10}|}. \end{aligned} \quad (14.43)$$

Αν αρχικά τα σώματα βρίσκονταν σε άπειρη απόσταση $|\mathbf{r}_{20} - \mathbf{r}_{10}| \rightarrow \infty$ η δυναμική ενέργεια των δύο μαζών σε απόσταση $|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|$ θα είναι λοιπόν

$$U_{12} = -\frac{Gm_1 m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|}. \quad (14.44)$$

Η αρνητική (όπως αναμέναμε) δυναμική αυτή ενέργεια είναι η ενέργεια της #2, της #1, ή τίποτε από τα δύο. Στη λογική του παραπάνω υπολογισμού είναι η ενέργεια της #2 ως προς την #1. Το ίδιο όμως θα παίρναμε αν υπολογίζαμε τη #1 στο βαρυτικό πεδίο της #2. Συνεπώς είναι μάλλον άκομψο να αναφέρεται ως το ένα ή το άλλο αφού κάθε φορά φαίνεται να παίζει διαφορετικό ρόλο η μία ή η άλλη. Πιο σωστό θα ήταν να πούμε ότι αυτή είναι η δυναμική ενέργεια του ζεύγους των δύο μαζών. Η ενέργεια δεν ανήκει στη μία ή στην άλλη μάζα αλλά στο ίδιο το βαρυτικό πεδίο

¹² Αφού η δύναμη που ασκούμε σε αυτήν είναι ακριβώς ίση και αντίθετη με τη βαρυτική έλξη προκειμένου να γίνεται η μετακίνηση αργά χωρίς να προσφέρεται κάποια ταχύτητα στην m_2 .

που σχηματίζεται από τις δύο.

Πώς θα γίνει ο παραπάνω υπολογισμός αν οι μάζες είναι περισσότερες από δύο; Η απάντηση είναι απλή· ο σχηματισμός τριών μαζών μπορεί να ξεκινήσει ως σχηματισμός δύο μαζών και στη συνέχεια να προστεθεί η τρίτη μάζα κινούμενη στο πεδίο των άλλων δύο. Η επαλληλία των πεδίων εγγυάται ότι το δυναμικό στη θέση της τρίτης μάζας μπορεί να κατασκευαστεί με πρόσθεση του δυναμικού σε αυτή τη θέση εξαιτίας της πρώτης συν το δυναμικό εξαιτίας της δεύτερης. Δηλαδή

$$\begin{aligned} U_{123} &= -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} + m_3 [\Phi_1(\mathbf{r}_3) + \Phi_2(\mathbf{r}_3)] \\ &= -\frac{Gm_1m_2}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|} - \frac{Gm_2m_3}{|\mathbf{r}_3 - \mathbf{r}_2|} - \frac{Gm_3m_1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_3|}. \end{aligned} \quad (14.45)$$

Όμοια μπορούμε να υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια N σημειακών μαζών:

$$\begin{aligned} U_{12\dots N} &= -\sum_{i=1}^N \sum_{j=i+1}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{Gm_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|} \end{aligned} \quad (14.46)$$

Ο υπολογισμός αφορά τη δυναμική ενέργεια όλων των δυνατών ζευγαριών από μάζες. Η δεύτερη έκφραση οφείλει το $1/2$ στο ότι το διπλό άθροισμα λαμβάνει δύο φορές όλα τα ζευγάρια (π.χ. μια φορά μέσω του ζεύγους $i = 3, j = 5$ και άλλη μια φορά μέσω του ζεύγους $i = 5, j = 3$).

Πώς θα υπολογίσουμε όμως τη δυναμική ενέργεια μιας συνεχούς κατανομής μαζών; Για παράδειγμα αυτήν μιας ομογενούς σφαίρας; Είναι απλό. Τα αθροίσματα στην παραπάνω έκφραση θα αντικατασταθούν με ολοκληρώματα (η δεύτερη μάλιστα έκφραση είναι προτιμότερη αφού και τα δύο αθροίσματα αναφέρονται σε όλες τις μάζες):

$$U = -\frac{1}{2} \int_V \int_V \frac{Gdm_1 dm_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = -\frac{1}{2} \int_V \int_V \frac{G\rho(\mathbf{r}_1)\rho(\mathbf{r}_2)dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (14.47)$$

Ο υπολογισμός του διπλού αυτού ολοκληρώματος πιθανώς να είναι από τεχνικής άποψης δύσκολος, αλλά θα μπορούσε να γίνει πιο απλός αν προσέξουμε ότι το ολοκλήρωμα

$$-\int_V \frac{G\rho(\mathbf{r}_2)dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (14.48)$$

δεν είναι τίποτε άλλο παρά το δυναμικό στη θέση \mathbf{r}_1 εξαιτίας ολόκληρης της κατα-

νομής της μάζας στον όγκο V . Δηλαδή

$$U = \frac{1}{2} \int_V \Phi(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_1) dV_1. \quad (14.49)$$

Το νέο αυτό ολοκλήρωμα είναι σαφώς απλούστερο αφού έχουμε μάθει πως να υπολογίζουμε το δυναμικό Φ εξαιτίας κάποιας κατανομής. Για παράδειγμα η δυναμική ενέργεια συσώρευσης μάζας σε μια ομογενή σφαιρική κατανομή θα είναι

$$\begin{aligned} U_{\sigma\phi} &= -\frac{1}{2} \int_0^R \frac{GM}{R} \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{r}{R} \right)^2 + \frac{3}{2} \right] \rho 4\pi r^2 dr \\ &= -\frac{1}{4} \frac{GM}{R} \frac{4\pi M}{(4/3)\pi R^3} \int_0^R [3 - (r/R)^2] r^2 dr \\ &= -\frac{1}{4} \frac{GM}{R} \frac{4\pi M}{(4/3)\pi R^3} (R^3 - R^3/5) \\ &= -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}. \end{aligned} \quad (14.50)$$

Αυτή είναι η ενέργεια που δαπάνησε το βαρυτικό πεδίο για να σχηματιστεί μια ομογενής μπάλα, όπως για παράδειγμα ένας αστέρας (αν αγνοήσουμε τις διαφορές πυκνότητας με την ακτίνα). Αντίστοιχα, το αντίθετο αυτής της ενέργειας (δίχως το “-” πρόσημο) είναι η ενέργεια που χρειάζεται μια έκρηξη για να διαλύσει αυτή τη μπάλα (αστέρα) στα εξών συνετέθη.

Το αποτέλεσμα που βρήκαμε παραπάνω θα μπορούσε να χρησιμοποιηθεί για να δώσει απάντηση σε ένα μαθηματικό-γεωμετρικό πρόβλημα, ο άμεσος υπολογισμός του οποίου θα είχε υπολογιστικές δυσκολίες. Συγκεκριμένα στο ερώτημα ποια είναι η μέση τιμή των αντιστρόφων αποστάσεων δυο οιασδήποτε σημείων εντός μιας σφαίρας, θα έγραφε κανείς τυπικά το διπλό ολοκλήρωμα

$$\left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right\rangle = \frac{1}{V_R^2} \int_{V_R} \int_{V_R} \frac{dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \quad (14.51)$$

το οποίο με μια απλή αντιπαράβολή φαίνεται ότι είναι το ίδιο με αυτό της σχέσης (14.47) εκτός από κάποιες σταθερές. Έτσι

$$\left\langle \frac{1}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} \right\rangle = -\frac{2U_{\sigma\phi}}{G\rho^2 V_R^2} = -\frac{2U_{\sigma\phi}}{GM^2} = \frac{6}{5R}. \quad (14.52)$$

Να λοιπόν που μπορούμε να βρίσκουμε απάντηση σε καθαρά μαθηματικά προβλήματα καταφεύγοντας σε φυσικές έννοιες!

Κλείνοντας το παρόν εδάφιο θα επαναλάβουμε τον υπολογισμό της βαρυτικής δυναμικής ενέργειας που περικλείεται σε μια ομογενή σφαίρα ακολουθώντας έναν πιο στοιχειώδη υπολογισμό. Υπό μια έννοια η έκφραση (14.49) είναι κάπως φορμαλιστική και καθόλου άμεση· περιέχει αυτόν τον όρο $1/2$ η προέλευση του οποίου

οφείλεται στον διπλό υπολογισμό του εκάστοτε ζευγαριού στοιχειωδών μαζών κατά την άθροιση-ολοκλήρωμα. Επίσης περιέχει το δυναμικό της ολοκληρωμένης σφαίρας ενώ εμείς γνωρίζουμε πως η δυναμική ενέργεια μετριέται κατά τη σταδιακή συσσώρευση μάζας από το άπειρο προς την τελική κατανομή της ύλης. Έτσι στην παράγραφο που ακολουθεί θα υπολογίσουμε τη δυναμική ενέργεια πιο φυσικά καθώς “κτίζεται” η σφαιρική κατανομή μάζας εκ του μηδενός.

Θα υποθέσουμε ότι συγκεντρώνουμε κάθε φορά τη μάζα –φέρνοντάς την από το άπειρο– σε μια ομογενή σφαίρα η οποία σταδιακά μεγαλώνει. Έτσι η δυναμική ενέργεια είναι το άθροισμα (ολοκλήρωση) των ενεργειών που χρειάζεται η εκάστοτε καινούργια στοιχειώδης μάζα dM να κινηθεί στο βαρυτικό πεδίο της ήδη συγκεντρωμένης σε σφαίρα ακτίνας r μάζας $M(r)$. Έτσι

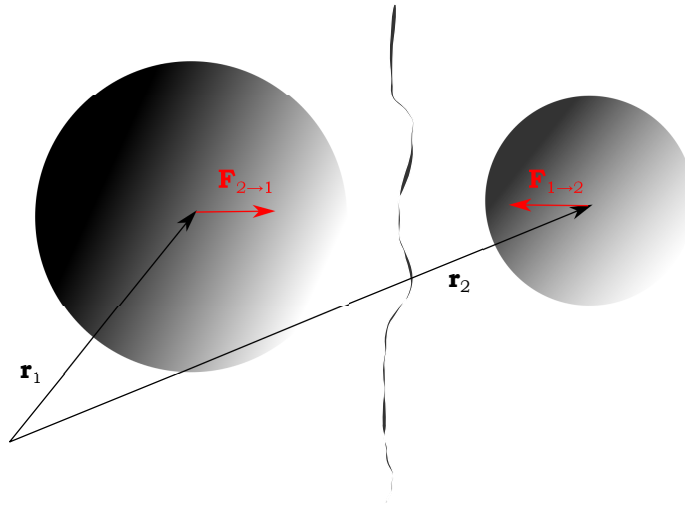
$$\begin{aligned}
 U &= \int_0^R \Phi_{M(r)} dM \\
 &= - \int_0^R \frac{GM(r)}{r} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 dr \\
 &= - \int_0^R \frac{GM}{r} \frac{r^3}{R^3} \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3} 4\pi r^2 dr \\
 &= - \frac{3GM}{R^6} \int_0^R r^4 dr \\
 &= - \frac{3GM}{5R}. \tag{14.53}
 \end{aligned}$$

Το αποτέλεσμα προφανώς είναι το ίδιο με αυτό που βρήκαμε παραπάνω αλλά ο υπολογισμός ήταν σίγουρα πιο φυσικός. Αξίζει απλώς να σημειώσουμε ότι η εκάστοτε νέα μάζα dM έρχεται και διασκορπίζεται πάνω στην ισοδυναμική επιφάνεια της σφαίρας ομογενώς, οπότε μπορούμε να λογαριάσουμε την αντίστοιχη δυναμική ενέργεια σαν να επρόκειτο για μια στοιχειώδη μάζα η οποία τοποθετείται σε ένα σημείο με δοσμένη τιμή δυναμικού.

14.6 Βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σφαιρών - πλανητών

Τα ουράνια σώματα Ήλιος - αστέρες - πλανήτες είναι κατά μεγάλη προσέγγιση σφαίρες πεπερασμένων διαστάσεων και όχι σημειακές μάζες. Ποια είναι η βαρυτική έλξη μεταξύ δύο τέτοιων μαζών M_1, M_2 ; Μέχρι τώρα έχουμε μάθει ποιο είναι το βαρυτικό πεδίο από μια σφαιρική κατανομή μάζας, αλλά το πεδίο μιας τέτοιας μάζας είναι διαφορετικό από σημείο σε σημείο. Πως θα υπολογίσουμε λοιπόν τη συνολική δύναμη του πεδίου σε μια άλλη σφαίρα; Κανονικά θα έπρεπε να προσθέσουμε διανυσματικά τις δυνάμεις του ανομοιογενούς αυτού πεδίου εξαιτίας της πρώτης σφαίρας σε κάθε στοιχειώδη μάζα της δεύτερης σφαίρας. Κάτι τέτοιο, αν και εφικτό, θα ήταν αρκετά πολύπλοκο. Αντ' αυτού μπορούμε να καταφύγουμε στον 3ο νόμο του

Νεύτωνα.



Σχήμα 14.4: Βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σφαιρών.

Αν τοποθετούσαμε ένα διαχωριστικό πέτασμα μεταξύ των δύο σφαιρών και βρισκόμασταν από τη μια πλευρά αυτού δεν θα μπορούσαμε να καταλάβουμε αν το βαρυτικό πεδίο εξαιτίας της απέναντι πηγής (M_1) είναι αποτέλεσμα μιας σφαίρας¹³ ή μιας σημειακής μάζας ίσης με M_1 τοποθετημένης στο κέντρο αυτής. Επομένως χωρίς βλάβη της γενικότητας μπορούμε να πούμε ότι πρόκειται για μια σημειακή μάζα M_1 τοποθετημένη στο κέντρο της σφαίρας \mathbf{r}_1 . Αυτή η υποτιθέμενη σημειακή μάζα ασκεί –όπως είπαμε και παραπάνω– διαφορετική δύναμη στις στοιχειώδεις μάζες της σφαίρας 2 που βρίσκεται στη δική μας πλευρά. Ποια είναι η συνισταμένη όλων αυτών; Δεν μπορούμε να γνωρίζουμε αν δεν προσθέσουμε όλες αυτές τις διαφορετικές στοιχειώδεις δυνάμεις· γνωρίζουμε όμως ότι η δύναμη αυτή είναι ίση και αντίθετη με τη δύναμη που ασκεί η δική μας σφαίρα (η 2) στη σημειακή μάζα M_1 . Η δύναμη της αντίδρασης αυτή όμως είναι η βαρυτική δύναμη μιας σφαιρικής κατανομής σε μια σημειακή μάζα, η οποία έχουμε αποδείξει ότι είναι

$$\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = -G \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \quad (14.54)$$

όπου \mathbf{r}_2 είναι η θέση του κέντρου της M_2 . Συνεπώς η ζητούμενη δύναμη (της 1 στη 2) είναι

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = -\mathbf{F}_{2 \rightarrow 1} = G \frac{M_1 M_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2). \quad (14.55)$$

Το αποτέλεσμα αυτό μας δίνει τη δυνατότητα να μελετάμε τις βαρυτικές έλξεις με-

¹³Μάλιστα δεν θα μπορούσαμε ούτε καν να καταλάβουμε πώς είναι κατανομημένη η μάζα της στο εσωτερικό της αφού η πυκνότητα ύλης θα μπορούσε να είναι μια τυχαία $\rho(r)$.

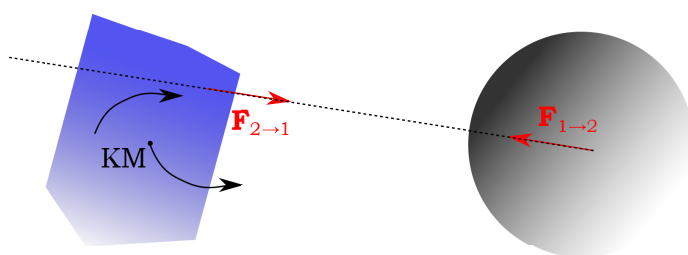
ταξύ του Ήλιου και των πλανητών σαν να επρόκειτο για σημειακές μάζες και όχι για σώματα με πεπερασμένες διαστάσεις. Αν και μοιάζει τετριμένο το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι καθόλου τέτοιο. Οφείλεται αποκλειστικά στη σφαιρική συμμετρία. Έτσι αν οι πλανήτες ήταν ...κύβιοι δεν θα μπορούσαμε να υπολογίσουμε τις δυνάμεις βασιζόμενοι στον παραπάνω τύπο. Μάλιστα μια απόκλιση από τη σφαιρική συμμετρία του Ήλιου θεωρήθηκε αρχικά υπεύθυνη για την περίεργη τροχιά του Ερμή, η εξήγηση της οποίας τελικά αποτέλεσε τον πρώτο μεγάλο θρίαμβο της Γενικής Θεωρίας της Σχετικότητας. Δυστυχώς η συμβατική θεώρηση περί παραμορφωμένου Ήλιου ήθελε τον Ήλιο υπερβολικά παραμορφωμένο.

14.7 Παλιρροϊκές δυνάμεις

Προτού ασχοληθούμε με τις παλιρροϊκές δυνάμεις που αναπτύσσονται μεταξύ δύο εκτεταμένων βαρυτικών σωμάτων θα προσπαθήσουμε να βρούμε αν η βαρυτική έλξη μεταξύ δύο μαζών θα μπορούσε να θέσει σε ιδιοπεριστροφή τα δύο σώματα. Θα ξεκινήσουμε τη διερεύνησή μας με την περίπτωση των δύο σφαιρών. Όπως είδαμε η βαρυτική έλξη τους είναι ίδια με αυτήν δύο σημειακών μαζών. Που εφαρμόζεται όμως η δύναμη αυτή όταν έχουμε δύο σφαίρες. Μα προφανώς στο κέντρο τους. Είναι αλήθεια προφανές; Αν η δύναμη αυτή δεν ασκούνταν στο κέντρο της μιας σφαίρας αλλά εκτός αυτού θα μπορούσε να ασκήσει ροπή στη σφαίρα και αυτή να τεθεί σε περιστροφή. Η συμμετρία όμως του προβλήματος δεν επιτρέπει κάτι τέτοιο. Αν κάποιος επιχειρηματολογούσε ότι ναι μεν το σημείο εφαρμογής της βαρυτικής δύναμης δεν θα μπορούσε να βρίσκεται εκτός της ευθείας που συνδέει τα δύο κέντρα για λόγους συμμετρίας, αλλά θα μπορούσε να βρίσκεται επί της ευθείας αυτής, εφαρμοζόμενη όμως σε κάποιο άλλο σημείο εκτός του κέντρου, δεν θα είχε και πολύ νόημα. Μια τέτοια “μετατοπισμένη” δύναμη δεν θα ασκούσε ροπή και θα μετακινούσε το σημείο εφαρμογής με τον ίδιο τρόπο ωσάν να ασκούνταν στο κέντρο της σφαίρας (το κέντρο μάζας). Ποιος ο λόγος λοιπόν για μια τέτοια άχρηστη θεώρηση;

Τι θα συνέβαινε όμως αν χαλούσαμε τη συμμετρία ως πούμε του ενός αντικειμένου; Ας φανταστούμε τη βαρυτική επίδραση μιας μάζας αλλόκοτου σχήματος σε μια σφαίρα. Η απάντηση είναι τώρα πιο ενδιαφέρουσα: η έλξη δεν συμβαίνει κατά μήκος της ευθείας που συνδέει τα δύο κέντρα μάζας (και δεν περιγράφεται βέβαια από την έκφραση (14.55)). Το ένα σώμα είναι μια σφαίρα. Έτσι κάθε στοιχειώδης μάζα του αλλόκοτου σώματος ασκεί στη σφαίρα μια δύναμη ακριβώς στο κέντρο αυτής (αμοιβαία έλξη σημειακής μάζας και σφαίρας). Αν αθροιστούν οι συμβολές από κάθε κομμάτι της αλλόκοτης μάζας θα εμφανιστεί και πάλι μια δύναμη που θα διέρχεται από το κέντρο αυτής. Η αντίδραση αυτής της δύναμης (η βαρυτική έλξη της σφαίρας στο αλλόκοτο σώμα) θα είναι μια δύναμη που θα διέρχεται από το κέντρο της σφαίρας, όχι όμως αναγκαστικά και από το κέντρο μάζας του περίεργου

γου σώματος. Η ροπή του ζεύγους των δύο βαρυτικών έλξεων είναι μηδενική αφού αυτές βρίσκονται στον ίδιο φορέα (ευθεία). Επομένως το περίεργο σώμα μπορεί να αρχίσει να περιστρέφεται γύρω από το κέντρο μάζας του αλλά αυτή η στροφορμή θα εξισορροπηθεί από τη στροφορμή που θα αποκτήσει το σώμα αυτό κινούμενο σε τροχιά γύρω από το κοινό κέντρο μάζας των δύο σωμάτων. Η σφαίρα πάντως δεν θα αποκτήσει ιδιοστροφορμή. Έτσι ενώ δύο σφαίρες αν ξεκινήσουν ακίνητες θα πέσουν η μία πάνω στην άλλη, τα δύο παραπάνω σώματα δεν θα οδηγηθούν κατ' ανάγκη σε μετωπική σύγκρουση. Προφανώς, αν και τα δύο σώματα είναι ασύμμετρα οι κινήσεις θα είναι ακόμη πιο περίεργες· και τα δύο εν γένει σώματα θα αποκτήσουν ιδιοπεριστροφή.



Σχήμα 14.5: Βαρυτική έλξη μεταξύ σφαίρας και άλλου σώματος.

Όπως είδατε με το προηγούμενο παράδειγμα, η βαρυτική αλληλεπίδραση μεταξύ δύο σωμάτων δεν είναι πάντα τόσο απλή, όπως συμβαίνει μεταξύ δύο σφαιρών οπότε μπορεί κανείς να αγνοήσει τις διαστάσεις τους και να τις αντιμετωπίζει ως σημειακές μάζες. Στη γενική περίπτωση, όχι μόνο το μέτρο της δύναμης δεν είναι απλώς ένας νόμος αντιστρόφου τετραγώνου της απόστασης μεταξύ των κέντρων μάζας, αλλά ούτε καν διέρχεται η βαρυτική δύναμη από το κέντρο μάζας του εκάστοτε σώματος. Υπάρχει όμως και άλλο ένα στοιχείο το οποίο αποκτά ιδιαίτερο ενδιαφέρον όταν τα σώματα δεν εκλαμβάνονται ως απολύτως στερεά σώματα. Πρόκειται για το αποτέλεσμα της ανομοιογένειας του βαρυτικού πεδίου της πηγής σε ολόκληρη την έκταση του σώματος που δέχεται τη βαρυτική δύναμη. Πιο συγκεκριμένα, άλλα μέρη του σώματος αισθάνονται πιο έντονο πεδίο και άλλα ασθενέστερο. Αν το σώμα που δέχεται λοιπόν τη βαρυτική δύναμη παρουσιάζει κάποια ελαστικότητα το σώμα θα παραμορφωθεί και έτσι θα αλλάξει και η συνολική ελκτική δύναμη.

Ας δούμε πιο αναλυτικά με ένα συγκεκριμένο παράδειγμα τα χαρακτηριστικά αυτού του παλιρροϊκού, όπως ονομάζεται, φαινομένου. Θα υποθέσουμε ότι δύο σφαιρικές μάζες M_1, M_2 με τα κέντρα τους σε απόσταση R έλκονται. Σε πρώτη φάση μας ενδιαφέρει η ανομοιογένεια των πεδίων στην έκταση του εκάστοτε σώματος και όχι οι επιπτώσεις αυτής, οπότε θα θεωρήσουμε ότι τα σώματα παραμένουν σφαιρικά. Θα περιγράψουμε λοιπόν το βαρυτικό πεδίο του σώματος 1 ως το πεδίο στο κέντρο του 2, συν τη μεταβολή του πεδίου αυτού καθώς αλλάζουμε τη θέση γύρω από το

κέντρο του 2:

$$\mathbf{g} = \mathbf{g}_0 + \Delta\mathbf{g} \quad (14.56)$$

όπου \mathbf{g}_0 είναι το βαρυτικό πεδίο εξαιτίας του 1 στο κέντρο του 2 (στη θέση \mathbf{R} από το κέντρο του 1)

$$\mathbf{g}_0 = -G \frac{M_1}{|\mathbf{R}|^3} \mathbf{R} \quad (14.57)$$

και $\Delta\mathbf{g}$ η διαφορά του

$$\mathbf{g} = -G \frac{M_1}{|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^3} (\mathbf{R} + \mathbf{r}) \quad (14.58)$$

στη θέση $\mathbf{R} + \mathbf{r}$ από το κέντρο του 1, από την τιμή της έντασης του βαρυτικού πεδίου \mathbf{g}_0 στο κέντρο του 2. Η επιλογή μας να “σπάσουμε” με αυτό τον τρόπο το πεδίο είναι διττή. Ο ένας λόγος είναι για να μπορούμε να περιγράψουμε τη διαφοροποίηση του πεδίου σε μικρές αποστάσεις από το κέντρο $r \ll R$, θεωρώντας ότι τα δύο σώματα έχουν μεν διαστάσεις, όχι όμως μεγάλες σε σχέση με την απόσταση των δύο σωμάτων (όπως συμβαίνει με τους πλανήτες και τον Ήλιο). Ο άλλος λόγος σχετίζεται με το διαχωρισμό του παλιρροϊκού φαινομένου από τη βαρύτητα ως ένα πεδίο αντιστρόφου τετραγώνου. Στην πραγματικότητα, όταν εξετάζουμε δύο ουράνια σφαιρικά σώματα που κινούνται αποκλειστικά εξαιτίας της βαρυτικής τους αλληλεπίδρασης, η $\Delta\mathbf{g}$ είναι η φαινόμενη ένταση της βαρύτητας που αισθάνεται ένα σημείο που κινείται στο επιταχυνόμενο σύστημα της σφαίρας 2, αφού αυτή επιταχύνεται με \mathbf{g}_0 και επομένως $-\mathbf{g}_0$ είναι η ένταση που θα αισθάνεται κάθε σημείο της σφαίρας 2 λόγω της μη αδρανειακότητας αυτής (επιταχυνόμενο σύστημα αναφοράς).

Ας αναπτύξουμε λοιπόν τον όρο $|\mathbf{R} + \mathbf{r}|^{-3}$ για μικρά r .

$$\begin{aligned} |\mathbf{R} + \mathbf{r}|^{-3} &= (R^2 + r^2 + 2\mathbf{R} \cdot \mathbf{r})^{-3/2} \\ &= \frac{1}{R^3} [1 + (r/R)^2 + 2(\mathbf{r} \cdot \mathbf{R}/R^2)]^{-3/2} \\ &\simeq \frac{1}{R^3} [1 - (3/2) [(r/R)^2 + 2(r/R) \cos \theta] + \dots] \\ &= \frac{1}{R^3} [1 - 3(r/R) \cos \theta + \mathcal{O}((r/R)^2)] \end{aligned} \quad (14.59)$$

όπου θ είναι η γωνία μεταξύ των διανυσμάτων \mathbf{R} και \mathbf{r} . Η πρότελευταία σχέση είναι απλώς το ανάπτυγμα Taylor της ακριβούς έκφρασης μέχρι 1η τάξη ως προς τη μικρή ποσότητα $(r/R)^2 + 2(r/R) \cos \theta$ και προκειμένου να είμαστε συνεπείς ως προς την τάξη μεγέθους που κρατάμε στην τελευταία σχέση διαγράψαμε τον όρο δεύτερης τάξης ως προς r/R μιας και ο επόμενος όρος στο ανάπτυγμα Taylor που αγνοήσαμε περιέχει και αυτός όρο τάξης $(r/R)^2$. Ο λόγος που επιλέξαμε να προχωρήσουμε μέ-

χει την 1η τάξη δεν μπορεί να δικαιολογηθεί παρά μόνο εκ των υστέρων. Με άλλα λόγια για να είμαστε σίγουροι ότι δεν χρειάζεται να προχωρήσουμε σε ακόμη μεγαλύτερη τάξη θα πρέπει να γράψουμε την τελική μορφή του ζητούμενου μεγέθους (του $\Delta\mathbf{g}$) για να βεβαιωθούμε ότι το ανάπτυγμα που λαμβάνουμε μας δίνει κάτι χρήσιμο και όχι κάτι τετριμένο και προφανές. Βρίσκουμε λοιπόν

$$\begin{aligned}\Delta\mathbf{g} = \mathbf{g} - \mathbf{g}_0 &\simeq -\frac{GM_1}{R^3} [(1 - 3(r/R)\cos\theta + \dots)(\mathbf{R} + \mathbf{r}) - \mathbf{R}] \\ &= -\frac{GM_1}{R^3} \left[\mathbf{r} - 3r\cos\theta\frac{\mathbf{R}}{R} + \mathcal{O}(r^2/R) \right] \\ &\simeq -\frac{GM_1}{R^3} r \left[\hat{\mathbf{r}} - 3\cos\theta\hat{\mathbf{R}} \right].\end{aligned}\quad (14.60)$$

Η έκφραση αυτή δείχνει πως μεταβάλλεται αυτό το φαινόμενο βαρυτικό πεδίο με την κατεύθυνση του \mathbf{r} . Για να αποκτήσουμε πιο καθαρή μορφή του πεδίου αυτού, ας υποθέσουμε ότι η σφαίρα 2 που δέχεται τη βαρυτική έλξη της 1 έχει το κέντρο της στην αρχή των αξόνων οπότε $\hat{\mathbf{r}} = \hat{\mathbf{x}}\cos\theta + \hat{\mathbf{y}}\sin\theta$, ενώ η σφαίρα 1 έχει το κέντρο της στη θέση $-R\hat{\mathbf{x}}$, οπότε $\mathbf{R} = R\hat{\mathbf{R}} = R\hat{\mathbf{x}}$. Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε ότι

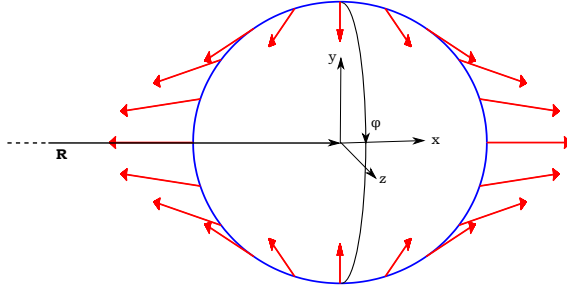
$$\Delta\mathbf{g} \simeq \frac{GM_1 r}{R^3} (2\cos\theta\hat{\mathbf{x}} - \sin\theta\hat{\mathbf{y}}).\quad (14.61)$$

ή σε πολικές συντεταγμένες (επιβεβαιώστε το)

$$\Delta\mathbf{g} \simeq \frac{GM_1 r}{2R^3} \left[-3\sin 2\theta\hat{\boldsymbol{\theta}} + (1 + 3\cos 2\theta)\hat{\mathbf{r}} \right].\quad (14.62)$$

Το πεδίο αυτό είναι καθαρά ακτινικό σε γωνίες θ πολλαπλάσια του $\pi/2$ και επαναλαμβάνεται απρόλλαχτο μετά από γωνία π (βλ. σχήμα 14.6).

Στη Γενική θεωρία της Σχετικότητας το παλιρροϊκό πεδίο είναι ουσιαστικά ο τρόπος που εκδηλώνεται η βαρύτητα, αφού το πεδίο \mathbf{g}_0 ευθύνεται απλώς για την κίνηση των σωμάτων η οποία στη Σχετικότητα δεν είναι άλλη από τη γεωδαισιακή κίνηση των σωμάτων στον καμπύλο χωρόχρονο που διαμορφώνουν οι βαρυτικές πηγές. Έτσι η παλιρροϊκή δύναμη είναι αυτή που ευθύνεται για το πλησίασμα δύο καταδυτών σε ελεύθερη πτώση καθώς πλησιάζουν προς το κέντρο της Γης. Επίσης τα βαρυτικά κύματα που προβλέπονται από τη Γενική θεωρία της Σχετικότητας και παραμένουν ακόμη φευγαλέα δεν είναι τίποτε άλλο από κύματα παλιρροϊκών δυνάμεων που συμπιέζουν και τραβούν σε κάθετες μεταξύ τους διευθύνσεις. Τέλος το βαρυτόνιο, το θεωρητικό σωματίδιο που μεταφέρει τη βαρυτική αλληλεπίδραση (κατ' αντιστοιχία με το φωτόνιο που μεταφέρει την ηλεκτρομαγνητική αλληλεπίδραση) είναι ένα στοιχειώδες σωματίδιο που θα μπορούσε να γίνει αντιληπτό ως ένας παλιρροϊκός παλμός. Το σπιν του σωματιδίου αυτού είναι 2, γεγονός το οποίο συνδέεται με την 2θ εξάρτηση του παλιρροϊκού πεδίου.



Σχήμα 14.6: Το παλιρροϊκό πεδίο στην επιφάνεια μιας σφαίρας (το αντίστοιχο τρισδιάστατο πεδίο προκύπτει με περιστροφή του παραπάνω σχήματος γύρω από την οριζόντια διάμετρο κατά $\phi = \pi$). Όπως φαίνεται στο διάγραμμα τα παλιρροϊκά φαινόμενα έχουν την τάση να επιμηκύνουν τα σώματα στην διεύθυνση που συνδέει τα δύο αλληλεπιδρώντα σώματα και να τα συμπιέζει σε όλες τις κάθετες διευθύνσεις.

Με αφορμή την παραπάνω αναφορά στη Γενική Σχετικότητα, θα επισημάνουμε μια αξιοσημείωτη ιδιότητα των μαύρων τρυπών. Επειδή η ακτίνα της τρύπας (του οριζοντα της μαύρης τρύπας) συνδέεται γραμμικά με τη μάζα της, το κλάσμα M/R^3 πάνω στον οριζοντα είναι ανάλογο του κλάσματος $1/M^2$, με συνέπεια οι παλιρροϊκές δυνάμεις στις μεγάλες μαύρες τρύπες να εξασθενεί. Η αριθμητική επεξεργασία δίνει αμελητέες παλιρροϊκές δυνάμεις σε μαύρες τρύπες με μέγεθος σαν αυτή που βρίσκεται στο κέντρο του Γαλαξία μας και επομένως δεν κινδυνεύει κανείς να διαμελιστεί διασχίζοντας τον οριζοντά της. Απλώς δεν θα μπορέσει ποτέ να μας μεταφέρει τις εμπειρίες του...

Πέραν του παραμορφωτικού χαρακτήρα των παλιρροϊκών δυνάμεων που έχουν την τάση να επιμηκύνουν τα σώματα στη διεύθυνση που τα συνδέει με τη βαρυτική πηγή και να τα συμπιέζει στις κάθετες διευθύνσεις, υπάρχει και μια τάση συνολικής συμπίεσης των σωμάτων. Για να το δούμε αυτό ας ανατρέξουμε στη σχέση (14.60) και ας υπολογίσουμε το μέσο όρο της ακτινικής συνιστώσας του παλιρροϊκού πεδίου πάνω σε μια σφαιρική επιφάνεια.

$$\begin{aligned}
 \langle \Delta \mathbf{g}_r \rangle &= \frac{\int_{S_1} dS \hat{\mathbf{r}} \cdot \Delta \mathbf{g}}{S_1} \\
 &= -\frac{GM_1 r}{R^3} \frac{2\pi r^2 \int_0^\pi \sin \theta d\theta (1 - \cos^2 \theta)}{4\pi r^2} \\
 &= -\frac{2}{3} \frac{GM_1 r}{R^3}.
 \end{aligned} \tag{14.63}$$

Μπορείτε να δείξετε ότι για δύο σφαιρικά σώματα παρόμοιας πυκνότητας η συμπίεση του καθενός λόγω των παλιρροϊκών φαινομένων είναι εξαιρετικά μικρότερη από τη συμπίεση λόγω της ιδιοβαρύτητας του κάθε σώματος, εφόσον $R \gg \max\{R_1, R_2\}$.

Ας μελετήσουμε τώρα την επίδραση των παλιρροϊκών δυνάμεων στη Γη εξαιτίας του Ήλιου και της Σελήνης, των δύο σωμάτων που αναμένεται¹⁴ να έχουν ισχυρή παλιρροϊκή δράση στη Γη. Από τη σχέση (14.60) (και τις αντίστοιχες σε διαφορετικές διανυσματικές βάσεις) είναι φανερό ότι το μέγεθος των παλιρροϊκών πεδίων σε ένα δεδομένο σώμα (δοσμένο r) εξαρτάται από το λόγο GM/R^3 της βαρυτικής πηγής. Εξαιτίας του Ήλιου ο λόγος αυτός στη Γη είναι $0.40 \times 10^{-13} \text{s}^{-2}$ και εξαιτίας της Σελήνης $0.73 \times 10^{-13} \text{s}^{-2}$ έως $1.08 \times 10^{-13} \text{s}^{-2}$ (ανάλογα με τη θέση της Σελήνης). Η Σελήνη έχει λοιπόν περίπου 2.5 φορές πιο σημαντική παλιρροϊκή επίδραση στη Γη. Το αποτέλεσμα της επίδρασης αυτής είναι να παραμορφώνεται η επιφάνεια των υδάτων της Γης σε συμφωνία με τη μορφή του παλιρροϊκού πεδίου. Η τάση του πεδίου αυτού, όπως αναφέραμε παραπάνω, είναι να ανυψωθεί η επιφάνεια των ωκεανών στην κατεύθυνση Γης-Σελήνης (ή Γης-Ήλιου) και να χαμηλώσει επί του μέγιστου κύκλου του κάθετου στην προηγούμενη διεύθυνση. Μάλιστα, καθώς η Γη περιστρέφεται γύρω από τον άξονά της σε 24 ώρες, αναμένεται αυτό το περιοδικό “φούσκωμα” και “ξεφούσκωμα” των υδάτων να συμβαίνει σε έναν τόπο με περίοδο περίπου¹⁵ 12 ώρες. Η αλήθεια είναι ότι λόγω της ταυτόχρονης ύπαρξης των παλιρροϊκών πεδίων της Σελήνης και του Ήλιου το συνολικό αποτέλεσμα και η περιοδικότητα αυτών είναι κάπως πιο πολύπλοκη. Επιπλέον λόγω της αδράνειας (μάζας) των υδάτων να ανταποκριθούν άμεσα στο παλιρροϊκό αυτό βαρυτικό πεδίο και της τριβής τους με τον πυθμένα των ωκεανών υπάρχει μια καθυστέρηση στην εκδήλωση των φαινομένων και το μέγιστο φούσκωμα δεν εκδηλώνεται στον τόπο που βρίσκεται κάθε στιγμή κάτω από τη Σελήνη (ή στον αντίποδα αυτού), αλλά σε σημεία που θα βρεθούν κάποιες ώρες αργότερα “κάτω” από τη Σελήνη. Ο Laplace ήταν ο πρώτος που μελέτησε συστηματικά τη δυναμική αυτή απόκριση των παλιρροϊών στη Γη και κατέληξε σε αναλυτικές εκφράσεις περιγραφής τους.

Το συνολικό αποτέλεσμα των παλιρροϊών είναι μια συνεχής ροπή λόγω των τριβών στον πυθμένα των ωκεανών με φορά αντίθετη με αυτή της περιστροφής της Γης που επιβραδύνει αργά αλλά σταθερά τον ρυθμό περιστροφής της κατά περίπου 2 ms ανά αιώνα. Ταυτόχρονα η Σελήνη επιταχύνει το ρυθμό περιφοράς της γύρω από τη Γη, προκειμένου να διατηρηθεί η συνολική στροφορμή του απομονωμένου

¹⁴Ο πρώτος εξαιτίας της μεγάλης του μάζας (σε σχέση με τους πλανήτες) και η δεύτερη εξαιτίας της εγγύτητάς της στη Γη.

¹⁵Η περιοδικότητα αντιστοιχεί σε κάπως μεγαλύτερο χρόνο από 12 ώρες αφού στο διάστημα που χρειάζεται ο εν λόγω τόπος για να ξαναβρεθεί στη διεύθυνση Γης-Σελήνης, αφού εν τω μεταξύ η Σελήνη έχει μετατοπιστεί στον ουρανό κατά $2\pi \times 12\text{h}/(28 \cdot 24\text{h})$. Θα πρέπει βέβαια να τονίσουμε ότι λόγω της μορφής του παλιρροϊκού πεδίου, οι διευθύνσεις που παραμένουν πάντα κάθετοι στην ευθεία που συνδέει τη Γη με τη Σελήνη παρά την περιστροφή της Γης (περιοχές κοντά στους πόλους) υπόκεινται συνεχώς σε χαμήλωμα των υδάτων· μόνο περιοχές κοντά στον Ισημερινό που κάθε έξι ώρες βρίσκονται είτε στην ευθεία Γης-Σελήνης είτε κάθετα σε αυτή τα ύδατα ανεβοκατεβαίνουν.

συστήματος Γη-Σελήνη, με αποτέλεσμα η Σελήνη να απομακρύνεται από τη Γη κατά 4 περίπου εκατοστά ανά έτος.

Στις προηγούμενες παραγράφους μελετήσαμε ποιοτικά τη μορφή του παλιρροϊκού πεδίου αλλά δεν εξαγάγαμε καμία ποσοτική πληροφορία σχετικά με το ύψος των παλιρροιών. Ο λόγος είναι ότι η επιτάχυνση του παλιρροϊκού πεδίου ακόμη και αν συγκριθεί με την επιτάχυνση της ιδιοβαρύτητας του πλανήτη Γη, δεν μπορεί να οδηγήσει σε κάποιο ποσοτικό στοιχείο σχετικά με την ανύψωση των υδάτων. Για να αντλήσουμε μια τέτοια πληροφορία θα πρέπει να αναζητήσουμε το δυναμικό από το σύνθετο πεδίο της βαρύτητας του πλανήτη και αυτό της Σελήνης¹⁶ Υπολογίζοντας το σχήμα της επιφάνειας σταθερού δυναμικού, θα μπορέσουμε να μετρήσουμε το θεωρητικά αναμενόμενο ύψος των παλιρροιών.

Επιστρέφοντας στη σχέση (14.61) το δυναμικό εξαιτίας των παλιρροϊκών δυνάμεων θα πρέπει να είναι τέτοιο, ώστε

$$-\nabla V_{\text{παλιρ}} = \Delta \mathbf{g} = \frac{GM_1}{R^3} (2x\hat{\mathbf{x}} - y\hat{\mathbf{y}}), \quad (14.64)$$

όπου M_1 θα είναι η μάζα της Σελήνης και R η απόσταση Γης-Σελήνης, ενώ x, y θα είναι οι καρτεσιανές συντεταγμένες ενός σημείου στην επιφάνεια της Γης σε μια διατομή αυτής που διέρχεται από την ευθεία Γης-Σελήνης. Το αντίστοιχο δυναμικό λόγω ιδιοβαρύτητας της Γης (θεωρώντας αυτήν σε ικανοποιητικό βαθμό σφαιρική) θα είναι

$$-\nabla V_{\text{ιδιοβ}} = \mathbf{g}_0 = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma^3} (x\hat{\mathbf{x}} + y\hat{\mathbf{y}}), \quad (14.65)$$

όπου M_Γ η μάζα της Γης και R_Γ η περίπου σταθερή ακτίνα της. Αντιστρέφοντας τις σχέσεις αυτές ώστε να λάβουμε τη μορφή του εκάστοτε δυναμικού βρίσκουμε

$$V = V_{\text{ιδιοβ}} + V_{\text{παλιρ}} = -\frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma} - \frac{GM_1}{2R^3} (2x^2 - y^2) \quad (14.66)$$

και αν ζητήσουμε το σχήμα μιας ισοδυναμικής επιφάνειας κοντά στην επιφάνεια της Γης θα έχουμε

$$C = \frac{GM_\Gamma}{R_\Gamma(\theta)} + \frac{GM_1}{2R^3} R_\Gamma(\theta) (2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (14.67)$$

Για σύγκριση με την ποσότητα GM_1/R^3 που υπολογίσαμε παραπάνω, η ποσότητα GM_Γ/R_Γ^3 ισούται με $g_0/R_\Gamma = 1.54 \times 10^{-6} \text{s}^{-2}$. Επομένως αναμένουμε πολύ μικρές διαφορές του $R_\Gamma(\theta)$ στον πρώτο όρο της (14.67) να εξουδετερώνουν τις γωνιακές

¹⁶Στο σημείο αυτό θα αγνοήσουμε το βαρυτικό πεδίο του Ήλιου, προκειμένου να απλοποιήσουμε τα πράγματα και να μπορέσουμε να εξαγάγουμε κάποια χρήσιμη πληροφορία, ώστε να τη συγκρίνουμε με τα ρεαλιστικά στοιχεία.

διαφοροποιήσεις του δεύτερου μικρού όρου, ενώ οι διαφοροποιήσεις του $R_{\Gamma}(\theta)$ στο δεύτερο όρο θα μπορούν να παραληφθούν όντας μικρές μεταβολές του μικρού όρου. Έτσι θα αντικαταστήσουμε το $R_{\Gamma}(\theta)$ του πρώτου όρου με $R_{\Gamma 0} + \delta r(\theta)$ ενώ την αντίστοιχη συνάρτηση στο δεύτερο όρο μπορούμε να τη γράψουμε απλά ως $R_{\Gamma 0}$. Με τις αντικαταστάσεις αυτές θα έχουμε

$$C = \frac{GM_{\Gamma}^2}{R_{\Gamma 0}} \left(1 - \frac{\delta r(\theta)}{R_{\Gamma 0}} \right) + \frac{GM_1}{2R^3} R_{\Gamma 0}^2(\theta)(2 \cos^2 \theta - \sin^2 \theta). \quad (14.68)$$

και λύνοντας ως προς $\delta r(\theta)$ βρίσκουμε

$$\begin{aligned} \delta r(\theta) &= \frac{GM_1/R^3}{GM_{\Gamma}/R_{\Gamma 0}^3} R_{\Gamma 0} \left(\cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) \\ &= \frac{0.73 - 1.08}{1.54} \times 10^{-7} \times (6.37 \times 10^6 m) \left(\cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) \\ &= (30 - 45) \times \left(\cos^2 \theta - \frac{\sin^2 \theta}{2} \right) cm \end{aligned} \quad (14.69)$$

Αυτή είναι η τάξη μεγέθους των παλιρροιών που περιμένουμε εξαιτίας της Σελήνης (και αντίστοιχα 2.5 φορές μικρότερο ύψος εξαιτίας του Ήλιου). Αν κοιτάξει όμως κανείς στο διαδίκτυο βρίσκει ύψη παλιρροιών σε κάποια μέρη του πλανήτη που ανέρχονται σε παραπάνω από 10 μέτρα! Γιατί βγήκαν οι αναλυτικές μας εκτιμήσεις τόσο λανθασμένες; Η απάντηση βρίσκεται στο γεγονός ότι η Γη περιστρέφεται επομένως οι παλίρροιες που σε μια ακίνητη Γη θα έφταναν το πολύ σε ύψος μερικές δεκάδες εκατοστά, στην πραγματική Γη συμπεριφέρονται ως ένας αρμονικός ταλαντωτής με διέγερση και απόσβεση. Ανάλογα με τη μορφολογία του πυθμένα του ωκεανού μπορεί να έχει άλλη ιδιοσυχνότητα έτσι ώστε να προκαλείται με την περιοδική παλιρροϊκή διέγερση είτε ενισχυμένο πλάτος είτε εξασθενημένο. Έτσι σε κάποιους τόπους τα συντονιστικά φαινόμενα μπορεί να ανεβάσουν το ύψος της παλίρροιας μερικές δεκάδες φορές ψηλότερα από το αναμενόμενο.

14.8 Πολυπολικές ροπές

Όπως είδαμε στο προηγούμενο εδάφιο, ενώ η ιδιοβαρύτητα ενός ουράνιου σώματος σε ρευστή μορφή τείνει να του δώσει σφαιρικό σχήμα, οι παλιρροϊκές επιδράσεις από γειτονικά σώματα τείνουν να το παραμορφώσουν και τελικά το παραμορφώνουν (παλίρροιες στους ωκεανούς). Το ερώτημα που προκύπτει είναι πως αλλάζει η βαρυντική δύναμη ενός σώματος, όταν αυτό παραμορφωθεί. Θα υποθέσουμε αρχικά ότι το σώμα έχει τυχαίο σχήμα και κατανομή μάζας ώστε να εκτελέσουμε έναν πρώτο θεωρητικό υπολογισμό του δυναμικού στο εξωτερικό του σώματος. Αργότερα θα υπολογίσουμε πρακτικά το δυναμικό αυτό για ένα ελαφρά παραμορφω-

μένο σφαιρικό πλανήτη και θα χρησιμοποιήσουμε το αποτέλεσμα για να μετρήσουμε την επίδραση της περιστροφής στο σχήμα του.

Το δυναμικό στη θέση \mathbf{r} εκτός μιας τυχαίας κατανομής μάζας που εκτείνεται στον όγκο V και χαρακτηρίζεται από τοπική πυκνότητα $\rho(\mathbf{r}')$ στην εκάστοτε θέση \mathbf{r}' είναι

$$V(\mathbf{r}) = - \int_V \frac{G dm'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} = - \int_V \frac{G\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} dV'. \quad (14.70)$$

Αναπτύσσοντας τον παρονομαστή κατά Taylor, θεωρώντας ότι το εύρος τιμών του $|\mathbf{r}'|$ είναι πολύ μικρό σε σχέση με το $|\mathbf{r}|$, δηλαδή η απόσταση που θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό είναι αρκετά μικρή σε σχέση με τις διαστάσεις του βαρυντικού σώματος, βρίσκουμε

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} &= (r^2 + r'^2 - 2\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}')^{-1/2} \\ &= r^{-1} (1 + [-2(r'/r) \cos \theta' + (r'/r)^2])^{-1/2} \\ &\simeq r^{-1} (1 + (-1/2)[\dots] + (3/8)[\dots]^2 + \dots). \end{aligned} \quad (14.71)$$

Στην παραπάνω παράσταση θ' είναι η γωνία που σχηματίζεται μεταξύ των διανυσμάτων \mathbf{r} και \mathbf{r}' , ενώ η συντομογραφία $[\dots]$ αναπαριστά την ποσότητα $[2(r'/r) \cos \theta' + (r'/r)^2]$ ως προς την οποία σχηματίσαμε το ανάπτυγμα Taylor μέχρι 2ης τάξης θεωρώντας την μικρή σε σχέση με τη μονάδα. Ο όρος αυτός περιέχει όμως ποσότητες διαφορετικής τάξης ως προς την πραγματικά μικρή ποσότητα r'/r και επομένως χρειάζεται μια αναδιάταξη των όρων του αναπτύγματος Taylor για να έχουμε μια πιο συνεπή κατάταξη των όρων ίδιου μεγέθους. Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} &\simeq r^{-1} \left(1 - \frac{1}{2} [-2(r'/r) \cos \theta' + (r'/r)^2] \right. \\ &\quad \left. + \frac{3}{8} [-2(r'/r) \cos \theta' + \dots]^2 + \dots \right) \\ &= r^{-1} \left(1 + (r'/r) \cos \theta' + \frac{1}{2} (r'/r)^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) + \mathcal{O}((r'/r)^3) \right). \end{aligned} \quad (14.72)$$

Επομένως το δυναμικό στη θέση \mathbf{r} θα μπορεί να γραφεί ως το ακόλουθο ανάπτυγμα

$$V(\mathbf{r}) = -G \left[\frac{\int_V dm'}{r} + \frac{\int_V r' \cos \theta' dm'}{r^2} + \frac{\int_V r'^2 (3 \cos^2 \theta' - 1) dm'}{2r^3} + \dots \right]. \quad (14.73)$$

Παρατηρούμε ότι οι όροι του αναπτύγματος έχουν ολοένα και μεγαλύτερη δύναμη του r στον παρονομαστή. Επιπλέον στον πρώτο όρο έχουμε $\int_V dm' = M$ δηλαδή αναπαριστά τη συνολική μάζα του βαρυντικού σώματος. Ο δεύτερος όρος μπορεί να γίνει ταυτοτικά μηδέν, αν διαλέξουμε την αρχή των αξόνων να συμπίπτει με το κέντρο μάζας του βαρυντικού σώματος. Ο λόγος είναι ο ακόλουθος: η θέση του κέ-

ντρου μάζας για ένα σώμα αν η αρχή των αξόνων βρίσκεται σε αυθαίρετη θέση είναι

$$\mathbf{R}_{\text{KM}} = \frac{\int_V dm' \mathbf{r}'}{M}. \quad (14.74)$$

Συνεπώς για αυθαίρετη θέση της αρχής των αξόνων είναι

$$\int_V r' \cos \theta' dm' = \hat{\mathbf{r}} \cdot \left(\int_V \mathbf{r}' dm' \right) = M \mathbf{R}_{\text{KM}} \cdot \hat{\mathbf{r}}. \quad (14.75)$$

Αν η αρχή των αξόνων και το κέντρο μάζας συμπίπτουν τότε $\mathbf{R}_{\text{KM}} = 0$ και το ολοκλήρωμα του 2ου όρου στο ανάπτυγμα του δυναμικού μηδενίζεται. Ο διπολικός λοιπόν αυτός όρος (όπως ονομάζεται) εξαφανίζεται με τη συνετή αυτή επιλογή αρχής των αξόνων.¹⁷ Ο επόμενος όρος

$$\int_V r'^2 \left[\frac{1}{2} (3 \cos^2 \theta' - 1) \right] dm' \quad (14.76)$$

είναι αυτό που ονομάζουμε τετραπολική ροπή, ή απλά τετράπολο, $Q(\hat{\mathbf{r}})$ του σώματος στην κατεύθυνση του $\hat{\mathbf{r}}$. Στην πραγματικότητα η τετραπολική ροπή είναι ένας τανυστής με καρτεσιανές συντεταγμένες

$$Q_{ij} = 3 \int_V dm' r'_i r'_j \quad (14.77)$$

οπότε

$$Q(\hat{\mathbf{r}}) = \int_V dm' \left[\frac{3}{2} (r' \cos \theta')^2 - \frac{1}{2} \right] = \frac{1}{2} Q_{ij}(\hat{\mathbf{r}})_i (\hat{\mathbf{r}})_j - \frac{1}{6} Q_{ii}, \quad (14.78)$$

όπου $(\hat{\mathbf{r}})_i$ είναι η i -οστή συνιστώσα του μοναδιαίου διανύσματος $\hat{\mathbf{r}}$. Η τελευταία έκφραση μπορεί να απλοποιηθεί στην

$$Q(\hat{\mathbf{r}}) = \frac{1}{2} Q_{ij}(\hat{\mathbf{r}})_i (\hat{\mathbf{r}})_j \quad (14.79)$$

¹⁷Το αντίστοιχο ανάπτυγμα για το ηλεκτρικό δυναμικό δεν διαθέτει τη δυνατότητα να μπορεί οπωσδήποτε να μηδενιστεί σε κατάλληλο σύστημα αξόνων. Ο λόγος είναι η ύπαρξη δύο προσήμων ηλεκτρικών φορτίων. Το γεγονός ότι οι μάζες είναι μόνο θετικές έχει τεράστιες συνέπειες που διαφοροποιούν τη βαρύτητα από τον ηλεκτρισμό. Το διπολικό πεδίο στη βαρύτητα είναι εκ ταυτότητας μηδέν ή έστω γραμμικά μεταβαλλόμενο με το χρόνο λόγω διατήρησης της ορμής ενός απομονωμένου συστήματος, επομένως αν μπορούσε να υπάρχει το αντίστοιχο της ηλεκτρομαγνητικής ακτινοβολίας στη βαρύτητα αυτή δεν θα μπορούσε να προέλθει από ταλαντώσεις διπόλου -όπως συμβαίνει με τις κεραίες και τα ηλεκτρομαγνητικά κύματα. Αυτός είναι ένας επιπλέον λόγος -εκτός από τη σχετική αδυναμία της ίδιας της βαρύτητας- που καθιστά τα βαρυτικά κύματα (που προβλέπει η γενική θεωρία της Σχετικότητας) τόσο αδύναμα ώστε να παραμένουν ακόμη φευγαλέα για τους υπάρχοντες δέκτες βαρυτικών κυμάτων.

αν εισάγει κανείς το άιχνο μέρος του τανυστή Q_{ij}

$$\mathbb{Q}_{ij} \equiv Q_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}Q_{kk} \quad (14.80)$$

δηλαδή είναι η τετραπολική ροπή, από τους διαγώνιους όρους της οποίας έχει αφαιρεθεί το $1/3$ του ίχνους της ώστε ο τανυστής να μείνει με μηδενικό συνολικά ίχνος.

Με τους παραπάνω ορισμούς που ποσοτικοποιούν με τον τρόπο που είναι κατανεμημένη η μάζα το δυναμικό μακριά από ένα απομονωμένο σώμα είναι

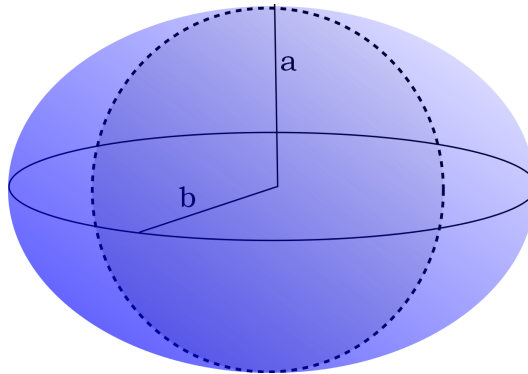
$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r} - \frac{G\mathbb{Q}_{ij}(\hat{\mathbf{r}})_i(\hat{\mathbf{r}})_j}{2r^3} + \dots \quad (14.81)$$

Για μια σφαιρική κατανομή μάζας ο τετραπολικός όρος (όπως και όλοι οι επόμενοι όροι -οκταπολικός, ο δεκαεξαπολικός κλπ) μηδενίζονται, όπως γνωρίζουμε από την απλούστατη μορφή του δυναμικού μιας σφαιρικής κατανομής. Όταν η κατανομή δεν παρουσιάζει σφαιρική συμμετρία, οι όροι αυτοί είναι εν γένει μη μηδενικοί.

Θα υποθέσουμε τώρα ότι το σώμα του οποίου θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό είναι ένα ελαφρώς πεπλατυσμένο σώμα σαν τη Γη η επιφάνεια του οποίου περιγράφεται από το ελλειψοειδές

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{a^2} = 1. \quad (14.82)$$

Θέλουμε τώρα να υπολογίσουμε το βαρυτικό δυναμικό ενός τέτοιου σώματος. Όπως



Σχήμα 14.7: Ένα ελλειψοειδές εκ περιστροφής. Η διάμετρος κατά τον κατακόρυφο άξονα είναι $2b$ ενώ κάθε οριζόντιο επίπεδο αποκόπτει από το ελλειψοειδές έναν κυκλικό δίσκο. Η διάμετρος του μέγιστου αυτού κύκλου (ισημερινού) είναι $2a$.

είδαμε παραπάνω θα χρειαστούμε την τετραπολική ροπή \mathbb{Q}_{ij} ενός τέτοιου σώματος προκειμένου να υπολογίσουμε το δυναμικό με ακρίβεια μέχρι τάξης $(r'/r)^2$ όπου r' αντιπροσωπεύει ένα μέτρο των τυπικών διαστάσεων του σώματος (για τη Γη θα μπορούσε να είναι η ισημερινή ακτίνα της) ενώ το r αντιστοιχεί στην απόσταση από το κέντρο του ελλειψοειδούς που θέλουμε να μετρήσουμε το δυναμικό. Σύμφωνα

με τα προηγούμενα θα είναι

$$\begin{pmatrix} Q_{xx} & Q_{xy} & Q_{xz} \\ Q_{yx} & Q_{yy} & Q_{yz} \\ Q_{zx} & Q_{zy} & Q_{zz} \end{pmatrix} = 3 \int_V dm' \begin{pmatrix} x'^2 & x'y' & x'z' \\ y'x' & y'^2 & y'z' \\ z'x' & z'y' & z'^2 \end{pmatrix}. \quad (14.83)$$

Στο παραπάνω ολοκλήρωμα όλοι οι μη διαγώνιοι όροι είναι 0 εξαιτίας της συμμετρίας που παρουσιάζει το σώμα σε ανακλάσεις σε όλα τα επίπεδα που διέρχονται από δύο καρτεσιανούς άξονες. Για παράδειγμα το ολοκλήρωμα

$$\int_V dm' x' z'$$

είναι 0 αφού για κάθε στοιχειώδη μάζα dm' η οποία βρίσκεται στη θέση (x', y', z') υπάρχει άλλη μια, κατοπτρική της ως προς το επίπεδο $x' = 0$, στη θέση $(-x', y', z')$ η συνεισφορά της οποίας είναι αντίθετη της πρώτης στο παραπάνω ολοκλήρωμα. Οι δε διαγώνιοι όροι μοιάζουν με τα ολοκληρώματα που δίνουν τη ροπή αδράνειας των σωμάτων. Βασιζόμενοι σε αυτή την ομοιότητα, θα υπολογίσουμε τους 3 διαγώνιους όρους Q_{xx} , Q_{yy} , Q_{zz} . Λόγω συμμετρίας του σώματος γύρω από τον άξονα z (αξονική συμμετρία) θα πρέπει $Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{1}{2}(Q_{xx} + Q_{yy})$. Το άθροισμα όμως $Q_{xx} + Q_{yy}$ δεν είναι άλλο από το τριπλάσιο της ροπής αδράνειας του σώματος γύρω από τον άξονα z , αφού

$$I_z = \int_V dm' \rho_{\perp}^2 = \int_V dm' (x'^2 + y'^2).$$

Η ροπή αδράνειας όμως αυτή θα πρέπει να είναι η ροπή αδράνειας μιας σφαίρας ακτίνας b , αφού οι z -διαστάσεις στην κατανομή της μάζας δεν παίζουν κανένα ρόλο στη ροπή αδράνειας γύρω από τον άξονα z (θυμηθείτε ότι η ροπή αδράνειας ενός ψηλού κυλίνδρου και ενός λεπτού δίσκου είναι $MR^2/2$). Συνεπώς

$$Q_{xx} = Q_{yy} = \frac{1}{2} \times 3 \times \frac{2}{5} Mb^2 = \frac{3}{5} Mb^2. \quad (14.84)$$

Όσο για την Q_{zz} θα είναι

$$Q_{zz} = 3 \int_V dm' z'^2 = \frac{a^2}{b^2} 3 \int_V dm' \rho_{\perp}^2 = \frac{3}{5} Ma^2. \quad (14.85)$$

αφού λόγω συμπίεσης του ελλειψοειδούς κατά παράγοντα a/b στον κατακόρυφο άξονα, οι z' διαστάσεις είναι μειωμένες κατά τον ίδιο παράγοντα σε σχέση με το ρ'_{\perp} .

Με αφαίρεση του ίχνους του πίνακα των τετραπολικών ροπών βρίσκουμε

$$\mathbb{Q}_{ij} = \frac{M}{5}(b^2 - a^2) \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \quad (14.86)$$

και το δυναμικό παίρνει την εξής μορφή

$$V(\mathbf{r}) = -\frac{GM}{r} - \frac{GM(b^2 - a^2)}{2r^3} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix}^\top \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \phi \\ \sin \theta \sin \phi \\ \cos \theta \end{pmatrix} + \dots \quad (14.87)$$

Ο πολλαπλασιασμός πινάκων στην τελευταία έκφραση αποτελεί αναλυτική γραφή του όρου $\mathbb{Q}_{ij}(\hat{\mathbf{r}})_i(\hat{\mathbf{r}})_j$ στη σχέση (14.81) με το μοναδιαίο διάνυσμα $\hat{\mathbf{r}}$ γραμμένο στις συνήθεις σφαιρικές συντεταγμένες. Εκτελώντας τις πράξεις βρίσκουμε

$$\begin{aligned} V(\mathbf{r}) &= -\frac{GM}{r} - \frac{GM(b^2 - a^2)}{10r^3}(\sin^2 \theta - 2 \cos^2 \theta) + \dots \\ V(\mathbf{r}) &= -\frac{GM}{r} - \frac{GM(b^2 - a^2)}{10r^3}(1 - 3 \cos^2 \theta) + \dots \end{aligned} \quad (14.88)$$

Στο σημείο αυτό είμαστε σε θέση να αναζητήσουμε το σχήμα της ισοδυναμικής επιφάνειας ενός ρευστού πλανήτη όταν αυτός περιστρέφεται με χαμηλή γωνιακή ταχύτητα ω ζητώντας τη μορφή της ελλειψοειδούς επιφάνειας που ικανοποιεί τη σχέση

$$V_{\text{ενεργ}} = V(\mathbf{r}) - \frac{1}{2}\omega^2 \rho_\perp^2 = \text{σταθ} \quad (14.89)$$

όπου ο επιπλέον όρος δυναμικού αντιπροσωπεύει το φυγοκεντρικό δυναμικό (βλ. κεντρικές δυνάμεις) το οποίο αισθάνεται η εκάστοτε στοιχειώδης μάζα ρευστού που συμπεριστρέφεται μαζί με όλο τον πλανήτη. Η απόσταση $\rho_\perp = \sqrt{x'^2 + y'^2}$ είναι η κάθετη απόσταση από τον άξονα περιστροφής z .

Κριτική στη μέθοδο: Πριν προχωρήσουμε στον υπολογισμό του σχήματος ας ελέγξουμε πιο σχολαστικά τις προσεγγίσεις που κάναμε.

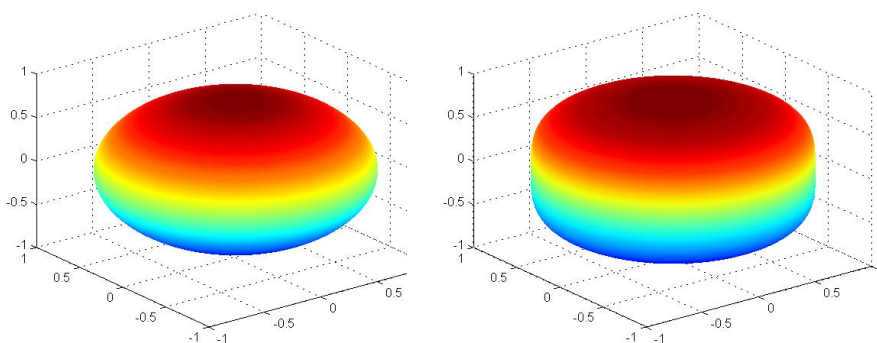
1. Αφότου γράψαμε το πολυπολικό –όπως ονομάζεται– ανάπτυγμα του δυναμικού για μια τυχαία κατανομή μάζας (σχέση (14.81)) προχωρήσαμε στον υπολογισμό της τετραπολικής ροπής ενός ελλειψοειδούς με μοναδικό οδηγό ότι το σχήμα της περιστρεφόμενης Γης **μοιάζει** με ένα εκ περιστροφής ελλειψοειδές. Θα μπορούσε κανείς να επιχειρηματολογήσει ότι άπειρα σχήματα έχουν την ιδιότητα να είναι αξονικά συμμετρικά¹⁸ και επομένως δεν είναι αναγκα-

¹⁸ Αυτό το στοιχείο δεν μπορούμε να το θυσιάσουμε στις υποθέσεις μας εφόσον υπάρχει ισοτροπία

στικό ένας περιστρεφόμενος πλανήτης να αποκτήσει ελλειψοειδές σχήμα· θα μπορούσε για παράδειγμα η επιφάνειά του να έχει τη μορφή

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^{2n}}{a^{2n}} = 1 \quad (14.90)$$

το οποίο έχει και πάλι τη μορφή μιας πεπλατυσμένης σφαίρας με αξονική συμμετρία,¹⁹ αλλά δεν είναι ελλειψοειδές και επομένως δεν χαρακτηρίζεται από την τετραπολική ροπή που υπολογίσαμε παραπάνω. Για παράδειγμα για $n \rightarrow \infty$ το σώμα παίρνει τη μορφή κυλίνδρου (βλ. σχήμα 14.8)



Σχήμα 14.8: Δύο πεπλατυσμένα σφαιροειδή τύπου (14.90). Το αριστερό είναι το κλασικό ελλειψοειδές με $n = 1$ σαν το (14.82), ενώ το δεξιό είναι το πιο “τετραγωνισμένο” με $n = 2$. Και τα δύο χαρακτηρίζονται από τον ίδιο λόγο πολικής προς ισημερινή ακτίνα (εδώ ο λόγος αυτός είναι 0.8).

Απάντηση: Αν το σώμα δεν είναι ελλειψοειδές στην περίπτωση χαμηλού ρυθμού περιστροφής τότε στο όριο που η περιστροφή τείνει στο μηδέν δεν ανακτούμε το σφαιρικό σχήμα. Ακόμη και αν κάποιος υποθέσει ότι το σφαιροειδές είναι του τύπου (14.90), με $n = 1 + f(\omega)$ με $f(\omega) \rightarrow 0$ καθώς το $\omega \rightarrow 0$, περιγράφει το σώμα αυτόματα αυτό σημαίνει ότι σε πολύ χαμηλούς ρυθμούς περιστροφής το σχήμα γίνεται κατά προσέγγιση ελλειψοειδές και η ανάλυση που κάναμε παραπάνω για το δυναμικό ελλειψοειδούς έχει νόημα.

2. Η ανάλυση του δυναμικού έγινε βάσει της υπόθεσης ότι το δυναμικό υπολογίζεται πολύ μακριά από το βαρυτικό σώμα έτσι ώστε $r'/r \ll 1$. Πώς λοιπόν μπορούμε να εμπιστευόμαστε μια τέτοια προσεγγιστική σχέση για ένα σημείο επάνω στην επιφάνεια του σώματος όπου $r'/r = 1$;

Απάντηση: Η αλήθεια είναι ότι για να εμπιστευτεί κανείς την προσεγγιστική

στο ισημερινό επίπεδο και δεν θα μπορούσε να διαφοροποιηθεί ο άξονας x από τον άξονα y . Αυτή η ευλογοφανής υπόθεση παύει να είναι σωστή σε μεγάλους ρυθμούς περιστροφής, όπου τότε εννοείται ενεργειακά ένας τριαξονικός (τρεις ανισομεγέθεις άξονες) σχηματισμός (σφαιροειδή Jacobi) και ακόμη πιο περίεργοι αχλαδοειδείς σχηματισμοί (σφαιροειδή Poincaré σε ακόμη πιο γρήγορες περιστροφές).

¹⁹ Η τετραγωνική μορφή των δύο πρώτων όρων, έτσι ώστε να εμφανιστεί ο συνδυασμός $x^2 + y^2$, είναι σημαντική ώστε να διαθέτει το σώμα αξονική συμμετρία.

αυτή έκφραση για το δυναμικό θα πρέπει να βεβαιωθεί ότι οι επόμενοι όροι της σειράς είναι πολύ μικρότεροι από τον τετραπολικό όρο που έχουμε κρατήσει. Στη συγκεκριμένη περίπτωση δεν είναι σημαντικά μικρότεροι εκτός αν η πλάτυνση είναι εξαιρετικά μικρή ($a \simeq b$). Για παράδειγμα μπορεί κανείς να δείξει ότι ο επόμενος μη μηδενικός όρος,²⁰ ο δεκαεξαπολικός όρος ο οποίος συνεισφέρει στο δυναμικό ως r^{-5} είναι ανάλογος της ποσότητας $(b^2 - a^2)^2$ και επομένως για $b - a \rightarrow 0$ ο δεκαεξαπολικός όρος είναι ανώτερης τάξης από τον τετραπολικό ως προς τη μικρή ποσότητα $(b - a)$. Έτσι να μεν ο δεκαεξαπολικός όρος περιέχει κλάσματα της μορφής b^4/r^5 , ή a^4/r^5 ή b^2a^2/r^5 που για ένα σημείο της επιφάνειας $a \leq r \leq b$ είναι της ίδιας τάξης μεγέθους με τα κλάσματα b^2/r^3 ή a^2/r^3 των τετραπολικών όρων αλλά ο συνδυασμός των πρώτων κλασμάτων είναι πολύ μικρότερος από το συνδυασμό των δεύτερων. Συνεπώς στα όρια αργών περιστροφών που η πλάτυνση είναι πολύ μικρή οι όροι πέραν του τετραπολικού μπορούν να αγνοηθούν.

3. Ο υπολογισμός του τετραπολικού όρου ενός ελλειψοειδούς επετεύχθη επειδή θεωρήσαμε ότι η πυκνότητα του ρευστού είναι σταθερή σε ολόκληρο τον όγκο του ρευστού. Στην πραγματικότητα αυτό δεν συμβαίνει: η πυκνότητα μειώνεται καθώς κινούμαστε προς τα επιφανειακά στρώματα καθώς οι πιέσεις από τα υπερκείμενα στρώματα είναι ασθενέστερες. Επομένως όλος ο υπολογισμός είναι λανθασμένος

Απάντηση: Όπως θα δούμε λίγο παρακάτω ο βαθμός πλάτυνσης (ο λόγος $(b - a)/(b + a)$ είναι αντιστρόφως ανάλογος της πυκνότητας για ομογενή ρευστά). Επομένως αναμένουμε ο πυρήνας του ρευστού να είναι λιγότερο πεπλατυσμένος απ' ότι οι εξωτερικοί φλοιοί.²¹ Η συνέπεια αυτής της τεχνικής λεπτομέρειας που συνδέεται με τη ρεαλιστικότητα του προβλήματος είναι ο αριθμητικός συντελεστής $1/10$ που εμφανίζεται στον τετραπολικό όρο να καθίσταται ακόμη μικρότερος λόγω μη ομοιογένειας του υλικού του ρευστού. Ο λόγος που τον καθιστά μικρότερο είναι ότι ο πυρήνας όντας πιο σφαιρικός θα έχει τετραπολική συνεισφορά πιο μικρή, αφού όπως γνωρίζουμε στην περίπτωση της σφαίρας τέτοιος όρος στο δυναμικό δεν υπάρχει.

Πράγματι λοιπόν ο υπολογισμός του δυναμικού είναι λάθος αλλά θα μπορούσε ποιοτικά να διορθωθεί με έναν κατάλληλο αριθμητικό συντελεστή (μικρότερο του $1/10$) σε αντικατάσταση του $1/10$. Κατά τ' άλλα η ποσοτική εξάρτηση από τις διάφορες μεταβλητές του προβλήματος είναι σωστή.

²⁰ Ο οκταπολικός όρος, όπως και όλοι οι 2^{2l+1} -πολικοί όροι, είναι ταυτοτικά 0 καθώς το σώμα έχει κατοπτρική συμμετρία σε σχέση με το ισημερινό επίπεδο.

²¹ Οι επιφάνειες σταθερής πυκνότητας είναι ελλειψοειδή εκ περιστροφής, με ολόένα αυξανόμενη εκκεντρότητα ελλειψοειδών καθώς κινούμαστε από το κέντρο προς την επιφάνεια.

4. Όπως είδαμε το δυναμικό, το οποίο θα ζητήσουμε να είναι σταθερό στην επιφάνεια, είναι συνδυασμός του βαρυτικού δυναμικού του ίδιου του σώματος και του φυγοκεντρικού δυναμικού εξαιτίας της περιστροφής του. Ο τετραπολικός όρος όπως είπαμε θα είναι πολύ μικρότερος από τον μονοπολικό όρο $-GM/r$ στα όρια της χαμηλής περιστροφής, για τον ίδιο λόγο που ο δεκαεξαπολικός είναι πολύ μικρότερος από τον τετραπολικό. Είναι λοιπόν απαραίτητο να λάβουμε υπόψη και τον τετραπολικό όρο;

Απάντηση: Ναι όπως μπορούμε να συμπεράνουμε από το αποτέλεσμα. Μια σύντομη αιτιολόγηση είναι ότι το φυγοκεντρικό δυναμικό είναι του ίδιου μεγέθους με το τετραπολικό δυναμικό. Αυτό όμως δεν μπορούμε να το γνωρίζουμε προτού εκτελέσουμε τις πράξεις μέχρι τέλους, με και χωρίς τον τετραπολικό όρο. Αν δεν υπάρχουν διαφορές στο όριο των πολύ χαμηλών περιστροφών θα μπορούσαμε να είχαμε αγνοήσει το τετραπολικό δυναμικό. Όπως ίσως φαντάζεστε για να έχουμε κάνει μια τόσο εκτενή αναφορά στα πολυπολικά αναπτύγματα, ο όρος αυτός θα έχει τελικά σημαντική επίπτωση.

5. Θα μπορούσε να ισχυριστεί κανείς ότι μολονότι το ελλειψοειδές σχήμα παρουσιάζει εξαιρετικά ομαλή μετάβαση στο σφαιρικό σχήμα καθώς ο ρυθμός περιστροφής τείνει στο 0, όταν ο ρυθμός περιστροφής παύει να είναι μηδενικός και το σώμα αρχίζει να περιστρέφεται με υψηλή γωνιακή ταχύτητα η παραμόρφωσή του θα μπορούσε να οδηγήσει σε ένα τελείως διαφορετικό σχήμα.

Απάντηση: Δεδομένου ότι ο υπολογισμός του δυναμικού για ένα γενικό ελλειψοειδές μπορεί να δοθεί σε κλειστή μορφή (υπό μορφή μάλλον δύσκολων ολοκληρωμάτων) είναι ιδιαίτερα αξιοθαύμαστο ότι ο συνδυασμός αυτού του δυναμικού με το φυγοκεντρικό δυναμικό μπορούν να “κλειδώσουν” κατάλληλα ώστε να δώσουν σταθερή τιμή στο δυναμικό της επιφάνειας, συσχετίζοντας κατάλληλα την πλάτυνση με τη γωνιακή ταχύτητα περιστροφής. Πράγματι, το αποτέλεσμα αυτό δεν είναι καθόλου αναμενόμενο.

Στις παραγράφους που ακολουθούν θα βρούμε αυτή τη σχέση στο όριο των μικρών ρυθμών περιστροφής.

Ας προσπαθήσουμε τώρα να βρούμε την επιφάνεια που καθιστά το ενεργό δυναμικό $V_{\text{ενεργ}}$ της σχέσης (14.89) σταθερό. Επειδή όλοι οι όροι του δυναμικού παρουσιάζουν αξονική συμμετρία (καμία εξάρτηση από τη γωνία ϕ γύρω από τον άξονα περιστροφής z) αναζητούμε μια επιφάνεια αξονικά συμμετρική που παράγεται από μια εκ περιστροφής καμπύλη η οποία περιγράφεται από την πολική εξίσωση $r(\theta)$.

Ψάχνουμε λοιπόν για κατάλληλη συνάρτηση $r(\theta)$ που λύνει την εξίσωση

$$\begin{aligned} \text{σταθ} &= V(r(\theta)) - \frac{1}{2}\omega^2(r(\theta) \sin \theta)^2 \\ &= -\frac{GM}{r(\theta)} - \frac{GM(b^2 - a^2)}{10[r(\theta)]^3}(1 - 3\cos^2 \theta) - \frac{1}{2}\omega^2(r(\theta) \sin \theta)^2 \quad (14.91) \end{aligned}$$

Δεν πρέπει να αγνοούμε ότι η λύση που ψάχνουμε αφορά μικρή ω και επομένως $b \simeq a$, δηλαδή λύσεις κοντά στη σφαιρική, δηλαδή

$$r(\theta) = r_0 + \delta r(\theta) \quad (14.92)$$

με $|\delta r(\theta)| \ll r_0$ και $b = r_0 + \delta r(\pi/2)$, $a = r_0 + \delta r(0)$. Δεδομένου λοιπόν ότι ο 2ος και 3ος όρος στην έκφραση του δυναμικού είναι πολύ μικροί σε σχέση με τον 1ο, μπορούμε να γράψουμε το ανάπτυγμα του $1/r$ του 1ου όρου μέχρι σε 1η τάξη ως προς $\delta r(\theta)$, αλλά δεν είναι ανάγκη να κάνουμε το ίδιο και στους άλλους δύο όρους. Έτσι θα έχουμε

$$\text{σταθ} = -\frac{GM}{r_0} \left(1 - \frac{\delta r(\theta)}{r_0}\right) - \frac{GM(b^2 - a^2)}{10r_0^3}(1 - 3\cos^2 \theta) - \frac{1}{2}\omega^2(r_0 \sin \theta)^2 \quad (14.93)$$

και λύνοντας ως προς $\delta r(\theta)$ βρίσκουμε

$$\delta r(\theta) = r_0 \left[C' + \frac{(b^2 - a^2)}{10r_0^2}(1 - 3\cos^2 \theta) + \frac{\omega^2 r_0^3}{2GM} \sin^2 \theta \right], \quad (14.94)$$

όπου C' είναι κάποια κατάλληλη σταθερά έτσι ώστε $b = r_0 + \delta r(\pi/2)$ και $a = r_0 + \delta r(0)$. Αφαιρώντας κατά μέλη αυτές τις δύο συνθήκες βρίσκουμε

$$\frac{b - a}{r_0} = \frac{(b^2 - a^2)}{10r_0^2}(1 - (-2)) + \frac{\omega^2 r_0^3}{2GM}(1 - 0) \quad (14.95)$$

και θέτοντας $r_0 = (b + a)/2$ αφού $r_0 \simeq b \simeq a$

$$\frac{b - a}{r_0} = \frac{5}{4} \left(\frac{\omega^2 r_0^3}{GM} \right). \quad (14.96)$$

Καταλήγοντας στο αποτέλεσμα αυτό συμπεραίνουμε ότι η παρουσία του τετραπολικού όρου ήταν σημαντική. Αν την αγνοούσαμε θα λαμβάναμε την ακόλουθη αρκετά διαφορετική αντίστοιχη σχέση για την πλάτυνση

$$\frac{b - a}{r_0} \Big|_{\text{τετραπ}} = \frac{1}{2} \left(\frac{\omega^2 r_0^3}{GM} \right). \quad (14.97)$$

Αν μάλιστα λάβουμε υπόψη και τη μεταβολή στην πυκνότητα (βλ. σχόλιο 3 παρα-

πάνω) ο σωστός συντελεστής πρέπει να είναι κάπως μικρότερος από το 5/4 της σχέσης (14.96).

Στην περίπτωση της Γης ο όρος πλάτυνσης είναι (όπως τον ορίσαμε παραπάνω) 1/297.757 ενώ το δεξί μέλος της (14.96) προβλέπει θεωρητικά πλάτυνση 1/233. Το λάθος είναι στη σωστή κατεύθυνση που αναμένουμε εξαιτίας της διαστρωμάτωσης της πυκνότητας στο εσωτερικό της Γης.

Βασικές Έννοιες Κεφαλαίου 14

- Η βαρυτική δύναμη μεταξύ δύο σημειακών μαζών είναι

$$\mathbf{F}_{1 \rightarrow 2} = \frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3} (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) = -\frac{G m_1 m_2}{r_{12}^2} \hat{\mathbf{r}}_{1 \rightarrow 2}.$$

Η δύναμη αυτή είναι κεντρική και συντηρητική.

- Η βαρυτική δυναμική ενέργεια μεταξύ δύο σημειακών μαζών είναι

$$U_{12} = -\frac{G m_1 m_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|}.$$

Η δυναμική αυτή ενέργεια δεν είναι ενέργεια κάποιου σωματιδίου αλλά ολόκληρου του συστήματος που περιλαμβάνει τις δύο μάζες και το ίδιο το βαρυτικό πεδίο.

- Οι δυναμική ενέργεια ενός συστήματος πολλών σωματιδίων είναι

$$U_N = -\frac{1}{2} \sum_{\substack{i,j \\ i \neq j}}^N \frac{G m_i m_j}{|\mathbf{r}_i - \mathbf{r}_j|}$$

λόγω επαλληλίας των βαρυτικών δυνάμεων που μεταφράζεται σε άθροιση δυναμικών ενεργειών. Στο συνεχές όριο η παραπάνω έκφραση λαμβάνει τη μορφή

$$U = -\frac{1}{2} \iint_{V=\text{όγκος κατανομής}} \frac{G \rho(\mathbf{r}_1) \rho(\mathbf{r}_2) dV_1 dV_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = \frac{1}{2} \int_V dV \rho(\mathbf{r}) \Phi(\mathbf{r})$$

όπου $\Phi(\mathbf{r})$ το δυναμικό στη θέση \mathbf{r} εξαιτίας της δεδομένης κατανομής μάζας.

- Ο νόμος του Gauss

$$\int_{S(V)} \mathbf{g}(\mathbf{r}) \cdot d\mathbf{S}(\mathbf{r}) = -4\pi G M_V$$

συνδέει το επιφανειακό ολοκλήρωμα της έντασης της βαρύτητας ενός βα-

ρουτικού πεδίου σε μια κλειστή επιφάνεια $S(V)$ που περιβάλλει κάποιον όγκο V , με τη μάζα M_V που περιέχεται στον όγκο αυτό. Η παρουσία μάζας εκτός αυτής της επιφάνειας δεν αλλοιώνει την παραπάνω έκφραση (οδηγεί σε μηδενική ροή του πεδίου). Ο λόγος ύπαρξης της γενικής αυτής σχέσης συνδέεται άρρηκτα με το νόμο αντιστρόφου τετραγώνου που ικανοποιεί το βαρυτικό πεδίο, γεγονός που καθιστά το ελεύθερο πεδίο να είναι μηδενικής απόκλισης ($\nabla \cdot \mathbf{g} = 0$ σε περιοχές ελεύθερες από ύλη).

- Ο νόμος του Gauss μπορεί να χρησιμοποιηθεί για να μας αποκαλύψει εύκολα τη μορφή του βαρυτικού πεδίου σε κατανομές ύλης που παρουσιάζουν μεγάλη συμμετρία.
- Η βαρυτική έλξη μεταξύ δύο σφαιρικών φλοιών πεπερασμένων διαστάσεων, αλλά μη επικαλυπτόμενων είναι ακριβώς ίδια με αυτήν δύο σημειακών μαζών με μάζες όσο ο κάθε σφαιρικός φλοιός, τοποθετημένες στα κέντρα των αντίστοιχων σφαιρών. Η πρόταση αυτή ισχύει κατ' επέκταση και για γεμάτες σφαιρικές μάζες με ισοτροπικά κατανεμημένη ύλη. Δεν ισχύει όμως για μη σφαιρικές κατανομές ύλης.
- Οι παλιρροϊκές δυνάμεις οφείλονται στη διαφοροποίηση του βαρυτικού πεδίου στην περιοχή ενός σώματος από τις άλλες πηγές του βαρυτικού πεδίου καθώς τα σώματα κινούνται εξαιτίας της βαρυτικής τους αλληλεπίδρασης. Η ένταση των παλιρροϊκών δυνάμεων από μια σημειακή (ή σφαιρική) βαρυτική πηγή μειώνεται με την απόσταση r από την πηγή ως $\propto r^{-3}$.
- Το βαρυτικό πεδίο γύρω από μια τυχαία κατανομή μάζας μπορεί να γραφεί ως ένα πλειονοπολικό ανάπτυγμα (όπως και στον ηλεκτρομαγνητισμό) με μονοπολικό όρο αυτόν μας μάζας όσο η συνολική μάζα της κατανομής. Αν η αρχή μέτρησης των αποστάσεων είναι το κέντρο μάζας της κατανομής δεν εμφανίζεται στο ανάπτυγμα ο διπολικός όρος, οπότε ο αμέσως επόμενος μετά τον μονοπολικό όρο είναι ο τετραπολικός όρος που έχει τη μορφή

$$\Phi_{l=2}(\mathbf{r}) = -G \frac{\mathcal{Q}_{ij} r_i r_j}{r^5}$$

όπου \mathcal{Q}_{ij} η τετραπολική ροπή της κατανομής

$$\mathcal{Q}_{ij} = \int_V dm(\mathbf{R}) (3 R_i R_j - R^2 \delta_{ij})$$

(\mathbf{R} είναι η θέση της κάθε στοιχειώδους μάζας σε ολόκληρο τον όγκο V όπου κατανέμεται η ύλη). Βάσει του ορισμού της η τετραπολική ροπή μετράει την πρώτη απόκλιση της κατανομής από τη σφαιρική συμμετρία. Έτσι για μια σφαίρα η τετραπολική ροπή είναι μηδέν, ενώ για ένα επίμηκες σώμα η \mathcal{Q}_{zz} (με άξονα συμμετρίας τον z) είναι θετική (και αρνητική για ένα πεπλατυ-

σμένο σώμα).