Διάλεξη 11

$A(t) = \sum_i \vec{x}_i \cdot \vec{p}_i \rightarrow$ Virial

$B(t) = \sum \frac{1}{2} m |\vec{x}_i|^2$ και $\dot{B} = A$

$$\dot{A} = \underbrace{\sum_i m_i |\vec{u}_i|^2}_{= 2K} + \sum_i \vec{x}_i \cdot \Big(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{\varepsilon\xi} \Big)$$

A: φραγμένη ποσότητα

$$\bar{\varphi} = \lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(t) dt$$

και επειδή A: φραγμένο τότε $\bar{\dot{A}} = 0 = 2\bar{K} + \overline{\sum \vec{x}_i \Big(\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} + \vec{F}_i^{\varepsilon\xi} \Big)}$

Αν $\vec{F}^{\varepsilon\xi} = 0$:

$\sum_{j \neq i} \vec{F}_{ji} = -\nabla_i \underset{\text{δυναμικό}}{V}$

$-\vec{x}_i \cdot \nabla_i V = -nV$

Τότε έχουμε $\bar{K} = \frac{n}{2} \bar{V}$

$\boxed{\text{Πχ}}$ $n = -1$ Βαρυτική

$\bar{K} = -\frac{1}{2} \bar{V}$ (1)

$E = \bar{K} + \bar{V} \overset{(1)}{=} \bar{K} - 2\bar{K} = -\bar{K}$

$\bar{V} = -2\bar{K} = 2(-\bar{K}) = 2E$

$\eta=2$ A.T

$\bar{K}=\bar{V}$

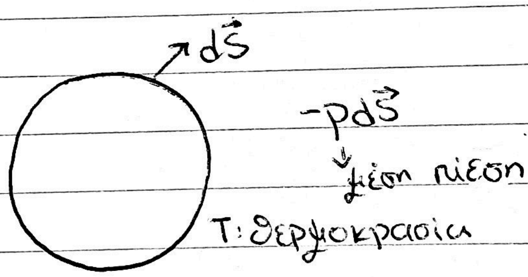
$E=\bar{K}+\bar{V}$

$\bar{K}=\bar{V}=\frac{E}{2}$ (ισοκατανομή ενέργειας)

Για $n=0$ έχουμε πρόβλημα διότι $\bar{K}=0$ που δεν ισχύει για το ελεύθερο σωματίδιο. Ο τρόπος που το αφηνάς είναι:

$$\left.\begin{array}{l}\bar{K}+\bar{V}=E \\ \text{Από Virial}: 2\bar{K}-n\bar{V}=0 \quad \text{και} \quad \bar{V}\to 0\end{array}\right\} \Rightarrow \bar{K}=\bar{E}$$

- Σωματίδια σε δοχείο, τα οποία αλληλεπιδρούν μεταξύ τους και με τα τοιχώματα.



$$2\bar{K}=\overline{\sum \vec{x}_i\cdot\Big(\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ji}\Big)+\underbrace{\sum \vec{x}_i\cdot\vec{F}^{\varepsilon\xi}}}$$

$$=-\oint d\vec{S}\cdot\vec{x}\,p=\dots=-3pV_{\text{όγκος}}$$

ολοκλήρωμα διότι θεωρούμε πολλές συγκρούσεις

Μπορώ να το χωρίσω σε άσπρα κ' μαύρα σωματίδια

$$-\oint d\vec{S}\cdot\vec{x}\,p_M=-3p_M V$$

$$-\oint d\vec{S}\cdot\vec{x}\,p_A=-3p_A V$$

Άρα: $2\bar{K}=3p_A V+3p_M V-\sum \vec{x}_i\sum_{j\neq i}\vec{F}_{ji}$

$2N\frac{3kT}{2}$, $N=N_A+N_B$

$$\Rightarrow NkT = \underbrace{(p_A + p_M)}_{=p} V - \underbrace{\frac{1}{3}\sum \vec{x}_i \sum_{i\neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{οι διορθώσεις είναι προσθετικές}}$$ Καταστατική Εξίσωση

$$NkT = (p_A + p_M)V - \frac{1}{6}\Big(\sum \vec{x}_i \underbrace{\sum_{j\neq i} \vec{F}_{ji}}_{\text{αλληλεπιδράσεις στα } i} + \sum_j \vec{x}_j \overbrace{\sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij}}^{\text{αλληλεπιδράσεις στα } j}\Big) \Rightarrow$$

$$\sum_{i\neq j} \vec{F}_{ij} = -\vec{F}_{ji} \text{ από } 3^{ο} \text{ N.N}$$

$$\Rightarrow NkT = (p_A + p_M)V - \frac{1}{6}\overline{\Big(\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} (\vec{x}_i - \vec{x}_j)\cdot \vec{F}_{ji}\Big)}$$

! Σχόλιο: Τα άτομα αισθάνονται την δύναμη όταν τα σώματα συγκρούονται ελαστικά, δηλαδή όταν $\vec{x}_i = \vec{x}_j$ τότε έχω το αποτέλεσμα που ξέρω χωρίς τον όρο με το 1/6 ο οποίος μηδενίζεται.

Αν θεωρήσουμε:

$$V_{ij} = K\left(\frac{r}{D}\right)^n, \quad n<0,\ |n| \to \infty \text{ και } k>0$$

D: ελάχιστη απόσταση μεταξύ μορίων

ΤΟΤΕ: $2\bar{K} = 3p\underset{\text{όγκος}}{V} + \frac{n}{2}\underset{\text{δυναμική ενέργεια}}{\bar{V}}$

Επειδή $\bar{K} + \bar{V} = E$ θα πρέπει $V \to 0$

Πίσω στο:

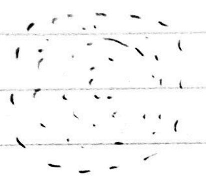
$$NkT = pV - \frac{1}{6}\underbrace{\overline{\sum_{\substack{i,j \\ i\neq j}} (\vec{x}_i - \vec{x}_j)\vec{F}_{ji}}}_{\overline{\sum_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j)\vec{F}_{j1}} + \overline{\sum_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j)\vec{F}_{j2}} + \dots}$$

Περιμένω τα σφαιρίδια να έχουν ίδια συμπεριφορά άρα οι όροι να είναι ΙΣΟΙ.

$$\Rightarrow NkT = p\bar{V} - \frac{N}{6}\overline{\sum_j (\vec{x}_i - \vec{x}_j)\cdot \vec{F}_{ji}}$$

- Θα δούμε τι θα γίνει για σωματίδια που αλληλεπιδρούν βαρυτικά ($n=-1$) και κινούνται διάσπαρτα (π.χ νέφος)

$E = K + V$



$E > 0$

$$\left.\begin{aligned} E &= \bar{K} + \bar{V} \\ \bar{V} &= -2\bar{K} \quad \left(\bar{K} = \tfrac{n}{2}\bar{V}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow E = -\bar{K} \text{ άρα } E<0 \text{ αφού } K>0$$

$$B = \sum m_i \frac{|\vec{x}_i|^2}{2}, \quad \underbrace{\dot{B} = \sum m_i \vec{x}_i \cdot \vec{v}_i}_{\text{Virial}}$$

$\downarrow$

μέτρο της διασποράς

$$\ddot{B} = \sum m_i |v_i|^2 - \sum \underbrace{x_i \nabla_i V}_{= -V} \quad (xV' = nV)$$

$$\ddot{B} = 2K + V = E + K$$

$\ddot{B} > E$ (αφού $K>0$)

$$B(t) > \frac{Et^2}{2} + \dot{B}(0)t + B(0)$$

Όταν $E<0$:

$E = K + V$

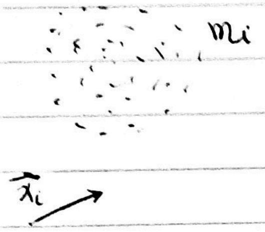
$E = \bar{K} + \bar{V}$

Αν όλα τα σωματίδια πάνε στο άπειρο τότε $V \to 0$ άρα $E>0$ $(K>0)$ το οποίο είναι αντίθετο με την αρχική πρόταση. Ακόμα και αν φύγουν μερικά η διασπορά δεν μπορεί να πάει στο ∞.

Νόμοι Νεύτωνα για πολλά σωματίδια

Σωματιδιακή θεώρηση

N σωματίδια



$$\rho = \sum_{i=1}^{N} m_i \, \delta(x - x_i), \quad x_i = x_i(t)$$

$$\vec{R}_{KM} = \frac{\sum m_i \vec{x}_i}{\sum_i m_i}$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum m_i \nabla_x \delta(-\vec{u}_i(t)) =$$

$$= -\nabla_x \Big(\underbrace{\sum_i m_i \, \delta(\vec{x} - \vec{x}_i)}_{=\rho} \vec{u}_i \Big)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla_x (\rho \vec{u}) = 0$$

Εξίσωση συνέχειας για πυκνότητα δηλαδή διατήρηση μάζας

Euler (συνεχής)

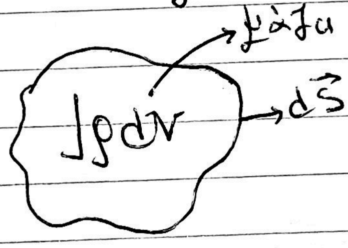
$$\rho = \lim_{\delta V \to 0} \frac{\delta m}{\delta V} \quad \text{(πυκνότητα)}$$

Για συνεχές: $\vec{R}_{KM} = \dfrac{\int \rho \vec{x} \, dV}{\int \rho \, dV}$

$\rho = \rho(\vec{x}, t)$: θεωρώ πεδίο

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\underbrace{\rho \cdot \vec{u}}_{\vec{J}}) = 0$$, όπου $u(\vec{x}, t)$: πεδίο ταχυτήτων

↳ η ταχύτητα του σωματιδίου που βρίσκεται σ' αυτή την θέση



$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho \, dV = \int \frac{\partial \rho}{\partial t} dV = -\int \rho \vec{v} \cdot d\vec{S}$$

Gauss $-\int \nabla(\rho \vec{v}) dV$

Άρα για κάθε όγκο V πρέπει να ισχύει:

$$\int \Big[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) \Big] dV = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho \vec{v}) = 0$$ Νόμος διατήρησης μάζας

$\Longrightarrow$

Στην περίπτωση όπου M: πεπερασμένη και ταχύτητες πεπερασμένες αλλά το $\vec{R}_{KM}$ δεν μπορεί να οριστεί για πολλά σωματίδια μπορούμε να ορίσουμε την $\vec{V}_{KM}$.

Απόδειξη

$R_{KM}(t+\delta t)$

$R_{KM}(t)$

$$\vec{V}_{KM} = \frac{\vec{R}_{KM}(t+\delta t) - \vec{R}_{KM}(t)}{\delta t} = \lim_{\delta t \to 0} \frac{1}{M} \frac{\sum m_i(\vec{x}_i(t) + \delta t\,\vec{V}_i + O(\delta t^2)) - m_i \vec{x}_i(t)}{\delta t}$$

$$= \frac{1}{M} \sum_i m_i \vec{V}_i$$