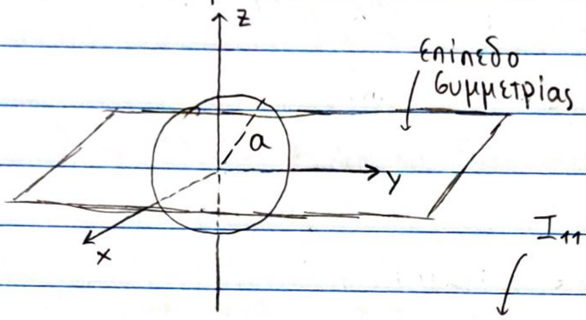
ΜΑΘΗΜΑ 15

Δείξαμε οτι ο τανυστής ροπής αδράνειας είναι:

$$I_{\alpha\beta} = \sum \delta m \left(|\vec{x}|^2 \delta_{\alpha\beta} - x_\alpha x_\beta \right)$$

ΕΦΑΡΜΟΓΕΣ

Γεμάτη σφαίρα



$$\vec{x} = x_1\hat{x} + x_2\hat{y} + x_3\hat{z} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$|\vec{x}|^2$ $\qquad x_\alpha x_\beta = x_1 \cdot x_1$

$$I_{11} = \sum dm \left((x^2+y^2+z^2) - x^2 \right)$$

Γενικά $\quad I = \sum dm \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}$

τα ολοκληρώματα τύπου $-\int dm\, xy$ είναι ουσιαστικά ολοκληρώματα περιττών συναρτήσεων σε συμμετρικό διάστημα (λόγω σφαιρικής συμμετρίας) οπότε αυτοί οι όροι μηδενίζονται

οπότε $\quad I = \sum \delta m \begin{bmatrix} y^2+z^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2 \end{bmatrix}$ όπου λόγω σφαιρικής συμμετρίας περιμένουμε $I_{11} = I_{22} = I_{33} = I$

$$3I = \int dm\,(y^2+z^2) + \int dm\,(x^2+z^2) + \int dm\,(x^2+y^2)$$

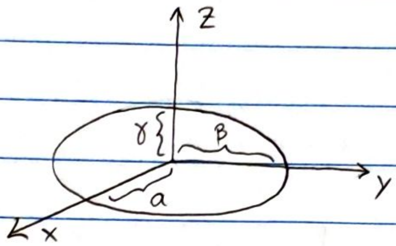
$$3I = \int dm\, 2(x^2+y^2+z^2) = \int dm\; 2r^2$$

$$dm = \rho \cdot 4\pi r^2 dr$$

$$3I = \rho \cdot 8\pi \int_0^a r^4\, dr = 8\pi\rho \left[\frac{r^5}{5}\right]_0^a = 8\pi\rho\frac{a^5}{5} = \underbrace{\frac{4\pi}{3}a^3\rho}_{m}\; \frac{2\cdot 3}{5}a^2$$

$$\Rightarrow \quad I = \frac{2}{5} m a^2 \qquad I = \frac{2}{5} m a^2 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Ελλειψοειδές



$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{\beta^2}+\frac{z^2}{\gamma^2}=1$$

πάλι λόγω συμμετριών

$$I=\sum \delta m\begin{bmatrix} y^2+z^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

Θα κάνω τον μετασχηματισμό $x=a\xi \quad y=\beta\eta \quad z=\gamma\zeta$

για τις συντεταγμένες ξ,η,ζ ισχύει $\xi^2+\eta^2+\zeta^2=1$ πάνω σε μον. σφαίρα

το ολοκλήρωμα $\int dm$ γίνεται $\int dm=\int \rho\cdot dxdydz=\int \underbrace{\rho\, a\beta\gamma\, d\xi d\eta d\zeta}_{dm'}$

$$\Rightarrow \int dm=\int a\beta\gamma\, dm'$$

$$I_z=\int dm\,(x^2+y^2)=\int a\beta\gamma\, dm'\,(a^2\xi^2+\beta^2\eta^2)$$

μας βολεύει να βρούμε τα ολοκληρώματα $\int dm'\xi^2$ και $\int dm'\eta^2$ τα οποία περιμένουμε λόγω σφαιρικής συμμετρίας να είναι ίσα

Από τη σφαίρα είδαμε $\int dm'(\xi^2+\eta^2)=\frac{8\pi\rho}{5\cdot 3}\cancel{a^5}$ 1 (εδώ έχουμε μοναδιαία σφαίρα)

άρα $\int dm'\xi^2=\frac{4\pi\rho}{15}$

πίσω στο $I_z=\int a^3\beta\gamma\, dm'\xi^2+\int a\beta^3\gamma\, dm'\eta^2$

$$I_z=a\beta\gamma\,\frac{4\pi\rho}{15}(a^2+\beta^2)$$

$$I_z=\underbrace{a\beta\gamma\,\frac{4\pi\rho}{3}}_{m \text{ ελλειψοειδούς}}\,\frac{1}{5}(a^2+\beta^2)$$

$$\boxed{I_z=\frac{m}{5}(a^2+\beta^2)}$$

Αντίστοιχα $\boxed{I_x=\frac{m}{5}(\beta^2+\gamma^2)}$ $\boxed{I_y=\frac{m}{5}(a^2+\gamma^2)}$

$$I = \frac{m}{5}\begin{bmatrix} \beta^2+\gamma^2 & 0 & 0 \\ 0 & a^2+\gamma^2 & 0 \\ 0 & 0 & a^2+\beta^2 \end{bmatrix}$$

Ιδιότητα

$$I = \begin{bmatrix} \overset{I_1}{\overset{\shortparallel}{y^2+z^2}} & -xy & -xz \\ -xy & \overset{I_2}{\overset{\shortparallel}{x^2+z^2}} & -yz \\ -xz & -yz & \overset{I_3}{\overset{\shortparallel}{x^2+y^2}} \end{bmatrix}$$

Βλέπουμε ότι $I_1 + I_2 = x^2 + y^2 + 2z^2 \geq x^2+y^2 = I_3$

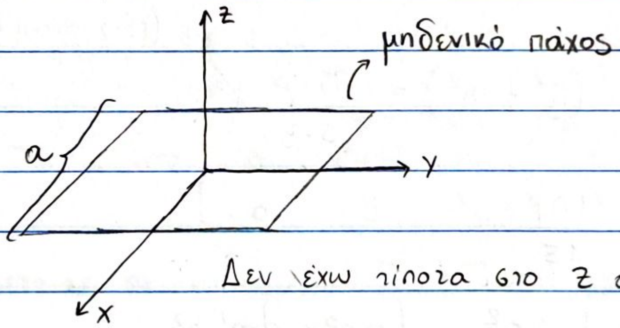
$I_1 + I_2 \geq I_3$

αντίστοιχα $I_1 + I_3 \geq I_2$

$I_2 + I_3 \geq I_1$

Πότε είναι ίσα ;

Τετραγωνικό φύλλο



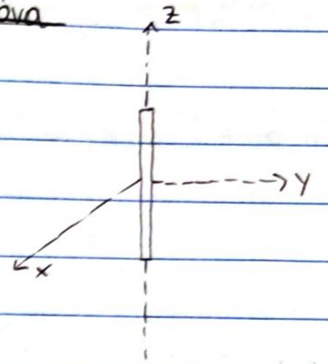
Δεν έχω τίποτα στο z οπότε $z=0$

$$I = \int_{xy} dm \begin{bmatrix} y^2 & -xy & 0 \\ -xy & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

και επειδή $I_{12} = -\int dm\, xy = -\overset{\text{επιφ. πυκν.}}{\sigma} \int_{-a/2}^{a/2}\int_{-a/2}^{a/2} dx\, dy\, xy$ περιττή συνάρτηση σε συμμετρικό διάστημα $=0$

$$I = \int_{xy} dm \begin{bmatrix} y^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2 \end{bmatrix} \leadsto I_z = I_x + I_y$$

Βελόνα



Εδώ δεν έχω x και y οπότε και η ολοκλήρωση γίνεται ως προς z

$$I = \int_z dm \begin{bmatrix} z^2 & 0 & 0 \\ 0 & z^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$I_z = 0$ $\quad$ $I_x = I_y$

ΔΙΑΓΩΝΙΟΠΟΙΗΣΗ $I_{\alpha\beta}$

Όπως είδαμε ο πίνακας $I_{\alpha\beta}$ στη γενική του μορφή είναι συμμετρικός $\rightsquigarrow$ μπορεί να διαγωνιοποιηθεί επιλέγοντας κατάλληλους άξονες x_1, x_2, x_3

· Έστω μοναδιαία σφαίρα με $x_1^2 + x_2^2 + x_3^3 = 1$

και τη συνάρτηση $G = x_i I_{ij} x_j$ με $x_i x_i = 1$ $\quad$ πολλαπλασιαστής Lagrange

Θέλω τα ακρότατα της G για αυτό βρίσκω τα ακρότατα της

~~έχουμε την απεικόνιση~~ $F = x_i I_{ij} x_j + \lambda(1 - x_i x_i)$

~~απεικονίζω τα σημεία της σφαίρας σε αυτούς τους πραγματικούς αριθμούς~~

ακρότατο $\dfrac{\partial F}{\partial x_a} = 2 I_{aj} x_j - 2\lambda x_a = 0 \Rightarrow I_{aj} x_j = \lambda x_a$

ιδιοκατάσταση $\quad$ ↳ ιδιοτιμή

Εάν τώρα λάβω άξονες ώστε ο x άξονας να έχει τη διεύθυνση του ακρότατου

τότε η $F = I_{xx} x^2 + I_{yy} y^2 + I_{zz} z^2 + 2 I_{xy} xy + 2 I_{xz} xz + 2 I_{yz} yz$

ακρότατο $\rightsquigarrow (1,0,0)$

υποστηρίζω ότι στους άξονες αυτούς που έχω επιλέξει ~~$2I_{xy}\,xy = 0$~~ θα είναι $I_{xy} = 0$

$$F - F_{\text{ακρότατο}} = I_{xx}(x^2 - 1) + 2x(I_{xz} z + I_{xy} y) + I_{yy} y^2 + I_{zz} z^2 + 2 I_{yz} yz$$

$\overset{\shortparallel}{I_{xx}}$

Σε σφαιρικές σκεπτόμενοι την πολική γωνία απ' τον x $\quad$ $x = \cos\theta$

$y = \sin\theta\cos\phi$

$z = \sin\theta\sin\phi$

$$F - F_{\alpha\kappa\rho} = -I_{xx}\underbrace{(\cos^2\theta - 1)}_{-\sin^2\theta} + 2\cos\theta\left(I_{xz}\sin\theta\sin\phi + I_{xy}\sin\theta\cos\phi\right)$$

$$+ I_{yy}\sin^2\theta\cos^2\phi + I_{zz}\sin^2\theta\sin^2\phi + 2I_{yz}\sin^2\theta\cos\phi\sin\phi$$

Για μικρές γωνίες θ

$$F - F_{\alpha\kappa\rho} = -I_{xx}\underbrace{\sin^2\theta}_{\sim\theta^2} + 2\cos\theta\underbrace{\sin\theta}_{\sim\theta}\left(I_{xz}\sin\phi + I_{xy}\cos\phi\right)$$

$$+ I_{yy}\underbrace{\sin^2\theta}_{\sim\theta^2}\cos^2\phi + I_{zz}\underbrace{\sin^2\theta}_{\sim\theta^2}\sin^2\phi + 2I_{yz}\underbrace{\sin^2\theta}_{\sim\theta^2}\cos\phi\sin\phi$$

Επειδή κοντά στο ακρότατο θέλουμε η σ να προσεγγίζεται από μόνο 2ης τάξης όρους ως προς θ οπότε ο όρος $I_{xz}\sin\phi + I_{xy}\cos\phi = 0 \;\forall\phi$

Οπότε $I_{xz} = I_{xy} = 0$

Εάν τώρα ψάξω για το επόμενο ακρότατο αυτό θα βρίσκεται στο επίπεδο ⊥ x

$$F = I_{xx}x^2 + I_{yy}y^2 + I_{zz}z^2 + 2\cancel{I_{yz}}\,yz$$

0 με το ίδιο επιχείρημα παίρνοντας ακρότατο ως προς y.

Εάν δεστρέψω τους άξονες ώστε ο x να συμπίπτει με το πρώτο ακρότατο και ο y με το δεύτερο τότε

Τελικά $I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$

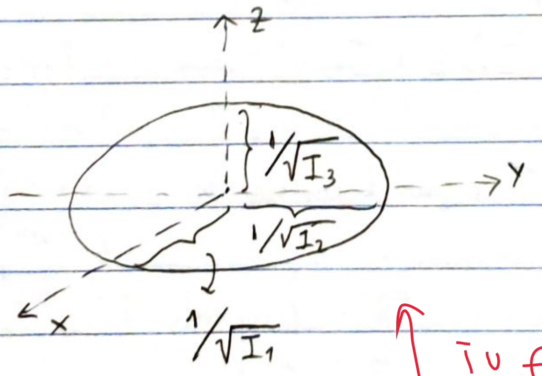
όπου τα x που καθιστούν το σ ακρότατη είναι ⊥ μεταξύ τους και αν επιλέγουν σαν άξονες τότε ο I είναι διαγώνιος

Και γενικά $x_i I_{ij} x_j$ ελλειψοειδές διότι τα $I_1, I_2, I_3 \geq 0$

$$I_1x^2 + I_2y^2 + I_3z^2 = 1$$

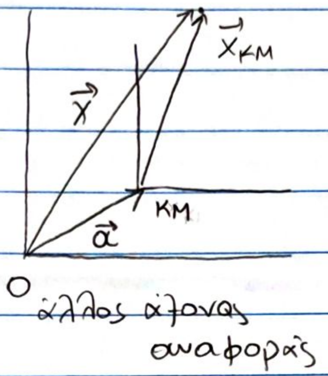
$I_3 \geq I_2 \geq I_1 \geq 0$

διότι σ > 0 είναι η κινητική ενέργεια.



Το ελλειψοειδές αδράνειας του σώματος

ΘΕΩΡΗΜΑ STEINER



$$I_{ij}^{O} = \sum \delta m \left[|\vec{x}|^2 \delta_{ij} - x_i x_j \right]$$

$$|\vec{x}|^2 = |\vec{\alpha} + \vec{x}_{KM}|^2$$

$$x_i = a_i + x_{i,KM}$$

$$x_j = a_j + x_{j,KM}$$

$$I_{ij}^{O} = \sum \delta m \left(|\vec{a}|^2 \delta_{ij} + |\vec{x}_{KM}|^2 \delta_{ij} - a_i a_j - a_i x_{j,KM} - a_j x_{i,KM} - x_{iKM} x_{jKM} \right)$$

$$I_{ij}^{O} = \underbrace{\sum \delta m \left(|\vec{x}_{KM}|^2 \delta_{ij} - x_{iKM} x_{jKM} \right)}_{I_{ij}^{KM} \text{ ροπή αδράνειας ως προς KM}} + \sum \delta m \left(|\vec{a}|^2 \delta_{ij} - a_i a_j \right)$$

$$- a_i \underbrace{\sum \delta m \, x_{j,KM}}_{0 \text{ από ορισμό KM}} - a_j \underbrace{\sum \delta m \, x_{i,KM}}_{0}$$

$$I_{ij}^{O} = I_{ij}^{KM} + M \left(|\vec{a}|^2 \delta_{ij} - a_i a_j \right)$$