ΜΑΘΗΜΑ 16

ΑΣΚΗΣΗ 24 Α)

Ορίζουμε την απόσταση X_i του σωματίου i από το ΚΜ

$$X_i = \sum_{j\neq i} m_i r_{ij} \frac{1}{M}$$

$$I = \sum m_i x_i^2 = \sum_i{}' m_i (x_j + r_{ij})^2$$ αφού $r_{ij} = X_i - X_j \Rightarrow X_i = r_{ij} + X_j$

$$= \sum_i{}' m_i \left(x_j^2 + 2x_j r_{ij} + r_{ij}^2 \right)$$

$$= x_j^2 \cancelto{M}{\sum_i m_i} + 2x_j \underbrace{\sum_i m_i r_{ij}}_{=-MX_i} + \sum_i m_i r_j^2$$

γιατί $\sum_i{}' m_i r_{ij} = -\sum_i{}' m_i r_{ji} = -MX_j$

$$I = x_j^2 M - 2M x_j x_j + \sum{}' m_i r_j^2$$

$$\Rightarrow \underbrace{\sum_j m_j}_{M} I = M \cancelto{I}{\sum_j m_j x_j^2} - 2M \underbrace{\sum_j{}' m_j x_j^2}_{I} + \sum_j m_j \sum{}' m_i r_{ij}^2$$

$$\Rightarrow \cancel{2} M I = \cancel{2} \sum_{i<j} m_i m_j r_{ij}^2$$

$$\Rightarrow \boxed{I = \frac{1}{M} \sum_{i<j}{}' m_i m_j r_{ij}^2}$$

ΑΣΚΗΣΗ 25

$$I = ML^2 \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}$$ για σφαίρα $L=R$ $\quad a=\beta=\gamma=\frac{2}{5}$

για κύβο L $\quad \alpha=\beta=\gamma$

Μπορώ να δω τον κύβο σαν επάλληλία από πλάκες και την πλάκα σαν επάλληλία από ράβδους

Α ΤΡΟΠΟΣ

$$I = mL^2 a$$

$$I_{\gamma\varepsilon\mu\, L+dL} = M'(L+dL)^2 a$$

$$I_{\gamma\varepsilon\mu\, L} = ML^2 a$$

$$I_{\varphi\lambda o\iota o\acute{\upsilon}} = I_{\gamma\varepsilon\mu\, L+dL} - I_{\gamma\varepsilon\mu\, L} \Rightarrow$$

$$I_{\varphi\lambda o\iota o\acute{\upsilon}} = M'(L+dL)^2 a - ML^2 a = M'L^2\left(1+\frac{dL}{L}\right)^2 a - ML^2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{\varphi\lambda o\iota o\acute{\upsilon}} = M'L^2\left(1+2\frac{dL}{L}\right)a - ML^2 a \Rightarrow$$

$$\Rightarrow I_{\varphi\lambda o\iota o\acute{\upsilon}} = M'L^2 a + 2M'L^{\cancel{2}}\frac{dL}{\cancel{L}}a - ML^2 a$$

$$\Rightarrow I_{\varphi\lambda o\iota o\acute{\upsilon}} = \underbrace{(M'-M)}_{\text{μάζα φλοιού } dM} L^2 a + 2(M+dM)\,dL\,L\,a$$

2ης τάξης όρος

$$\Rightarrow I_{\varphi\lambda o\iota o\acute{\upsilon}} = dM L^2 a + 2M\,dL\,L\,a + \cancel{2dM\,dL\,L\,a}$$

$$M = \beta L^3 \quad \frac{dM}{dL} = 3\beta L^2 = \frac{3}{L}\overbrace{\beta L^3}^{M} \Rightarrow \frac{dM}{dL} = \frac{3M}{L} \rightarrow dL = \frac{L\,dM}{3M}$$

$$I_{\varphi\lambda o\iota o\acute{\upsilon}} = dM L^2 a + 2\cancel{M} L a \frac{L\,dM}{3\cancel{M}} = dM L^2 a + \frac{2}{3} dM L^2 a$$

$$\boxed{I_{\varphi\lambda o\iota o\acute{\upsilon}} = dM \cdot L^2 a\left(1+\frac{2}{3}\right)}$$

Β' ΤΡΟΠΟΣ

$I = M(L)\cdot L^2 a$ Θέλω να φτάσω σε κάτι της μορφής

ροπή αδράν. φλοιού $\rightarrow dI = dM\,L^2 a'$

$$\frac{dI}{dM} = \frac{dI}{dL}\frac{1}{dM/dL} \Rightarrow \frac{dI}{dM} = \frac{(M'L^2a + 2MLa)}{M'} \Rightarrow$$

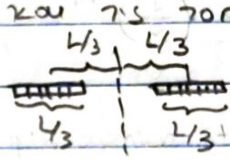
$$\frac{dI}{dM} = L^2a + 2\frac{M}{M'}La$$ όπου $\left.\begin{matrix} M \propto L^3 \\ M' \propto 3L^2 \end{matrix}\right\} \frac{M}{M'} = \frac{L^3}{3L^2} = \frac{L}{3}$

$$\frac{dI}{dM} = L^2a + \frac{2}{3}L^2a \Rightarrow \boxed{dI = dM\,L^2a\left(1+\frac{2}{3}\right)}$$

ΑΣΚΗΣΗ 26 (με τα κενά)

Σε άπειρα βήματα θα έχουμε την τελική μορφή της ράβδου, η οποία θα έχει $I = ML^2a$

Αν δημιουργήσουμε δύο ίδιες ράβδους και τις τοποθετήσουμε



θα έχουμε $I = 2\cdot\left(\frac{M}{2}\left(\frac{L}{3}\right)^2 a + \frac{M}{2}\left(\frac{L}{3}\right)^2\right.$

λόγω αυτομοιότητας

Λόγω του ότι έχουμε fractal

$$\cancel{M}\cancel{L^2}a = \cancel{M}\frac{\cancel{L^2}}{9}a + \cancel{M}\frac{\cancel{L^2}}{9} \Rightarrow a = \frac{a}{9} + \frac{1}{9} \Rightarrow$$

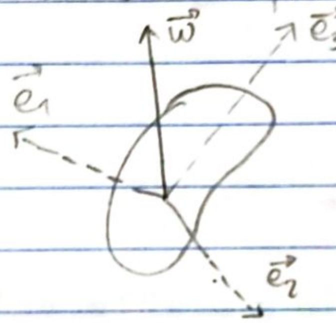
$$\Rightarrow \quad 8a = 1 \Rightarrow \boxed{a = \frac{1}{8}}$$

Έστω ότι έχουμε ένα στερεό σώμα το οποίο περιστρέφεται με ένα ω
Αφαιρούμε ένα μέρος αυτού του στερεού και το περιστρέφουμε με την ίδια γωνιακή ταχύτητα.

Αρχικά η κινητική του ενέργεια θα μειωθεί $\quad 2K = \omega^T I\, \omega$

Το ελλειψοειδές της κινητικής ενέργειας του τελικού σώματος θα είναι $\dfrac{\omega_1'^2}{2K/I_1} + \dfrac{\omega_2'^2}{2K/I_2} + \dfrac{\omega_3'^2}{2K/I_3} = 1$ πιθανώς στραμμένο και μεγαλύτερο από το παλιό. (Απόδειξη στο επόμενο μάθημα)

Έστω ένα στερεό $\leftarrow$ άξονες που διαγωνοποιούν το I



$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{G}$$

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{e}_1 + \omega_2 \hat{e}_2 + \omega_3 \hat{e}_3$$

$$\vec{L} = I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3 \qquad I_1, I_2, I_3 \text{ σταθ}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \overbrace{I_1 \frac{d\omega_1}{dt} \hat{e}_1 + I_2 \frac{d\omega_2}{dt} \hat{e}_2 + I_3 \frac{d\omega_3}{dt} \hat{e}_3}^{d\vec{L}/dt \text{ ως προς το περιστρεφόμενο σύστημα}}$$

$$+ I_1 \omega_1 \dot{\hat{e}}_1 + I_2 \omega_2 \dot{\hat{e}}_2 + I_3 \omega_3 \dot{\hat{e}}_3$$

$\leftarrow$ οι άξονες δεν είναι σταθεροί ως προς τον χρόνο γιατί περιστρέφονται μαζί με το σώμα.

Ισχύει $\dot{\hat{e}}_i = \vec{\omega} \wedge \hat{e}_i$

οπότε θα έχω $I_i \omega_i (\vec{\omega} \times \hat{e}_i) = \vec{\omega} \times I_i \omega_i \hat{e}_i$

άρα όλοι οι όροι μαζί $\vec{\omega} \times \big(\underbrace{I_1 \omega_1 \hat{e}_1 + I_2 \omega_2 \hat{e}_2 + I_3 \omega_3 \hat{e}_3}_{\vec{L}}\big)$

Άρα $\boxed{\dfrac{d\vec{L}}{dt} = \left.\dfrac{d\vec{L}}{dt}\right|_n + \vec{\omega} \times \vec{L} = \vec{G}}$

$$\vec{\omega} \times \vec{L} = \begin{vmatrix} \hat{e}_1 & \hat{e}_2 & \hat{e}_3 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 \\ I_1 \omega_1 & I_2 \omega_2 & I_3 \omega_3 \end{vmatrix}$$

$$\left.\begin{aligned} I_1 \frac{d\omega_1}{dt} + (I_3 - I_2)\,\omega_2\omega_3 &= G_1 \\ I_2 \frac{d\omega_2}{dt} + (I_1 - I_3)\,\omega_1\omega_3 &= G_2 \\ I_3 \frac{d\omega_3}{dt} + (I_2 - I_1)\,\omega_2\omega_1 &= G_3 \end{aligned}\right\}\ \text{Εξισώσεις Euler}$$

Σε ελεύθερο σώμα

$G_1 = G_2 = G_3 = 0$

· Έχουμε διατήρηση ενέργειας και διατήρηση στροφορμής

$$\Rightarrow 2T = I_1\omega_1^2 + I_2\omega_2^2 + I_3\omega_3^2 \Rightarrow$$

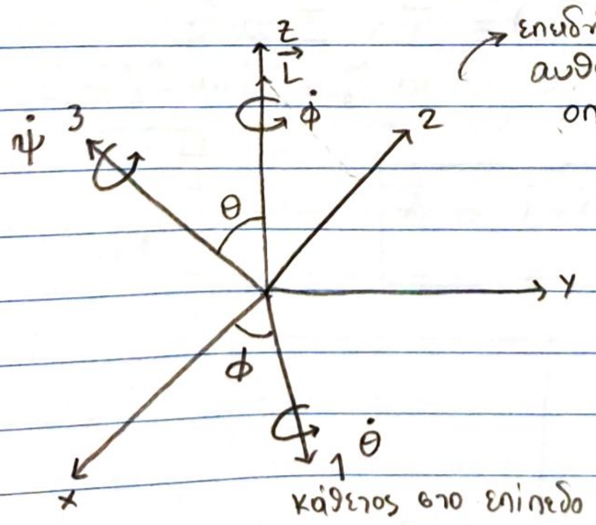
$$\Rightarrow 2T = \frac{I_1^2\omega_1^2}{I_1} + \frac{I_2^2\omega_2^2}{I_2} + \frac{I_3^2\omega_3^2}{I_3} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{L_1^2}{2TI_1} + \frac{L_2^2}{2TI_2} + \frac{L_3^2}{2TI_3} = 1$$ ορίζεται ελλειψοειδές

Αντίστοιχα για τη διατήρηση στροφορμής

$$L_1^2 + L_2^2 + L_3^2 = L^2 \longrightarrow$$ ορίζει σφαίρα

· Έστω ένα συμμετρικό στερεό I, I, I_3 κύριες ροπές αδράνειας



κάθετος στο επίπεδο που ορίζουν 3, z

επειδή έχω συμμετρία στους 1, 2 υπάρχει μια αυθαιρεσία στην επιλογή των 1, 2 οπότε μπορώ να βάλω τον 1 πάνω στη node line

$\omega_1 = \dot{\theta}$ λόγω καθετότητας δεν έχω προβολή της $\dot{\phi}$

$\omega_2 = \dot{\phi}\cos\left(\frac{\pi}{2} - \theta\right) = \dot{\phi}\sin\theta$

προβολή της $\dot{\phi}$ στον 2

$\omega_3 = \dot{\phi}\cos\theta + \dot{\psi}$