ΜΗΧΑΝΙΚΗ #10 4/11/2024

Συμμετρίες αλλαγής κλίμακας (Scaling)

$V(\alpha\vec{x}) = \alpha^n V(\vec{x})$ π.χ $V_{ταλαντωτή} = \frac{1}{2}kr^2 \rightsquigarrow n=2$

$V_{βαρ} = \frac{1}{r} \rightsquigarrow n=-1$

Έστω μια Lagrange $\rightsquigarrow L = \frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2 - V(x)$ και θεωρούμε μετασχηματισμό αλλαγής κλίμακας $\begin{cases} t' \to \beta t \\ \vec{x}' \to \alpha\vec{x} \end{cases}$

Άρα η Λαγκρανζιανή θα μετασχηματιστεί: $L' = \frac{1}{2}m\left(\frac{d(\alpha\vec{x})}{d(\beta t)}\right)^2 - \alpha^n V(x)$

$\Rightarrow L' = \frac{\alpha^2}{\beta^2}\frac{1}{2}m|\dot{\vec{x}}|^2 - \alpha^n V(x)$

Για να παραμένει η Lagrange αναλλοίωτη πρέπει: $\frac{\alpha^2}{\beta^2} = \alpha^n \Rightarrow \beta^2 = \alpha^{2-n}$

$\Rightarrow \beta = \alpha^{1-n/2}$

Άρα $\begin{array}{l} \vec{x}' = \alpha\vec{x} \\ t' = \alpha^{1-\frac{n}{2}}t \end{array}$

Περιπτώσεις

① Στον αρμονικό ταλαντωτή $\rightsquigarrow V = \frac{1}{2}kr^2$ όπου $n=2$. Έστω μια χωρική αλλαγή κλίμακας της μορφής $\vec{x}' \to \alpha\vec{x}$. Η χρονική αλλαγή κλίμακας $\rightsquigarrow t' = \alpha^{1-\frac{2}{2}}t$

$\Rightarrow t' = t \rightsquigarrow$ η περίοδος κίνησης είναι ανεξάρτητη από το πλάτος της ταλάντωσης

② Για βαρυτικό δυναμικό $\rightsquigarrow n=-1$ άρα $t' \to \alpha^{1+\frac{1}{2}}t \Rightarrow t' = \alpha^{3/2}t$

Έχει την μορφή του 3ου νόμου του Kepler $\rightsquigarrow T^2 = \alpha^3$

③ Για ομογενές βαρυτικό πεδίο $\rightsquigarrow n=1$ άρα $t' \to \alpha^{1-\frac{1}{2}}t \Rightarrow t' = \alpha^{\frac{1}{2}}t \Rightarrow t' = \sqrt{\alpha}\,t$

$\Rightarrow \frac{t'}{t} = \sqrt{\alpha} \rightsquigarrow \frac{t'}{t} = \sqrt{\frac{z_{max}'}{z_{max}}}$ όπως ήταν αναμενόμενο $z = \frac{1}{2}gt^2$

ΘΕΩΡΗΜΑ VIRIAL

Θεωρούμε σωματίδιο το οποίο έχει μάζα m και ταχύτητα $\vec{v}$

Από 2.N.N $\Rightarrow m\dot{\vec{v}} = \vec{F} \Rightarrow \dot{\vec{p}} = \vec{F}$ και πολ/ζουμε με $\vec{x}$

$\Rightarrow \vec{x}\cdot m\dot{\vec{v}} = \vec{x}\cdot\vec{F}$, Θεωρούμε ότι έχουμε N σωματίδια οπότε:

$\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{x_i}\cdot\dot{\vec{v_i}} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x_i}\cdot\vec{F_i}$ και ολοκληρώνουμε κατά μέλη

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{N}\left[m\frac{d}{dt}(\vec{x_i}\cdot\vec{v_i}) - m|\dot{\vec{v_i}}|^2 \right] = \sum \vec{x_i}\cdot\vec{F_i}$$

Έστω συνάρτηση $\phi(t)$. Η μέση τιμή της ως προς το χρόνο

$$\Rightarrow \bar{\phi}(t) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \phi(t)\,dt \quad \text{και} \quad \left\langle \frac{d\phi(t)}{dt}\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \frac{d\phi}{dt}\,dt$$

$$\Rightarrow \left\langle \frac{d\phi(t)}{dt}\right\rangle = \lim_{T\to\infty}\frac{\phi(T)-\phi(0)}{T} = 0$$ $\Rightarrow$ Εάν $\phi(t) \Rightarrow$ φραγμένη συνάρτηση.

• Στην περίπτωση που έχουμε κλειστές τροχιές τότε $\vec{x_i}\cdot\vec{v_i} \Rightarrow$ φραγμένη

Άρα
$$\left\langle \sum_{i=1}^{N}\left[m\frac{d}{dt}(\vec{x_i}\cdot\vec{v_i}) - m|\dot{\vec{v_i}}|^2 \right]\right\rangle = \left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{x_i}\cdot\vec{F_i}\right\rangle$$

$$\Rightarrow \left\langle \sum_{i=1}^{N} m|\dot{\vec{v_i}}|^2 \right\rangle = -\left\langle \sum_{i=1}^{N} \vec{x_i}\cdot\vec{F_i}\right\rangle \Rightarrow 2\langle K\rangle = -\sum \vec{x_i}\cdot\vec{F_i}$$

$$\langle K\rangle = -\frac{1}{2}\sum_i \vec{x_i}\cdot\vec{F_i}$$ $\Rightarrow$ Θεώρημα Virial

Πολλά δυναμικά που χρησιμοποιούμε όπως τα δυναμικά κεντρικών δυνάμεων είναι ομογενείς συναρτήσεις

$\vec{F_i} = -\nabla_i V$, και $\vec{x_i}\cdot\vec{F_i} = -\vec{x_i}\cdot\nabla_i V$

Για τις ομογενείς συναρτήσεις ισχύει $\Rightarrow xV'(x) = nV(x)$

Άρα $\vec{x_i}\nabla_i V = nV$

Έχουμε $V(\alpha x)=\alpha^n V(x)$ και $\left.\frac{\partial V(\alpha x)}{\partial \alpha}\right|_{\alpha=1} = x V'(x) = \left. n\alpha^{n-1}V(x)\right|_{\alpha=1} = nV(x)$

Άρα $\langle K\rangle = -\frac{1}{2}\langle\sum_{i=1}^{N} \vec{x}_i \vec{F}_i\rangle \Rightarrow \langle K\rangle = \frac{n}{2}\langle V\rangle$

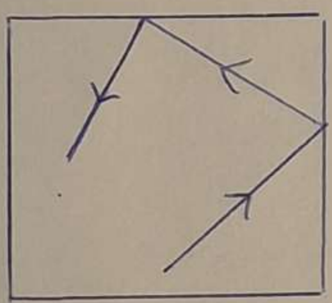
π.χ

Για αρμονικό ταλαντωτή όπου $n=2 \rightsquigarrow \langle K\rangle = \langle V\rangle$

Για Coulomb όπου $n=-1 \rightsquigarrow \langle K\rangle = -\frac{1}{2}\langle V\rangle$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Έστω N σωματίδια μέσα σε ένα δοχείο. Τα σωματίδια πέρα από τις αλληλεπιδράσεις που έχουν μεταξύ τους, αλληλεπιδρούν και με τα τοιχώματα του δοχείου



Από Θεώρημα Virial $\rightsquigarrow \langle K\rangle = \underbrace{\frac{n}{2}V}_{\text{αλληλεπίδραση σωματιδίων}} - \underbrace{\frac{1}{2}\langle\sum \vec{x}_i \vec{F}_i^{\varepsilon\xi}\rangle}_{\text{δύναμη από τοιχώματα}}$

Η μέση εξωτερική δύναμη θα ισούται με $\langle \vec{F}^{\varepsilon\xi}\rangle = -P\,d\vec{s}$

και από Θεώρημα Gauss $-\langle\sum_i x_i F_i^{\varepsilon\xi}\rangle = \sum \vec{x}_i\cdot d\vec{s}\,P = P\oint \vec{x}\cdot d\vec{s}$

$\Rightarrow P\oint \vec{x}\cdot d\vec{s} = P\int(\vec{\nabla}\cdot\vec{x})\,dV = P\cdot 3V = 3VP$

Αν αγνοήσουμε τις αλληλεπιδράσεις μεταξύ των σωματιδίων

Έχουμε $\langle K\rangle = \frac{3}{2}VP$ και το $\langle K\rangle = N\frac{3}{2}k_B T$ όπου $N \rightsquigarrow$ αριθμός σωματιδίων

Άρα $\frac{3}{2}Nk_B T = \frac{3}{2}PV \Rightarrow PV = Nk_B T \rightsquigarrow$ νόμος ιδανικού αερίου