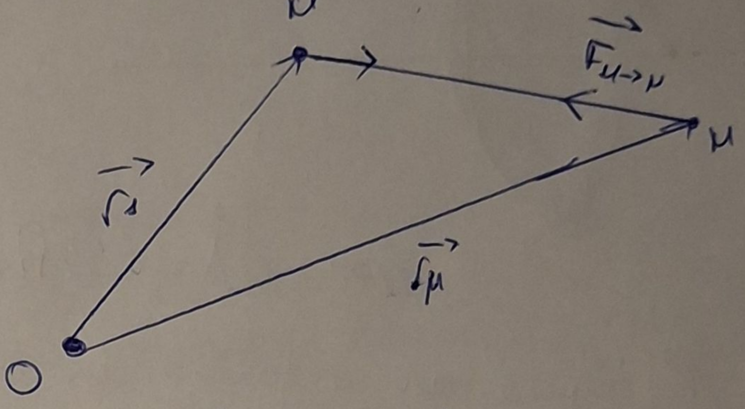
9/12/2024

ΒΑΡΥΤΗΤΑ

Η δύναμη που ασκείται σε δοκιμαστική μάζα από μάζα M είναι:

$$\vec{F}_{\text{δοκ. μάζας}} = -\frac{GMm}{|\vec{r_1}-\vec{r_M}|^2}\,\hat{r}_{1\to M}$$



• Για πεπερασμένης διάστασης μάζες $F_{1\to 2} = -G\int_{V_1}\int_{V_2}\frac{dm_1\,dm_2}{|\vec{r_1}-\vec{r_2}|^2}\,\hat{r}_{1\to 2}$

Ορίζουμε το βαρυτικό δυναμικό που δημιουργεί η μάζα M ως:

$$\phi(r) = -\int_{r_0}^{r}\frac{\vec{F}}{m}\cdot d\vec{r}$$ όπου για $r_0\to\infty$ το $\phi(r)\to 0$

$$\Rightarrow \phi(r) = -\int_{\infty}^{r} -\frac{GM}{|r^2|}\,\hat{r}\,\hat{r}\,dr = -\int_{\infty}^{r} -\frac{GM}{r^2}\,dr \Rightarrow \phi(r) = -\frac{GM}{|r|}$$

Ορίζουμε την ένταση βαρυτικού πεδίου ως:

$$\vec{g} = \frac{F}{m} = -\nabla\phi(r)_{\text{δοκ. μάζας}} \Rightarrow \vec{g}_{\text{δοκ. μαζ.}} = -\frac{GM}{r^2}\,\hat{r}$$

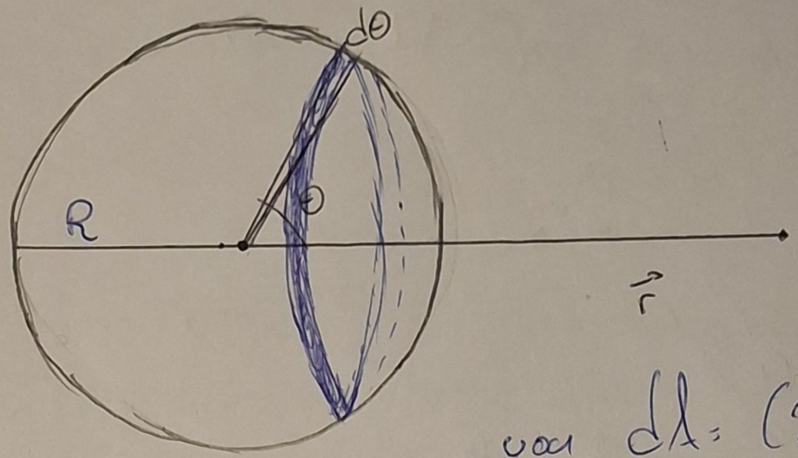
όπου $\hat{r}$ το μοναδιαίο διάνυσμα που ενώνει την μάζα M με την εκάστοτε δοκιμαστική μάζα m.

Σε μια κατανομή μαζών η ένταση του πεδίου υπολογίζεται ως:

$$\vec{g}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} g_{M_i}(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{N} -\frac{GM_i}{|(\vec{r}-\vec{r_i})|^2}\,\frac{\vec{r}-\vec{r_i}}{|\vec{r}-\vec{r_i}|}$$

ΕΦΑΡΜΟΓΗ

Υπολογισμός δυναμικού σε απόσταση r από το κέντρο σφαιρικού φλοιού μάζας M.



Χωρίζουμε τον σφαιρικό φλοιό σε στοιχειώδη δαχτυλίδια

Η μάζα κάθε τέτοιου δαχτυλιδιού

$\leadsto dM' = \sigma \cdot dA$, όπου $\sigma = \frac{M}{4\pi R^2}$

και $dA = (2\pi R \sin\theta)(R \cdot d\theta)$

Ορίζουμε ως $\vec{r}'$ σημείο στην επιφάνεια της σφαίρας και $\vec{r}$ το σημείο στο οποίο θέλουμε να υπολογίσουμε το δυναμικό

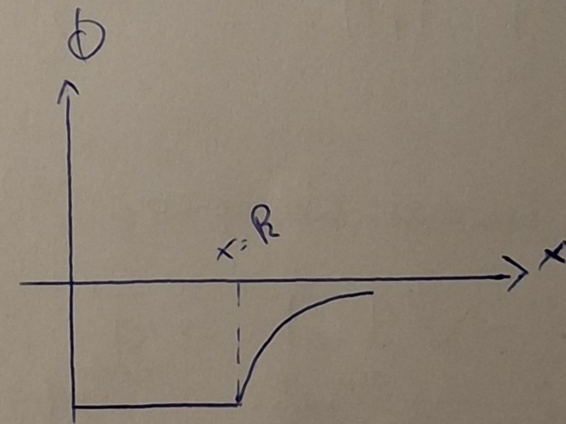
$$\Phi(r) = -G\int \frac{dm}{r} = -G\int_0^{\pi} \frac{M}{4\pi R^2}\,\frac{2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta}{|\vec{r}' - \vec{r}|}$$

όπου $\vec{r}'\vec{r} = Rr\cos\theta \leadsto |\vec{r}' - \vec{r}|^2 = \vec{r}'^2 + \vec{r}^2 - 2rR\cos\theta$

$$\Rightarrow \Phi(r) = -G\int_0^{\pi} \frac{M}{4\pi R^2}\,\frac{2\pi R^2 \sin\theta\, d\theta}{(R^2+r^2-2rR\cos\theta)^{1/2}}$$

$$\Rightarrow \Phi(r) = -\frac{GM}{2Rr}\left[\sqrt{(R+r)^2} - \sqrt{(R-r)^2}\right]$$

$$\Rightarrow \Phi(r) = \begin{cases} -\frac{GM}{R} & \text{για } r<R \\ -\frac{GM}{r} & \text{για } r>R \end{cases}$$



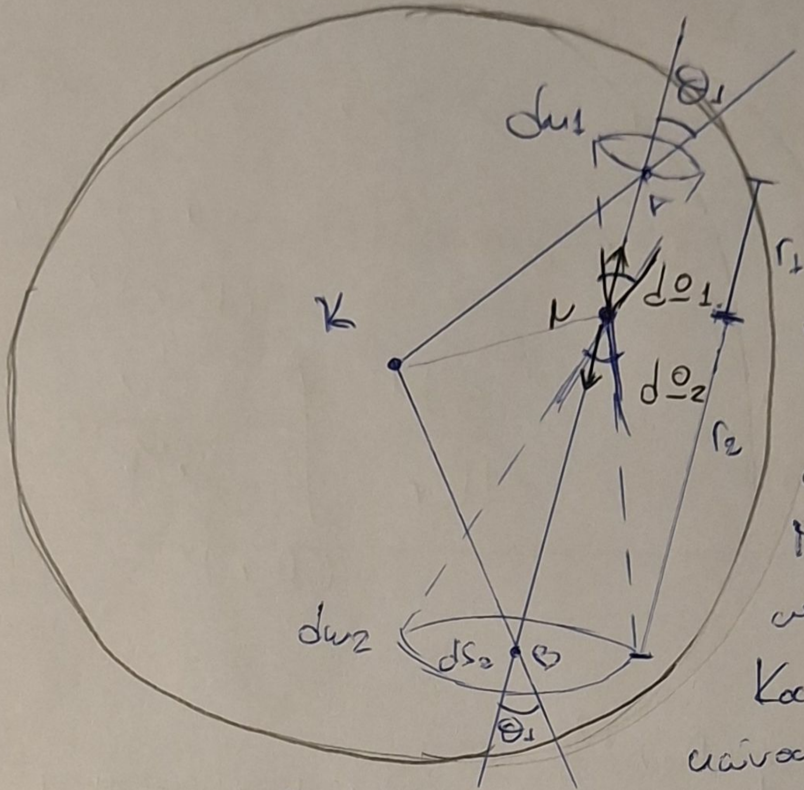
Σχόλιο: Αρχικά παρατηρούμε ότι το δυναμικό είναι σταθερό εντός του φλοιού οπότε η δύναμη θα είναι μηδενική. Επιπλέον όταν βρισκόμαστε εκτός του σφαιρικού φλοιού τότε αντιλαμβανόμαστε δυναμικό σημειακής μάζας η οποία βρίσκεται στο κέντρο του σφ. φλοιού.

Με βάση το δυναμικό μπορούμε να υπολογίσουμε και την βαρυτική δύναμη που ασκείται σε μάζα μ.

$$F(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & \text{για } r<R \\ -\frac{GM\mu}{r^2}\hat{r} & \text{για } r>R \end{cases}$$

·Γεωμετρική απόδειξη

Θα αποδείξουμε γεωμετρικά ότι η δύναμη στο εσωτερικό είναι παντού 0.



Διαχωρίζουμε τον φλοιό σε μικρές, αντιδιαμετρικές μάζες ασκούμενες στη μάζα m.

Για να μπορούν να αναιρέσουν και να καλύψουν όλο το κέλυφος οι δύο αντιδιαμετρικές μάζες dm_1, dm_2 επιλέγονται ως εξής:

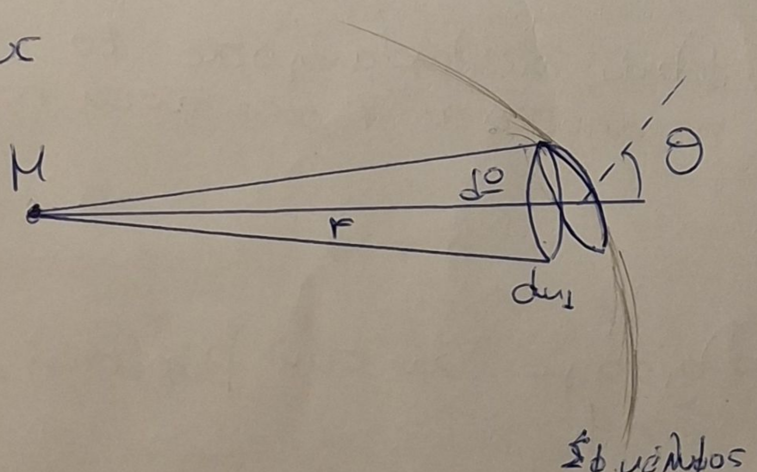
Κατασκευάζουμε δύο κατακορυφήν κώνους απειροστού ανοίγματος που αντιστοιχούν σε στ. γωνίες $d\Omega_1 = d\Omega_2$.

Τα δύο ανοίγματα του κώνου αποκόπτουν δύο μάζες dm_1, dm_2 προφανώς άνισες. (αφού η μία βρίσκεται πιο κοντά από την άλλη)

Ο λόγος των μαζών είναι ανάλογος των αντίστοιχων αποκοπτόμενων επιφανειών ⇝ σταθερή επιφανειακή πυκνότητα.

$$\rightsquigarrow \frac{dm_1}{dm_2} = \frac{dS_1}{dS_2}$$

Η στερεά γωνία δημιουργεί δύο επιφάνειες dS_1, dS_2 οι οποίες όμως δεν είναι πάνω στο σφαιρικό κέλυφος. Άρα πρέπει να πάρουμε τις προβολές τους



Άρα $dS_k = r^2 d\Omega$ και $dS = \frac{dS_k}{\cos\theta}$

Όμως οι στερεές γωνίες λήφθηκαν εξ ορισμού ίσες και το τρίγωνο ΚΒΑ είναι ισοσκελές $\rightsquigarrow \theta_1 = \theta_2 = \theta$.

$$\text{Άρα } \frac{dm_1}{dm_2} = \frac{\frac{r_1^2 d\Omega}{\cos\theta}}{\frac{r_2^2 d\Omega}{\cos\theta}} = \frac{r_1^2}{r_2^2}$$

Οπότε οι ασκούμενες δυνάμεις από τις δύο στοιχειώδεις μάζες που είναι ανάλογες της ποσότητας $\frac{dm_i}{r_i^2}$ θα είναι ίσες και θα αλληλοαναιρούνται

⇝ ισχύει για κάθε ζεύγος άρα συνολικά η δύναμη μηδέν.

ΔΥΝΑΜΙΚΟ ΣΕ ΟΜΟΓΕΝΗ ΣΦΑΙΡΑ

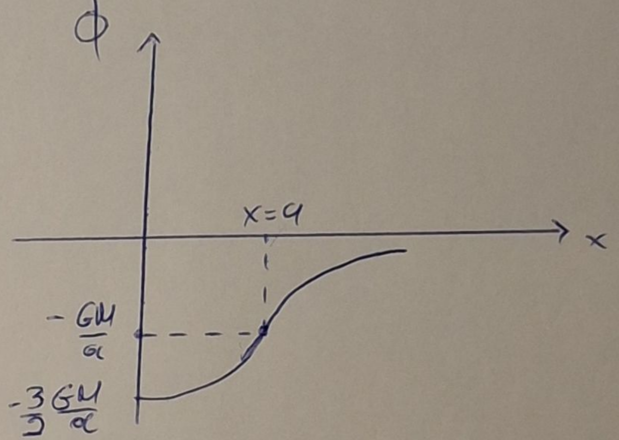
Το δυναμικό έξω από την σφαίρα όπως αναφέρεται είναι το δυναμικό σημειακής μάζας η οποία βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας.

Για το εσωτερικό έχουμε: $\phi(x) = \int_{r=x}^{r=a} -\frac{G\,dM(r)}{r} + \int_{r=0}^{r=x} -\frac{GM(r)}{x}$

Θεωρούμε ότι η σφαίρα έχει ακτίνα α.
Έστω ότι βρισκόμαστε στο εσωτερικό της σφαίρας και σε απόσταση x από το κέντρο της $(0 \le x < \alpha)$. Το μέρος της σφαίρας από 0 έως x συνεισφέρει στο δυναμικό σαν σημειακή μάζα που βρίσκεται στο κέντρο της σφαίρας

$$\phi(x) = \int_{r=x}^{r=\alpha} -\frac{GM4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3 r} + \int_{r=0}^{r=\alpha} -\frac{GM4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi\alpha^3 x} = -\frac{3GM}{\alpha^3}\left(\frac{\alpha^2 - x^2}{2}\right) - \frac{3GM}{\alpha^3}\frac{x^2}{3}$$

$$\Rightarrow \phi(x) = -\frac{GM}{\alpha}\left(\frac{3}{2} - \frac{x^2}{2\alpha^2}\right)$$



$$\text{Άρα} \quad \phi(x) = -GM\begin{cases} \frac{1}{x} & x > \alpha \\ \frac{1}{\alpha}\left(\frac{3}{2} - \frac{x^2}{2\alpha^2}\right) & x < \alpha \end{cases}$$

Παρατήρηση: στο εσωτερικό της σφαίρας βλέπουμε εξάρτηση από το x^2 ⇝ αρ. ταλαντωτής ($U_{ελ} = \frac{1}{2}kx^2$ με $F = -kx$). Άρα ένα σώμα κινούμενο στο εσωτερικό σφαίρας θα εκτελούσε κίνηση ισοχρονικού ταλαντωτή ⇝ έλλειψη κεντραρισμένη στο κέντρο της σφαίρας.

Η ένταση του πεδίου στο εσωτερικό ⇝ $\vec{g} = -\nabla\phi_{εσωτ} = -\nabla\left(-\frac{GM}{\alpha}\left(\frac{3}{2} - \frac{x^2}{2\alpha^2}\right)\right)$

$\Rightarrow \vec{g} = -x\underbrace{G\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)}_{D/\mu}\hat{x}$ ⇝ αρ. σχέση. Θεωρούμε συχνότητα $\omega^2 = \frac{D}{\mu}$

$$\Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{D \cdot \mu}{\mu}} \Rightarrow \omega = \sqrt{G\rho\frac{4}{3}\pi}$$

> Δορυφόρος σε ακτίνα α.

Κίνηση πάνω στην περίμετρο της σφαίρας $\quad \omega = \frac{u}{\alpha} = \sqrt{G\rho\frac{4}{3}\pi}$ ⇝ ίσωση στο εσωτ.

και από κεντρομόλο $\frac{u^2\cancel{\mu}}{\alpha} = \alpha G\rho\left(\frac{4}{3}\pi\right)\cancel{\mu} \Rightarrow u = \alpha\sqrt{G\rho\frac{4}{3}\pi}$ ⇝ ίδιο ω.

• **Βαρυτική κατάρρευση**

Θεωρούμε σωματίδιο που βρίσκεται στην επιφάνεια σφαίρας με ενέργεια

$$\rightsquigarrow \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{r} = E = σταθ.$$

Λόγω γραμμικότητας του $\vec{g}$ όλα τα σημεία καταρρέουν ταυτόχρονα

Την χρονική στιγμή $t=0$ θεωρούμε $\frac{dr}{dt}=0$ άρα $E = -\frac{GM}{r_0} = σταθ.$

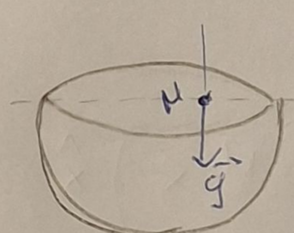
$$\rightsquigarrow \frac{1}{2}\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 - \frac{GM}{r} = -\frac{GM}{r_0} \Rightarrow \dot{r} = -\sqrt{2GM\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}\right)}$$

$$\int_0^1 \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{1}{\xi}-1}} = \frac{\pi}{2}$$

και $$T_{κατ} = \int \frac{dr}{\dot{r}} = \frac{1}{\sqrt{2GM}} \int_0^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{\frac{1}{r} - \frac{1}{r_0}}} = \frac{r_0^{3/2}}{\sqrt{2GM}} \frac{\pi}{2}$$

• **ΕΦΑΡΜΟΓΗ**

Έστω σώμα το οποίο βρίσκεται στο κέντρο ημισφαιρικού φλοιού



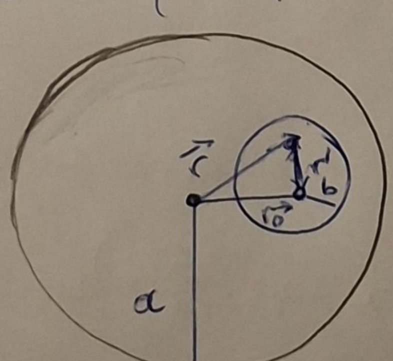
Ποια είναι η κατεύθυνση του $\vec{g}$; Δηλαδή προς τα ποιος κατεύθυνση θα κινηθεί η δοκιμαστική μάζα μ.

Έστω ότι το $\vec{g}$ είχε μια κατεύθυνση ↙. Αν φέρουμε θα δημιουργηθεί από κάποιο άλλον ένα ημισφαιρικό φλοιό ίδιας μάζας και μια $\vec{g}$ ↗ ~~με αποτέλεσμα~~ διά να έχουμε cancel-out. δεδομένου ότι η δύναμη = 0 εντός σφαίρας αλλά αυτό είναι ασύμμετρο

Άρα η μόνη που μένει είναι η κατακόρυφη

• **Κοιλότητα**

Ένας έξυπνος τρόπος για να υπολογίσουμε την ένταση εάν έχουμε κοιλότητα είναι να θεωρήσουμε ότι η κοιλότητα έχει "αρνητική" μάζα



Άρα $\vec{g}_{εσωτ} = -\frac{GM_{ολ}}{a^3}\vec{r}$ και $\vec{g}_{αρνητικής\ κοιλότητας} = -\frac{G(-M_{κοιλ})}{b^3}\vec{r}'$

όπου έχουν ίδια πυκνότητα $\frac{M_{ολ}}{a^3} = \frac{M_{κοιλ}}{b^3}$, $g_{ολ} = g_{εσωτ} + g_{αρν.\ κοιλ.}$

Άρα $\vec{g}_{ολ} = -r_0 G \frac{4}{3}\pi \hat{r}_0$ όπου $\vec{r}_0 = \vec{r} - \vec{r}'$

ΝΟΜΟΣ GAUSS

Σε συμμετρικές κατανομές μπορούμε να προσδιορίσουμε το βαρυτικό πεδίο μέσω του νόμου Gauss.

υπολογίζαμε ένα χωρικό ολοκλήρωμα ως ένα επιφανειακό ολοκλήρωμα επί της εξωτερικής επιφάνειας του περιγράμματος ολοκλήρωσης

$$\int_V \nabla \cdot \phi(r)\, dV = \int_{S(V)} \phi(r) \cdot dS \quad (1)$$ και θεωρούμε όπου $\phi = \vec{g}$

Άρα στο $\nabla \cdot \phi = \nabla \cdot g = \nabla \cdot (\nabla \Phi)$

- Θα υπολογίσουμε την Λαπλασιανή βαρυτικού πεδίου μιας μάζας m.

Έχουμε $\Phi(r) = -G \dfrac{m}{|r - r_0|}$ ⇝ βαθμωτό μέγεθος

Άρα $\nabla \cdot \nabla \Phi = \nabla^2 \left(-G \dfrac{m}{\sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}} \right)$

$\Rightarrow \nabla \cdot \nabla \Phi = \dfrac{3}{|r-r_0|^3} - \dfrac{3}{|r-r_0|^5} (|r-r_0|^2)$ Το οποίο μηδενίζει για $r \neq r_0$

Υπολογίζουμε και το δεύτερο μέρος της (1)

Η ένταση είναι το $-\nabla \Phi = -\dfrac{GM}{|r-r_0|^3} (\vec{r} - \vec{r_0})$ όπου $(\vec{r} - \vec{r_0}) = (r - r_0)(\widehat{r - r_0})$

⇝ $g = -\dfrac{GM}{|r-r_0|^3} (\vec{r} - \vec{r_0}) = -\dfrac{GM}{|r-r_0|^2} (\widehat{r - r_0})$ ⇝ το − επειδή το πεδίο κατευθύνεται προς το r_0

$$\int_S \phi(r)\, dS = -GM \int_{S_R} \frac{(\vec{r} - \vec{r_0})}{|r-r_0|^3} dS = -GM \int \frac{\vec{R}}{|R|^3} dS = -GM \int \frac{|R| \hat{R}}{R^3} (|R|^2 d\Omega \hat{R})$$

$$= -GM \int_{S_R} d\Omega = -4\pi G m$$ ⇝ Το αποτέλεσμα τώρα δεν είναι 0!

<u>ΠΑΡΑΤΗΡΗΣΗ</u> ⇝ Ενώ το αριστερό μέλος του (1) για $r \neq r_0$ μηδενίζει το δεξί μέλος όχι. Πώς γίνεται να μην είναι μηδέν αφού ολοκληρώνουμε σε ένα χωρίο στο οποίο η συνάρτηση είναι παντού μηδέν πέρα από το σημείο $(r = r_0)$ στο οποίο δεν ορίζεται καν!!

Συνάρτηση δ → Άρα έχουμε $\nabla^2 \Phi(r) = -4\pi G m \delta^3(r - r_0)$

<u>Σχόλιο</u>: Το αποτέλεσμα ισχύει άρα και για μη σφαιρική επιφάνεια

$\hat{s}\,ds = \hat{s}\dfrac{R^2 d\Omega}{\cos\theta_{ds}}$ όπου $\hat{s}$ κάθετο στο ds. Το αποτέλεσμα καταλήγει πάλι σε υπολογισμό της στερεάς γωνίας στο χώρο

Καταλήγουμε $\oint_S g\, d\vec{s} = -4\pi M_{incl.} G.$

<u>Απόδειξη</u>

$$\oint \vec{g} \cdot d\vec{s} = -GM \oint \frac{1}{\cancel{r^2}} \hat{r} \left(\frac{d\Omega\, \cancel{r^2}}{\cos\theta} \right) \hat{n} \quad \text{όπου } \frac{\hat{n}}{\cos\theta} = \hat{r}$$

$$\Rightarrow \oint \vec{g} \cdot d\vec{s} = -GM \oint d\Omega = -GM\, 4\pi.$$