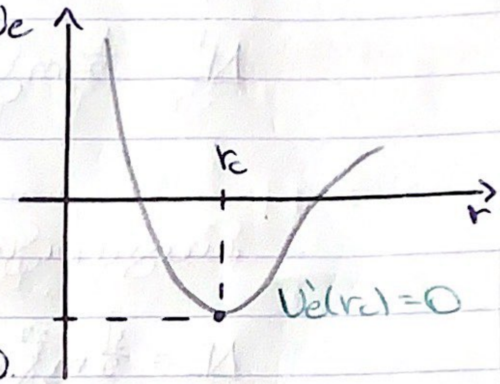
3η Διάλεξη:

Ποια κεντρικά δυναμικά δίνουν περιοδική κίνηση (τροχιά) ∀ Α.Σ.

Αν ένα σύστημα μου επιτρέπει κυκλικές τροχιές θεωρώ πως αν διαταράξω αυτές τις τροχιές τότε θα έχω πάλι "ρολόι".



$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\underbrace{\frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}}_{\text{φυγόκεντρο}} + V(r)}_{\text{ενεργό } V_e(r)}$$

όπου $L = mr^2\dot{\theta}^2$

Έχω κυκλικές τροχιές όταν $V_e'(r_c)=0$.

$$-\frac{L^2}{mr_c^3} + V'(r_c) = 0 \Rightarrow r_c^3 = \frac{L^2}{mV'(r_c)}$$

γωνιακή ταχύτητα: $\omega_0 \equiv \dot{\theta} = \dfrac{L}{m\left(\frac{L^2}{mV'(r_c)}\right)^{2/3}} = \dfrac{L^{-1/3}V'^{2/3}(r_c)}{m^{1/3}} = \left(\dfrac{V'(r_c)}{Lm}\right)^{1/3}$

Προκαλώ διαταραχή (στιγμιαία) προσθέτοντας μόνο! ενέργεια ("χτυπώντας" κεντρικά) δηλ. στροφορμή L σταθερή

$$E_c + \Delta E = \frac{1}{2}m(\overset{0\ (\text{αφού κυκλική})}{\dot{r}_c} + \dot{\xi})^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{m(r_c+\xi)^2} + V(r_c+\xi)$$

δηλαδή $r = r_c + \xi$ όπου $\|\xi\| \ll 1$

αναπτύσσω:
$$\frac{1}{(r_c+\xi)^2} = \frac{1}{r_c^2\left(1+\frac{\xi^2}{r_c^2}+2\frac{\xi}{r_c}\right)} = \frac{1}{r_c^2}\left(1 - \frac{\xi^2}{r_c^2} - \frac{2\xi}{r_c} + \left(\frac{2\xi}{r_c} + \frac{\xi^2}{r_c^2}\right)^2 + \dots\right) =$$

$$= \frac{1}{r_c^2}\left(1 - \frac{2\xi}{r_c} + 3\frac{\xi^2}{r_c^2} + \dots\right)$$

↑ όροι μεγαλ. τάξης

Επομένως:

$$\cancel{E_c} + \Delta E = \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2 + \cancel{\frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{mr_c^2}} - \frac{L^2}{mr_c^3}\xi + \frac{3}{2} \cdot \frac{L^2}{mr_c^4}\xi^2 +$$

↳ $E_c = \frac{1}{2} \cdot \frac{L^2}{mr_c^2} + V(r_c)$

$$+ \cancel{V(r_c)} + V'(r_c)\xi + \frac{1}{2}V''(r_c)\xi^2 + \dots$$

$$\Delta E = \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2 \cancel{- \frac{L^2}{mr_c^3}\xi} + \frac{3}{2} \cdot \frac{L^2}{m} \cdot \frac{\xi^2}{r_c^4} + \cancel{V'(r_c)\xi} + \frac{V''(r_c)}{2}\xi^2 + \dots$$

↳ $\xi\left(-\frac{L^2}{mr_c^3} + V'(r_c)\right) = \xi V_e'(r_c) = 0$

αναγνωρίζω τώρα πως $\Delta E > 0$. το ξέραμε, αλλά σημαντ

$$\Delta E = \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2 + \left(3\frac{L^2}{mr_c^4} + V''(r_c)\right)\frac{\xi^2}{2} + O(\xi^3) \Rightarrow$$

⇓ από $V_e'(r_c) = 0$ Text

$$\Delta E = \frac{1}{2} m\dot{\xi}^2 + \underbrace{\left(\frac{3V'(r_c)}{r_c} + V''(r_c)\right)}_{\text{συνθήκη ευστάθειας} \;=\; m\omega_r^2}\frac{\xi^2}{2} + O(\xi^3)$$

⇝ $V_e''(r_c) > 0$ για ευσταθή ταλάντωση

$$\ddot{\xi} + \omega_r^2 \xi = 0$$ ταλάντωσης

$$r = r_c + \overbrace{a\sin(\omega_r t + \theta_0)}^{\xi(t)}$$

$$\dot{\theta} = \frac{L}{m(r_c+\xi)^2} = \underbrace{\frac{L}{mr_c^2}}_{\omega_\theta} + \underbrace{O(\xi)}_{+\text{ μικρή διαταραχή}}$$

οπότε $\bar{\omega}_\theta = \omega_c$, όπου ω_c κυκλική συχνότητα

στο όριο $\Delta E \to 0$ θέλω $\frac{T_r}{T_\theta} = \frac{p}{q}$ ρητός λόγος

ώστε να έχω κλειστή τροχιά.

άρα: $\frac{\omega_r}{\bar{\omega}_\theta} = \frac{p}{q} \Rightarrow \frac{\sqrt{\frac{3V'(r_c)/r_c + V''(r_c)}{m}}}{\frac{L}{mr_c^2}} = \frac{p}{q} \quad \forall r_c!$

Έχουμε: $\dfrac{L}{\sqrt{m}} = \sqrt{V' r_c^3} \Rightarrow \dfrac{L}{\sqrt{m}\, r_c^2} = \sqrt{\dfrac{V'}{r_c}}$

άρα: $\dfrac{\sqrt{\frac{3V'}{r_c} + V''}}{\sqrt{\frac{V'}{r_c}}} = \sqrt{\dfrac{3V' + r_c V''}{V'}} = \dfrac{p}{q} \Rightarrow$

$$3V'(r) + r V''(r) = \frac{p^2}{q^2} V'(r)$$ πλέον r γιατί ισχύει παντού

$V'' = \left(\frac{p^2}{q^2} - 3\right)\frac{V'}{r}$ και $F = -V'$

$\dfrac{F'}{F} = \left(\frac{p^2}{q^2} - 3\right)\frac{1}{r} \Rightarrow \log F(r) = \left(\frac{p^2}{q^2} - 3\right)\log r + c \Rightarrow$

$F(r) = A r^{\left(\frac{p^2}{q^2} - 3\right)}$, με $\frac{p^2}{q^2} - 3 \geq -3$

$V(r) = B r^{\left(\frac{p^2}{q^2} - 2\right)}$ $\rightsquigarrow$ $V'(r) = \left(\frac{p^2}{q^2} - 2\right) B r^{\left(\frac{p^2}{q^2} - 3\right)}$

$V''(r) = \left(\frac{p^2}{q^2} - 2\right)\left(\frac{p^2}{q^2} - 3\right) B r^{\left(\frac{p^2}{q^2} - 4\right)}$

$m\omega_r^2 = \dfrac{3V'(r_c)}{r_c} + V''(r_c) > 0 \Rightarrow V'' > -\dfrac{3V'}{r} \Rightarrow$

$B\underbrace{\left(\frac{p^2}{q^2} - 2\right)}_{=\alpha}\left(\frac{p^2}{q^2} - 3\right) > -3B\left(\frac{p^2}{q^2} - 2\right) \Rightarrow$

$B\left(\frac{p^2}{q^2} - 3\right) > -3B$

1η περίπτωση: $\alpha > 0$ κ' $B > 0$
2η περίπτωση: $\alpha < 0$ κ' $B < 0$

η περίπτωση $\alpha = 0$, δηλ. $V = B\log r$, απορρίπτεται γιατί θα σήμαινε $\dfrac{p^2}{q^2} = 2$.

$\dfrac{\omega_r}{\omega_\theta} = \dfrac{p}{q} = \sqrt{2 \cancel{+ \alpha^2}}$; $= \sqrt{2 + \alpha}$

εξετάζω $1^{η}$ περίπτωση:

$$E = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + V_e(r) \quad , \quad V_e(r) = \frac{L^2}{2mr^2} + V(r)$$

$$\dot{r} = \pm \sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_e(r)\right)} \quad κ' \quad \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2}$$

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{\frac{L}{mr^2}}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_e(r)\right)}}$$

$$\theta = 2 \int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{\frac{L}{mr^2}\, dr}{\sqrt{\frac{2}{m}\left(E - V_e(r)\right)}}$$

η τροχιά θα κλείσει αν $\theta = 2\pi \frac{p}{q}$

↳ θέλω να πάει από περίκεντρο σε περίκεντρο

$$\theta_{π \to π} = \omega_c T_r = 2\pi \frac{\omega_\theta}{\omega_r} = \cancel{\frac{2\pi}{\sqrt{2+\alpha^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{2+\alpha}}$$

για σχεδόν κυκλική τροχιά

το εξετάζω για $E \to \infty$

θέλω ανεξάρτητα του V η θ να πηγαίνει σε κάτι σταθε