Περιεχόμενα

1 Πολλαπλασιαστές Lagrange ως μέθοδος εύρεσης ακρότατων

Έστω συνάρτηση $f(x_1, x_2, ..., x_n) \equiv f(\vec{x})$ με $k \leq n$ περιορισμούς $g_i(\vec{x}) = 0$.Η εύρεση ακρότατου γίνεται πιο περίπλοκη αφού οι περιορισμοί καθιστούν τις μεταβλητές x_i μη ανεξάρτητες.

Πρόταση Lagrange: Ισοδύναμο πρόβλημα είναι να ορίσουμε συνάρτηση $F(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \vec{\lambda} \cdot \vec{g}$ και να βρούμε τα ακρότατα αυτής από τις σχέσεις:

$$\begin{cases} \nabla_{\vec{x}} F = 0 \\ \nabla_{\vec{\lambda}} F = 0 \end{cases}$$

Παράδειγμα: $f(x_1, x_2) = ax_1 + bx_2, \quad \& \quad x_1^2 + x_2^2 = 1$

Ορίζοντας: $F(x_1, x_2, \lambda) = ax_1 + bx_2 + \lambda(x_1^2 + x^2 - 1)$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial F}{\partial x_1} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial x_2} = 0 \\ \dfrac{\partial F}{\partial \lambda} = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 2\lambda x_1 = 0 \\ b + 2\lambda x_2 = 0 \\ x_1^2 + x_2^2 = 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{a}{2\lambda} \\ x_2 = -\dfrac{b}{2\lambda} \\ a^2 + b^2 = 4\lambda^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -\dfrac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \\ x_2 = -\dfrac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} \end{cases}$$

2 Ασκήσεις

20.(α) Θα ψάξουμε ακρότατο της ενέργειας με περιορισμό τη διατήρηση στροφορμής:

$$E(\vec{x}, \vec{v}, \vec{\omega}) = \sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i - G \sum_{\substack{i \neq j \\ i<j}} \frac{m_i m_j}{|\vec{x}_i - \vec{x}_j|} + \vec{\omega} \cdot \left(\vec{L} - \sum_i m_i \vec{x}_i \wedge \vec{v}_i \right)$$

Έχοντας κατά νου την ιδιότητα: $\vec{\omega} \cdot (\vec{x} \wedge \vec{v}) = \vec{x} \cdot (\vec{v} \wedge \vec{\omega}) = \vec{v} \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{x})$

Χρησιμοποιώντας τα άκρα της παραπάνω σχέσης παίρνουμε:

$$\frac{\partial E}{\partial \vec{v}_a} = 0 \Rightarrow m_a \vec{v}_a = m_a \vec{\omega} \wedge \vec{x}_a \Rightarrow$$

$$\boxed{\vec{v}_a = \vec{\omega} \wedge \vec{x}_a}$$

Και αφού το $\vec{\omega}$ δεν εξαρτάται από το σώμα a, το νεφέλωμα θα κινείται ως στερεό σώμα.

(β) Λόγω ύπαρξης κεντρικού σώματος το οποίο κυριαρχεί ως παράγοντας αλληλεπίδρασης, η σχέση για την ενέργεια προσεγγίζεται ως:

$$E(\vec{x}, \vec{v}, \vec{\omega}) = \sum_i \frac{m_i}{2} \vec{v}_i \cdot \vec{v}_i - GM \sum_i \frac{m_i}{|\vec{x}_i|} + \vec{\omega} \cdot \left(\vec{L} - \sum_i m_i \vec{x}_i \wedge \vec{v}_i \right)$$

$\dfrac{\partial E}{\partial \vec{x}_a} = 0 \Rightarrow \dfrac{GM}{|\vec{x}_a|^3} \vec{x}_a = -\vec{\omega} \wedge \vec{v}_a$ (1β)

Thinking Box

Ένα σχόλιο για την παράγωγο $\dfrac{\partial}{\partial \vec{x}_a} \left(\dfrac{1}{|\vec{x}_a|} \right) = \dfrac{\partial}{\partial |\vec{x}_a|} \left(\dfrac{1}{|\vec{x}_a|} \right) \cdot \dfrac{\partial |\vec{x}_a|}{\partial \vec{x}_a}$

Το παρακάτω κειμενάκι έχει σηκωθεί από τις σημειώσεις μου για τη διάλεξη 1, οπότε φαίνεται λίγο άκυρο το r_i και r_j but bear with me.
Έστω $\vec{r_i} = (x_i, y_i), \quad \vec{r_j} = (x_j, y_j), \quad |\vec{r}| = \left[(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2 \right]^{1/2}$

$$\nabla_i |\vec{r}| = \frac{\partial |\vec{r}|}{\partial x_i} \hat{x} + \frac{\partial |\vec{r}|}{\partial y_i} \hat{y} = \frac{\partial |\vec{r}|}{\partial (x_i - x_j)} \frac{\partial (x_i - x_j)}{\partial x_i} \hat{x} + \frac{\partial |\vec{r}|}{\partial (y_i - y_j)} \frac{\partial (y_i - y_j)}{\partial y_i} \hat{y}$$

Το αποτέλεσμα της κάθε παραγώγισης φαίνεται πιο εύκολα αν απλοποιήσει κανείς το συμβολισμό:
$\dfrac{d}{dx}(x^2 + c)^{1/2} = \dfrac{1}{2}(x^2 + c)^{-1/2}\ 2x = x(x^2 + c)^{-1/2}$

Στην περίπτωση του παραπάνω υπολογισμού το x αντιστοιχεί στα $(x_i - x_j)$ και $(y_i - y_j)$, ενώ ο δεύτερος όρος είναι απλά το $\dfrac{1}{r}$ οπότε

$$\nabla_i |\vec{r}| = \frac{1}{r} \left[(x_i - x_j) \hat{x} + (y_i - y_j) \hat{y} \right] = \frac{\vec{r}}{r} = \hat{r}$$

$\dfrac{\partial E}{\partial \vec{v}_a} = 0 \Rightarrow \vec{v}_a = \vec{\omega} \wedge \vec{x}_a$ (2β)

Από την (1β) συμπεραίνουμε ότι τα διανύσματα θέσης είναι κάθετα στη διεύθυνση του $\vec{\omega}$ άρα τα σωμάτια του νεφελώματος βρίσκονται τώρα πάνω σε επίπεδο.

Συνδυάζοντας τις σχέσεις (1β), (2β) παίρνουμε ότι

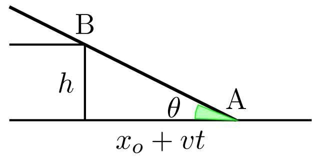
$$\frac{GM}{|\vec{x}_a|^3} \vec{x}_a = -\vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}_a) = \omega^2 \vec{x}_a \Rightarrow \frac{GM}{R^3} = \omega^2$$

Πράγμα που σημαίνει ότι τα σώματα έχουν μαζευτεί σε λεπτό δαχτυλίδι ακτίνας $R = \left(\dfrac{GM}{\omega^2} \right)^{1/3}$.

21. Η λύση που ακολουθήσαμε ήταν σωστή με κύρια παράλειψη την εξήγηση γιατί $\dot{\theta}$ αντιστοιχεί στη ζητούμε γωνιακή ταχύτητα του σώματος.

Εξήγηση by Mr Ioannou: Η κίνηση του στερεού αντιστοιχεί σε μια μετατόπιση και μια στροφή.Εδώ μας ενδιαφέρει ο ρυθμός με τον οποίο γίνεται αυτή η στροφή.Θα μπορούσαμε να φανταστούμε τη ράβδο να μετατοπίζεται αρχικά προς τα δεξιά κατά ένα δx χωρίς να αλλάζει ο προσανατολισμός της στο χώρο και έπειτα να στρίβει γύρο από το A ώστε να ακουμπήσει το σκαλοπάτι.Η στροφή αυτή θα συμπίπτει με την αλλαγή $\delta\theta$ της γωνίας θ.

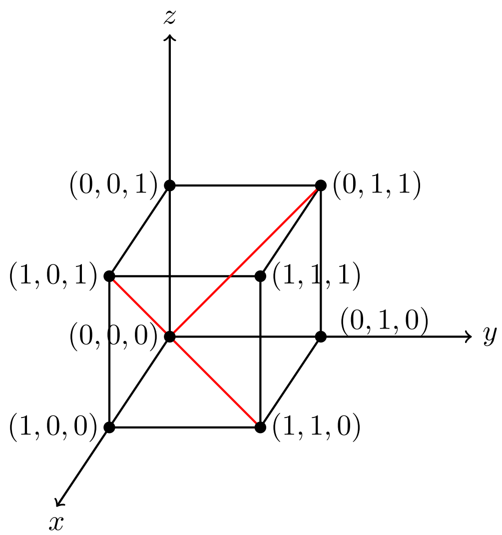
Εξήγηση by Mr Apostolatos: Πρώτα στρίβουμε το σώμα γύρω από το σταθερό σημείο B και έπειτα το μετατοπίζουμε ώστε να ακουμπήσει το πάτωμα, φτάνοντας στο ίδιο συμπέρασμα.



Σχήμα 1: Σχήμα της 21α.

22. Για μικρή (διαφορική) στροφή θ γύρω από άξονα $\hat{\delta}$ ισχύει ο μετασχηματισμός $\vec{x}' = \vec{x} + \theta(\hat{\delta} \wedge \hat{x})$.Η αλλαγή των αξόνων περιστροφής δε μας ενδιαφέρει γιατί η αλλαγή που θα επιφέρουν στις συντεταγμένες θα είναι τάξης θ^2 και θ^3 οπότε μπορούμε να την αγνοήσουμε.

Το αποτέλεσμα που είχα φτάσει στη δική μου λύση:



Υποθέσεις για τη λύση του προβλήματος:

$$\begin{cases} \vec{\delta}_1 = (1,1,0) \\ \vec{\delta}_2 = (1,0,1) \\ \vec{\delta}_3 = (0,1,1) \\ \vec{x} = (1,1,1) \end{cases}$$

$$\vec{x}^{(3)} = \left(1 + \frac{\theta_1}{\sqrt{6}} - \frac{\theta_2}{\sqrt{6}},\ 1 - \frac{\theta_1}{\sqrt{6}} + \frac{\theta_3}{\sqrt{6}},\ 1 + \frac{\theta_2}{\sqrt{6}} - \frac{\theta_3}{\sqrt{6}}\right)$$

$$\Delta\vec{x} = \frac{1}{\sqrt{6}}\left(\theta_1 - \theta_2,\ -\theta_1 + \theta_3,\ \theta_2 - \theta_3\right)$$

Παρατηρούμε ότι για $\theta_1 = \theta_2 = \theta_3$ οι συντεταγμένες του σημείου δε θα αλλάξουν.

Σχόλιο (για πεπερασμένες, μη διαφορικές, στροφές)
$\dot{x}_i = \Omega_{ij} x_j$, αν $\Omega_{ij} = const \Rightarrow x(t) = e^{t\Omega} x_o$.
Αν για $t \in (0, T),\ \Omega = \Omega_1$ και για $t \in (T, 2T),\ \Omega = \Omega_2$, τότε

$$x(2T) = e^{T\Omega_2} x(T) = e^{T\Omega_2} e^{T\Omega_1} x(0)$$

Αν ισχύει το ανάποδο, δηλαδή ότι είχαμε αρχικά το Ω_2 και έπειτα Ω_1 για τους ίδιους χρόνους θα είχαμε $x(2T) = e^{T\Omega_1} e^{T\Omega_2} x(0)$.

Τα δύο αποτελέσματα θα ήταν ίδια μόνο αν ίσχυε ότι $[\Omega_1, \Omega_2] = 0$.Πράγμα που μπορούμε να δούμε αν κάναμε αναπτύγματα Taylor.

$$e^{T\Omega_2} e^{T\Omega_1} = I + (\Omega_1 + \Omega_2)T + \frac{T^2}{2}(\Omega_2^2 + \Omega_1^2 + 2\Omega_2\Omega_1) + ...$$

$$e^{T\Omega_1} e^{T\Omega_2} = I + (\Omega_1 + \Omega_2)T + \frac{T^2}{2}(\Omega_2^2 + \Omega_1^2 + 2\Omega_1\Omega_2) + ...$$

Αν $\Omega_1\Omega_2 = \Omega_2\Omega_1 \Rightarrow e^{T\Omega_2} e^{T\Omega_1} = e^{T\Omega_1} e^{T\Omega_2}$

Αν το Ω δεν είναι σταθερό, τότε μέσω διαμέρισης μπορούμε να κατασκευάσουμε τον διαδότη του συστήματος.

$$\dot{x}_i = \Omega_{ij}(t) x_j$$

$$\Phi(T, 0) \simeq e^{\Omega_n \delta t} .....e^{\Omega_1 \delta t} x_o$$

$$\Phi(T, 0) = \lim_{\substack{N \to \infty \\ \delta t = \frac{T}{N}}} \prod_{n=1}^{N} e^{\Omega(t_n)\delta t}$$

Αλλιώς με επαναληπτική μέθοδο: $x^i_{n+1} = x_o + \int_0^t \Omega_{ij}(t') x^j_n(t') dt'$

3 Κατασκευή του τανυστή Ροπής Αδράνειας

Κινητική ενέργεια στερεού $K = \frac{1}{2} M v_{cm}^2 + \sum \frac{\delta m}{2} |\vec{\omega} \wedge \vec{x}|^2$.

Επικεντρωνόμαστε στον 2ο όρο, που είναι κινητική ενέργεια λόγω ιδιοπεριστροφής.

$$|\vec{\omega} \wedge \vec{x}|^2 = \omega^2 x^2 sin^2\theta = \omega^2 x^2 - \omega^2 x^2 cos^\theta = \omega^2 x^2 - (\vec{\omega} \cdot \vec{x})^2$$

$$= \omega_a \omega_a x^2 - \omega_a x_a \omega_b x_b = \omega_a (x^2 \delta_{ab} - x_a x_b) \omega_b$$

Οπότε $K = \frac{1}{2} \omega_a \left[\sum \delta m (|\vec{x}|^2 \delta_{ab} - x_a x_b) \right] \omega_b$

Το αντικείμενο εντός των brackets είναι ο τανυστής ροπής αδράνειας.

$\boxed{K = \frac{1}{2} \omega_a I_{ab} \omega_b}$ ή σε μορφή πινάκων $K = \frac{1}{2} \omega^T I \omega$

$$\vec{L} = \sum \delta m \vec{x} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{x}) \Rightarrow L_a = \left(\sum \delta m (|\vec{x}|^2 \delta_{ab} - x_a x_b) \right) \omega_b \Rightarrow \boxed{L_a = I_{ab} \omega_b}$$

Από τις δύο τετραγωνισμένες σχέσεις παίρνουμε ότι $K = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{L}$

Ιδιότητες: Ο τανυστής ροπής αδράνειας είναι συμμετρικός, δηλαδή $I_{ab} = I_{ba}$.Σε τρεις διαστάσεις αυτό σημαίνει ότι έχει 6 ανεξάρτητα στοιχεία.

Αν είναι διαγώνιος $I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix}$ και $I_1 \neq I_2 \neq I_3$, τότε

$$\vec{L} = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix} \neq \lambda \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}$$

Δηλαδή η στροφορμή δεν είναι απαραίτητα στη διεύθυνση της γωνιακής ταχύτητας. (!)

3.1 Ροπή Αδράνειας Σφαίρας

Έστω ομογενής σφαίρα ακτίνας a, $m = \frac{4\pi}{3} \rho a^3$.Παίρνοντας σαν αρχή τον αξόνων το κέντρο μάζας της:

$$I = \sum \delta m \begin{pmatrix} y^2 + z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

Λόγω συμμετρίας ως προς τα επίπεδα xy, xz, yz κάθε δm σε κάποια θέση θα έχει κατοπτρικό σώμα στην απέναντι πλευρά ενός από αυτά τα επίπεδα, οπότε κατά την άθροιση (ή την ολοκλήρωση) οι μη διαγώνιοι όροι θα εξαφανιστούν.Επιπλέον θα ισχύει ότι $I_1 = I_2 = I_3$ λόγω συμμετρίας σε στροφές.Οπότε:

$$3I_1 = 2 \sum \delta m r^2 = 2 \int_0^a r^2 \rho 4\pi r^2 dr = 2 \frac{r^5}{5} \frac{4\pi}{3} 3 \Big|_0^a \Rightarrow 3I_1 = \frac{6}{5} m a^2 \Rightarrow I_1 = \frac{2}{5} m a^2$$

$$I = \frac{2}{5} m a^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

4 Μια σούμα

Περίληψη

1. Οι πολλαπλασιαστές Lagrange μπορούν να χρησιμοποιηθούν για την εύρεση ακρότατου συνάρτησης όταν υπάρχουν επιπλέον περιορισμοί για τις μεταβλητές του προβλήματος.

   Έστω συνάρτηση $f(\vec{x})$ για την οποία ψάχνουμε ακρότατο και περιορισμοί $\vec{g}(\vec{x}) = \vec{0}$.Ορίζουμε $F(\vec{x}, \vec{\lambda}) = f(\vec{x}) + \vec{\lambda} \cdot \vec{g}$ και βρίσκουμε τα ακρότατά της από τις σχέσεις:

$$\begin{cases} \nabla_{\vec{x}} F = 0 \\ \nabla_{\vec{\lambda}} F = 0 \end{cases}$$

2. Ορίσαμε τον τανυστή ροπής αδράνειας $\boxed{I_{ab} = \sum \delta m(|\vec{x}|^2 \delta_{ab} - x_a x_b)}$, ο οποίος είναι πίνακας 3×3 και γράψαμε την κινητική ενέργεια και τη στροφορμή πιο κομψά με χρήση πινάκων.

$$K = \frac{1}{2}\omega^T I \omega, \quad L = I\omega$$