ΜΗΧΑΝΙΚΗ

8/10/24

• Από το προηγούμενο μάθημα (7/10)

1) $V = Ar^a$, $a>0$, $A>0$

2) $V = -\dfrac{A}{r^a}$, $a>0$, $A>0$

$\Bigg\} \rightarrow a = \dfrac{p^2}{q^2} - 2$

3) $V = A \log r$ (έχει απορριφθεί)

Το ενεργό δυναμικό: $V_{en}(r) = \dfrac{L^2}{2mr^2} + V(r)$

Για να έχουμε κυκλική τροχιά, απαιτείται:

$$V'_{en}(r_c) = 0 \Rightarrow \frac{L^2}{m r_c^3} = V'(r_c) \Rightarrow \frac{L}{\sqrt{m}\, r_c^{3/2}} = \sqrt{V'(r_c)}$$

$$\omega_\theta = \dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} = \frac{L}{\sqrt{m}\, r_c^{3/2}} \frac{1}{\sqrt{m r_c}} = \sqrt{\frac{V'(r_c)}{m r_c}}$$

Ισχύει ότι $r = r_c + \xi$, όπου ξ, διαταραχή.

Καταλήξαμε ότι: $m\ddot{\xi} + m\omega_r^2 \xi = 0$

$$m\omega_r^2 = V''(r_c) + 3\frac{V(r_c)}{r_c} \Rightarrow \omega_r = \frac{\sqrt{V'' + 3V'/r}}{\sqrt{m}}$$

Μέση κυκλική συχνότητα: $\bar{\omega}_\theta$

$$\frac{\bar{\omega}_\theta}{\omega_r} = \sqrt{\frac{V'}{r}} \frac{1}{\sqrt{V'' + 3V'/r}} = \sqrt{\frac{V'}{3V' + rV''}}$$

Για να κλείνει η τροχιά, πρέπει:

$$\frac{\bar{\omega}_\theta}{\omega_r} = \sqrt{\frac{V'}{3V' + rV''}} = \frac{p}{q}$$ → ρητός αριθμός.

1η περίπτωση $(V(r) = Ar^a)$

$$\frac{\bar{\omega}_\theta}{\omega_r} = \frac{1}{\sqrt{2+a}} = \frac{p}{q}$$

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\pi\frac{\bar{\omega}_\theta}{\omega_r} = \frac{2\pi}{\sqrt{2+a}}$$

↳ από περίκεντρο σε περίκεντρο.

2η περίπτωση $(V(r) = -A/r^a)$

$$\frac{\bar{\omega}_\theta}{\omega_r} = \frac{1}{\sqrt{2-a}} = \frac{p}{q}$$

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\pi\frac{\bar{\omega}_\theta}{\omega_r} = \frac{2\pi}{\sqrt{2-a}}$$

Επιπλέον: $$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{L/mr^2\,dr}{\sqrt{2/m\,(E - V_{en}(r))}}$$

• Για την 1η περίπτωση, τι γίνεται καθώς $E \to \infty$

Θα αποδείξουμε ότι όλα τα συστήματα αυτής της περίπτωσης, ανεξαρτήτως τιμής a, οδηγούν σε σύστημα αρμονικού ταλαντωτή, με $\Delta\theta_{\pi\to\pi} = \pi$

Μετασχηματισμός Landau: $\xi = \frac{L}{mr}$

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{2/m\,(E - V_{en}(L/m\xi))}} \Rightarrow$$

όπου $$V_{en}\left(\frac{L}{m\xi}\right) = \frac{\cancel{L^2}}{2\cancel{m}}\frac{m^{\cancel{2}}}{\cancel{L^2}}\xi^2 + \frac{AL^a}{m^a\xi^a}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2}{m}E - \xi^2 - \frac{A2L^a}{m^{1+a}\xi}}} \Rightarrow$$

Με αλλαγή μεταβλητής $\xi = \sqrt{\frac{2}{m}E}\, x$, ο όρος $\sqrt{2E/m}$ απαλείφεται από το ολοκλήρωμα.

$$\Rightarrow \Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{1 - x^2 - \frac{AL^a}{(2m)^{a/2}E^{(1+a/2)}}\frac{m^{a/2}}{2^{a/2}}\frac{1}{x^a}}} \Rightarrow$$

ελάχιστη τιμή 0

$$\xrightarrow[E\to\infty]{\lim} \Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

Αλλαγή μεταβλητής : $x = \sin\varphi$ $\Rightarrow$

$$\Rightarrow \Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_0^{\pi/2} \frac{d\sin\varphi}{\sqrt{1-\sin^2\varphi}} = \pi$$

Έχουμε σχεδόν κυκλική κίνηση στο άπειρο

Υπενθυμίζεται ότι για την περίπτωση (1):

$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{2+a}} \Rightarrow \cancel{\pi} = \frac{2\cancel{\pi}}{\sqrt{2+a}} \Rightarrow 2 = \sqrt{2+a} \Rightarrow \boxed{a = 2}$$

Πρέπει να αποδείξω ότι σε πεδία $V = Ar^a$ $\forall E, L$ ισχύει ότι $\Delta\theta_{\pi\to\pi} = \pi$.

Έχουμε
$$\Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_{r_{min}}^{r_{max}} \frac{(L/mr^2)\, dr}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \frac{L^2}{m^2r^2} - \frac{2Ar^2}{m}}} \Rightarrow$$

$$\xrightarrow{\xi = L/mr} \Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \xi^2 - \frac{2AL^2}{m^3}\frac{1}{\xi^2}}} =$$

$$= 2\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2E}{m}\xi^2 - \xi^4 - \frac{2AL^2}{m^3}}} \xrightarrow{\xi^2 \to x}$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_{\pi\to\pi} = 2\int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{-x^2 + \frac{2E}{m}x - \frac{2AL^2}{m^3}}} =$$

$$= \int_{x_{min}}^{x_{max}} \frac{dx}{\sqrt{(x_{max}-x)(x-x_{min})}} \qquad (1)$$

Θέτω $x = \frac{x_{max} + x_{min}}{2} + \frac{(x_{max} - x_{min})y}{2}$

- $(x_{max} - x) = \frac{(x_{max} - x_{min})}{2}(1-y)$
- $(x - x_{min}) = \frac{(x_{max} - x_{min})}{2}(1+y)$

Αντικαθιστώντας στην (1):

$$\Delta\theta_{n\to\pi} = \int_{-1}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \pi$$

↳ όμοιο ολοκλήρωμα με πριν

Συνεπώς, για όλα τα δυναμικά της μορφής $V = A r^a$, $A>0$, $a>0$ έχω περιοδικές κυκλικές κινήσεις.

- Για την $2^η$ περίπτωση, τί γίνεται καθώς $E \to 0$

$$V = -\frac{A}{r^a}, \quad \alpha > 0, \quad A > 0$$

$$\Delta\theta_{n\to n} = \lim_{E\to 0}\left[2\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{2E}{m} - \xi^2 + \frac{A m^a \xi^a}{L^a}}} \right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_{n\to n} = 2\int_{\xi_{min}}^{\xi_{max}} \frac{d\xi}{\sqrt{\frac{A m^a \xi^a}{L^a} - \xi^2}} \Rightarrow$$

Για $\xi = \lambda x$, το υπόριζο γίνεται:

$$\frac{A m^a}{L^a}\lambda^a x^a - \lambda^2 x^2$$

όπου $\lambda = \left(\frac{A m^a}{L^a}\right)^{1/2-\alpha}$

$$\Rightarrow \Delta\theta_{n\to\pi} = 2\int_0^1 \frac{\cancel{x}\, dx}{\cancel{x}\sqrt{x^a - x^2}} = 2\int_0^1 \frac{dx}{x^{a/2}\sqrt{1-x^{2-a}}} \Rightarrow$$

Ορίζω: $x^{2-a} = \sin^2\varphi$

οποτε $(2-a)\, x^{1-a}\, dx = 2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi$.

$$\left.\begin{array}{l} \Rightarrow \Delta\theta_{n\to\pi} = 2\displaystyle\int_0^{\pi/2} \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{(2-a)\, x^{1-a/2}\sqrt{1-\sin^2\varphi}} \\ \cdot\ \sqrt{1-\sin^2\varphi} = \cos\varphi \\ \cdot\ x^{1-a/2} = \sqrt{x^{2-a}} = \sin\varphi \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \Delta\theta_{n\to\pi} = \cancel{2}\cdot\frac{2}{2-a}\,\frac{\pi}{\cancel{2}} = \frac{2\pi}{2-a}$$

Για την περιπτωση (2) πρέπει:

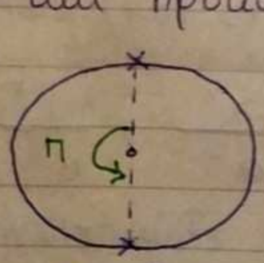
$$\Delta\theta_{n\to\pi} = \frac{2\pi}{\sqrt{2-a}} \Rightarrow \frac{\cancel{2\pi}}{2-a} = \frac{\cancel{2\pi}}{\sqrt{2-a}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2-a} = \frac{1}{\sqrt{2-a}} \Rightarrow \boxed{a=1}$$

Άρα, για $E\to 0$, έχουμε σχεδόν κυκλικές τροχιές μόνο για δυναμικό της μορφής

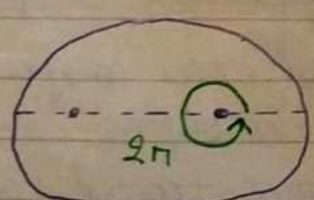
$V = -\frac{A}{r}$, $A>0$, $a=1$

όπου και προκύπτει $\boxed{\Delta\theta_{n\to\pi} = 2\pi}$



$a=2$

$V = Ar^2$



$a=1$

$V = -A/r$

• Ισότροπος Αρμονικός Ταλαντωτής σε 3D

Έχουμε ήδη εξηγήσει ότι διατηρείται η στροφορμή και ότι εξετάζουμε επίπεδη κίνηση

$$V(r) = \frac{m\omega^2 r^2}{2}$$

Σε καρτεσιανές συντεταγμένες:

$$\left.\begin{aligned} \ddot{x} + \omega^2 x = 0 \\ \ddot{y} + \omega^2 y = 0 \\ \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \end{aligned}\right\} \rightarrow \ddot{\vec{r}} + \omega^2 \vec{r} = 0$$

Ισχύει ότι $\vec{r} = \vec{r}_0 \cos(\omega t) + \frac{\vec{v}_0}{\omega} \sin(\omega t)$

Με κατάλληλες πράξεις μπορώ να προσδιορίσω ακριβώς διανύσματα $\vec{c}$ και $\vec{s}$, τα οποία είναι κάθετα μεταξύ τους ($\vec{c} \perp \vec{s}$) και ισχύει ότι:

$$\vec{r} = \vec{c}\cos(\omega t + \varphi) + \vec{s}\sin(\omega t + \varphi) =$$
$$= \vec{r}_0 \cos(\omega t) + \frac{\vec{v}_0}{\omega}\sin(\omega t)$$

Ισχύει ότι:
$$\left.\begin{aligned} \frac{\vec{r}\cdot\vec{c}}{|\vec{c}|^2} = \cos(\omega t) \\ \frac{\vec{r}\cdot\vec{s}}{|\vec{s}|^2} = \sin(\omega t) \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{(\vec{r}\cdot\vec{c})^2}{|\vec{c}|^4} + \frac{(\vec{r}\cdot\vec{s})^2}{|\vec{s}|^4} = \cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$$

Υπενθυμίζεται η εξίσωση της έλλειψης $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

Συνεπώς το $\vec{r}$ ακολουθεί ελλειπτική τροχιά.

• Για βαρυτικό δυναμικό / δυναμικό Coulomb
[Newton]

$$V = -\frac{A}{r}$$

$$m\frac{d^2 r}{dt^2} = -\frac{A}{r^2}\hat{r} \Rightarrow m\frac{d}{dt}\left(V_r\hat{r} + V_\theta\hat{\theta}\right) = -\frac{A}{r^2}\hat{r} \Rightarrow$$

$$\left.\begin{aligned} &\Rightarrow \left[m\frac{d}{d\theta}\left(V_r\hat{r} + V_\theta\hat{\theta}\right)\right]\dot{\theta} = -\frac{A}{r^2}\hat{r} \\ &\dot{\theta} = \frac{L}{mr^2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left[\cancel{m}\frac{d}{d\theta}\left(v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}\right)\right]\frac{L}{\cancel{mr^2}} = -\frac{A}{\cancel{r^2}}\hat{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d\theta}\left(v_r\hat{r} + v_\theta\hat{\theta}\right) = -\frac{A}{L}\hat{r} \Rightarrow \begin{pmatrix}\text{παραγωγίζω} \\ \text{ως προς } \theta\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \dot{v}_r\hat{r} + v_r\hat{\theta} + \dot{v}_\theta\hat{\theta} - v_\theta\hat{r} = -\frac{A}{L}\hat{r} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \dfrac{dv_r}{d\theta} - v_\theta = -\dfrac{A}{L} \\ \dfrac{dv_\theta}{d\theta} + v_r = 0 \end{cases}$$

θυμίζουν εξισώσεις ταλαντωτή.

Θέτω: $v_\theta = \frac{A}{L} + \tilde{v}_\theta$

Τότε: $\begin{cases} \dfrac{dv_r}{d\theta} - \tilde{v}_\theta = 0 \\ \dfrac{d\tilde{v}_\theta}{d\theta} + v_r = 0 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2 v_r}{d\theta^2} + v_r = 0 \\ \dfrac{d^2\tilde{v}_\theta}{d\theta^2} + \tilde{v}_\theta = 0 \end{cases}$

Προκύπτει: $v_r = v_{r_0}\sin(\theta + \varphi_1)$

$v_\theta = \frac{A}{L} + v_{\theta_0}\sin(\theta + \varphi_2)$

Στο περίκεντρο: $v_r = v_{r_0} \sin\theta$

$$v_\theta = \frac{A}{L} + v_{\theta_0} \cos\theta$$

Αντικαθιστούμε:

$$\frac{dv_r}{d\theta} - \tilde{v}_\theta = 0 \Rightarrow v_{r_0} \cos\theta = v_{\theta_0} \cos\theta \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{v_{r_0} = v_{\theta_0}}$$

Οπότε προκύπτει:

$$v_r^2 + \left(v_\theta - \frac{A}{L}\right)^2 = v_0^2$$

Εξετάζω κυκλική κίνηση γύρω από το κέντρο A/L.

$$v_\theta = r\dot{\theta} = \cancel{r} \frac{L}{mr^{\cancel{2}}} = \frac{L}{mr} \Rightarrow r(\theta) = \frac{L/m}{v_\theta} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow r(\theta) = \frac{L/m}{A/L + v_0 \cos\theta} = \frac{L^2/mA}{1 + \left(\frac{v_0 L}{A}\right)\cos\theta}$$

πολική εξίσωση κωνικής τομής
όπου $\frac{v_0 L}{A}$, η εκκεντρότητα.

[Laplace και Hamilton]
Ίδια απόδειξη με Newton για δυναμικά της μορφής $V = -\frac{k}{r}$, $k > 0$

$$r(\theta) = \frac{L^2/mk}{1 + \left(\frac{v_0 L}{k}\right)\cos\theta}$$

Εξετάζεται η διατήρηση της ποσότητας $\vec{A}$ (διάνυσμα Runge - Lenz).

$$\vec{A} = \vec{p} \times \vec{L} - mK\hat{r}$$

όπου $\vec{p} = m \cdot \vec{v}$

$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$

Παραγωγίζω ως προς τον χρόνο:

$$\dot{\vec{p}} = -\frac{K}{r^2}\hat{r}$$

$$\dot{\vec{L}} = 0$$

Τότε: $\dot{\vec{A}} = -\frac{Km}{r^3}\hat{r} \times (\vec{r} \times \vec{v}) - mK\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$

- $\frac{d}{dt}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right) = \frac{r\vec{v} - \dot{r}\vec{r}}{r^2}$
- $-\frac{Km}{r^2}\left(\frac{\vec{v}\cdot\vec{r}\,\vec{r}}{r} - \frac{r^2\vec{v}}{r}\right) = -\frac{Km}{r^2}(\dot{r}\vec{r} - r\vec{v})$

$\vec{v}\cdot\hat{r}$

$$\dot{\vec{A}} = -\frac{Km}{r^2}(\dot{r}\vec{r} - r\vec{v}) - mK\frac{r\vec{v} - \dot{r}\vec{r}}{r^2} = 0$$

Η ποσότητα $\vec{A}$ διατηρείται μόνο για δυναμικά της μορφής που εξετάσαμε.